

ESTUDIO TEÓRICO Y EXPERIMENTAL DE MODELOS PARA CÁLCULO Y CONTROL DE PRESIONES SUB ATMOSFÉRICAS DURANTE FLUJO TRANSITORIO

Por:

Eduard A. García Galeano

Tesis sometida en cumplimiento parcial
de los requisitos para el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

en

INGENIERÍA MECÁNICA

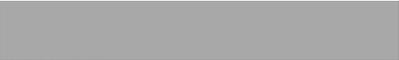
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ
2004

Aprobado por:



Dra. Sandra Coutin, Ph. D.
Miembro, Comité Graduado

5/18/04
Fecha



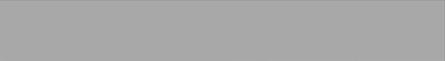
Dr. Nellore Venkataraman, Ph. D.
Miembro. Comité Graduado

May 14, 2004
Fecha



Dr. Walter Silva, Ph. D.
Presidente, Comité Graduado

5/17/04
Fecha



Dr. Andrés Calderón, Ph. D.
Representante de Estudios Graduados

17/5/04
Fecha



Dr. Paul Sundaram, Ph. D.
Director del Departamento

5/18/04
Fecha

ABSTRACT

This research introduced MacCormack numerical scheme for the solution of the governing equations of two-phase transient flow. The numerical solution included an analysis of the behavior of the wave velocity under adiabatic and isothermal behavior of the vapor cavity in the region of vaporous cavitation. The experimental results indicate a better prediction of the pressure pulses under adiabatic conditions.

The effect of air inlet valves as flow control devices during transient flows was studied assuming isentropic and non-isentropic conditions. The results are significantly different from the observed physical response. Additional conditions from those found in the literature are necessary for an accurate simulation of the physical phenomenon.

No experimental verification of the models proposed in this study was found in the literature, although, some of them appear in important publications on this topic. There are not conclusive arguments to establish which of the two models is more accurate; however, greater simplicity in the numerical manipulation was observed for the isentropic model. In general both models predict the magnitude of the maximum pressure of the first pulse accurately.

RESUMEN

Esta investigación introdujo el esquema numérico de MacCormack para la solución de las ecuaciones gobernantes de flujo transitorio en dos fases. Se realizó un análisis de la respuesta de la velocidad de la onda bajo comportamiento adiabático e isotérmico de la burbuja de vapor en la región de cavitación vaporosa. Los resultados experimentales indican una mejor predicción de los pulsos de presión para comportamiento adiabático.

Se estudió el efecto de válvulas de entrada de aire como dispositivos de control de flujo transitorio, utilizando modelos matemáticos para condiciones de flujo isentrópicas y no-isentrópicas. Los resultados obtenidos por la simulación numérica difieren significativamente de la respuesta observada en el fenómeno físico. Condiciones adicionales a las presentadas por los modelos encontrados en la literatura son necesarias para simular con mayor exactitud estas condiciones.

No se encontró en la literatura verificación experimental previa de los modelos propuestos en este estudio, aún cuando, algunos de ellos aparecen en publicaciones importantes en este tema. No hay argumentos conclusivos para establecer cual de los dos modelos es más preciso; sin embargo, mayor simplicidad en la manipulación numérica del modelo isentrópico fue observada. Ambos modelos predicen la magnitud de la presión máxima del primer pulso con precisión.

A mi madre por su apoyo, cariño y comprensión

**A mi padre, a mis hermanos, y a la familia por ser siempre
fuente de motivación**

**A mis sobrinos Linda Maria y Juan Carlos por llenar de
alegría nuestros corazones**

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a DIOS por todos los favores recibidos, por iluminarme en el camino del aprendizaje y enseñarme a no dar punto final ni en el buen éxito primero, ni en el primer contrat tiempo.

Quiero agradecer a la Universidad De Puerto Rico Recinto Universitario De Mayagüez por brindarme la oportunidad de adelantar estudios graduados. Al departamento de Ingeniería Mecánica y a su planta de profesores por su invaluable labor formadora.

Quiero expresar mi más sincero sentimiento de gratitud con el Doctor Walter Silva, por darme la oportunidad de aprender a su lado, por sus consejos, sus palabras de aliento en los momentos adversos, por ser modelo de vida personal y profesional, y por su apoyo económico durante la maestría.

Gracias a mis amigos Luis Rodríguez y Eduardo Cintrón, técnicos del laboratorio de mecánica de fluidos, sin su apoyo no habría sido posible la realización de la etapa experimental de este trabajo.

Al departamento de Ingeniería General y al Laboratorio de Mecánica de Fluidos por el apoyo económico y logístico necesario para realizar esta investigación.

Gracias a mi familia por su apoyo incondicional y sus consejos.

Gracias a mis compañeros de maestría y oficina por compartir conmigo todo este tiempo.

TABLA DE CONTENIDO

<u>1</u>	<u>INTRODUCCIÓN.</u>	<u>1</u>
<u>2</u>	<u>REVISIÓN DE LITERATURA.</u>	<u>4</u>
2.1	MÉTODOS DE CONTROL PARA FLUJOS TRANSITORIOS.	5
2.1.1	TANQUE DE OSCILACIÓN.	6
2.1.2	CÁMARA DE AIRE.	6
2.1.3	VÁLVULAS.	7
2.2	ESTUDIOS PREVIOS.	9
<u>3</u>	<u>FLUJO TRANSITORIO EN CONDUCTOS CERRADOS.</u>	<u>14</u>
3.1	TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS.	14
3.2	ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.	17
3.2.1	ECUACIÓN DE MOMENTUM.	24
3.2.2	FORMA SIMPLIFICADA DE LAS ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y MOMENTUM.	28
3.2.3	VELOCIDAD DE LA ONDA EN FLUJO TRANSITORIO	30
3.2.4	VELOCIDAD DE LA ONDA EN LÍQUIDOS PUROS.	31
3.2.5	VELOCIDAD DE LA ONDA EN MEZCLAS GAS – LÍQUIDO.	32
3.3	ESQUEMAS NUMÉRICOS.	34
3.3.1	MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.	35
3.3.2	DIFERENCIAS FINITAS.	39
3.3.3	ESQUEMA DE MACCORMACK.	40
3.3.4	DISIPACIÓN DE ENERGÍA EN FLUJO TRANSITORIO.	42
<u>4</u>	<u>FLUJO COMPRESIBLE.</u>	<u>45</u>
4.1	NÚMERO DE MACH Y VELOCIDAD DEL SONIDO.	45
4.2	FLUJO ADIABÁTICO PARA UN GAS IDEAL.	48
4.2.1	RELACIONES TERMODINÁMICAS PARA UN GAS IDEAL.	49
4.2.2	ECUACIÓN DE ENERGÍA.	50
4.2.3	RAZÓN TEMPERATURA DE ESTANCAMIENTO	52
4.2.4	FLUJO DE MASA POR UNIDAD DE ÁREA	52
4.3	FLUJO ISENTRÓPICO PARA UN GAS IDEAL.	53

4.3.1	RAZÓN DE TEMPERATURA, PRESIÓN Y DENSIDAD COMO FUNCIÓN DEL NÚMERO DE MACH.	55
4.3.2	RELACIÓN PARA EL FLUJO DE MASA EN TÉRMINOS DEL NÚMERO DE MACH.	57
4.4	FLUJO A TRAVÉS DE SECCIONES CONVERGENTES.	59
5	<u>MODELOS NUMÉRICOS</u>	<u>62</u>
5.1	FLUJO DE MASA ISENTRÓPICO A TRAVÉS DE UNA VÁLVULA	62
5.2	FLUJO DE MASA A TRAVÉS DE UNA VÁLVULA DE AIRE CONSIDERANDO IRREVERSIBILIDADES DEL SISTEMA.	63
5.2.1	MODELO MATEMÁTICO.	63
5.2.1.1	Ecuaciones Termodinámicas.	64
5.2.2	RESULTADOS ANÁLISIS DE IRREVERSIBILIDADES.	83
5.3	MODELO CAVITACIÓN VAPOROSA DISTRIBUIDA.	97
5.3.1	VELOCIDAD DE LA ONDA EN MEZCLA GAS - LÍQUIDO.	99
6	<u>DESARROLLO NUMÉRICO</u>	<u>104</u>
6.1	INTRODUCCIÓN	104
6.2	DESARROLLO ESQUEMA NUMÉRICO MACCORMACK PARA NODOS INTERNOS	105
6.3	CONDICIONES DE FRONTERA MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.	108
6.3.1	TANQUE DE ALMACENAMIENTO DE NIVEL CONSTANTE – AGUAS ABAJO.	109
6.3.2	VÁLVULA A LA ENTRADA DE LA LÍNEA – FRONTERA AGUAS ARRIBA.	112
6.3.3	FORMACIÓN DE UNA CAVIDAD DE VAPOR EN LA FRONTERA AGUAS ARRIBA.	115
6.3.4	VÁLVULAS DE ENTRADA DE AIRE COMO CONDICIÓN DE FRONTERA INTERNA.	118
6.3.5	DISIPACIÓN DE ENERGÍA EN FLUJO TRANSITORIO.	122
7	<u>PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.</u>	<u>126</u>
7.1	INTRODUCCIÓN.	126
7.2	DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO EXPERIMENTAL.	126
7.2.1	TRANSDUCTOR DE PRESIÓN.	129
7.2.2	MEDIDOR DE FLUJO – FLOWMETER.	129
7.2.3	PROGRAMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS.	130

7.3	PARÁMETROS DE ENTRADA MODELOS NUMÉRICOS.	131
7.3.1	FACTOR DE FRICCIÓN EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE REYNOLDS.	131
7.3.2	CÁLCULO DE LA VELOCIDAD DE LA ONDA DE PRESIÓN EN LÍQUIDO PURO.	135
7.3.3	TIEMPO DE CIERRE DE LA VÁLVULA PARA LA CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ARRIBA.	136
7.4	PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL PARA GENERACIÓN DE GOLPE DE ARIETE	143
8	<u>RESULTADOS EXPERIMENTALES.</u>	<u>145</u>
8.1	FORMACIÓN ZONA DE CAVITACIÓN.	145
8.2	EFECTO DE DISPOSITIVOS DE CONTROL.	154
9	<u>COMPARACIÓN DE RESULTADOS EXPERIMENTALES Y MODELOS NUMÉRICOS</u>	<u>160</u>
9.1	SIMULACIÓN DE CAVITACIÓN BAJO FLUJO TRANSITORIO	160
9.1.1	VELOCIDAD DE LA ONDA CONSTANTE.	161
9.1.2	VELOCIDAD DE LA ONDA VARIABLE.	162
9.2	SIMULACIÓN DE DISPOSITIVOS DE CONTROL DE FLUJO TRANSITORIO.	170
10	<u>CONCLUSIONES</u>	<u>178</u>
11	<u>BIBLIOGRAFÍA.</u>	<u>180</u>
	<u>APÉNDICES</u>	<u>183</u>

LISTA DE TABLAS

<i>Tabla 1. Coeficientes términos exponenciales, método de Trikha.</i>	43
<i>Tabla 2. Coeficientes términos exponenciales, método de Schohl.</i>	44
<i>Tabla 3. Número de Mach (M_2) en función de la presión a la salida del sistema (P_2)</i>	88
<i>Tabla 4. Presiones de salida críticas en función del número de Mach a la entrada.</i>	95
<i>Tabla 5. Ecuaciones velocidad de la onda de presión en líquido puro y mezcla gas-líquido.</i>	100
<i>Tabla 6. Determinación del factor de fricción.</i>	133
<i>Tabla 7. Comparación Factor de Fricción Experimental Vs Teórico.</i>	135
<i>Tabla 8. Parámetros usados en el cálculo de la velocidad de la onda de presión.</i>	136
<i>Tabla 9. Fracción de apertura de la válvula de acuerdo a posición del vástago.</i>	138
<i>Tabla 10. Coeficiente de descarga para diferentes grados de apertura de la válvula.</i>	140
<i>Tabla 11. Condiciones iniciales de experimentación.</i>	148
<i>Tabla 12. Datos curva de calibración Transductor # 1 – 200 psia.</i>	196
<i>Tabla 13. Datos curva de calibración Transductor # 2 - 200 psia.</i>	197
<i>Tabla 14. Datos curva de calibración Transductor # 3 - 50 psia.</i>	198
<i>Tabla 15. Datos curva de calibración medidor flowmeter.</i>	199

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1. Tipos de tanques de oscilación.</i>	6
<i>Figura 2. Cámara de Aire.</i>	7
<i>Figura 3. Esquema de una válvula de entrada de aire (air / vacuum) .</i>	8
<i>Figura 4. Sistema y volumen de control</i>	15
<i>Figura 5. Notación – Volumen de control conservación de la masa.</i>	18
<i>Figura 6. Volumen de control para la derivación de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.</i>	25
<i>Figura 7. Líneas Características en el plano $X-t$.</i>	37
<i>Figura 8. Malla esquema de MacCormack.</i>	41
<i>Figura 9. Propagación de un pulso infinitesimal de presión.</i>	47
<i>Figura 10. Volumen de control en una sección convergente.</i>	51
<i>Figura 11. Diagrama T-s para un proceso adiabático. Expansión y Compresión adiabática.</i>	54
<i>Figura 12. Comportamiento de un gas en conductos convergentes divergentes.</i>	61
<i>Figura 13. Volumen de Control Para Flujo a Través de un Canal de Sección Variable.</i>	64
<i>Figura 14. Esquema de una válvula de entrada de aire.</i>	84
<i>Figura 15. Presión en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.</i>	86
<i>Figura 16. Regresión potencial para la presión en función del número de Mach a la salida.</i>	87
<i>Figura 17. Coeficiente de entropía en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.</i>	89
<i>Figura 18. Presión de estancamiento en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.</i>	90
<i>Figura 19. Presión de estancamiento para un proceso irreversible.</i>	91
<i>Figura 20. Cambio de Entropía en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.</i>	92
<i>Figura 21. Flujo de masa por unidad de área, en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.</i>	93

<i>Figura 22. Flujo de masa por unidad de área, en función del número de Mach.</i>	94
<i>Figura 23. Flujo de masa por unidad de área, en función del número de Mach a la entrada y la presión a la salida del sistema.</i>	95
<i>Figura 24. Flujo de masa por unidad de área – bajo condiciones no isentrópicas.</i>	96
<i>Figura 25. Formación cavidad de vapor en la válvula.</i>	98
<i>Figura 26. Formación cavidad de vapor en la válvula y región de cavitación vaporosa.</i>	99
<i>Figura 27. Método de las características – condición de frontera aguas abajo.</i>	109
<i>Figura 28. Tanque de almacenamiento de nivel constante - aguas abajo.</i>	110
<i>Figura 29. Método de las características – condición de frontera aguas arriba.</i>	113
<i>Figura 30. Válvula al inicio de la línea de conducción – aguas arriba.</i>	115
<i>Figura 31. Formación cavidad – Tratamiento condición frontera interna.</i>	116
<i>Figura 32. Notación para válvula de entrada de aire.</i>	118
<i>Figura 33 Esquema montaje experimental.</i>	127
<i>Figura 34. Válvula tipo globo, condición de frontera Upstream</i>	127
<i>Figura 35. Tanque de almacenamiento – carga constante, condición de frontera Downstream</i>	128
<i>Figura 36. Válvula de admisión de aire – Air inlet.</i>	128
<i>Figura 37. Transductores de presión.</i>	129
<i>Figura 38. Diagrama de Bloques LABVIEW Programa Adquisición de Datos.</i>	130
<i>Figura 39. Ventana Adquisición y Visualización Tiempo Real Datos De Presión Expresada como Voltaje.</i>	131
<i>Figura 40. Curva experimental Factor de Fricción Vs número de Reynolds.</i>	134
<i>Figura 41. Esquema procesamiento de imagen para obtener el área de flujo.</i>	137
<i>Figura 42. Flujo volumétrico con respecto a la fracción de apertura de la válvula</i>	138
<i>Figura 43. Esquema Procedimiento Adquisición Tiempo de Cierre de la Válvula.</i>	141
<i>Figura 44. Posición de los Interruptores Sobre el Vástago al Inicio y Final del Cierre.</i>	142
<i>Figura 45. Relación coeficiente de descarga contra tiempo de cierre.</i>	143
<i>Figura 46. Secuencia de eventos cierre instantáneo de válvula aguas arriba.</i>	146

<i>Figura 47. Diferencia en el tiempo de accionamiento de interruptores los en la válvula de cierre.</i>	149
<i>Figura 48. Variación del pulso de presión en función de la velocidad inicial y del tiempo de cierre.</i>	149
<i>Figura 49. Comportamiento de la presión en el tiempo para la frontera aguas arriba.</i>	150
<i>Figura 50. Análisis en el dominio de la frecuencia, datos de presión en la válvula aguas arriba y a la mitad de la tubería.</i>	152
<i>Figura 51. Comportamiento de la presión en el tiempo para la mitad de la tubería.</i>	153
<i>Figura 52. Respuesta en el tiempo transductor aguas abajo de la válvula de admisión de aire.</i>	155
<i>Figura 53. Respuesta en el tiempo transductor aguas arriba de la válvula de admisión de aire.</i>	155
<i>Figura 54. Respuesta en el tiempo aguas arriba y aguas abajo de la válvula de admisión de aire.</i>	156
<i>Figura 55. Respuesta en el tiempo frontera aguas arriba del sistema.</i>	157
<i>Figura 56. Respuesta en la frontera aguas arriba, antes y después de la instalación de la válvula</i>	157
<i>Figura 57. Respuesta en la mitad de la tubería, frontera aguas arriba, antes y después de la instalación de la válvula</i>	159
<i>Figura 58. Comportamiento de la presión asumiendo velocidad de la onda constante contra resultados experimentales.</i>	161
<i>Figura 59. Comportamiento de la presión considerando formación de cavidad en la válvula contra resultados experimentales.</i>	162
<i>Figura 60. Comportamiento de la presión considerando cavitación vaporosa distribuida contra resultados experimentales en $X=0$ (válvula de cierre).</i>	163
<i>Figura 61. Cavidad de vapor en la válvula.</i>	164
<i>Figura 62. Cavidad de vapor comportamiento adiabático contra isotérmico.</i>	165
<i>Figura 63. Comportamiento de la presión contra resultados experimentales en $X=L/2$</i>	166
<i>Figura 64. Comportamiento fracción de vacío – presión, en el tiempo.</i>	167
<i>Figura 65. Velocidad de la onda de presión en el tiempo.</i>	168

<i>Figura 66. Distribución esfuerzos cortantes en las paredes de la tubería.</i>	169
<i>Figura 67. Presión en la válvula de admisión de aire, modelo isentrópico contra resultados experimentales.</i>	171
<i>Figura 68. Presión en la frontera aguas arriba del sistema, modelo isentrópico contra resultados experimentales.</i>	172
<i>Figura 69. Presión en la frontera aguas arriba, modelo no - isentrópico contra resultados experimentales.</i>	173
<i>Figura 70. Presión en la válvula de admisión de aire, modelo no - isentrópico contra resultados experimentales.</i>	173
<i>Figura 71. Presión en la frontera aguas arriba, modelo no - isentrópico contra modelo isentrópico</i>	174
<i>Figura 72. Presión en la válvula de admisión de aire, modelo no - isentrópico contra modelo isentrópico</i>	175
<i>Figura 73. Cuerpo o estructura de la válvula.</i>	176
<i>Figura 74. Sección de entrada a la válvula.</i>	176
<i>Figura 75. Orificio de salida válvula de admisión de aire.</i>	177
<i>Figura 76. Curva de calibración Transductor # 1 – 200 psia.</i>	196
<i>Figura 77. Curva de calibración Transductor # 2 – 200 psia.</i>	197
<i>Figura 78. Curva de calibración Transductor # 3 – 50 psia.</i>	198
<i>Figura 79. Curva de calibración Flowmeter.</i>	199

LISTA DE SÍMBOLOS

M	Número de Mach.
V	Velocidad de flujo.
a	Velocidad del sonido en el fluido.
P	Presión.
ρ_l	Densidad del líquido.
ρ_g	Densidad del gas.
ρ_m	Densidad de la mezcla.
\bullet	
m	Flujo de masa.
k	Razón de calores específicos.
T	Temperatura absoluta.
R	Constante del gas.
v	Volumen específico.
CP	Calor específico a presión constante.
Cv	Calor específico volumen constante.
Cs	Coefficiente de entropía interna.
h	Entalpía.
S	Entropía.
Δu	Cambio de energía interna.
\bullet	
\dot{Q}	Flujo de calor.
\bullet	
\dot{W}	Flujo de trabajo.
(X^*)	Condiciones de flujo para estado crítico sección garganta.
B	Propiedad extensiva.
β	Propiedad intensiva.
∇_g	Volumen del gas o vapor.
∇_m	Volumen de la mezcla.

V_s	Velocidad relativa promedio medida en la superficie de control.
SC	Superficie de control.
$W1$ y $W2$	Velocidad con respecto a ejes coordenados de las secciones 1 y 2, expansión y contracción del volumen de control.
D	Diámetro de la sección.
ε	Deformación.
σ_2	Esfuerzo circunferencial.
σ_1	Esfuerzo axial.
μ	Razón de Poisson.
E	Módulo de elasticidad.
e	Espesor de las paredes de la tubería.
F_P	Fuerzas de Presión.
F_S	Fuerza cortante (viscosa).
τ_0	Esfuerzos cortantes entre el fluido y las paredes de la tubería.
f	Factor de fricción de Darcy – Weisbach.
H	Carga piezométrica.
Q	Descarga, o flujo volumétrico.
φ	Parámetro adimensional que depende de las propiedades elásticas del conducto.
R_o	Radio externo del conducto.
R_i	Radio interno del conducto.
K_g	Modulo de elasticidad volumétrica del gas.
K_l	Modulo de elasticidad volumétrica del líquido.
K_m	Modulo de elasticidad volumétrica de la mezcla.
α	Fracción de vacío.
n	Coefficiente politrópico.

LISTA DE APÉNDICES

<i>APÉNDICE A. Flujo de masa en función de las condiciones de la sección.</i>	<i>184</i>
<i>APÉNDICE B. Derivación de la ecuación de velocidad de la onda de presión en mezclas gas – líquido.</i>	<i>188</i>
<i>APÉNDICE C. Curvas de calibración transductores y flowmeter.</i>	<i>196</i>

1 INTRODUCCIÓN.

Los problemas de flujo transitorio dentro de sistemas de tuberías y conductos se producen por cambios rápidos en las condiciones de flujo en las fronteras del sistema. Las ondas de presión producidas durante éstos eventos, causan presiones altas y bajas que pueden ser dañinas para la tubería y los accesorios del sistema hidráulico. Dependiendo de la severidad del flujo transitorio, presiones muy bajas dentro de la tubería pueden lograr que ocurra cavitación e incluso, separación de la columna líquida en los puntos altos del perfil de la tubería.

Bajo condiciones de flujo transitorio, debido a las fluctuaciones de presión, el régimen de flujo puede cambiar, oscilando en el tiempo con valores cerca de la presión de vapor del agua. La cavitación se produce cuando la presión cae por debajo de la presión de vapor del líquido. En general, el término cavitación se refiere a la formación y actividad de burbujas o cavidades de gas o vapor o una mezcla de ambos en un líquido. Los daños por cavitación y separación de la columna líquida durante un flujo transitorio en un sistema hidráulico pueden ser muy severos, afectando turbomáquinas y rompiendo las tuberías.

Un buen entendimiento del análisis de la propagación de las ondas de presión puede permitir eliminar daños potenciales mediante un buen diseño, en el cual, muchas veces, es necesario incorporar dispositivos para el control de subpresiones y sobrepresiones, los cuales buscan reducir la razón de cambio de las condiciones de flujo en las fronteras del sistema.

Las válvulas de aire constituyen un mecanismo eficiente para controlar la magnitud de las sobrepresiones o subpresiones durante un flujo transitorio. De acuerdo al fenómeno que controlen, las válvulas de aire pueden ser clasificadas en tres tipos. Reguladoras de presión, cuya principal función es limitar la presión del sistema a un valor inferior a la presión crítica de funcionamiento, estas válvulas adicionalmente son diseñadas para liberar pequeñas cantidades de aire acumulado dentro la tubería; válvulas

de admisión de aire para el control de subpresiones, y válvulas tipo combinadas diseñadas para desempeñar la misma función de las de admisión y reguladoras de presión.

Esta investigación centra su interés en el estudio de válvulas de admisión de aire para el control de subpresiones bajo flujo transitorio, la forma como operan estas válvulas es la siguiente. Cuando la presión en la tubería alcanza un valor por debajo de la presión atmosférica, la válvula se abre y permite la entrada de aire desde la atmósfera hacia la tubería, el aire admitido se aloja cerca de la válvula, una vez la presión en la línea se ha incrementado a un valor cercano a la presión atmosférica, la válvula se abre nuevamente para permitir la salida del aire admitido en la etapa anterior, hacia la atmósfera. La principal característica de la válvula es su geometría, la cual influye directamente sobre el flujo de masa de aire a través de ella. Tradicionalmente el flujo de aire en las válvulas es calculado bajo la consideración de flujo isentrópico, Esta idealización no puede ser alcanzada en flujo real de gases, sin embargo, existen algunas situaciones en las cuales el flujo se acerca a este límite, por ejemplo, flujo en tuberías cortas, toberas y difusores.

La efectividad de las válvulas de aire instaladas para propósito de control de subpresiones, depende no solo de la configuración física del sistema hidráulico, sino también, de las características de la válvula de aire y por lo tanto de la cantidad de aire que ingresa al sistema. El conocimiento limitado de dichos dispositivos de control, al igual que la poca información disponible en la literatura sobre verificación experimental de éstas condiciones de frontera; hacen palpable la necesidad de generar información fundamental concerniente al flujo de aire a través de las válvulas durante las condiciones de flujo transitorio.

El propósito de esta investigación es desarrollar un modelo matemático de flujo no – isentrópico que permita simular la entrada de aire a través de las válvulas de admisión de aire como dispositivos de control de subpresiones en sistemas de conducción de agua, durante la ocurrencia de un flujo transitorio. Adicionalmente el modelo propuesto se comparará con el modelo matemático existente para el cálculo del flujo de masa de aire a través de la válvula (isentrópico vs. no – isentrópico), y su efectividad en la predicción de las presiones generadas durante un flujo transitorio será medida. Para

verificar la validez de ambos modelos, se obtendrán datos experimentales de la respuesta de un sistema hidráulico en estado transitorio, a la entrada de aire al sistema mediante una válvula comercial de características conocidas.

2 REVISIÓN DE LITERATURA.

Chaudhry (1987), Wylie et.al. (1993) y Swaffield et.al. (1993), definen flujo transitorio como un estado intermedio de flujo, cuando las condiciones cambian de un estado permanente a otro.

De forma más particular, el flujo transitorio puede ser visto como el medio por el cual, información relacionada al cambio en las condiciones de flujo en cualquier punto en el sistema, es comunicada a todos los otros puntos dentro del sistema. La velocidad a la cual se transfiere la información dependerá de las propiedades, tanto del fluido como de la estructura que lo contiene. La magnitud de los cambios de presión asociados, cualquiera sea positiva o negativa, dependen de la razón de cambio de las condiciones de flujo en la frontera donde se origina el cambio, de las propiedades del fluido y de la tubería, del efecto atenuante ejercido por cualquier dispositivo de alivio incluido en el sistema y la subsecuente transmisión y reflexión de las ondas dentro del sistema.

Cambios en las condiciones de flujo en sistemas de tubería ocurren generalmente cuando hay cambios en la operación de elementos o dispositivos del sistema. A menudo estos dispositivos se encuentran al final o al inicio del mismo y son tratados como “condiciones de frontera”. Algunas causas de flujo transitorio son: cierre rápido de válvulas, inicio o parada de bombas, cambios en la demanda de potencia de turbinas, cambios en los niveles de embalse o tanques de presión. Dichos cambios generan, a lo largo de la tubería, sobrepresiones y subpresiones, esta última, puede alcanzar valores por debajo de la presión de vapor del líquido y ocasionar cavitación en el sistema. Para eliminar o reducir las oscilaciones de la presión se usan dispositivos tales como tanques de oscilación, cámaras de aire, o válvulas.

En el caso de las válvulas de aire, la entrada de aire al sistema es controlada, y la admisión es gobernada por las ecuaciones de flujo compresible como se explica en la sección 3.4.

Según **Chaudhry (1987)**, casi todos los líquidos industriales, y especialmente el agua, contienen una fase gaseosa disuelta (gas o vapor o una mezcla de ambos). El término cavitación se refiere a la formación y actividad de burbujas o cavidades en un líquido; la palabra formación se refiere, en términos generales, a ambos casos, creación de una nueva cavidad o expansión de una ya existente. Estas burbujas se pueden encontrar suspendidas en el líquido o atrapadas en grietas diminutas en las fronteras sólidas o en partículas sólidas suspendidas dentro del líquido.

Young (1989) estableció que la formación y expansión de las burbujas puede ser efectuada por una disminución de la presión en estado transitorio, por debajo de la presión de vapor del líquido. Si la burbuja contiene gas, la expansión puede ser por difusión del gas disuelto en el líquido hacia el interior de la burbuja, por reducción de la presión o por elevación de la temperatura. Sin embargo, si la burbuja contiene principalmente vapor, una reducción en la presión del ambiente (a temperatura constante) es suficiente para causar una vaporización explosiva dentro de las cavidades, fenómeno llamado cavitación; mientras una elevación en la temperatura causa principalmente un crecimiento continuo en las burbujas de vapor produciendo el efecto conocido como ebullición. **Streeter et.al. (1997)** añade que el crecimiento de la burbuja depende adicionalmente de las fuerzas que actúan sobre ella, las cuales son, la tensión superficial, la presión del líquido en los alrededores, la presión de vapor del líquido, la presión del gas dentro de la burbuja y el comportamiento con respecto al tiempo de la presión a la cual la burbuja ha sido expuesta. El tamaño de la burbuja se incrementa hasta que la diferencia entre su presión interna y externa es suficiente para contrarrestar la tensión superficial, una vez se alcanza el tamaño crítico, la burbuja se convierte en inestable y se expande explosivamente.

2.1 MÉTODOS DE CONTROL PARA FLUJOS TRANSITORIOS.

Para mantener el flujo transitorio bajo condiciones límites permisibles, se usan dispositivos de control tales como tanques de oscilación, cámaras de aire, o válvulas. La principal función de estos dispositivos es reducir la razón de cambio o razón de

aceleración y desaceleración del líquido dentro de la tubería. A continuación se hace una breve descripción de algunos de estos dispositivos.

2.1.1 Tanque De Oscilación.

Un tanque de oscilación, en términos generales, consiste de una cámara de almacenamiento de agua acoplada a la línea de conducción, la cual permite almacenar el exceso de líquido y lo proporciona cuando la línea de gradiente hidráulico en la tubería cae debajo del nivel líquido en el tanque. En la Figura 1. se muestran diferentes tipos de tanque de oscilación, (**Roberson, 1997**).

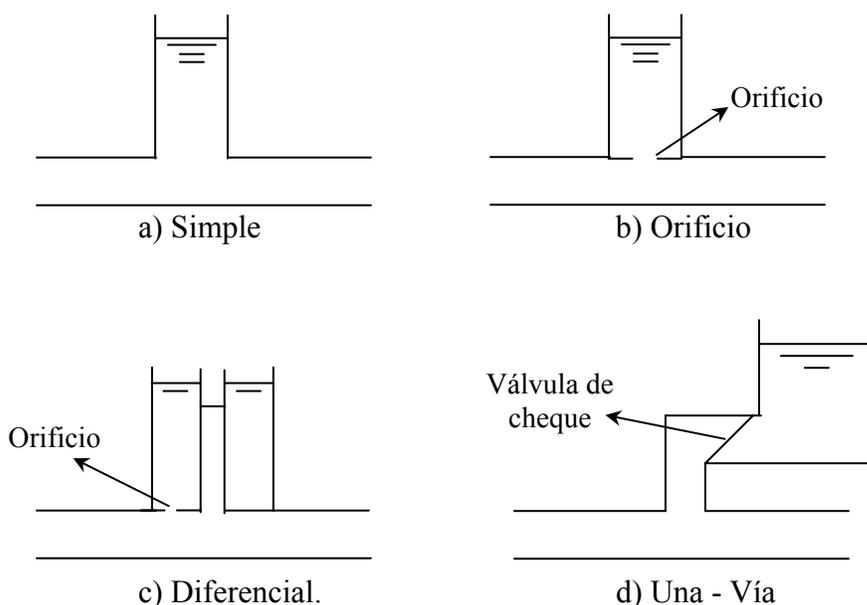


Figura 1. Tipos de tanques de oscilación.

2.1.2 Cámara De Aire.

Una cámara de aire, tiene aire comprimido en la parte superior, según se muestra en la Figura 2. el cual actúa como amortiguador. Cuando la presión dentro de la tubería disminuye, hay un flujo de líquido desde la cámara de aire hacia la tubería, permitiendo que el aire se expanda; cuando la presión se eleva, el flujo de líquido es de la tubería hacia la cámara y el aire es comprimido. De esta forma, el aire dentro de la cámara

reduce la razón de desaceleración o aceleración del líquido dentro de la tubería, (Roberson, 1997).

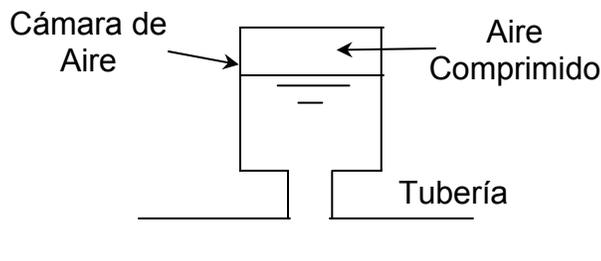


Figura 2. Cámara de Aire.

2.1.3 Válvulas.

De acuerdo con la **American Water Works Association (AWWA)**, las válvulas son dispositivos usados para prevenir o mitigar cambios súbitos en el flujo. En el caso de las válvulas de admisión de aire, la rapidez o velocidad de apertura de la válvula se fija, de acuerdo a la mínima presión admisible deseada, dentro de la tubería, o se fija inicialmente a un valor específico. Existen diferentes tipos de válvulas para el control de flujo transitorio, entre ellas la válvula de entrada o admisión de aire, la cual es descrita a continuación.

Las válvulas de aire, son dispositivos hidromecánicos diseñados para evacuar o admitir automáticamente grandes cantidades de aire durante el llenado, drenaje u operación del sistema de conducción de agua. Cuando la tubería se está llenando o cuando se almacenan bolsas de aire a lo largo de la tubería, la válvula permite evacuar el aire sobrante y evita así la formación de bolsas o paquetes de aire que pueden generar reducción en el flujo de agua por disminución de la sección transversal efectiva y en algunos casos ocupar la sección entera generando una parada del flujo. Cuando la presión del líquido dentro de la tubería cae por debajo de la presión atmosférica, la válvula se abre y admite aire, nivelando así las presiones y evitando que se alcance un valor cercano a la presión de vapor del líquido, (AWWA).

La Figura 3 muestra un esquema de una válvula de entrada de aire, y sus respectivos componentes.

El diseño del orificio para el flujo de entrada, se basa típicamente en la asunción de flujo isentrópico a través de una boquilla convergente, cuyo intervalo de presiones de diseño varía desde la presión atmosférica a la entrada y presiones por debajo de 5 psi (34 Kpa) o presiones negativas permisibles por debajo de la presión atmosférica con un factor de seguridad adecuado a la salida.

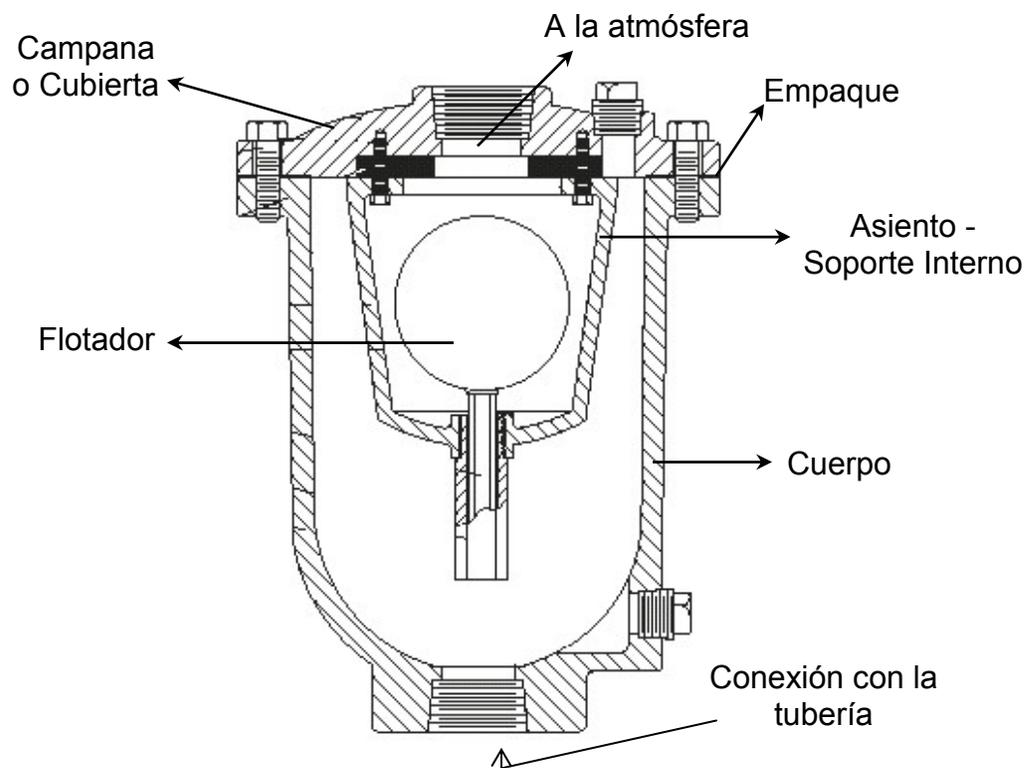


Figura 3. Esquema de una válvula de entrada de aire (air / vacuum)¹.

¹ Fuente: VALMATIC bulletin No. 100.

2.2 ESTUDIOS PREVIOS.

Shapiro 1953, Anderson 1990, Schreier 1982, Vincenti 1965, y Zucrow 1976, estudiaron el flujo compresible para gases ideales en un proceso isentrópico, a través de secciones convergentes. Relaciones termodinámicas entre los parámetros de flujo fueron derivadas, adicionalmente, una expresión que describe el flujo masa por unidad de área a través de la sección, en función de la presión fue obtenida.

Chaudhry 1987 y Wylie et.al. 1993 proponen, para líquidos puros, una expresión que describe las condiciones de flujo en estado transitorio para un conducto cerrado. Las ecuaciones de continuidad y momentum fueron derivadas usando el teorema de transporte de Reynolds.

Tullis 1976, Padmanabhan 1978, Chaudhry 1987, Wylie et.al. 1993, reconocen el contenido de una pequeña fracción de gases no disueltos en los líquidos o la posibilidad formación de burbujas de vapor dentro del líquido debido a presiones subatmosféricas durante flujo transitorio, lo cual genera dependencia de la velocidad de propagación de la onda de presión con las variables o parámetros de flujo. De acuerdo a la cantidad de gases no disueltos, movimiento y distribución de componentes de la mezcla, magnitud del gradiente de presión, comportamiento termodinámico del gas en el líquido, y restricciones externas de la tubería, proponen expresiones que describen la variación de la velocidad de la onda en mezclas gas – líquido o regiones de cavitación vaporosa.

Chaudhry 1987 propone la implementación de esquemas numéricos de segundo orden para el tratamiento de las ecuaciones gobernantes en mezclas gas líquido, en los cuales presiones subatmosféricas no sean alcanzadas.

Kranenburg 1974, y Simpson 1986 presentan un modelo matemático para flujo en estado transitorio, en el cual tres regiones de flujo son consideradas, separación de columna, golpe de ariete y región de cavitación distribuida. Fueron obtenidas ecuaciones, validas simultáneamente, para las regiones de separación de columna y cavitación distribuida. Kranenburg plantea una solución de las ecuaciones gobernantes

mediante esquemas de diferencias finitas, Simpson resuelve las ecuaciones gobernantes mediante el método de las características por interpolación en la rejilla característica, para lo cual determina el tiempo y dirección de formación de la onda choque generada en la interfase de la región bajo golpe de ariete y cavitación. Los resultados obtenidos por ambos modelos muestran buena predicción de los resultados experimentales.

Chaudrhy 1987, Wylie et.al. 1993, y Swaffield et.al. 1993 proponen un método de diseño para válvulas de entrada de aire como dispositivos para proteger las tuberías de condiciones de vacío o bajas presiones. Cuando la presión en la línea cae por debajo de la presión atmosférica, la válvula se abre y permite la entrada de aire al sistema, una vez la presión en la línea se ha incrementado a un valor cercano a la presión atmosférica, la válvula se abre nuevamente para permitir la salida del aire a la atmósfera.

El método considera las siguientes asunciones.

- El aire entra y sale de la tubería, a través de la válvula, bajo condiciones de flujo isentrópico.
- La masa de aire dentro de la tubería sigue una ley isotérmica en la que la masa es generalmente pequeña y las grandes áreas del tubo y de la superficie del líquido proporcionan la capacidad de calor para mantener la temperatura del aire aproximadamente igual a la del líquido.
- El aire admitido a la tubería, permanece cerca de la válvula, donde puede ser expulsado fácilmente.
- La elevación de la superficie líquida permanece constante, y el volumen de aire es pequeño comparado con el volumen de líquido en la tubería.

Las condiciones de flujo a través de la válvula fueron clasificadas en cuatro categorías.

Flujo de aire Subsónico – Entrada.

$$\dot{m} = C_{in} A_{in} \sqrt{7 \rho_o P_o \left[\left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.4286} - \left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.714} \right]} \quad P_o > P > 0.53 * P_o$$

Flujo de aire Crítico – Entrada.

$$\dot{m} = C_{in} A_{in} \frac{0.686}{\sqrt{RT}} P_o \quad P < 0.53 * P_o$$

Flujo de aire Subsónico – Salida.

$$\dot{m} = -C_{out} A_{out} P \sqrt{\frac{7}{RT} \left[\left(\frac{P_o}{P} \right)^{1.4286} - \left(\frac{P_o}{P} \right)^{1.714} \right]} \quad \frac{P_o}{0.53} > P > P_o$$

Flujo de aire Crítico – Salida.

$$\dot{m} = -C_{out} A_{out} \frac{0.686}{\sqrt{RT}} P \quad P > \frac{P_o}{0.53}$$

Lee (1999). Estudió la influencia del aire sobre los transientes hidráulicos en un sistema con válvulas de aire; en el modelo propuesto, asume inicialmente la presencia de aire libre y gas disuelto contenidos en el líquido a presión atmosférica. Adicionalmente realiza las siguientes asunciones.

- La distribución de la mezcla gas – líquido es homogénea.
- Las burbujas de gas en el líquido siguen la ley de compresión politrópica con $n = 1.2 - 1.3$
- La presión dentro de las burbujas de aire durante el flujo transitorio, se encuentra en equilibrio con la presión local del fluido.

La válvula es modelada como una boquilla convergente, en la cual el flujo de aire a través de ella depende de la presión atmosférica absoluta P_o y la temperatura del

ambiente T_o (fuera de la tubería); así como de la temperatura absoluta T y de la presión P dentro de la tubería. El modelo usado, adicional a las asunciones realizadas por Wylie y Streeter, asume que.

- La masa de aire dentro de la tubería sigue una ley politrópica (Índice politrópico = n).
- Bajo todas las condiciones de operación la válvula retiene el líquido dentro de la tubería, sin pérdidas a la atmósfera.

Al igual que en los modelos anteriores, las condiciones de flujo a través de la válvula fueron clasificados en cuatro categorías.

Flujo de aire Subsónico – Entrada.

$$\dot{m} = C_{in} A_{in} \sqrt{2\rho_o P_o \left[\left(\frac{P}{P_o} \right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{P}{P_o} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]} \quad P_o > P > C_r P_o.$$

Flujo de aire Crítico – Entrada.

$$\dot{m} = C_{in} A_{in} \frac{C_r \sqrt{n}}{\sqrt{RT_o}} P_o \quad P < C_r P_o$$

Flujo de aire Subsónico – Salida.

$$\dot{m} = -C_{out} A_{out} P \sqrt{\frac{2}{RT} \left[\left(\frac{P_o}{P} \right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{P_o}{P} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]} \quad \frac{P_o}{C_r} > P > P_o$$

Flujo de aire Crítico – Salida.

$$\dot{m} = -C_{out} A_{out} \frac{C_r \sqrt{n}}{\sqrt{RT}} P \qquad P > \frac{P_o}{C_r}$$

Donde A = Área de flujo de la boquilla (entrada o salida); C = Coeficiente de descarga de entrada o salida de flujo; \dot{m} = Flujo másico de aire de entrada o salida de la cavidad; P es la presión a la salida de la boquilla convergente.

3 FLUJO TRANSITORIO EN CONDUCTOS CERRADOS.

Chaudhry (1987) y Wylie et.al. (1993) proponen una expresión que describe las condiciones de flujo en estado transitorio para un conducto cerrado. Las ecuaciones de continuidad y momentum son derivadas usando el teorema de transporte de Reynolds, como se muestra a continuación.

3.1 TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS.

Sin importar su naturaleza, todas las situaciones de flujo están sujetas a las siguientes relaciones, las cuales pueden ser expresadas en forma analítica.

- Las leyes de movimiento de Newton, las cuales deben cumplirse para cualquier partícula en cualquier instante.
- La ley de conservación de masa.
- La primera y segunda ley de termodinámica.

En el teorema de Reynolds, el concepto de volumen de control se relaciona con el sistema en términos de una propiedad general del sistema.

Este teorema relaciona las variables de flujo para una cantidad específica de masa de fluido, llamada sistema; a una región específica, llamada volumen de control. Todo lo externo al sistema es llamado alrededores y las fronteras del sistema separan el sistema de sus alrededores. La frontera de un volumen de control es llamada superficie de control.

Considérese una situación general de flujo, Figura 4. Sea B la cantidad total de alguna propiedad (extensiva) dentro del sistema en el tiempo t y β la cantidad de esta propiedad por unidad de masa (propiedad intensiva), a través del fluido.

La cantidad total de B en el volumen de control, B_{CV} , es

$$B_{CV} = \int_{CV} \beta \rho d\forall \quad 3.1$$

Donde ρ es la densidad y $d\forall$ es el diferencial de volumen del fluido.

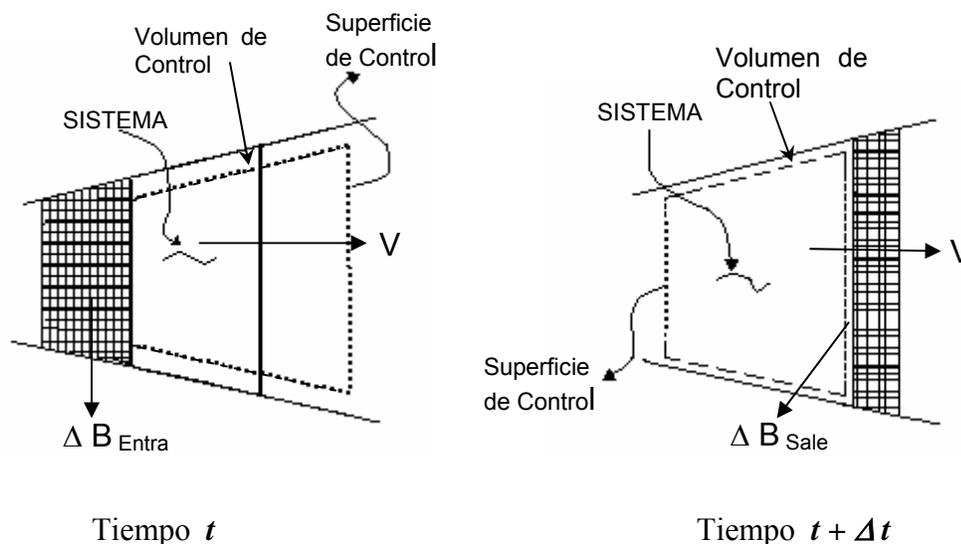


Figura 4. Sistema y volumen de control

Considerando el sistema en el tiempo t y $t + \Delta t$. En el tiempo t , parte del sistema se encuentra dentro del volumen de control y otra parte se mueve hacia el interior del volumen de control; en el tiempo $t + \Delta t$, parte del sistema se encuentra dentro del volumen de control y la otra parte se mueve hacia fuera del volumen de control.

La propiedad B del sistema en el tiempo t y $t + \Delta t$ puede ser escrita como.

$$B_{SIS}(t) = B_{V.C}(t) + \Delta B_{Entra} \quad 3.2$$

$$B_{SIS}(t + \Delta t) = B_{V.C}(t + \Delta t) + \Delta B_{Sale} \quad 3.3$$

ΔB_{Entra} , ΔB_{Sale} , se refieren a la cantidad de propiedad B que ingresa o sale del volumen de control durante un intervalo de tiempo Δt .

El cambio de la propiedad B puede definirse como

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{SIS}(t + \Delta t) - B_{SIS}(t)}{\Delta t} \quad 3.4$$

Reemplazando la ecuación 3.2 y 3.3 en la Ec. 3.4.

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} [B_{CV}(t + \Delta t) + \Delta B_{Sale} - B_{VC}(t) - \Delta B_{Entra}] \right\}$$

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{CV}(t + \Delta t) - B_{CV}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{OUT}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{IN}}{\Delta t} \quad 3.5$$

El primer término a la derecha de la ecuación 3.5 representa la razón de cambio con respecto al tiempo de la propiedad B en el volumen de control

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{VC}(t + \Delta t) - B_{VC}(t)}{\Delta t} = \frac{dB_{VC}}{dt} \quad 3.6$$

Sustituyendo la ecuación 3.1 en la ecuación 3.6.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{VC}(t + \Delta t) - B_{VC}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \beta \rho dV \quad 3.7$$

El segundo y tercer término a la derecha de la ecuación 3.5 representa la razón a la cual una propiedad sale o entra del volumen de control. Para flujo en una dimensión, se puede escribir

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{Sale}}{\Delta t} = (\beta \rho AV_S)_{Sale} \quad y \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{Entra}}{\Delta t} = (\beta \rho AV_S)_{Entra}$$

Donde A representa el área de la sección transversal y VS representa la velocidad relativa promedio medida en la superficie de control.

Estos dos últimos términos pueden combinarse en un término único que es una integral sobre toda la superficie del volumen de control (SC). El producto punto define si el flujo entra o sale del volumen de control.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{Sale}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{Entra}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta B_{Sale}}{\Delta t} - \frac{\Delta B_{Entra}}{\Delta t} \right) = \oint_{SC} \beta \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

$$\oint_{SC} \beta \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = (\beta \rho AV_S)_{Sale} - (\beta \rho AV_S)_{Entra}$$

Reuniendo y reorganizando los términos, la ecuación 3.5 lleva a

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \beta \rho dV + \oint_{SC} \beta \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad \mathbf{3.8}$$

La ecuación anterior, se conoce como el *Teorema de Transporte de Reynolds* y establece que la tasa o razón temporal de incremento de la cantidad total de alguna propiedad extensiva (B) dentro de un sistema, es exactamente igual a la tasa temporal de incremento de la propiedad B dentro del volumen de control (fijo), más la tasa neta de flujo de B a través de la frontera del volumen de control.

3.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

Para derivar la ecuación de continuidad para flujo transitorio, se aplica la ley de conservación de masa, se considera el flujo de un fluido compresible en un conducto de paredes elásticas. Debido a los cambios de presión, el volumen de control se puede expandir o contraer, la velocidad con respecto a los ejes coordenados de las secciones 1 y 2 debido a estas contracciones o expansiones es W_1 y W_2 , respectivamente. Se asume que el flujo es en una dimensión, y que la presión es uniforme al final de las secciones del volumen de control, se desprecia la velocidad radial debida a la expansión o contracción de las paredes del conducto, finalmente, la distancia X , velocidad de flujo V , y la descarga Q , son consideradas positivas en la dirección aguas abajo, (Figura 5).

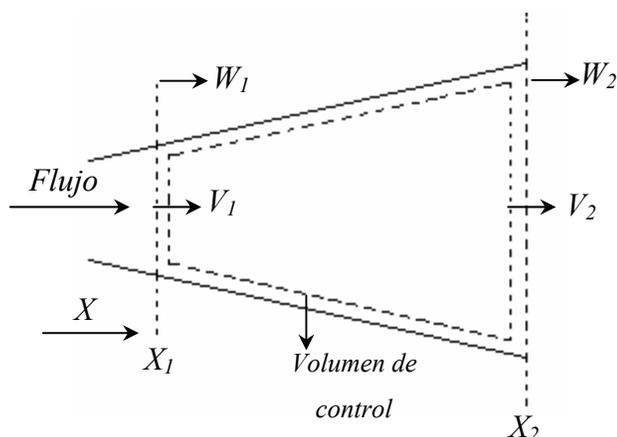


Figura 5. Notación – Volumen de control conservación de la masa.

Para la conservación de la masa, la propiedad intensiva del fluido es dada por:

$\beta = \frac{m}{m} = 1$. Adicionalmente para un sistema $\frac{dm_{sis}}{dt} = 0$, por lo tanto al aplicar el

teorema de Reynolds, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = 0 \quad 3.9$$

Esta ecuación establece que la tasa temporal de cambio de la masa en el volumen de control, más el flujo neto de la masa a través del volumen de control es igual a cero.

Puesto que, bajo flujo no permanente, y en un conducto deformable el volumen de control varía en el tiempo, se debe resolver el primer término de la ecuación anterior, mediante el teorema de Leibnitz, dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{f_1(t)}^{f_2(t)} F(X,t) dX = \int_{f_1(t)}^{f_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} F(X,t) dX + F(f_2(t),t) \frac{df_2}{dt} - F(f_1(t),t) \frac{df_1}{dt}$$

Haciendo $d\forall = A dX$, y aplicando el teorema de Leibnitz, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{X_1}^{X_2} \rho d\forall = \frac{d}{dt} \int_{X_1}^{X_2} \rho A dX = \int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dX + \rho_2 A_2 \frac{dX_2}{dt} - \rho_1 A_1 \frac{dX_1}{dt}$$

Llamando W_1 y W_2 la velocidad de deformación de las fronteras, se tiene que

$$\frac{dX_2}{dt} = W_2 \quad \text{y} \quad \frac{dX_1}{dt} = W_1, \quad \text{por lo tanto el primer término de la ecuación 3.9 puede}$$

expresarse como

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} \rho \, dV = \int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dX + \rho_2 A_2 W_2 - \rho_1 A_1 W_1 \quad \mathbf{3.10}$$

El segundo término de la ecuación 3.9 se resuelve de forma directa y se expresa como

$$\int_{sc} \rho V \, dA = (\rho V_s A)_2 - (\rho V_s A)_1$$

Donde V_s representa la velocidad relativa promedio medida en la superficie de control y es dada por $V_{s1} = V_1 - W_1$ y $V_{s2} = V_2 - W_2$, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene

$$\int_{sc} \rho V \, dA = \rho_2 A_2 (V_2 - W_2) - \rho_1 A_1 (V_1 - W_1) \quad \mathbf{3.11}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.10 y 3.11 en la Ec. 3.9.

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dX + \rho_2 A_2 W_2 - \rho_1 A_1 W_1 + \rho_2 A_2 (V_2 - W_2) - \rho_1 A_1 (V_1 - W_1) = 0 \quad \mathbf{3.12}$$

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dX + \rho_2 A_2 V_2 - \rho_1 A_1 V_1 = 0 \quad \mathbf{3.13}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la integral en la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) \Delta X + \rho_2 A_2 V_2 - \rho_1 A_1 V_1 = 0 \quad \mathbf{3.14}$$

Con $\Delta X = X_2 - X_1$.

Dividiendo la Ec. 3.14 por ΔX

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\rho_2 A_2 V_2 - \rho_1 A_1 V_1}{\Delta X} = 0 \quad 3.15$$

En el límite cuando $\Delta X \rightarrow 0$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial X}(\rho AV) = 0 \quad 3.16$$

Expandiendo el término dentro de paréntesis

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + \rho A \frac{\partial V}{\partial X} + \rho V \frac{\partial A}{\partial X} + AV \frac{\partial \rho}{\partial X} = 0 \quad 3.17$$

Reagrupando términos, usando expresiones para las derivadas totales y dividiendo por ρA , se obtiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad 3.18$$

Para escribir esta ecuación en términos de las variables de interés, presión y velocidad (P, V), se expresan las derivadas de ρ, A en términos de P y V como se muestra a continuación.

Definiendo el módulo de elasticidad volumétrico del fluido (K) como

$$K = \frac{dP}{d\rho/\rho}$$

La derivada de la densidad puede ser escrita como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{K} \frac{dP}{dt} \quad 3.19$$

Para un conducto circular el área es: $A = \frac{\pi}{4} D^2$, donde D es el diámetro del conducto. La variación del área con respecto al tiempo es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{4} 2D \frac{dD}{dt} \quad 3.20$$

Expresando la variación en términos de la deformación, se obtiene

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} \quad 3.21$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación 3.20, se tiene

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad 3.22$$

Para simplificar la derivación, se asume que las paredes del conducto son linealmente elásticas, por lo tanto la deformación puede expresarse como, **Wylie(1993)**.

$\varepsilon = \frac{\sigma_2 - \mu\sigma_1}{E}$. Donde σ_2 se define como el esfuerzo circunferencial, σ_1 es el esfuerzo axial, μ es la razón de Poisson, y E es el módulo de elasticidad.

Adicionalmente se asume que el conducto tiene juntas de expansión a lo largo de su longitud tal que los esfuerzos axiales son cero, por lo tanto la expresión anterior se reduce a $\varepsilon = \frac{\sigma_2}{E}$.

El esfuerzo circunferencial sobre las paredes del conducto, debido a las presiones internas generadas por el fluido, es dado por la siguiente expresión $\sigma_2 = \frac{PD}{2e}$.

Donde P es la presión, e es el espesor de las paredes, y D es el diámetro del conducto. Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d\sigma_2}{dt} = \frac{P}{2e} \frac{dD}{dt} + \frac{D}{2e} \frac{dP}{dt} \quad 3.23$$

Por definición se sabe que, $\varepsilon = \frac{\sigma_2}{E}$, derivando con respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{d\sigma_2}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} \quad 3.24$$

Reemplazando en la ecuación 3.23, se obtiene

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{P}{2e} \frac{dD}{dt} + \frac{D}{2e} \frac{dP}{dt} \quad 3.25$$

Recordando de pasos anteriores que $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$, y sustituyendo se obtiene

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \left[E - \frac{PD}{2e} \right] = \frac{D}{2e} \frac{dP}{dt} \quad 3.26$$

O sea

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{D}{2e} \frac{dP}{dt}}{E - \frac{PD}{2e}} \quad 3.27$$

Entonces

$$2 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \quad 3.28$$

Finalmente

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{D}{e} \frac{dP}{dt}}{E - \frac{PD}{2e}} \quad 3.29$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.19, y 3.29 en la ecuación de continuidad, Ec. 3.18, se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial X} + \left[\frac{1}{K} + \frac{1}{eE/D - P/2} \right] \frac{dP}{dt} = 0 \quad 3.30$$

En la mayoría de aplicaciones de ingeniería el término $P/2$ es mucho menor que el término eE/D , por lo tanto la ecuación anterior puede expresarse como

$$\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{K} \left[1 + \frac{1}{eE/DK} \right] \frac{dP}{dt} = 0 \quad 3.31$$

Wylie et.al. (1993), y **Streeter et.al. (1997)** definen para un conducto completamente lleno de líquido, la velocidad del sonido en el fluido a , incluyendo los efectos de la elasticidad de las paredes, de la siguiente forma.

$$a = \sqrt{\frac{k/\rho}{1 + \left(\frac{K}{E}\right)\left(\frac{D}{e}\right)}} \quad 3.32$$

Observando que $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{K} \left[1 + \frac{DK}{eE} \right]$, sustituyendo en la Ec. 3.31, se tiene que

$$\rho a^2 \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{dP}{dt} = 0 \quad 3.33$$

Aplicando la definición de derivada total, es posible finalmente obtener la ecuación de continuidad para flujo transitorio en un conducto cerrado como

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial X} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad 3.34$$

3.2.1 Ecuación De Momentum.

Para la conservación de cantidad de movimiento (momentum), la propiedad extensiva es $\vec{B} = m\vec{V}$, por lo cual la propiedad intensiva es $\vec{\beta} = \frac{m\vec{V}}{m} = \vec{V}$

De acuerdo a la segunda ley de Newton, para un sistema

$$\frac{d\left(m\vec{V}\right)_{sis}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Donde \vec{F} es la suma de las fuerzas que actúan sobre el volumen de control.

Aplicando el Teorema de Transporte de Reynolds a un volumen de control deformable (Figura 6), se obtiene

$$\frac{d(m\vec{V})_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \oint_{SC} V \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = \sum \vec{F} \quad 3.35$$

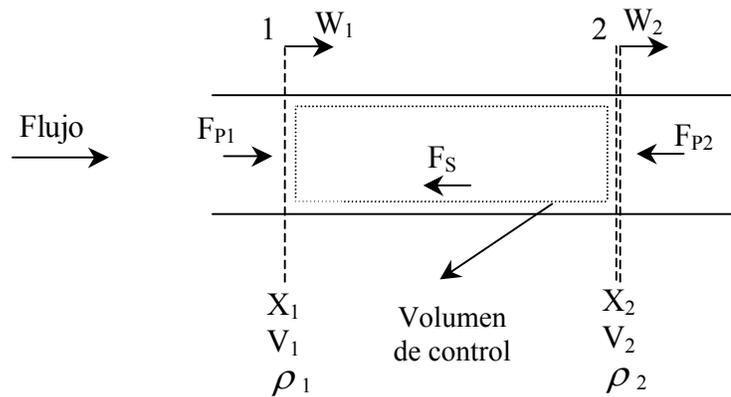


Figura 6. Volumen de control para la derivación de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Procediendo de forma similar al análisis realizado para la ecuación de continuidad, usando el teorema de Leibnitz, el primer término de la ecuación 3.35, para la componente en dirección axial, X , puede ser expresado como

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \vec{V} \rho dV = \int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V A) dx + (\rho AV)_2 W_2 - (\rho AV)_1 W_1 \quad 3.36$$

El segundo término de la ecuación 3.35 puede expresarse como

$$\oint_{SC} V \rho V_s dA = (V \rho V_s A)_2 - (V \rho V_s A)_1 = [\rho A (V - W) V]_2 - [\rho A (V - W) V]_1 \quad 3.37$$

Reemplazando las ecuaciones 3.36 Y 3.37 en la 3.35, se tiene

$$\sum F = \int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho AV) dX + (\rho AV)_2 W_2 - (\rho AV)_1 W_1 + [\rho A (V - W) V]_2 - [\rho A (V - W) V]_1 \quad 3.38$$

Aplicando al primer término el teorema del valor medio, simplificando y dividiendo toda la ecuación por $\Delta X = X_2 - X_1$, se obtiene

$$\frac{\sum F}{\Delta X} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho AV) + \frac{(\rho AV^2)_2 - (\rho AV^2)_1}{\Delta X} \quad 3.39$$

Asumiendo que la tubería es horizontal, las siguientes fuerzas actúan

Fuerzas de Presión en las secciones 1 y 2.

$$F_{P1} = P_1 A \quad 3.40$$

$$F_{P2} = P_2 A \quad 3.41$$

Si se usa la formula de Darcy – Weisbach para calcular las pérdidas debidas a la fricción, los esfuerzos cortantes entre el fluido y las paredes de la tubería, son dados por

$$\tau_0 = \frac{\rho f V |V|}{8}, \text{ Donde } f \text{ es el factor de fricción de Darcy – Weisbach, y } V^2 \text{ es}$$

escrita como $V|V|$ para considerar la dirección de flujo. De acuerdo a lo anterior, la fuerza cortante puede expresarse como.

$$F_S = \tau_0 * A = \tau_0 * \pi D \Delta X = \frac{\rho f V |V|}{8} \pi D \Delta X$$

Por lo tanto las fuerzas son

$$\sum F = F_{P1} - F_{P2} - F_S \quad 3.42$$

O sea

$$\sum F = P_1 A - P_2 A - \frac{\rho f V |V|}{8} \pi D \Delta X$$

Dividiendo por ΔX , se tiene

$$\frac{\sum F}{\Delta X} = \frac{P_1 A - P_2 A}{\Delta X} - \frac{\rho f V |V|}{8} \pi D \quad 3.43$$

Reemplazando la Ec. 3.43 en la Ec.3.39, se obtiene

$$\frac{P_1 A - P_2 A}{\Delta X} - \frac{\rho f V |V|}{8} \pi D = \frac{\partial}{\partial t} (\rho A V) + \frac{(\rho A V^2)_2 - (\rho A V^2)_1}{\Delta X} \quad 3.44$$

Tomando el límite cuando $\Delta X \rightarrow 0$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A V) + \frac{\partial}{\partial X} (\rho A V^2) + A \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\rho f V |V|}{8} \pi D = 0 \quad 3.45$$

Expandiendo los términos dentro de paréntesis en la ecuación anterior y reagrupando se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A V) = \rho A \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) \quad 3.46$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (\rho A V^2) = V \left[\frac{\partial}{\partial X} (\rho A V) \right] + \rho A V \frac{\partial V}{\partial X} \quad 3.47$$

Sustituyendo la expansión anterior, ecuaciones 3.46 y 3.47, en la Ec. 3.45 se obtiene

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + V \left[\frac{\partial}{\partial X} (\rho A V) \right] + \rho A V \frac{\partial V}{\partial X} + A \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\rho f V |V|}{8} \pi D = 0 \quad 3.48$$

Finalmente

$$V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial X} (\rho A V) \right] + \rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho A V \frac{\partial V}{\partial X} + A \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\rho f V |V| A}{2D} = 0 \quad 3.49$$

Por continuidad el primer término de la ecuación anterior se hace cero, por lo tanto

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho AV \frac{\partial V}{\partial X} + A \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\rho AfV|V|}{2D} = 0 \quad 3.50$$

Al dividir la expresión anterior por ρA , finalmente se obtiene la ecuación de Momentum, dada por.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad 3.51$$

3.2.2 Forma Simplificada De Las Ecuaciones De Continuidad Y Momentum.

Las ecuaciones de continuidad (Ec. 3.34) y de momentum (Ec. 3.51), describen el flujo en estado transitorio en conductos cerrados. En estas ecuaciones hay dos variables independientes, la distancia, X , y el tiempo, t , y dos variables dependientes, la presión, P , y la velocidad de flujo, V . Otras variables como a , ρ , f y D , son parámetros del sistema y usualmente permanecen constantes con respecto al tiempo, sin embargo pueden ser función de X . De acuerdo a **Chaudhry (1987)**, **Wylie et.al. (1993)**, **Swaffield et.al. (1993)**, para flujo en tuberías, los términos $V \frac{\partial P}{\partial X}$ y $V \frac{\partial V}{\partial X}$ son muy pequeños comparados con los otros términos de las ecuaciones gobernantes (3.34 y 3.51), por lo tanto pueden ser despreciados. De ahí, la expresión usual de las ecuaciones es

Conservación de Masa

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad 3.52$$

Conservación de Momentum

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad 3.53$$

Adicionalmente, es común expresar las presiones en las tuberías en términos de la carga piezométrica (H), y usar como segunda variable dependiente la descarga (Q) en lugar de la velocidad (V). la carga piezometrica se define como $P = \rho g H$, y la descarga como $Q = V A$.

Si se asume que el fluido es ligeramente compresible, y que las paredes del conducto son levemente deformables, se puede despreciar la variación de la densidad (ρ) y área de flujo (A), debido a la variación de la presión en el interior de la tubería. Es decir

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \rho g \frac{\partial H}{\partial t} \quad 3.54$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \rho g \frac{\partial H}{\partial X} \quad 3.55$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en las ecuaciones gobernantes, se obtiene

Conservación de Masa

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \quad 3.56$$

Conservación de Momentum

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial X} + RQ|Q| = 0 \quad 3.57$$

donde $R = \frac{f}{2DA}$.

Las ecuaciones 3.52 a 3.57, son conocidas como forma simplificada de las ecuaciones gobernantes para flujo transitorio en conductos cerrados, y representan un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales cuasi-lineales e hiperbólicas, cuya

solución de forma exacta no es posible, sin embargo, por linealización de los términos no lineales y aplicando métodos analíticos o gráficos se puede obtener una solución aproximada. Lo más común es resolver las ecuaciones usando esquemas numéricos con la computadora digital, según se detalla en la sección 6.2.

3.2.3 Velocidad De La Onda En Flujo Transitorio

Según **Chaudhry 1987, Wylie et. al. 1993, y Roberson et. al. 1998**, la velocidad de la onda bajo golpe de ariete en conductos cerrados depende de las propiedades elásticas de la tubería, de las propiedades del fluido, y de las restricciones o condiciones de anclaje. Las propiedades de la tubería incluyen el tamaño – diámetro, espesor y material de construcción de la tubería; Las propiedades del fluido incluyen el modulo volumétrico de elasticidad del fluido, cantidad de gases no disueltos², densidad y viscosidad cinemática entre otras. Las restricciones o condiciones externas incluyen el tipo de soportes y la libertad del sistema al movimiento en dirección longitudinal.

De acuerdo a **Padmanabhan 1978, Simpson 1986, y Chaudhry 1987**, una reducción significativa en la velocidad de la onda se obtiene cuando la cantidad de gases disueltos en el líquido aumenta, éste fenómeno puede ser generado cuando la presión del líquido cae a valores cercanos o iguales a la presión de vapor del líquido, aumentando la fracción de vacío gracias a la formación de burbujas de vapor (cavitación). Por lo tanto, la velocidad de la onda para una onda de presión positiva puede ser mucho mayor que para una onda de presión negativa.

A continuación se muestran dos clasificaciones de la velocidad de la onda en base a la fracción de vacío. Velocidad de la onda constante para líquidos puros, y velocidad de la onda variable para mezcla gas – líquido en la cual la fracción de vacío cambia en el tiempo.

² De acuerdo a Pearsall – 1965. la compresibilidad del fluido es incrementada por la presencia de gases libres. Adicionalmente mostró que la velocidad de la onda se reduce por la presencia de gases, 1 parte de aire en 10000 partes de agua (en volumen), reduce la velocidad de la onda aproximadamente en un 50 %.

3.2.4 Velocidad de la Onda en Líquidos Puros.

Una expresión general para la velocidad de la onda constante, al considerar un líquido puro o fracción de vacío igual a cero, fue presentada por Halliwell (**Chaudhry, 1987**), de la siguiente forma

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho \left[1 + \left(\frac{K}{E} \right) \varphi \right]}} \quad \mathbf{3. 58}$$

Donde φ es un parámetro adimensional que depende de las propiedades elásticas del conducto; E es el modulo de elasticidad de Young para las paredes del conducto; K y ρ son el modulo de elasticidad volumétrico y la densidad del fluido respectivamente.

Diferentes expresiones para φ bajo distintas condiciones ya han sido dadas, a continuación se mencionan las de uso más común.

1. Conductos Rígidos.

$$\varphi = 0$$

2. Conductos elásticos de paredes gruesas.

- a). Conducto anclado contra el movimiento longitudinal a lo largo de su longitud

$$\varphi = 2(1 + \nu) \left(\frac{R_o^2 + R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} - \frac{2\nu R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \right) \quad \mathbf{3. 59}$$

Donde ν es la razón de Poisson y R_o, R_i son el radio externo e interno del conducto respectivamente.

- b). Conducto anclado contra el movimiento longitudinal en su extremo superior

$$\varphi = 2 \left[\frac{R_o^2 + 1.5R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + \frac{v(R_o^2 - 3R_i^2)}{R_o^2 - R_i^2} \right] \quad 3. 60$$

c). Conductos con juntas de expansión frecuentes

$$\varphi = 2 \left(\frac{R_o^2 + R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + v \right) \quad 3. 61$$

3. Conductos elásticos de paredes delgadas.

a). Conducto anclado contra el movimiento longitudinal a lo largo de su longitud

$$\varphi = \frac{D}{e} (1 - v^2) \quad 3. 62$$

Donde D es el diámetro del conducto y e el espesor de las paredes.

b). Conducto anclado contra el movimiento longitudinal en su extremo superior

$$\varphi = \frac{D}{e} (1 - 0.5v) \quad 3. 63$$

c). Conductos con juntas de expansión frecuentes

$$\varphi = \frac{D}{e} \quad 3. 64$$

3.2.5 Velocidad de la Onda en Mezclas Gas – Líquido.

La velocidad de la onda en un líquido que contiene una pequeña cantidad de gases, es menor que la obtenida en líquidos puros. Expresiones para la velocidad de la onda, pueden ser obtenidas al asumir que

- La mezcla de gas - líquido es homogénea, es decir, las burbujas de gas están uniformemente distribuidas en el líquido, por lo cual es posible considerar una densidad promedio de la mezcla.
- Las burbujas de gas siguen una ley isotérmica, o sea, al aplicar la ecuación de gas ideal $P\forall_g = P_o\forall_{g-o}$. También, el modulo bulk de elasticidad del gas será igual a la presión ($K_g = P$).
- La presión dentro de la burbuja es independiente de la tensión superficial y de la presión de vapor.

Las expresiones publicadas en la literatura son presentadas a continuación.

Tullis (1976), aplicó las ecuaciones de conservación de momentum y continuidad para un flujo en estado transitorio, la expresión obtenida es escrita como.

$$a_m = \sqrt{\frac{K_l}{\rho_l(1-\alpha)\left(1 + \frac{K_l D}{E e} + \alpha \frac{K_l}{P}\right)}} \quad 3. 65$$

Donde: ρ_l es la densidad del líquido, α es la fracción de vacío para el tiempo en análisis, K_l es el modulo de elasticidad del fluido, D es el diámetro del conducto, E es el modulo de elasticidad del conducto, y e es el espesor de las paredes del conducto.

Padmanabhan (1978), encontró una expresión en función de las restricciones de la tubería, dada por

$$a_m = \sqrt{\frac{1}{\rho_l(1-\alpha)\left\{\frac{(1-\alpha)}{K_l} + \frac{\alpha}{P} + \frac{D}{E e} \mu\right\}}} \quad 3. 66$$

Donde μ es un factor que depende de las restricciones externas del sistema y del tipo de tubería.

Wylie (1983), simplifica el término que define el modulo de elasticidad de la mezcla y propone una expresión similar a la obtenida por padmanabhan, dada por

$$a_m = \sqrt{\frac{1}{\rho_l(1-\alpha) \left\{ \frac{1}{K_l} + \frac{\alpha}{P} + \frac{D}{E^*e} C_1 \right\}}} \quad 3. 67$$

Donde C_1 es un factor que depende de las restricciones externas del sistema y del tipo de tubería.

Chaudhry (1987) obtuvo una expresión para la velocidad de la onda en una mezcla gas – líquido. Al considerar un volumen de mezcla gas – líquido, a una presión inicial P_0 , confinado dentro de un conducto de paredes elásticas, y asumiendo que la presión es súbitamente incrementada en un valor dP , encontró que la velocidad de la onda es dada por.

$$a_m = \sqrt{\frac{1}{\left[\rho_l(1-\alpha) + \alpha\rho_g \right] \left(\frac{\alpha}{P} + \frac{1}{K_l} + \frac{D}{Ee} \right)}} \quad 3. 68$$

Donde ρ_g es la densidad del gas.

3.3 ESQUEMAS NUMÉRICOS.

En flujo transitorio, la solución de las ecuaciones gobernantes se realiza mediante aproximación con técnicas numéricas o métodos computacionales. A continuación se presenta una breve descripción de los esquemas numéricos usados en esta investigación.

3.3.1 Método De Las Características.

Según Chaudhry (1987), Wylie et.al. (1993), y Swaffield et.al. (1993), las ecuaciones simplificadas de continuidad (3.52) y momentum (3.53), pueden ser escritas como

$$L_1 = \frac{\partial P}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad 3.69$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \quad 3.70$$

Considerando una combinación lineal de las dos ecuaciones anteriores, de la forma: $L = L_1 + \lambda L_2$, donde λ es un multiplicador desconocido. Y sustituyendo, se obtiene

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \lambda \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{f}{2D} V|V| \right) = 0 \quad 3.71$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho a^2}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{f}{2D} V|V| = 0 \quad 3.72$$

En la ecuación anterior, las variables dependientes V y P , son función de X y t , ($V = V(X, t)$ y $P = P(X, t)$). Por lo tanto, la derivada total puede ser escrita como.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial X} \frac{dX}{dt} \quad 3.73$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X} \frac{dX}{dt} \quad 3.74$$

Comparando las dos expresiones anteriores con los términos dentro del paréntesis de la ecuación 3.72, se puede decir que

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{\rho a^2}{\lambda} \quad 3.75$$

Esto es

$$\lambda = \pm \rho a$$

$$\text{Si } \lambda = \rho a \quad \frac{dX}{dt} = a \quad 3.76$$

Note que a es la velocidad de la onda, igual a un valor finito. Por lo cual la ecuación anterior es la ecuación de una línea recta.

La ecuación 3.72 puede ser escrita como

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} + \frac{f}{2D} V|V| = 0 \quad 3.77$$

$$\text{Si: } \lambda = -\rho a \quad \frac{dX}{dt} = -a \quad 3.78$$

Podemos escribir la ecuación 3.72 como.

$$\frac{dV}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} + \frac{f}{2D} V|V| = 0 \quad 3.79$$

La ecuación 3.77 es válida si la ecuación 3.76 es satisfecha, y la ecuación 3.79 es válida si la ecuación 3.78 es satisfecha. En otras palabras, en las ecuaciones 3.76 a 3.79, se ha eliminado una variable independiente, X , y se han convertido las ecuaciones diferenciales parciales 3.52 y 3.53, en cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el plano $X - t$, las ecuaciones 3.76 y 3.78, representan dos líneas rectas con pendiente $\pm \frac{1}{a}$. Estas ecuaciones son llamadas características. Matemáticamente estas

$$\int_A^P dV + \frac{1}{\rho a} \int_A^P dP + \int_A^P \frac{f}{2D} V|V| dt = 0$$

Donde los subscritos A y P indican la localización en el plano $X-t$.

Las dos primeras integrales de la ecuación anterior pueden ser resueltas fácilmente, sin embargo no se puede decir lo mismo para el tercer término, ya que no se conoce la variación de V con respecto al tiempo t . Para obviar lo anterior se realiza una aproximación de primer orden y se evalúa la tercer integral como.

$$\int_A^P \frac{f}{2D} V|V| dt \approx \frac{f}{2D} V_A|V_A|(t_P - t_A) = \frac{f}{2D} V_A|V_A|\Delta t$$

En otras palabras, se dice que para la evaluación de este término, V permanece constante entre el punto A y el punto P ; y por lo tanto la ecuación 3,77 puede ser escrita como

$$V_P - V_A + \frac{1}{\rho a} (P_P - P_A) + \frac{f}{2D} \Delta t V_A|V_A| = 0 \quad \mathbf{3.80}$$

Aplicando un procedimiento similar, la ecuación 3.79 puede ser escrita como

$$V_P - V_B - \frac{1}{\rho a} (P_P - P_B) + \frac{f}{2D} \Delta t V_B|V_B| = 0 \quad \mathbf{3.81}$$

Organizando términos, las ecuaciones anteriores pueden ser escritas de la forma.

Ecuación 3.80

$$V_P = C_P - C_a P_P \quad \mathbf{3.82}$$

Ecuación 3.81

$$V_P = C_n + C_a P_P \quad \mathbf{3.83}$$

Donde

$$C_P = V_A + \frac{1}{\rho a} P_A - \frac{f}{2D} \Delta t V_A |V_A| \quad 3.84$$

$$C_n = V_B - \frac{1}{\rho a} P_B - \frac{f}{2D} \Delta t V_B |V_B| \quad 3.85$$

$$C_a = \frac{1}{\rho a} \quad 3.86$$

Los valores de las constantes C_P y C_n son conocidos para cada paso en el tiempo, y la constante C_a depende solo de las propiedades del conducto y del fluido.

La ecuación 3.82 se conoce con el nombre de ecuación característica positiva y la 3.83 como ecuación característica negativa. Los valores de las variables desconocidas en estas ecuaciones (P_P y V_P), pueden ser obtenidos resolviéndolas de forma simultánea.

3.3.2 Diferencias Finitas.

De acuerdo a **Padmanabhan (1978)**, y **Chaudhry (1990)**, durante las bajas presiones generadas en el estado transitorio, gas puede ser liberado del líquido debido a la cavitación. El flujo en este caso es una mezcla de gas – líquido o flujo transitorio en dos fases. La velocidad en un flujo en dos fases, varía con la presión, a diferencia de un líquido puro, en el cual la velocidad de la onda de presión es constante. Adicionalmente ondas de choque pueden ser formadas por el paso de las ondas de presión positivas sobre una zona en cavitación, limitando el uso del método de las características, ya que es necesario incorporar las ecuaciones de la onda de choque como condiciones de frontera interna en la rejilla característica. Desde este punto de vista, es deseable la aplicación de métodos que permitan manipular la onda de choque generada durante el estado transitorio sin ningún tratamiento especial, tal es el caso de los esquemas de diferencias finitas explícitos de segundo orden de exactitud en el espacio y el tiempo, como son,

MacCormack, Lambda, Lax-Wendroff, o Gabutti. Estos métodos han sido aplicados para la solución de ecuaciones de onda en problemas de canales y ríos.

A continuación se muestra la formulación general del esquema de MacCormack, el cual será usado en esta investigación.

3.3.3 Esquema de MacCormack.

Según **Anderson (1984)**, el esquema de MacCormack es un esquema explícito, de dos pasos predictor – corrector, de segundo orden de exactitud ambos en el espacio y en el tiempo, y es capaz de capturar las ondas de choque sin necesidad de ajustes especiales para aislarla.

De acuerdo a **Anderson (1984)**, **Chaudhry (1993)**, para flujo unidimensional, existen dos alternativas de aplicación del método. En la primer alternativa, para el paso predictor una aproximación por diferencias finitas “hacia atrás” (backward) es usada para las derivadas en el espacio, y para el paso corrector se usa una aproximación “hacia adelante” (forward). En la segunda alternativa, para el paso predictor una aproximación por diferencias finitas “hacia adelante” (forward) es usada, y para el paso corrector se usa una aproximación “hacia atrás” (backward). Los valores de las variables determinadas durante el paso predictor son usadas en el paso corrector. Una recomendación general para el procedimiento es usar las alternativas de forma alterna de un paso en el tiempo a otro, es decir durante un paso en el tiempo usar la primer alternativa, y durante el siguiente paso en el tiempo usar la segunda alternativa, y alternar esta secuencia en lo sucesivo.

La aproximación por diferencias finitas de las derivadas en el espacio y en el tiempo, para ambas alternativas, es dada a continuación, (Figura 8).

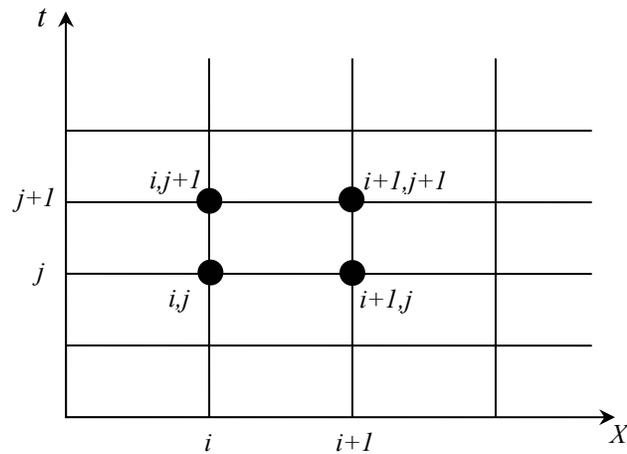


Figura 8. Malla esquema de MacCormack.

1^{er.} Alternativa Predictor. El símbolo * se usa para referirse a la variable calculada durante la parte predictor

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^* - U_i^j}{\Delta t} \quad \mathbf{3.87}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_i^j - F_{i-1}^j}{\Delta x} \quad \mathbf{(Backward) \quad 3.88}$$

Donde j representa el nivel de tiempo conocido, i representa el nodo espacial en estudio.

1^{er.} Alternativa Corrector. El símbolo ** se usa para referirse a la variable calculada durante el paso corrector.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{**} - U_i^j}{\Delta t} \quad \mathbf{3.89}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1}^* - F_i^*}{\Delta x} \quad \mathbf{(Forward) \quad 3.90}$$

De forma similar para la segunda alternativa.

2^{da}. Alternativa Predictor.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^* - U_i^j}{\Delta t} \quad \mathbf{3.91}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1}^j - F_i^j}{\Delta x} \quad \text{(Forward)} \quad \mathbf{3.92}$$

2^{da}. Alternativa Corrector.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{**} - U_i^j}{\Delta t} \quad \mathbf{3.93}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_i^* - F_{i-1}^*}{\Delta x} \quad \text{(Backward)} \quad \mathbf{3.94}$$

Para ambas alternativa, el valor de la variable U_i en el nivel del tiempo desconocido $j + 1$, es dado por

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{2} [U_i^* + U_i^{**}] \quad \mathbf{3.95}$$

3.3.4 Disipación De Energía En Flujo Transitorio.

De acuerdo a **Schohl (1993)**, en flujo en estado transitorio, los esfuerzos cortantes en las paredes de la tubería, varían en función de la velocidad media instantánea y con la razón de cambio de la velocidad, o frecuencia de variación de la velocidad en el tiempo. Bajo estas condiciones, es necesario modificar el tratamiento dado al término que representa la disipación de energía en la ecuación de momentum $\left(\int \frac{f}{2D} V|V| dt \right)$.

Zielke 1967, citado por **Schohl (1993)**, introdujo un método para incluir la dependencia de la frecuencia del término de disipación en cálculos mediante diferencias finitas. No obstante, la aplicación estricta del método de Zielke, requiere, para la

evaluación de la integral, una función de peso para los cambios de la velocidad en el tiempo, ya que durante flujo no permanente, la disipación de energía depende de la historia de los gradientes de velocidad anteriores en el tiempo. El método de Zielke requiere el almacenamiento de las velocidades calculadas en todos los pasos previos en el tiempo y en todas las secciones computacionales. Por lo cual el almacenamiento de cómputo y el tiempo computacional requerido, hacen poco atractivo y aplicable el método.

$$\tau_o(x,t) = \frac{8\rho\nu}{D} \left[V(x,t) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial u} W(t-u) du \right] \quad 3.96$$

Donde ν es la viscosidad cinemática del fluido, W es una función de peso que describe el comportamiento de la velocidad en el tiempo, y u es la variable de integración.

Trikha (1975), desarrollo una aproximación que elimina los requerimientos de computo en el método de Zielke's, la función de peso, fue aproximada como la suma de tres términos exponenciales, dado por

$$W(t) \cong W_{app}(\tau) = \sum_{i=1}^3 m_i e^{-n_i \tau} \quad 3.97$$

Donde: W_{app} es la aproximación a la función de peso hecha por Trikha, y τ es el tiempo adimensional definido como $\tau = t / T$, con $T = D^2 / 4\nu$.

Los coeficientes m_i y n_i se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Coeficientes términos exponenciales, método de Trikha.

i	n_i	m_i
1	26.4	1
2	200	8.1
3	8000	40

Schohl 1993, mejoró el método de Trikha mediante una nueva aproximación a la función de peso, expresándola como la suma de cinco términos exponenciales. De acuerdo al valor de τ , como se muestra a continuación.

Según Schohl, la función de peso en la ecuación de trikha está dada por

Si $1 \times 10^{-5} < \tau < 0.2$

$$W(t) \cong W_{new}(\tau) = \sum_{i=1}^5 m_i e^{-n_i \tau} \quad \mathbf{3.98}$$

Si $\tau > 0.2$, usar la función dada por Trikha. Para valores de τ menores a 1×10^{-5} la aproximación dada por ambas funciones, empeora a medida que τ disminuye. Schohl recomienda no usar la función W_{new} para valores menores a 1×10^{-5} , por lo cual el valor mínimo de τ impone un límite inferior al intervalo de tiempo computacional, dado por:

$$\Delta t_{\min} = \tau_{\min} T$$

Los coeficientes m_i y n_i , para Schohl, se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Coeficientes términos exponenciales, método de Schohl.

i	n_i	m_i
1	26.65	1.051
2	100	2.358
3	669.6	9.021
4	6497	29.47
5	57990	79.55

4 FLUJO COMPRESIBLE.

Los modelos matemáticos usados para simular el comportamiento de las válvulas de aire consideran el fluido compresible, ya que el aire puede moverse a velocidades comparables a la velocidad del sonido, y los cambios en su densidad son significativos. En gases, razones de presión de 2:1 son suficientes para causar flujos sónicos. Si los cambios en la densidad son significativos, de la ecuación de estado, se tiene que, los cambios en la temperatura y presión también son substanciales. Los conceptos y relaciones presentadas en este capítulo serán necesarios para comprender el modelo desarrollado en esta investigación, el cual se explica en el capítulo 5.

4.1 NÚMERO DE MACH Y VELOCIDAD DEL SONIDO.

El número de Mach, definido como $M = \frac{V}{a}$, donde V es la velocidad de flujo y a es la velocidad del sonido a través del fluido, es el parámetro dominante en el análisis de flujo compresible. Para flujos internos una clasificación simple es dada por, (**Shapiro 1953**).

$M < 1$ flujo subsónico.

$M = 1$ flujo sónico.

$M > 1$ flujo supersónico.

Las propiedades de flujo de un fluido compresible dependen de la razón de la velocidad de la corriente a la velocidad del sonido. Por lo cual, es conveniente definir el número de Mach igual a la razón anterior.

$$M = \frac{V}{a} \quad 4.1$$

Donde a es la velocidad del sonido para la temperatura y densidad en ese punto de la corriente. La velocidad del sonido no es una constante ya que varía con el estado termodinámico del fluido según lo demuestra la ecuación 4.9.

El término flujo compresible implica variaciones en la densidad a través del campo de flujo. Estas variaciones, en muchos casos, son resultado de cambios en la presión de un punto a otro. La razón de cambio de densidad con respecto a la presión es, por lo tanto, un parámetro importante en el análisis de flujo compresible, así como su estrecha relación con la velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones, por ejemplo, con la velocidad del sonido.

Para calcular la velocidad del sonido, asumimos una onda de presión infinitesimal que se propaga a través de un fluido con una velocidad a , como se muestra en la Figura 9 a. El fluido a la izquierda de la discontinuidad, a través del cual el frente de onda ya ha pasado, tiene una presión $P + dP$, una densidad $\rho + d\rho$ y se mueve hacia la derecha, hacia la discontinuidad, con una velocidad dV . El fluido a la derecha, dentro del cual el frente de onda se está moviendo, tiene una presión P y una densidad ρ y se encuentra inmóvil.

Para facilitar el análisis, se asume un observador que viaja con el frente de la onda y a la misma velocidad (Figura 9 b), por lo tanto el observador se moverá hacia la derecha con una velocidad a . Desde el punto de vista del observador, el fluido fluye hacia él con una velocidad a de derecha a izquierda y al pasar a través de la onda, su velocidad se reduce de a a $a - dV$, simultáneamente la presión se eleva de P a $P + dP$, igual sucede con la densidad de ρ a $\rho + d\rho$.

Considerando una superficie de control estacionaria sobre el frente de onda de la Figura 9 b, y despreciando los esfuerzos cortantes sobre ese volumen de control, la ecuación de momentum puede ser escrita como

$$A[P - (P + dP)] = \dot{m}[(a - dV) - a] \quad 4.2$$

Donde A es el área de la sección transversal, y \dot{m} es el flujo de masa durante el paso de la onda, definido como $\dot{m} = \rho A a$.

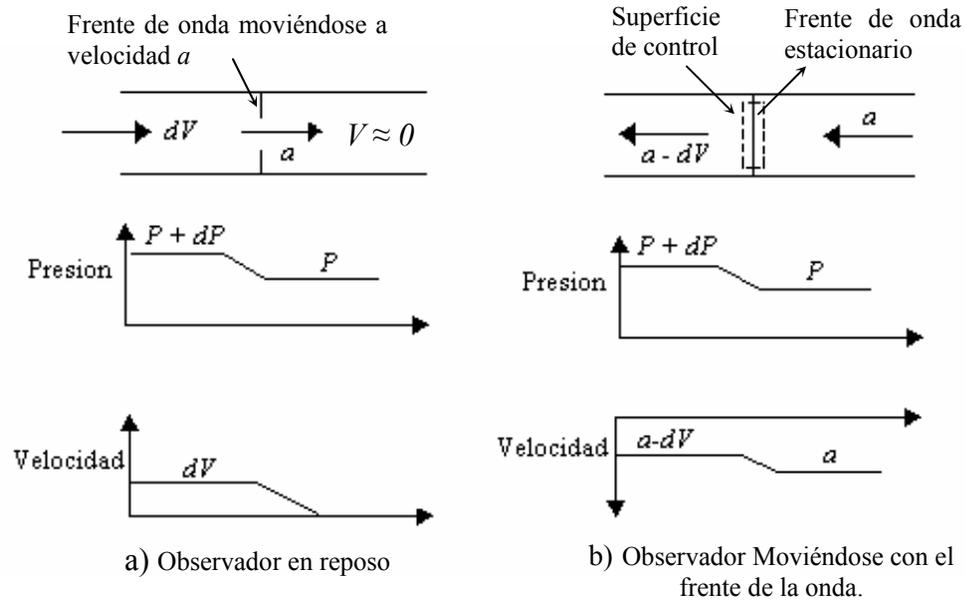


Figura 9. Propagación de un pulso infinitesimal de presión.

Simplificando la expresión (4.2), se obtiene

$$dP = \rho a dV \quad 4.3$$

La ecuación de continuidad puede ser escrita, para el fluido a ambos lados del frente de onda, como

$$\rho a A = (\rho + d\rho)(a - dV) A \quad 4.4$$

La cual puede ser simplificada como

$$\frac{d\rho}{\rho} = dV/a \quad 4.5$$

Combinando las ecuaciones (4.3) y (4.5), se obtiene

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad 4.6$$

En la ecuación anterior, el subíndice s indica entropía constante, y la razón $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ es escrita como derivada parcial cuando la entropía se mantiene constante, debido a que para pequeñas variaciones de la presión y temperatura el proceso es esencialmente reversible, a la vez, con pequeñas variaciones de temperatura, el proceso es aproximadamente adiabático, por lo tanto, en el límite, para una onda infinitesimal, el proceso puede ser considerado como reversible y adiabático, y por lo tanto isentrópico.

En un proceso isentrópico, asumiendo el aire como un gas ideal (**Moran, 1999**), la relación entre la presión y la densidad es $\frac{P}{\rho^k} = \text{Constante}$. Tomando el logaritmo a ambos lados, diferenciando y recordando que para un gas ideal $P = \rho RT$, se obtiene

$$\frac{dP}{P} = k \frac{d\rho}{\rho} \quad 4.7$$

Sea

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \frac{kP}{\rho} = kRT \quad 4.8$$

De esta forma, la velocidad del sonido para un gas ideal es

$$a = \sqrt{kRT} \quad 4.9$$

4.2 FLUJO ADIABÁTICO PARA UN GAS IDEAL.

De acuerdo a **Shapiro (1953)** y **Wark (1994)**, a partir del análisis de la ecuación de energía, es posible obtener algunas relaciones de interés, las cuales son validas para cualquier flujo adiabático de un gas ideal, indiferente de si el flujo es reversible o no.

4.2.1 Relaciones termodinámicas para un gas ideal.

Recordando que las ecuaciones básicas que aplican a los gases ideales son, (Moran, 1999)

$$Pv = RT \quad 4.10$$

$$C_p - C_v = R \quad 4.11$$

$$K = \frac{C_p}{C_v} \quad 4.12$$

$$dh = C_p dT \quad 4.13$$

$$du = C_v dT \quad 4.14$$

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad 4.15$$

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad 4.16$$

Donde P es la presión absoluta, v es el volumen específico, R es la constante del gas, T es la temperatura absoluta, C_p y C_v son los calores específicos a presión y volumen constante respectivamente, K es la razón de calores específicos, h es la entalpía y s es la entropía específica.

En general C_p y C_v , para gases ideales, son función solamente de la temperatura. Para algunos gases, tales como los monoatómicos, los calores específicos son constantes sobre un amplio rango de temperatura, para muchos otros gases C_p y C_v cambian levemente y a menudo son tomados constantes. Si los calores específicos a presión y volumen constante, C_p y C_v respectivamente, se asumen constantes, las ecuaciones anteriores pueden ser integradas obteniéndose

Cambio de entalpía

$$\Delta h = C_p \Delta T \quad 4.17$$

Cambio de energía interna

$$\Delta u = C_v \Delta T \quad 4.18$$

Cambio de entropía

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad 4.19$$

$$\text{Ó} \quad \Delta s = s_2 - s_1 = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \quad 4.20$$

4.2.2 Ecuación de energía.

La ecuación de energía para flujo en estado permanente de un fluido compresible a través de un volumen de control, entre una sección de estancamiento (subíndice o) y cualquier otra sección puede escribirse como

$$\dot{Q} + \dot{W} + \sum_{entra} \left[\dot{m}_{entra} \left(h + \frac{V^2}{2} + gZ \right)_{entra} \right] - \sum_{sale} \left[\dot{m}_{sale} \left(h + \frac{V^2}{2} + gZ \right)_{sale} \right] = \frac{dE_{vc}}{dt} = 0 \quad 4.21$$

Donde: Los subíndices “*entra*” – “*sale*” indican el valor de la propiedad o parámetro a la entrada y salida del sistema respectivamente, \dot{Q} representa el flujo de calor, \dot{W} es el flujo de trabajo, y \dot{m} es el flujo de masa. La Figura 10 muestra un volumen de control (v.c) típico para esta situación.

Sección de
Estancamiento

Volumen
de control

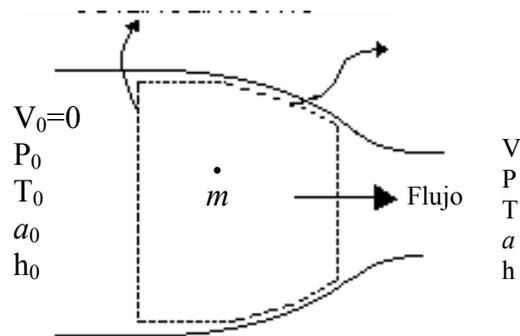


Figura 10. Volumen de control en una sección convergente.

Despreciando el cambio en la energía potencial entre la sección de estancamiento y la salida del v.c, asumiendo flujo adiabático y que no se realiza trabajo sobre las fronteras, la ecuación anterior se reduce a

$$h_o + \frac{V_o^2}{2} = h + \frac{V^2}{2} \quad 4.22$$

Asumiendo que el flujo es acelerado desde el reposo, sección de estancamiento, es decir, $V_o = 0$. La ecuación de energía puede ser escrita como

$$V = \sqrt{2(h_o - h)} \quad 4.23$$

Esta ecuación demuestra que la energía cinética del flujo se transforma totalmente en entalpía. Sustituyendo la ecuación 4.17 en la 4.23 se obtiene.

$$V = \sqrt{2C_p(T_o - T)} \quad 4.24$$

De las ecuaciones 4.11 y 4.12 se puede demostrar que

$$C_P = \frac{k}{k-1} R \quad 4.25$$

Reemplazando la ecuación 4.25 en la 4.24, se obtiene una expresión para la velocidad a través de una sección convergente bajo flujo adiabático, dada por

$$V = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R(T_o - T)} \quad 4.26$$

4.2.3 Razón Temperatura de Estancamiento

Para obtener una expresión en función de la temperatura de estancamiento la ecuación 4.26 puede ser escrita como

$$\frac{T_o}{T} = \frac{(k-1)V^2}{kRT} + 1 \quad 4.27$$

Recordando que $kRT = a^2$ y $M = \frac{V}{a}$, la ecuación 4.27 se transforma en

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad 4.28$$

4.2.4 Flujo de masa por Unidad de Área

Una relación útil para flujo compresible, adiabático, REVERSIBLE O IRREVERSIBLE, es el flujo de masa por unidad de área, el cual puede ser expresado en términos de la temperatura de estancamiento, la presión y el número de Mach.

Combinando la definición de flujo de masa y la ecuación de estado para un gas ideal, se obtiene

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{P}{RT} V = \frac{PV}{\sqrt{kRT}} \sqrt{\frac{k}{R}} \sqrt{\frac{T_o}{T}} \frac{1}{\sqrt{T_o}} \quad 4.29$$

Sustituyendo la ecuación 4.28 en la ecuación 4.29, se obtiene

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P}{\sqrt{T_o}} M \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad 4.30$$

Las relaciones 4.26, 4.28, y 4.30 son válidas para flujos, ISENTRÓPICOS y NO-ISENTRÓPICOS.

4.3 FLUJO ISENTRÓPICO PARA UN GAS IDEAL.

Schreier (1982), Vincenti (1965), y Zucrow (1976), establecen que el flujo adiabático y sin fricción es una idealización que no puede ser alcanzada en flujo de gases reales, sin embargo existen situaciones en las cuales el flujo se aproxima a este límite. El flujo en transiciones, boquillas, y medidores venturi no presenta irreversibilidades considerables debido a las pequeñas distancias recorridas; por otro lado, la transferencia de calor es mínima ya que los cambios que sufren las partículas son lo suficientemente pequeños como para no generar gradientes de velocidad y temperatura importantes.

El estado de estancamiento isentrópico de una variable (temperatura, presión, etc.), corresponde al valor de la variable, que se obtiene al desacelerar el flujo isentrópicamente al estado de velocidad cero. Para el caso de flujo isentrópico a través de una sección convergente, el estado de velocidad cero o reposo, es llamado estado de estancamiento isentrópico y el estado con número de Mach $M=1$ es llamado estado crítico. Todos los estados con la misma entropía y temperatura de estancamiento, tienen el mismo estado de estancamiento isentrópico y el mismo estado crítico. Cuando una corriente de gas con un valor de presión, temperatura, y velocidad, es desacelerada hasta la velocidad cero, la presión final será menor que la presión de estancamiento isentrópico si la desaceleración es irreversible, Figura 11; sin embargo, la temperatura final de estancamiento, será igual a la temperatura de estancamiento adiabático para ambas desaceleraciones, reversible o irreversible.

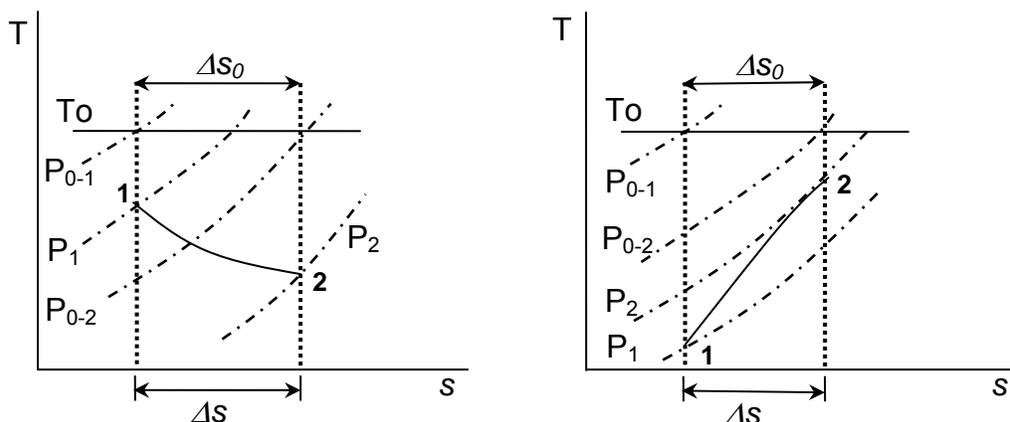


Figura 11. Diagrama T-s para un proceso adiabático. Expansión y Compresión adiabática.

Relaciones entre presión, temperatura y densidad para gases ideales en un proceso isentrópico pueden ser derivadas a partir de las ecuaciones anteriores. En la siguiente derivación se consideran las propiedades del estado inicial como las de estancamiento “ T_o, P_o, a_o, ρ_o ” y las propiedades de cualquier otra sección como “ T, P, a, ρ ”.

Para flujo isentrópico $s_2 - s_1 = 0$, por lo tanto, sustituyendo la ecuación 4.11 en la 4.19, se tiene

$$\ln\left(\frac{T}{T_o}\right) = \frac{C_P - C_v}{C_p} \ln\left(\frac{P}{P_o}\right) \quad 4.31$$

Utilizando la relación

$$\frac{C_P - C_v}{C_p} = \frac{k - 1}{k} \quad 4.32$$

Se obtiene

$$\ln\left(\frac{T}{T_o}\right) = \frac{k - 1}{k} \ln\left(\frac{P}{P_o}\right) \quad 4.33$$

O alternativamente

$$\ln\left(\frac{T}{T_o}\right) = \ln\left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad 4.34$$

$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad 4.35$$

De la ecuación 4.20, procediendo de forma similar, se obtiene

$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^{1-k} \quad 4.36$$

Una expresión adicional puede ser determinada al igualar las ecuaciones 4.35 y 4.36, el resultado es

$$\frac{P}{P_o} = \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^k \quad 4.37$$

También, para el estado de estancamiento y un estado cualquiera, de la ecuación de estado se obtiene una expresión para la constante del gas R

$$R = \frac{P_o}{\rho_o T_o} = \frac{P}{\rho T} \quad 4.38$$

4.3.1 Razón de Temperatura, Presión y Densidad como función del número de Mach.

En el análisis de razón de temperatura hecho anteriormente, se obtuvo una expresión para la razón temperatura de estancamiento en función del número de Mach (Ec. 4.28), la cual junto con las ecuaciones para razón de temperatura bajo flujo isentrópico (Ec 4.35 y Ec. 4.36), pueden ser tomadas como base para el análisis de las

razones de presión y densidad en función del número de Mach, tal como se ilustra a continuación.

De la ecuación 4.35, se obtiene

$$\frac{T_o}{T} = \left(\frac{P_o}{P} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad \mathbf{4.39}$$

Igualando las ecuaciones 4.28 y 4.39, se tiene que

$$1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \left(\frac{P_o}{P} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad \mathbf{4.40}$$

De donde se obtiene

$$\frac{P_o}{P} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad \mathbf{4.41}$$

De la ecuación 4.36, se obtiene

$$\frac{T_o}{T} = \left(\frac{\rho_o}{\rho} \right)^{k-1} \quad \mathbf{4.42}$$

Igualando a la Ec. 4.28, se obtiene

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad \mathbf{4.43}$$

Los valores particulares para las razones de temperatura, presión y densidad en el estado crítico, corresponden a una sección transversal de área mínima denominada garganta, cuando la velocidad del gas es igual a la velocidad del sonido, esto es,

$M = \frac{V}{a} = 1$. Las condiciones de flujo para esa sección se denotan por medio de un asterisco superescrito (X^*). Al reemplazar la razón de calores específicos para aire, $k = 1.4$, en las ecuaciones 4.28, 4.42, y 4.43, se tiene que para la razón de temperatura de estancamiento

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{2}{k+1} = 0.8333 \quad 4.44$$

Para las presiones

$$\frac{P^*}{P_o} = \left[\frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} = 0.5283 \quad 4.45$$

Y para las densidades

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} = \left[\frac{2}{k+1} \right]^{\frac{1}{k-1}} = 0.6339 \quad 4.46$$

4.3.2 Relación para el Flujo de Masa en Términos del Número de Mach.

Para encontrar una forma conveniente de expresar el flujo de masa isentrópico por unidad de área en función del número de Mach, se elimina, de la ecuación para flujo adiabático (Ec.4.30), el término de la presión por medio de la ecuación 4.41 para flujo isentrópico, obteniéndose

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_o}{\sqrt{T_o}} \frac{M}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad 4.47$$

La ecuación anterior permite obtener el flujo de masa isentrópico por unidad de área en función del número de Mach y muestra que, para un número de Mach dado, el flujo de masa isentrópico, es proporcional a la presión de estancamiento e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura de estancamiento.

El valor particular para el máximo flujo por unidad de área se presenta cuando $M = 1$ y es dado por

$$\frac{\dot{m}}{A^*} = \frac{P_o}{\sqrt{T_o}} \sqrt{\frac{k}{R} \frac{1}{\left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{\frac{k+1}{k-1}}}} \quad 4.48$$

Por lo tanto, para un gas con condiciones de flujo isentrópico, el flujo máximo por unidad de área depende solamente de la relación $\frac{P_o}{\sqrt{T_o}}$.

Para el caso específico del aire, donde la razón de calores específicos es $k = C_p / C_v = 1.4$, se tiene que

$$\dot{m} = 0.6847 \frac{A^* P_o}{\sqrt{RT_o}} \quad 4.49$$

Esta ecuación indica que el flujo másico varía linealmente con A^* y P_o , e inversamente con la raíz cuadrada de la temperatura de estancamiento, (T_o) .

En una sección convergente, para flujos por unidad de área cuya razón de presión es mayor a la crítica $\frac{P}{P_o} > \frac{P^*}{P_o} = 0.5283$, se tiene flujo subsónico, es decir $M < 1$. Es conveniente obtener una expresión para el flujo másico en función de las condiciones del recipiente y no del número de MACH, para ello, se parte de la ecuación de continuidad o

nuevamente de la ecuación para flujo de masa isentrópico por unidad de área (Ec. 4.47) y se retoman las ecuaciones para conservación de energía (Ec.4.26) y las ecuaciones de flujo isentrópico (4.35 a 4.43), (**Schreier, 1982**). La derivación de la ecuación se muestra en el **Apéndice A**, el resultado obtenido es

$$\dot{m} = A \sqrt{2P_o \rho_o \frac{k}{k-1} \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{2}{k}} \left(1 - \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)} \quad 4.50$$

Para el caso particular del aire, con $k = 1.4$, se obtiene

$$\dot{m} = A \sqrt{7P_o \rho_o \left(\frac{P}{P_o}\right)^{1.42857} \left(1 - \left(\frac{P}{P_o}\right)^{0.28571}\right)}$$

$$\dot{m} = A \sqrt{7P_o \rho_o \left(\left(\frac{P}{P_o}\right)^{1.42857} - \left(\frac{P}{P_o}\right)^{1.71428}\right)} \quad 4.51$$

4.4 FLUJO A TRAVÉS DE SECCIONES CONVERGENTES.

En ésta sección analizaremos el flujo compresible unidimensional, es decir un flujo en el cual se pueden considerar constantes las propiedades del flujo sobre una sección perpendicular a éste. Los parámetros y variables del flujo variarán por lo tanto solo en la dirección del flujo.

En particular interesa conocer el efecto que tiene un cambio en la sección de paso del flujo (área A), sobre las condiciones del flujo isentrópico de un gas compresible.

La ecuación de energía, para flujo permanente, escrita en forma diferencial para dos secciones infinitesimales, es dada por

$$dh = -d\left(\frac{V^2}{2}\right) = -VdV$$

De la relación termodinámica, $Tds = dh - dP/\rho$, y la condición de entropía constante, se tiene que $dh = dP/\rho$, reemplazando.

$$dP = -\rho V dV \quad 4.52$$

Diferenciando el logaritmo del flujo de masa se tiene

$$d(\ln(\rho AV)) = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad 4.53$$

Sustituyendo la ecuación 4.65 dentro la ecuación 4.66, se obtiene

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dP} \right) \quad 4.54$$

Sí el proceso es isentrópico

$$\frac{dP}{d\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = a^2 \quad 4.55$$

Al reemplazar, finalmente se obtiene

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho V^2} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) = \frac{1 - M^2}{\rho V^2} dP \quad 4.56$$

o sea

$$dP(1 - M^2) = \rho V^2 \frac{dA}{A} \quad 4.57$$

Las ecuaciones 4.52 y 4.57 permiten conocer la variación de la presión, velocidad y densidad con respecto al cambio de área y de acuerdo al tipo de flujo, como se ilustra a continuación

La Figura 12 muestra el efecto del cambio de sección en el comportamiento del flujo subsónico o supersónico.

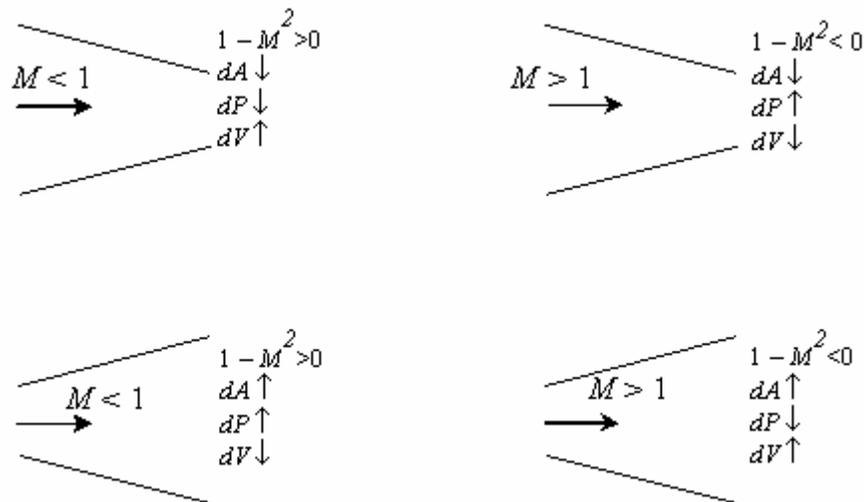


Figura 12. Comportamiento de un gas en conductos convergentes divergentes.

Si el flujo es subsónico $M < 1$ y $(1 - M^2) > 0$. La velocidad y el área cambian en direcciones opuestas. Es decir, si dA disminuye (sección convergente), la presión disminuye (Ec. 4.57) y la velocidad aumenta (Ec. 4.52). Para el caso de una sección divergente, si dA aumenta, la presión aumenta (Ec. 4.57) y la velocidad disminuye (Ec.4.52).

Si el flujo es supersónico $M > 1$ y $(1 - M^2) < 0$, se tiene que un cambio en el área de flujo en una dirección tiene como efecto un cambio de la velocidad en la misma dirección y un cambio de la presión en la dirección opuesta. Es decir, si dA disminuye (sección convergente), la presión aumenta (Ec. 4.57) y la velocidad disminuye (Ec. 4.52). Para el caso de una sección divergente, los efectos son opuestos a los de flujo subsónico. Es decir, si dA aumenta, la presión disminuye (Ec. 4.57) y la velocidad aumenta (Ec. 4.52).

5 MODELOS NUMÉRICOS

5.1 FLUJO DE MASA ISENTRÓPICO A TRAVÉS DE UNA VÁLVULA

Chaudrhy 1987, Wylie et.al. 1993, y Swaffield et.al. 1993, Lee 1999. Modelan la entrada de aire al sistema a través de las válvulas de admisión de aire, como flujo isentrópico a través de boquillas convergentes. Las ecuaciones gobernantes para el modelo de flujo isentrópico fueron desarrolladas en el capítulo anterior, por lo cual en esta sección solo se recuerdan las ecuaciones para flujo de masa y sus condiciones de aplicación.

Flujo sónico, Ec. 4.49

$$P < 0.53 P_o \quad \dot{m} = 0.6847 \frac{A^* P_o}{\sqrt{RT_o}}$$

Flujo subsónico, Ec. 4.51

$$0.53 P_o < P < P_o \quad \dot{m} = A \sqrt{7 P_o \rho_o \left(\left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.42857} - \left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.71428} \right)}$$

A pesar de que estas referencias son comúnmente citadas en los libros de flujo transitorio, no se encontró reporte alguno en la literatura de verificación experimental de este modelo o respuesta del sistema en la válvula de admisión de aire y zonas adyacentes. Lee 1999, reporta mediciones de campo comparadas con la respuesta teórica para un sistema con una válvula de admisión de aire en la parte alta del mismo, sin embargo su análisis se limita a la respuesta de la condición de frontera donde se generan los cambios en las condiciones de flujo.

5.2 FLUJO DE MASA A TRAVÉS DE UNA VÁLVULA DE AIRE CONSIDERANDO IRREVERSIBILIDADES DEL SISTEMA.

El flujo de masa a través de la válvula permite, junto con las ecuaciones de flujo transitorio en líquidos, predecir la respuesta del flujo transitorio a la entrada de aire a la tubería.

En este capítulo se consideran los efectos de la compresibilidad del aire sobre las características de flujo, los efectos de compresibilidad se ven reflejados en una variación de las propiedades del gas. En condiciones reales, la existencia de fricción y obstrucciones en el sistema, ocasionan una pérdida de energía o incremento de entropía. El análisis de las distintas relaciones termodinámicas, permite establecer el comportamiento o cambio experimentado por dichos parámetros, en nuestro caso, el parámetro de mayor interés es el flujo de masa a través de la sección ó válvula, obtenido al considerar las irreversibilidades del sistema.

5.2.1 MODELO MATEMÁTICO.

Se desea obtener una expresión, bajo condiciones no isentrópicas, que permita cuantificar el flujo de masa a través de la válvula en función de la presión. Para ello, a partir de las condiciones de flujo y de las relaciones termodinámicas dadas en el capítulo 4, inicialmente se obtiene una expresión para el número de Mach en función de la presión, y flujo de masa en función del número de Mach, finalmente, mediante técnicas de interpolación, se da una representación gráfica del flujo de masa en función de la presión, la cual es usada en el estudio del efecto de las válvulas de aire como dispositivos de control de flujo transitorio.

5.2.1.1 Ecuaciones Termodinámicas.

La Figura 13, ilustra el flujo en un canal de sección transversal variable, en el cual se consideran los efectos viscosos y el arrastre interno generado por una obstrucción, el efecto generado por la fuerza gravitacional es despreciado ya que se trabaja con un medio gaseoso. Para simplificar el problema, se asume flujo unidimensional, con propiedades constantes en cualquier sección transversal, adicionalmente se considera el tipo de flujo como permanente no-isentrópico.

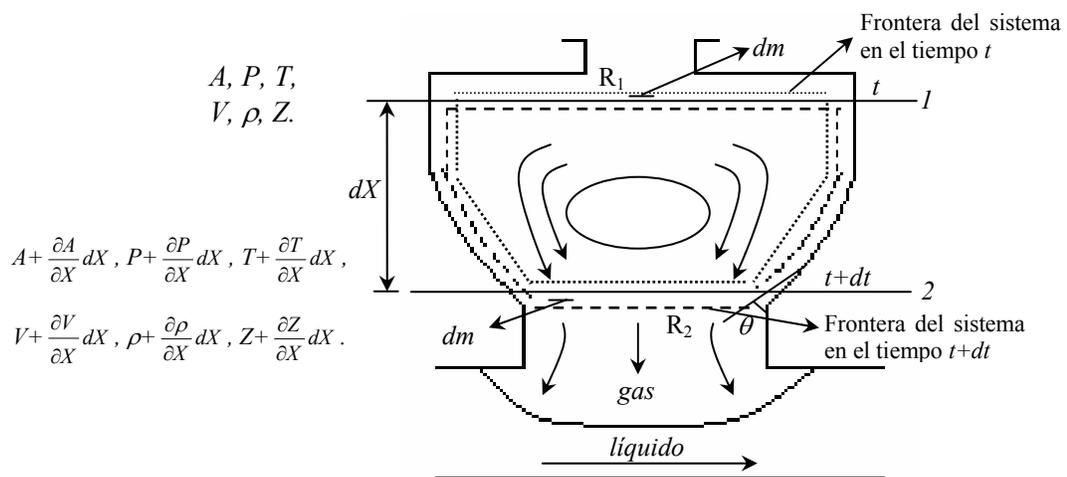


Figura 13. Volumen de Control Para Flujo a Través de un Canal de Sección Variable.

Definiendo el sistema como el fluido dentro del volumen de control, más el fluido que entrará al volumen de control en el siguiente intervalo de tiempo δt . Para el tiempo t , el sistema ocupa el volumen de control más la región R_1 en lugar del volumen de control más la región R_2 como sucede en el tiempo $t + \delta t$, Figura 13. A partir del análisis de la segunda ley de Newton se obtiene.

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mV)$$

$$\frac{d}{dt}(mV) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\{(mV)_{R_2} + (mV)_{vc}\}_{t+\delta t} - \{(mV)_{R_1} + (mV)_{vc}\}_t}{\delta t} \right]$$

$$\frac{d}{dt}(mV) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\{(mV)_{vc}\}_{t+\delta t} - \{(mV)_{vc}\}_t}{\delta t} \right] + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{m_{R_2}(V + dV) - m_{R_1}(V)}{\delta t} \right]$$

Sea: $\frac{m_{R_2}}{\delta t} = \dot{m}_{out}$, $\frac{m_{R_1}}{\delta t} = \dot{m}_{in}$

$$\frac{d}{dt}(mV) = \frac{d}{dt}(mV)_{vc} + \dot{m}_{out}(V + dV) - \dot{m}_{in}(V)$$

Por continuidad, se sabe que. $\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} = \dot{m}$

$$\frac{d}{dt}(mV) = \frac{d}{dt}(mV)_{vc} + \dot{m}(V + dV) - \dot{m}(V)$$

$$\frac{d}{dt}(mV) = \frac{d}{dt}(mV)_{vc} + \dot{m} dV$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mV) = \frac{d}{dt}(mV)_{vc} + \dot{m} dV \quad \mathbf{5.1}$$

La ecuación anterior, se conoce como ecuación de Momentum o cantidad de movimiento, expresada en forma diferencial. El término $\sum F$, representa la suma de todas las fuerzas ejercidas instantáneamente por los alrededores sobre el sistema dado y en la dirección de flujo. En este análisis se desprecian las fuerzas de cuerpo y se consideran solamente las de superficie.

- Fuerza de presión en la sección 1 = AP
- Fuerza de presión en la sección 2 = $-(A + dA)(P + dP)$
- Fuerza de presión sobre las paredes laterales = $\left(P + \frac{dP}{2}\right)dA_w * \sin \theta$
- Fuerza de fricción (F_f) = $-\tau_w * dA_w$
- Fuerza de arrastre (F_D) = $-A\rho \frac{V^2}{2} dC_D$

Donde: A representa el área de la sección, dA representa el diferencial de área, P representa la presión, dP representa el diferencial de presión, A_w representa el área de la pared lateral, τ representa los esfuerzos cortantes sobre las paredes laterales y C_D representa el coeficiente de arrastre generado por el flujo de aire alrededor de la obstrucción.

De acuerdo a **Shapiro (1953)**, el coeficiente de fricción para flujo en conductos, puede ser definido como la razón del esfuerzo cortante en las paredes, a la carga dinámica de la corriente.

$$f = \frac{\tau_w}{\rho V^2 / 2}$$

Rotty (1968), define el diámetro hidráulico como, $D = \frac{4A}{dA_w / dX}$

La fuerza de fricción puede expresarse en función del factor de fricción como

$$F_f = -A\rho \frac{V^2}{2} \left(4f \frac{dX}{D}\right)$$

Sustituyendo los términos anteriores en la ecuación 5.1, y despreciando los términos de segundo orden

$$AP - (A + dA)(P + dP) + (P + \frac{dP}{2})dA - A\rho \frac{V^2}{2} \left(4f \frac{dX}{D} \right) - A\rho \frac{V^2}{2} (dC_D) = \frac{d}{dt} (mV)_{vc} + \dot{m} dV$$

$$AdP + A\rho \frac{V^2}{2} \left\{ 4f \frac{dX}{D} + dC_D \right\} + \frac{d}{dt} (mV)_{vc} + \rho AV dV = 0$$

Bajo flujo permanente, $\frac{d}{dt} (mV)_{vc} = 0$

$$dP + \rho \frac{V^2}{2} \left\{ 4f \frac{dX}{D} + dC_D \right\} + \frac{1}{2} \rho dV^2 = 0 \quad \mathbf{5.2}$$

La pérdida de presión debida a la irreversibilidad, es exactamente igual a la pérdida de fricción y a las obstrucciones de flujo. Por lo cual, de acuerdo a **Rotty (1968)**, es conveniente referirse a este término como un coeficiente de entropía interna definido por dC_s . Si se considera un sistema cerrado.

$$\rho T ds = \rho T \delta \sigma = \frac{1}{2} \rho V^2 \left\{ 4f \frac{dX}{D} + dC_D \right\} = \rho \frac{V^2}{2} dC_s$$

Donde σ es la producción o generación de entropía.

Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento (5.2), puede ser ahora escrita en términos del coeficiente de entropía interna dC_s , como.

$$dP + \frac{1}{2} \rho dV^2 + \rho \frac{V^2}{2} \{dC_s\} = 0 \quad \mathbf{5.3}$$

La ecuación anterior, también puede ser expresada en términos del número de Mach, como

$$\frac{dP}{P} = -\frac{kM^2}{2} \left\{ dC_s + \frac{dV^2}{V^2} \right\} \quad 5.4$$

Retomando algunas relaciones útiles.

Expresando la ley de gases ideales en forma diferencial

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad 5.5$$

El número de Mach como

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T} \quad 5.6$$

La ecuación de energía como

$$\frac{dT}{T} + \frac{(k-1)}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} = 0 \quad 5.7$$

Y la ecuación de conservación de masa como

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{dV^2}{V^2} = 0 \quad 5.8$$

Eliminando dT/T de las ecuaciones 5.5 y 5.7, se obtiene

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} \quad 5.9$$

Sustituyendo la ecuación 5.8 en la 5.9 se tiene

$$\frac{dV^2}{V^2} = -\frac{dP}{P} \left\{ \frac{2}{1+(k-1)M^2} \right\} \quad 5.10$$

Sustituyendo la ecuación 5.10 en la 5.4.

$$\frac{dP}{P} = -\frac{kM^2}{2} \frac{dC_s}{\left\{1 - \frac{kM^2}{1 + (k-1)M^2}\right\}}$$

El término, $1 - \frac{kM^2}{1 + (k-1)M^2}$, puede expresarse como

$$1 - \frac{kM^2}{1 + (k-1)M^2} = \frac{1 - M^2}{1 + (k-1)M^2}$$

Entonces

$$\frac{dP}{P} = \frac{-kM^2 \{1 + (k-1)M^2\}}{2(1 - M^2)} dC_s \quad 5.11$$

Combinando las ecuaciones 5.6 y 5.5, se obtiene

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dM^2}{M^2} \quad 5.12$$

Sustituyendo la ecuación 5.8 en la 5.12, se obtiene

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dM^2}{M^2} \quad 5.13$$

Igualando la ecuación 5.13 a la 5.4, se obtiene

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{kM^2}{2} (dC_s) + \left\{ \frac{kM^2 + 1}{2} \right\} \frac{dV^2}{V^2} \quad 5.14$$

Sumando las ecuaciones 5.6 y 5.7, se obtiene

$$\frac{dV^2}{V^2} = \frac{dM^2}{M^2} \frac{2}{2 + (k-1)M^2} \quad 5.15$$

Sustituyendo la ecuación 5.15 en la 5.14, se obtiene

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{kM^2 \left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right\}}{1 - M^2} dC_s \quad 5.16$$

Sustituyendo, en la ecuación anterior, dM^2 por $2MdM$

$$dC_s = \frac{2(1 - M^2)}{kM^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2} \right\} \frac{dM}{M} \quad 5.17$$

Sustituyendo la ecuación 5.16 en la ecuación 5.15, se obtiene

$$\frac{dV^2}{V^2} = \frac{kM^2}{(1 - M^2)} dC_s \quad 5.18$$

Reemplazando la ecuación 5.18 en la 5.7, se obtiene

$$\frac{dT}{T} = - \frac{kM^4(k-1)}{2(1 - M^2)} dC_s \quad 5.19$$

Reemplazando la ecuación 5.18 en la 5.8, se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{1}{2} \frac{kM^2}{(1 - M^2)} dC_s \quad 5.20$$

A partir de las ecuaciones 4.39 y 4.28, para **flujo isentrópico** se obtiene.

$$\frac{P_o}{P} = \left\{ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right\}^{\frac{k}{k-1}}$$

Expresando la ecuación anterior en forma diferencial

$$\frac{dP_o}{P_o} = \frac{dP}{P} + \left\{ \frac{kM^2/2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right\} \frac{dM^2}{M^2} \quad \mathbf{5.21}$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación 5.11, para $\frac{dP}{P}$, en la expresión anterior, se obtiene

$$\frac{dP_o}{P_o} = \frac{-kM^2 \{1 + (k-1)M^2\}}{2(1-M^2)} dC_s + \left\{ \frac{kM^2/2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right\} \frac{dM^2}{M^2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, el valor obtenido en la Ec. 5.16 para $\frac{dM^2}{M^2}$, se obtiene

$$\frac{dP_o}{P_o} = -\frac{kM^2}{2} dC_s \quad \mathbf{5.22}$$

Dado que el flujo es adiabático, la temperatura de estancamiento es constante, por lo cual el cambio de entropía, es dado por la segunda ley de termodinámica como

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}, \quad ds = -R \frac{dP}{P}, \quad R = C_p \left\{ \frac{k-1}{k} \right\}$$

$$\frac{ds}{C_p} = -\frac{k-1}{k} \frac{dP_o}{P_o}$$

Sustituyendo la ecuación 5.22 en la expresión anterior, se obtiene

$$\frac{ds}{C_p} = \frac{(k-1)M^2}{2} dC_s \quad 5.23$$

Las ecuaciones 5.17 a 5.20, 5.22, y 5.23, fueron escritas en forma diferencial, para facilitar la evaluación de la integral de acuerdo a las condiciones de flujo, es decir, para flujo sónico la integral se evalúa para números de Mach entre $M=M_1$ y $M=M_2=1$. De forma similar para flujo subsónico, la integral se evalúa entre $M=M_1$ y $M=M_2$.

Es importante destacar, que para el caso en estudio, el límite inferior de integración es $M=M_1$, esto se debe a que en realidad a la entrada del volumen de control, el flujo comienza a acelerarse, por lo cual el flujo posee una pequeña velocidad no despreciable en el análisis de irreversibilidades; a diferencia del flujo isentrópico, en el cual el límite inferior es tomado como $M=0$.

El próximo paso es integrar estas ecuaciones, con el objeto de obtener fórmulas convenientes para aplicaciones prácticas, para ello se usa el número de Mach como variable independiente, y los límites de integración se toman de acuerdo a las condiciones de flujo.

➤ Integrando la ecuación 5.17 se obtiene

$$\int dC_s = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{2(1-M^2)}{kM^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{(k-1)}{2}M^2} \right\} \right] \frac{dM}{M}$$

$\int dC_s = C_s$: Coeficiente de entropía interna

$$\int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{2(1-M^2)}{kM^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{(k-1)}{2}M^2} \right\} \right] \frac{dM}{M} = \left[-\frac{1}{kM^2} - \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$C_s = \left[-\frac{1}{kM^2} - \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right\} \right]_{M_1}^{M_2} \quad 5.24$$

Es conveniente expresar las propiedades locales de flujo, en función del número de Mach. Por esto se realizan las siguientes operaciones.

- Dividiendo la ecuación 5.11 por la ecuación 5.16, se obtiene

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1 + (k-1)M^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \frac{dM}{M}$$

Integrando

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = \int_{M_1}^{M_2} \left[-\frac{1 + (k-1)M^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} \right] \frac{dM}{M}$$

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left[\ln \left\{ \frac{1}{M \left\{ \sqrt{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right\}} \right\} \right]_{M_1}^{M_2} \quad 5.25$$

- Dividiendo la ecuación 5.18 entre la ecuación 5.16, se obtiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{2}{2 + (k-1)M^2} \frac{dM}{M}$$

Integrando

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{2}{2 + (k-1)M^2} \right] \frac{dM}{M}$$

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \left[\ln \left\{ \frac{M}{\left\{ 2 + (k-1)M^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

5. 26

➤ Dividiendo la ecuación 5.19 entre la ecuación 5.16, se obtiene

$$\frac{dT}{T} = - \frac{M(k-1)}{1 + \frac{(k-1)}{2}M^2} dM$$

Integrando

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = - \int_{M_1}^{M_2} \frac{M(k-1)}{1 + \frac{(k-1)}{2}M^2} dM$$

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left[- \ln \left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2}M^2 \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

5. 27

➤ Dividiendo la ecuación 5.20 entre la ecuación 5.16, se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{2}{2 + (k-1)M^2} \frac{dM}{M}$$

Integrando

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = - \int_{M_1}^{M_2} \frac{2}{2 + (k-1)M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \left[\ln \left\{ \frac{\left(2 + (k-1)M^2\right)^{\frac{1}{2}}}{M} \right\} \right]_{M_1}^{M_2} \quad \mathbf{5.28}$$

➤ Dividiendo la ecuación 5.22 entre la ecuación 5.16, se obtiene

$$\frac{dP_o}{P_o} = \frac{2(M^2 - 1)}{2 + (k-1)M^2} \frac{dM}{M}$$

Integrando

$$\int_{P_{o-1}}^{P_{o-2}} \frac{dP_o}{P_o} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{2(M^2 - 1)}{2 + (k-1)M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\ln\left(\frac{P_{o-2}}{P_{o-1}}\right) = \left[\ln \left\{ \frac{\left\{2 + (k-1)M^2\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M} \right\} \right]_{M_1}^{M_2} \quad \mathbf{5.29}$$

➤ Dividiendo la ecuación 5.23 entre la ecuación 5.16, se obtiene

$$\frac{ds}{C_p} = \frac{(k-1)(1-M^2)}{k \left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right\}} \frac{dM}{M}$$

Integrando

$$\frac{1}{C_p} \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{(k-1)(1-M^2)}{k \left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right\}} \right] \frac{dM}{M}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{C_p} = \left[\ln \left\{ \frac{M^{\frac{k-1}{k}}}{\left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right\}^{\frac{k+1}{2k}}} \right\} \right]_{M_1}^{M_2} \quad \mathbf{5.30}$$

Como se menciono anteriormente, en las ecuaciones 5.24 a 5.30, el límite inferior de evaluación de la integral debe ser $M = M_1 \neq 0$, si la integral es evaluada para $M_1 = 0$, se obtiene una indeterminación matemática, esto se debe a que el fluido, tanto a la entrada como a la salida, se encuentra en movimiento ($M \neq 0$), siendo el número de Mach, en las expresiones matemáticas obtenidas, el parámetro de mayor interés al representar las irreversibilidades del sistema.

Ahora, se procede a evaluar las expresiones 5.24 a 5.30, de acuerdo a las condiciones de flujo.

Flujo subsónico: Números de Mach entre $M = M_1$ y $M = M_2$.

➤ Evaluando la expresión obtenida para el coeficiente de entropía interna, ecuación 5.24, se obtiene

$$C_s = \left[-\frac{1}{kM^2} - \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$C_s = \frac{M_2^2 - M_1^2}{kM_1^2 M_2^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{M_1^2 \left\{ 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right\}}{M_2^2 \left\{ 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right\}} \right\} \quad 5.31$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de presiones, ecuación 5.25, se obtiene.

$$\ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \left[\ln \left\{ \frac{1}{M \left\{ \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right\}} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_{Atm}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad 5.32$$

Donde el subíndice *Atm*, es usado para indicar que la presión a la entrada de la sección es la atmosférica, ($P_1 = P_{Atm}$).

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de temperatura, ecuación 5.27, se obtiene

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \left[-\ln \left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \quad 5.33$$

Recordando que, para el caso en estudio, la temperatura del aire a condiciones atmosféricas, corresponde a la temperatura de estancamiento, es decir, $T_{Atm} = T_o$, la ecuación anterior es la misma expresión, que se obtendría al evaluar la razón de

temperatura de estancamiento, ecuación 4.28, válida tanto para flujos isentrópicos y no – isentrópicos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_o/T_1}{T_o/T_2} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2}$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de densidades, ecuación 5.28, se obtiene

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \left[\ln\left\{ \frac{\left(2 + (k-1)M^2\right)^{\frac{1}{2}}}{M} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left\{ \frac{2 + (k-1)M_2^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{5.34}$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de presiones de estancamiento, ecuación 5.29, se obtiene

$$\ln\left(\frac{P_{o-2}}{P_{o-1}}\right) = \left[\ln\left\{ \frac{\left\{2 + (k-1)M^2\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$\frac{P_{o-2}}{P_{o-1}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \mathbf{5.35}$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para el cambio de entropía, ecuación 5.30, se obtiene

$$\frac{s_2 - s_1}{C_p} = \left[\ln \left\{ \frac{M_2^{\frac{k-1}{k}}}{\left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M_2^2 \right\}^{\frac{k+1}{2k}}} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{k}{k-1} R^* \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left\{ \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right\}^{\frac{k+1}{2k}} \right] \quad 5.36$$

Para **flujo sónico**, las integrales se evalúan para números de Mach entre $M = M_1$ y $M=M_2=1$. Las condiciones de flujo para la sección crítica, donde $M=1$, se denotan por medio de un asterisco superescrito (X^*).

➤ Evaluando la expresión obtenida para el coeficiente de entropía interna, ecuación 5.24, se obtiene

$$C_s = C^* = \left[-\frac{1}{kM^2} - \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right\} \right]_{M_1}^1$$

$$C_s^* = \frac{1 - M_1^2}{kM_1^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{M_1^2(k+1)}{2 + (k-1)M_1^2} \right\} \quad 5.37$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de presiones, ecuación 5.25, se obtiene

$$\ln\left(\frac{P^*}{P_1}\right) = \left[\ln \left\{ \frac{1}{M \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2}} \right\} \right]_{M_1}^1$$

$$\frac{P^*}{P_1} = M_1 \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{k+1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{5.38}$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de temperatura, ecuación 5.27 se obtiene

$$\ln\left(\frac{T^*}{T_1}\right) = \left[-\ln \left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right\} \right]_{M_1}^1$$

$$\frac{T^*}{T_1} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{k+1} \quad \mathbf{5.39}$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de densidades, ecuación 5.28, se obtiene

$$\ln\left(\frac{\rho^*}{\rho_1}\right) = \left[\ln \left\{ \frac{\left(2 + (k-1)M^2\right)^{\frac{1}{2}}}{M} \right\} \right]_{M_1}^1$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_1} = M_1 \left\{ \frac{k+1}{2 + (k-1)M_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{5.40}$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para la razón de presiones de estancamiento, ecuación 5.29, se obtiene

$$\ln\left(\frac{P_o^*}{P_{o-1}}\right) = \left[\ln \left\{ \frac{\left\{ 2 + (k-1)M^2 \right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M} \right\} \right]_{M_1}^1$$

$$\frac{P_o^*}{P_{o-1}} = M_1 \left\{ \frac{k+1}{2 + (k-1)M_1^2} \right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \mathbf{5.41}$$

➤ Evaluando la expresión obtenida para el cambio de entropía, ecuación 5.30, se obtiene

$$\frac{s^* - s_1}{C_p} = \left[\ln \left\{ \frac{M^{\frac{k-1}{k}}}{\left\{ 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right\}^{\frac{k+1}{2k}}} \right\} \right]_{M_1}^{M_2}$$

$$s^* - s_1 = \frac{k}{k-1} R^* \ln \left\{ \left(\frac{1}{M_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left\{ \frac{2 + (k-1)M_1^2}{k+1} \right\}^{\frac{k+1}{2k}} \right\} \quad \mathbf{5.42}$$

FLUJO DE MASA.

El flujo de masa, a través de la sección, puede ser ahora determinado a partir de las condiciones de flujo, como se muestra a continuación.

Por definición de flujo de masa, se tiene que.

$$\dot{m} = \rho AV \qquad \dot{m} = \rho_2 A_2 V_2 \qquad \frac{\dot{m}}{A_2} = \rho_2 V_2$$

De la ecuación de gases ideales, se obtiene.

$$P_2 = \rho_2 RT_2 \quad \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2}$$

Sustituyendo en la ecuación para flujo de masa por unidad de área.

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \frac{P_2}{RT_2} V_2, \text{ aplicando la definición de velocidad del sonido, } a = \sqrt{kRT}$$

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \frac{P_2}{\sqrt{kRT_2}} \sqrt{\frac{k}{RT_2}} V_2$$

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \frac{P_2}{\sqrt{RT_2}} \sqrt{k} M_2$$

5. 43

Para un flujo adiabático, la temperatura de estancamiento permanece constante, por lo tanto.

$$\frac{T_o}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \quad \frac{T_o}{T_2} = \frac{2 + (k-1)M_2^2}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenida para flujo de masa por unidad de área, Ec.5.43, se obtiene.

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \sqrt{\frac{k}{R}} \sqrt{\frac{T_o}{T_2}} \frac{P_2}{\sqrt{T_o}} M_2$$

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_2}{\sqrt{T_o}} \sqrt{\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2}} M_2$$

5. 44

5.2.2 Resultados Análisis De Irreversibilidades.

Al considerar las irreversibilidades generadas por obstrucciones y fricción en las paredes del conducto, las ecuaciones que gobiernan el flujo a través de una sección variable, para números de Mach entre $0 < M \leq 1$, finalmente pueden ser escritas como.

- Coeficiente de Entropía Interna, Ec.5.31.

$$C_s = \frac{M_2^2 - M_1^2}{kM_1^2M_2^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \left\{ \frac{M_1^2 \left\{ 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right\}}{M_2^2 \left\{ 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right\}} \right\}$$

- Presión a la salida de la sección, Ec. 5.32.

$$P_2 = P_1 \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad 5.45$$

- Presión de Estancamiento, Ec.5.35.

$$P_{o-2} = P_{o-1} \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2 + (k-1)M_1^2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad 5.46$$

- Cambio de Entropía, Ec. 5.36.

$$s_2 - s_1 = \frac{k}{k-1} R^* \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left\{ \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \right\}^{\frac{k+1}{2k}} \right]$$

- Flujo de Masa por unidad de Área, Ec. 5.44.

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_2}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2 + (k-1)M_2^2}{2}} M_2$$

Donde M_1 es el número de Mach en las inmediaciones de la entrada a la válvula, y M_2 es el número de Mach a la salida de la válvula, justo en la unión con la tubería, Figura 14.

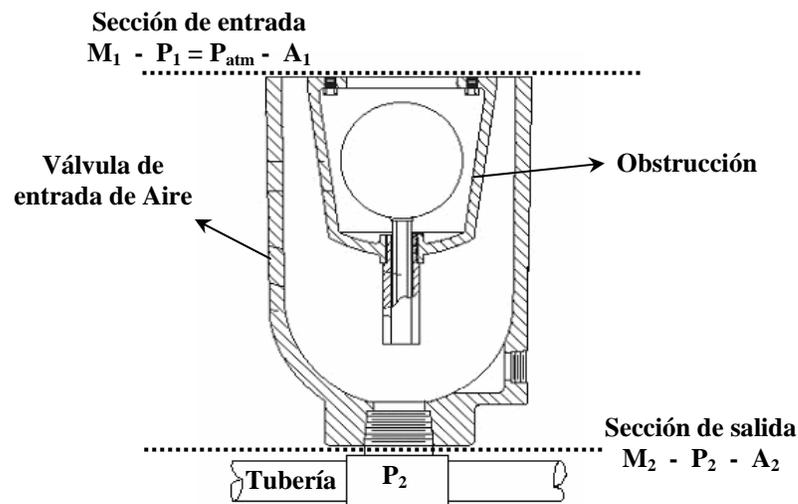


Figura 14. Esquema de una válvula de entrada de aire.

En las ecuaciones anteriores, cada uno de los parámetros de interés, es expresado en función del número de Mach a la entrada y a la salida. En este análisis la entrada corresponde a las condiciones atmosféricas alrededor de la válvula, mientras que, la salida corresponde a las condiciones del aire dentro de la tubería. Como se mencionó anteriormente, las expresiones obtenidas no pueden ser evaluadas para un número de Mach a la entrada igual a cero, ya que matemáticamente se tendría una indeterminación. Sin embargo, dadas las condiciones en estudio, se espera que la velocidad a la entrada del sistema sea baja, ya que el flujo comienza a acelerarse desde el reposo en esa sección, por lo tanto se procede a realizar un análisis de sensibilidad de la expresiones dadas en forma

cualitativa, para números de Mach a la entrada bajos $M_1 = 0.001$, $M_1 = 0.01$, y $M_1 = 0.1$.

Las condiciones a la entrada del sistema son conocidas, y están dadas por

$$P_1 = P_{Atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad k_{aire} = 1.4 \quad R = 286.7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}}$$

El comportamiento de cada uno de los parámetros de interés de acuerdo a las condiciones a la entrada del sistema es mostrado a continuación.

➤ Presión a la salida de la sección.

En la Figura 15, se observa que la tendencia general de las curvas para los tres números de Mach a la entrada del sistema es la misma, al variar el número de Mach a la entrada (M_1), se obtiene una variación de la presión a la salida (P_2) proporcional a la del número de Mach (M_1), es decir, si el número de Mach (M_1) se incrementa en un factor de 10, la presión a la salida incrementará su magnitud en ese mismo factor. Así mismo, se observa que cuando el número de Mach a la salida (M_2) tiende a cero, la curva tiende asintóticamente a infinito, representando la indeterminación matemática ya mencionada. Adicionalmente se nota un comportamiento de la presión (P_2) aproximadamente constante para números de Mach (M_2) mayores que 0.8, lo que indica que para estos valores se están alcanzando las condiciones críticas de flujo o flujo sónico.

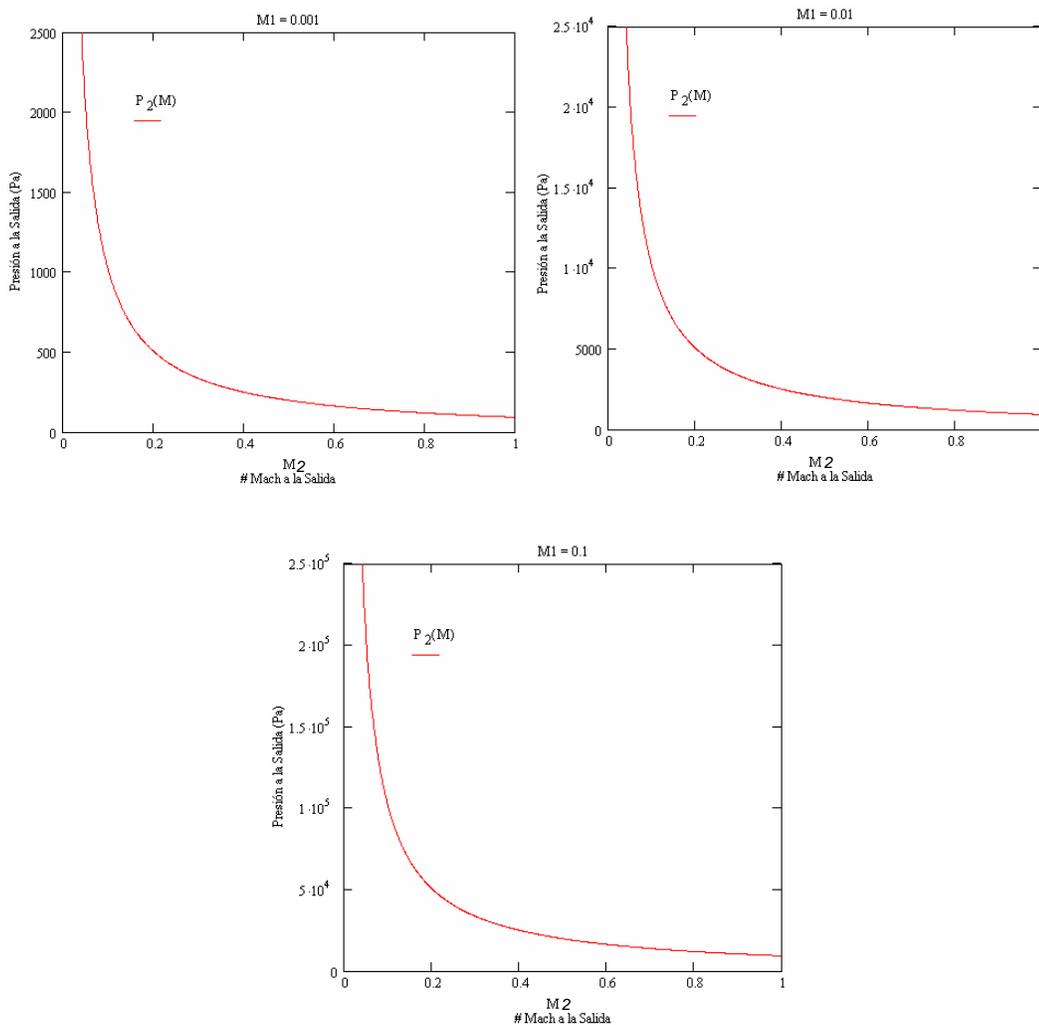


Figura 15. Presión en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.

Una expresión simplificada que describe el comportamiento de la presión en función del número de Mach puede ser obtenida al realizar una regresión potencial de las curvas anteriores (Figura 15), como se muestra a continuación.

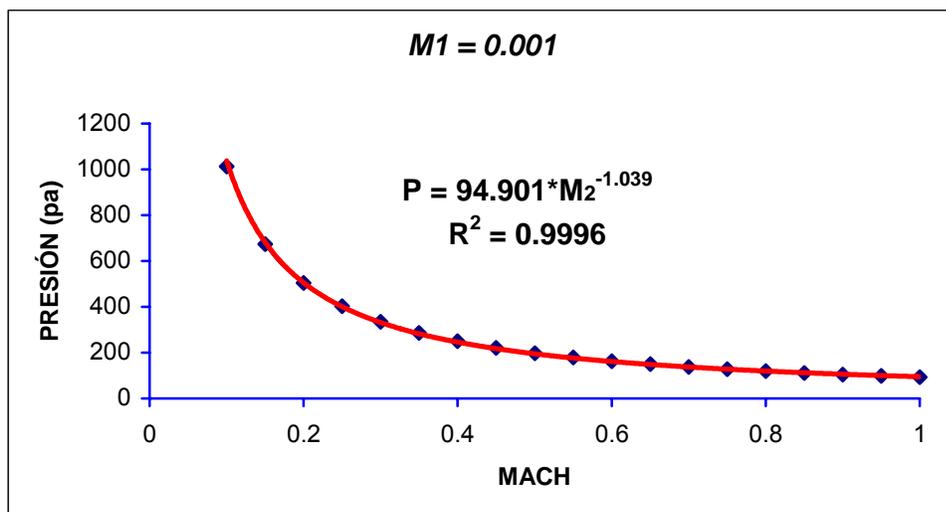


Figura 16. Regresión potencial para la presión en función del número de Mach a la salida.

Para $M_1 = 0.001$, la expresión obtenida es

$$P_2 = 94.901 * M_2^{-1.039} \quad 5.47$$

De forma similar, para los demás números de Mach (M_1) en estudio, se obtiene

Para $M_1 = 0.01$:

$$P_2 = 948.99 * M_2^{-1.039} \quad 5.48$$

Para $M_1 = 0.1$:

$$P_2 = 9499.3 * M_2^{-1.039} \quad 5.49$$

Donde: P_2 es la presión absoluta a la salida de la sección, expresada en Pascales.

En las expresiones anteriores se puede observar la proporcionalidad entre el número de Mach a la entrada (M_1), y la presión de salida (P_2) mediante la constante que multiplica a M_2 . Adicionalmente se nota que, para los casos en estudio, el exponente del

número de Mach a la salida del sistema es el mismo, indicando que la razón de decrecimiento de la presión con M_2 es la misma.

Las ecuaciones obtenidas en la regresión potencial, pueden ser expresadas de forma inversa, es decir, el número de Mach (M_2) en función de la presión a la salida del sistema (P_2), estas expresiones facilitarán, más adelante, el procedimiento matemático usado para determinar el flujo de masa por unidad de área, expresando este último solamente en función de la presión de salida (P_2), y no del número de Mach. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

Tabla 3. Número de Mach (M_2) en función de la presión a la salida del sistema (P_2)

<i>Mach a la entrada M_1</i>	<i>Expresión Obtenida</i>
0.001	$M_2 = 79.839 * (P_2)^{-0.9621}$
0.01	$M_2 = 731.66 * (P_2)^{-0.9621}$
0.1	$M_2 = 6710.6 * (P_2)^{-0.9621}$

➤ Coefficiente de Entropía.

La Figura 17, muestra el comportamiento del coeficiente de entropía en función del número de Mach (M_2), para diferentes valores de Mach a la entrada (M_1). Se observa como la magnitud del coeficiente varía de forma inversamente proporcional al incremento del número de Mach a la entrada del sistema (M_1), así mismo, en los tres casos, se observa que para números de Mach a la salida, aproximadamente iguales a 0.4, el valor del coeficiente de entropía disminuye notablemente su razón de crecimiento. Ambas situaciones pueden ser explicadas, si el coeficiente de entropía es visto como un indicativo de la producción de entropía o como una medida o razón de que tan grande son las irreversibilidades del sistema con respecto a la energía del mismo, asociada a su

energía cinética, o viceversa, $dC_s = \frac{T\delta\sigma}{\frac{1}{2}V^2}$. Por lo tanto, a menor energía de entrada

en el sistema, mayor será la magnitud del coeficiente de entropía, tal como se observa en

la Figura 17. En otras palabras, a menor energía de entrada, se requiere un gradiente de presiones mucho mayor para vencer las irreversibilidades y generar flujo de masa a través del sistema. A medida que el gradiente de presiones necesario para vencer las irreversibilidades, es alcanzado, la razón de crecimiento del coeficiente de entropía disminuye.

Adicionalmente se observa que para números de Mach a la salida del sistema (M_2), aproximadamente iguales a $M_2=0.8$, el coeficiente de entropía alcanza un valor constante, de acuerdo a esto se puede inferir que se están alcanzando las condiciones críticas de flujo, lo que correspondería a flujo sónico.

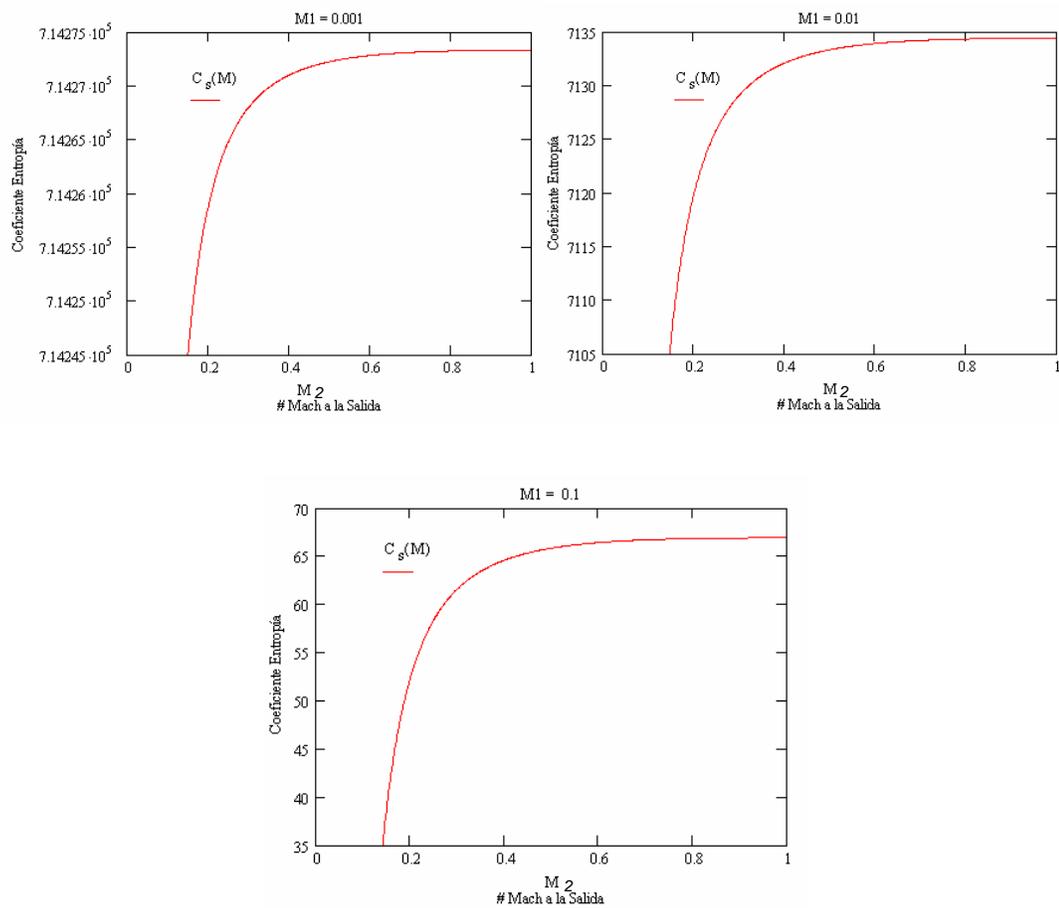


Figura 17. Coeficiente de entropía en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.

➤ Presión de Estancamiento.

La Figura 18 muestra el comportamiento de la presión de estancamiento en función del número de Mach (M_2), para diferentes valores de Mach a la entrada (M_1). Se observa un comportamiento similar al observado para la presión de salida, en el cual se obtiene una variación en la magnitud de la presión proporcional al número de Mach (M_1). Adicionalmente el comportamiento de la presión de estancamiento hace significancia física, ya que por definición del estado de estancamiento se requiere que la variación de la presión de estancamiento sea negativa o cero ($\Delta s = 0$), es decir la presión de estancamiento a la salida de la sección (P_{o-2}), es menor que la presión de estancamiento a la entrada (P_{o-1}), Figura 19.

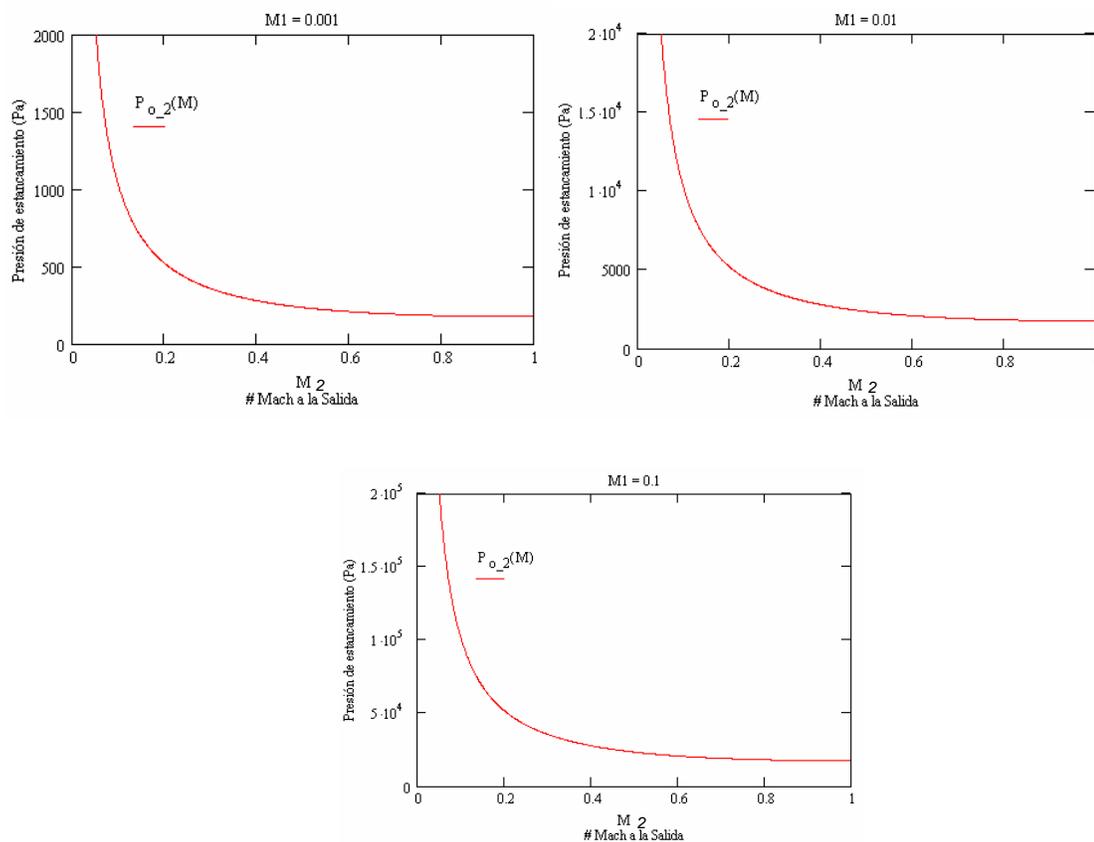


Figura 18. Presión de estancamiento en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.

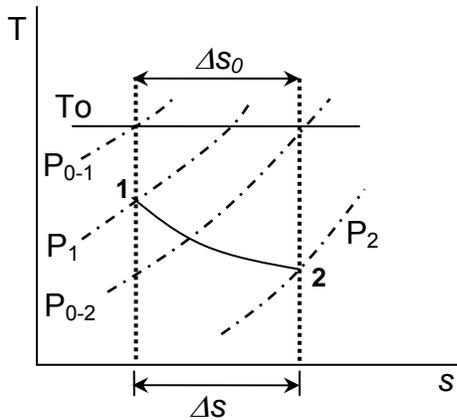


Figura 19. Presión de estancamiento para un proceso irreversible.

➤ Cambio de Entropía.

La Figura 20, muestra el comportamiento de la entropía en función del número de Mach. La tendencia de la curva es similar a la obtenida para el coeficiente de entropía interna, ya mencionado.

Retomando la definición de cambio de entropía, asumiendo sistema cerrado, para un proceso adiabático e irreversible, $ds = \frac{\delta q}{T} + \delta\sigma$; donde $\frac{\delta q}{T} = 0$, por flujo adiabático, y $\sigma \geq 0$ es la cantidad de entropía generada o producción de entropía en el proceso debido a las irreversibilidades internas. La expresión, ds o cambio en entropía es por lo tanto mayor a cero ($ds > 0$) para procesos irreversibles e igual a cero ($ds = 0$) para procesos reversibles. Si se toma el número de Mach como un indicador de la energía cinética que tiene el sistema, para un proceso reversible la energía inicial será igual a la final, es decir $ds = 0$ cuando $M_1 = M_2$, y $ds > 0$ cuando $M_1 \neq M_2$, tal como se observa en la Figura 20.

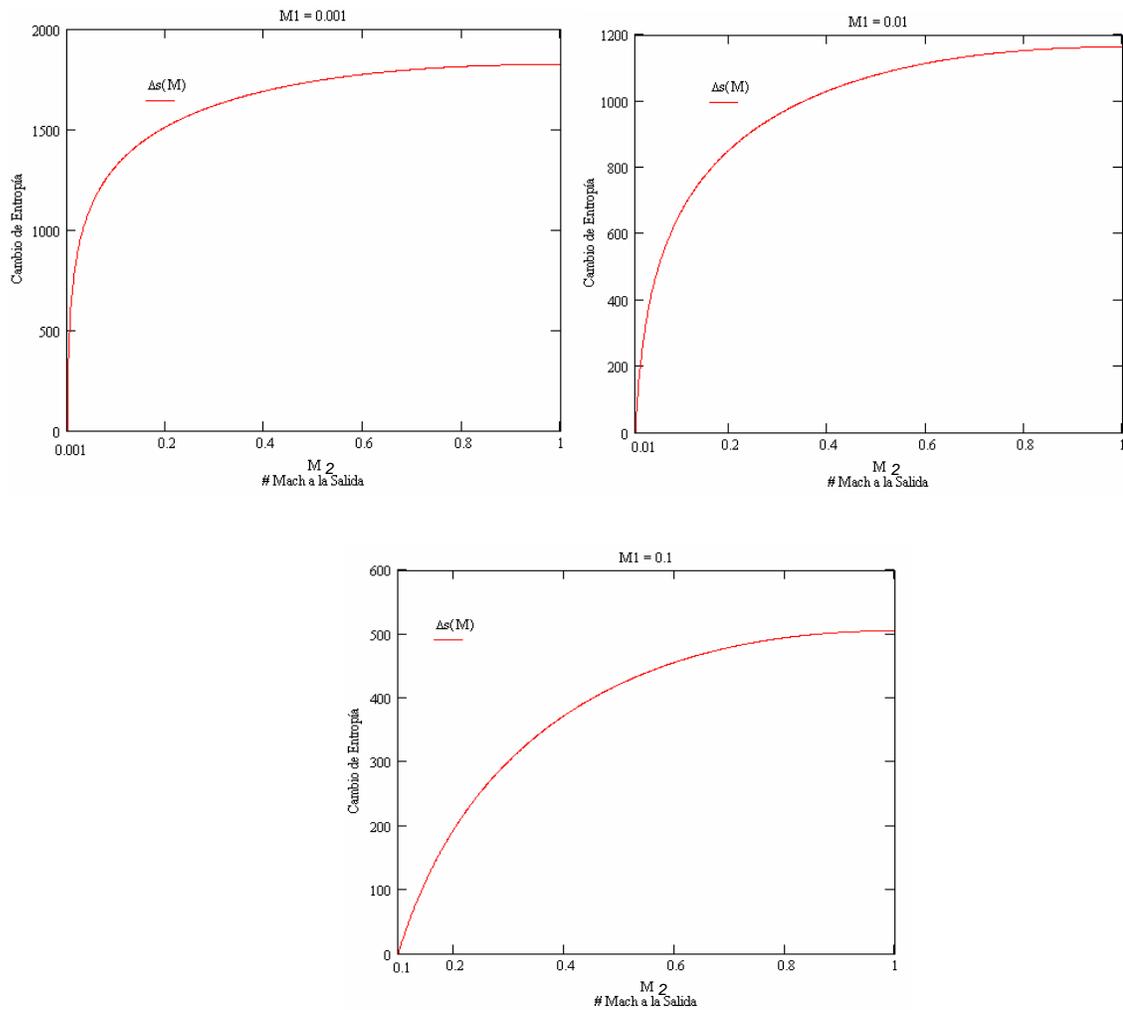


Figura 20. Cambio de Entropía en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.

➤ Flujo de Masa.

La variable de mayor interés en nuestro estudio es el flujo de masa a través de la sección, por lo cual su comportamiento es analizado, tanto en función del número de Mach como de la variación de la presión a la salida del sistema. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

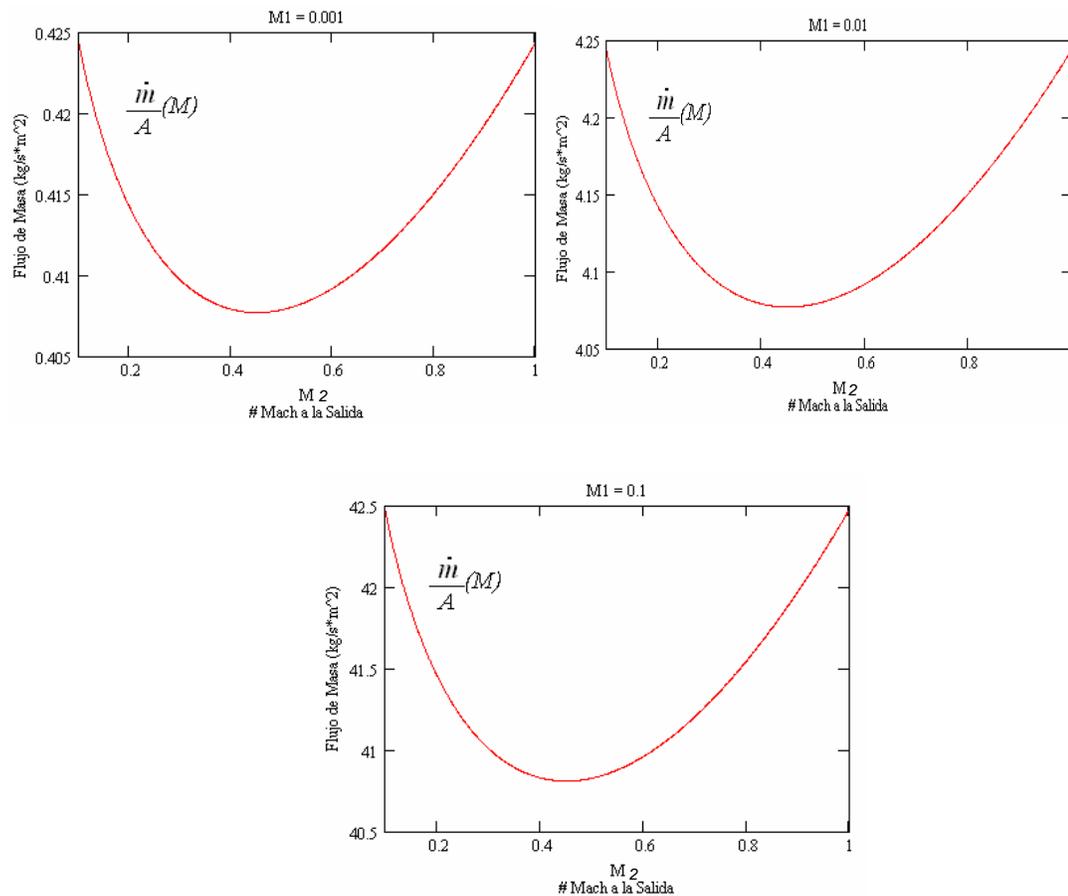


Figura 21. Flujo de masa por unidad de área, en función del número de Mach a la entrada y salida del sistema.

La Figura 21, muestra el flujo de masa en función del número de Mach a la salida del sistema (M_2), para diferentes números de Mach a la entrada (M_1). Se observa, en los tres casos, que para números de Mach (M_2) menores que 0.4, la gráfica no hace significancia física, es decir, a medida que aumenta el número de Mach (M_2), debería aumentar el flujo de masa, contrario a lo observado. Lo anterior puede interpretarse como que para números de Mach (M_2) entre $M_1 -$ y 0.4, el flujo no tiene la suficiente energía para vencer la resistencia generada por la fricción y la obstrucción, o las irreversibilidades del sistema. Cuando las condiciones críticas de flujo son alcanzadas, flujo sónico ($M_2=1$), se obtiene el mayor valor de flujo de masa.

La representación gráfica de la parte para la cual el flujo de masa en función del número de mach tiene significado físico, es mostrada en la Figura 22.

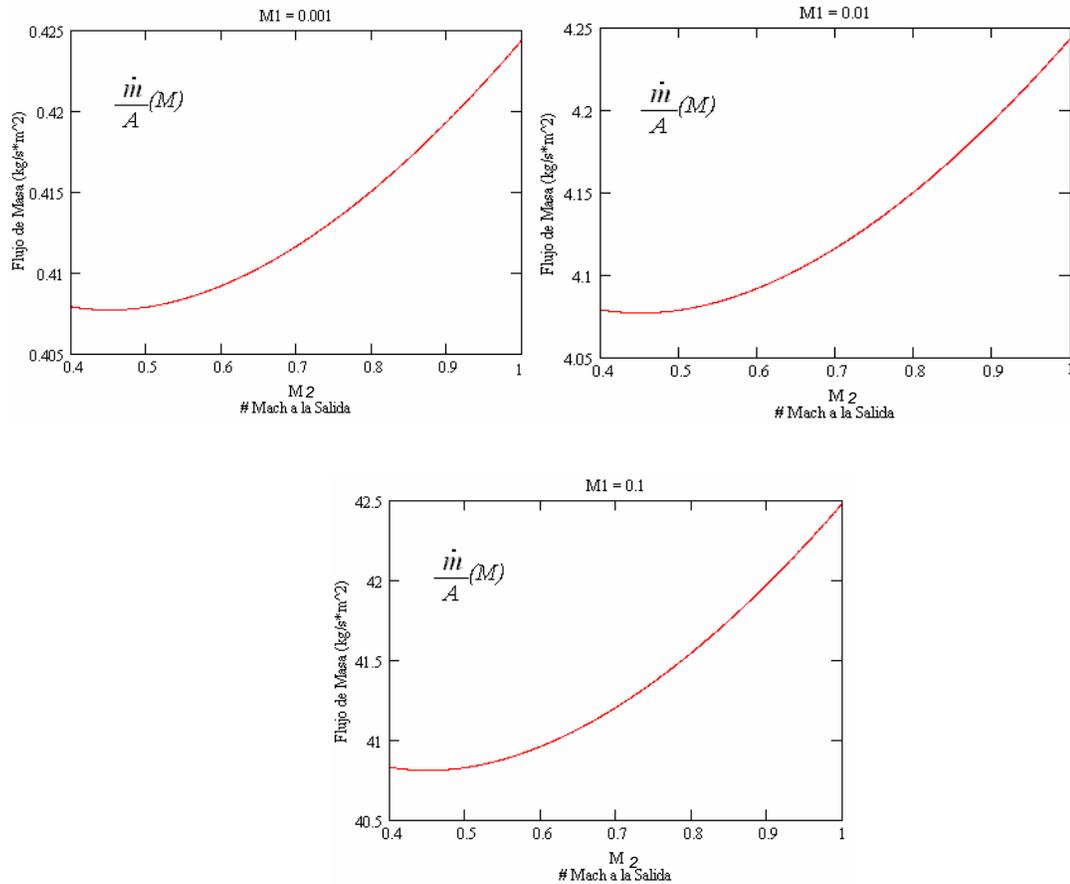
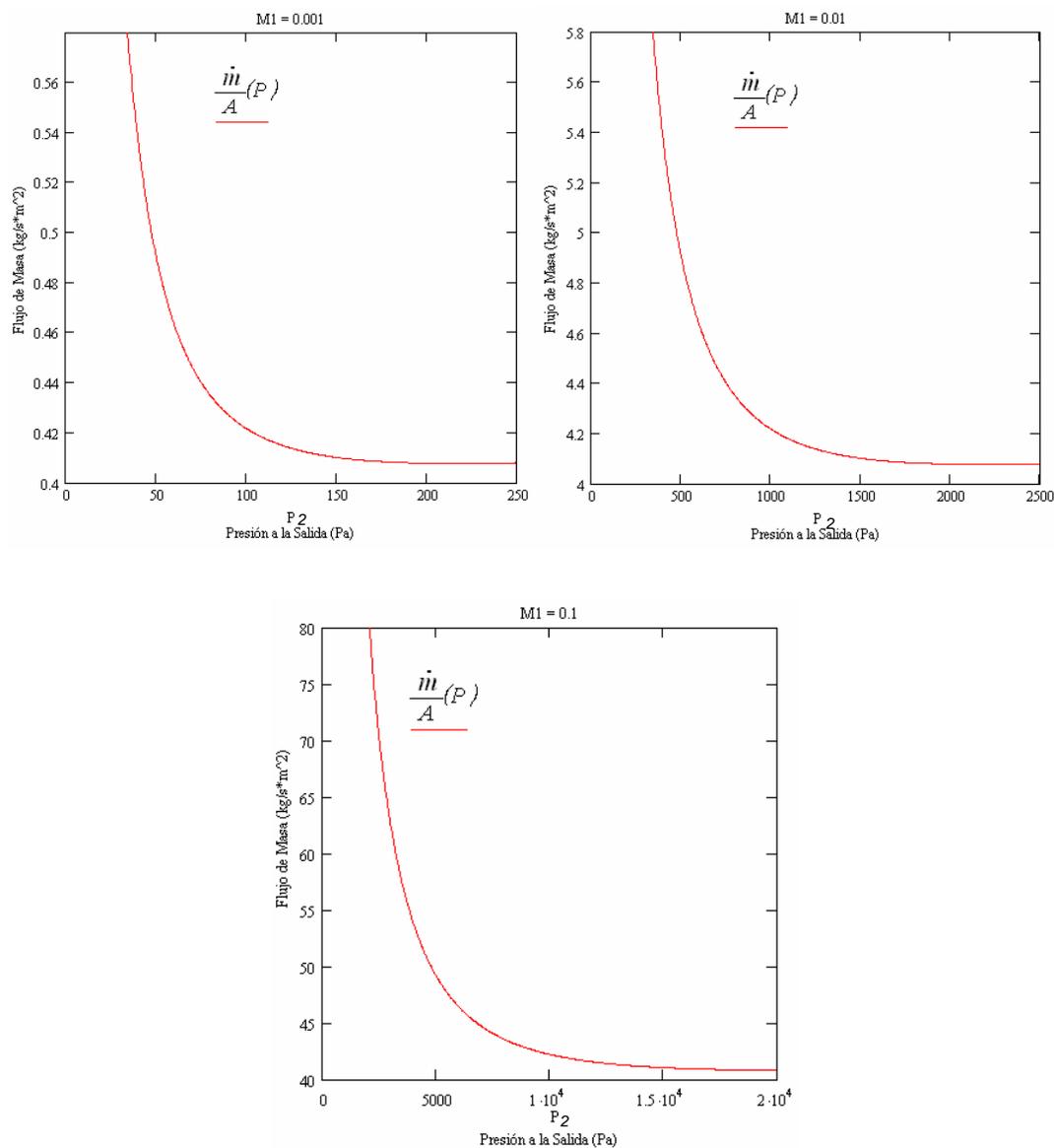


Figura 22. Flujo de masa por unidad de área, en función del número de Mach.

La Figura 23 muestra el comportamiento del flujo de masa en función de la presión a la salida del sistema (P_2). Era de esperarse un comportamiento similar al obtenido para flujo de masa contra número de Mach. Teniéndose como límite crítico de flujo las presiones de salida a las cuales el número de Mach es igual a $M_2=0.4$, para cada caso los límites mencionados son los siguientes, Tabla 4.

Tabla 4. Presiones de salida críticas en función del número de Mach a la entrada.

M_1	P_2
0.001	249.35
0.01	2494
0.1	24960

**Figura 23. Flujo de masa por unidad de área, en función del número de Mach a la entrada y la presión a la salida del sistema.**

Similar a la respuesta del flujo de masa en función del número de Mach, para valores de la presión mayores que los límites de presión obtenidos, la gráfica de flujo de masa contra presión a la salida del sistema, no presentará significancia física, o sea, al aumentar la presión de salida (disminuir el número de Mach), la tendencia de la curva de flujo de masa será creciente; contrario al fenómeno real, donde el flujo se da de mayor a menor presión, por lo tanto entre mayor sea el cambio o gradiente de presiones mayor será el flujo de masa obtenido. Recordemos que para el caso en estudio, el valor de la presión a la entrada del sistema es constante e igual a la presión atmosférica.

Finalmente, para facilitar la manipulación o procedimiento numérico en el modelo que busca medir la respuesta del flujo transitorio ante la entrada de aire al sistema de tubería bajo cavitación. Una interpolación parabólica de los valores obtenidos en las

gráficas anteriores, $\frac{\dot{m}}{A}$ contra P_2 , es usada para calcular el flujo de masa en función de la presión, dato de entrada requerido en los modelos numéricos. De acuerdo al análisis realizado, como punto de partida, se toman el valor de número de Mach a la entrada, igual a 0.1, la curva es presentada nuevamente a continuación.

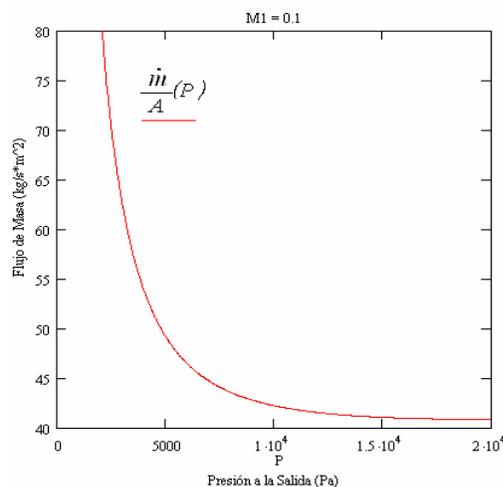


Figura 24. Flujo de masa por unidad de área – bajo condiciones no isentrópicas.

5.3 *MODELO CAVITACIÓN VAPOROSA DISTRIBUIDA.*

La diferencia en velocidad generada por el cierre de la válvula en la frontera del sistema, ocasiona un cambio en el gradiente hidráulico. Si el cambio en el gradiente es lo suficientemente grande para que presiones de vapor sean alcanzadas, de acuerdo a **Simpson (1986)**, dos posibles casos pueden presentarse: En el primer caso (Figura 25), se presenta la formación de un cavidad de vapor en la válvula, una vez formada la cavidad de vapor la onda viaja dentro de una zona de incremento de presión hacia el tanque, por lo tanto en ningún punto de la tubería ocurre una zona o región de cavitación vaporosa distribuida. En el segundo caso (Figura 26), la onda viaja en una zona de presión decreciente, como consecuencia, acompañado de la formación de una cavidad de vapor en la válvula una zona o región de cavitación vaporosa se extiende de la cavidad hacia el tanque durante un período de 0 a L/a segundos, la fracción de vacío en el líquido comienza a crecer y la presión dentro de la región de cavitación se establece como la presión de vapor del líquido. Para este último caso, deben aplicarse expresiones analíticas que permitan predecir la velocidad de la onda en la mezcla vapor líquido y la fracción de vacío. Adicionalmente, es importante destacar que cuando la región de presión para de crecer, en la transición entre la región de cavitación y la región bajo golpe de ariete, se prevé la formación de ondas de choque.

Las principales asunciones realizadas para este modelo son, **Kranenburg, 1973**, citado por **Simpson, 1986**.

- El flujo es en una dimensión.
- La distribución de las burbujas de vapor es homogénea en el líquido.
- Valores de fracción de vacío, velocidad y densidad de la mezcla, pueden usarse para la sección transversal en la región de cavitación vaporosa.
- No se libera gas del líquido a las burbujas de vapor durante la cavitación.

- La influencia de la gravedad sobre las burbujas es despreciable.
- Si la distribución de la cantidad de gas adherido nucleicamente al líquido es uniforme, la distribución de las burbujas de vapor formadas también puede ser asumida uniforme.
- La masa y el momentum del gas y de las burbujas de vapor pueden ser ignorados.
- La presión de vapor del líquido permanece constante.
- Los efectos de la tensión superficial sobre la burbuja son ignorados.
- La fracción de vacío es mucho menor que la unidad.
- La presencia de las burbujas de vapor no tiene efecto sobre las pérdidas de fricción.

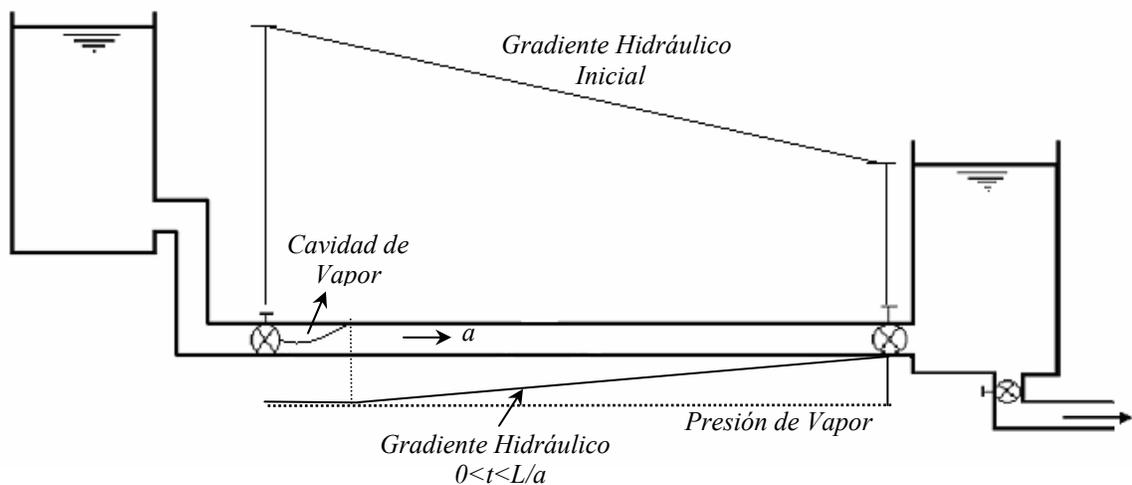


Figura 25. Formación cavidad de vapor en la válvula.

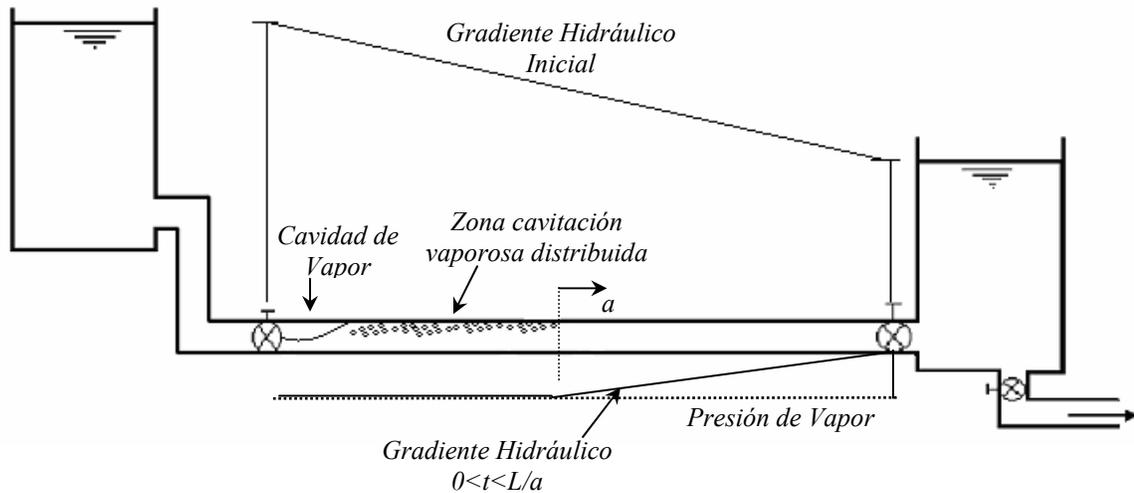


Figura 26. Formación cavidad de vapor en la válvula y región de cavitación vaporosa.

5.3.1 Velocidad De La Onda En Mezcla Gas - Líquido.

Para verificar la validez y definir cual de las ecuaciones de velocidad de la onda de presión en mezclas gas – líquido sería usada en esta investigación, se entro en detalle de la derivación realizada por cada uno de los autores (Tullis, Padmanabhan, Wylie, Chaudhry). Las principales observaciones son discutidas a continuación.

En la Tabla 5 se observa un resumen de las ecuaciones reportadas más comúnmente por la literatura. Como comentario general, se observa que, a diferencia de un líquido puro en el cual la velocidad de la onda de presión es constante, las ecuaciones para flujo de mezcla gas - líquido, dependen del gradiente de presión y del contenido de gas de la mezcla, por lo tanto el valor en el tiempo varía de acuerdo al comportamiento de esas variables.

Tabla 5. Ecuaciones velocidad de la onda de presión en líquido puro y mezcla gas-líquido.

Autor	# Ecuación	Aplicación	Ecuación
Halliwell	3.58	Líquidos Puros	$a = \sqrt{\frac{K}{\rho \left[1 + \left(\frac{K}{E} \right) \rho \right]}}$
Tullis, 1976	3.65	Mezcla gas-líquido	$a_m = \sqrt{\frac{K_l}{\rho_l (1-\alpha) \left(1 + \frac{K_l D}{E e} + \alpha \frac{K_l}{P} \right)}}$
Chaudhry, 1987	3.68	Mezcla gas-líquido	$a_m = \sqrt{\frac{1}{\left[\rho_l (1-\alpha) + \alpha \rho_g \left(\frac{\alpha}{P} + \frac{1}{K_l} + \frac{D}{E^* e} \right) \right]}}$
Padmanabhan, 1977	3.66	Mezcla gas-líquido	$a_m = \sqrt{\frac{1}{\rho_l (1-\alpha) \left\{ \frac{(1-\alpha)}{K_l} + \frac{\alpha}{P} + \frac{D}{E^* e} \mu \right\}}}}$
Wylie, 1983	3.67	Mezcla gas-líquido	$a_m = \sqrt{\frac{1}{\rho_l (1-\alpha) \left\{ \frac{1}{K_l} + \frac{\alpha}{P} + \frac{D}{E^* e} C_1 \right\}}}}$

Realizando inicialmente una comparación entre las ecuaciones derivadas por Tullis y Chaudhry, al entrar en detalle de la derivación, destaca el tratamiento dado al término que representa la respuesta elástica de la tubería $\left(\frac{\Delta A}{A \Delta P} \right)$, donde, ambos autores,

realizan una asunción adicional y es que el análisis se restringe a tuberías elásticas de pared delgada con juntas de expansión frecuente, es decir, $\frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{D}{E^*e}$.

Adicionalmente se observa que la única diferencia existente entre ambas ecuaciones, es la forma como cada autor define la densidad de la mezcla. Chaudhry considera un término adicional ($\alpha \rho_g$), el cual representa el aporte de la fase gaseosa a la densidad de la mezcla. Tullis asume que el aporte de la fase gaseosa es despreciable, por lo cual la densidad de la mezcla puede ser representada como $\rho_l(1 - \alpha)$.

Ambas ecuaciones, no se consideran más en el estudio, debido a las limitaciones impuestas por el tipo de tubería y condiciones de anclaje asumidas.

Las ecuaciones planteadas por Padmanabhan y Wylie son más generales, ya que en el análisis del término que involucra la respuesta elástica de la tubería, ambos autores consideran un coeficiente adimensional (μ, C_1), el cual toma diferentes valores de acuerdo a las restricciones externas del sistema y al tipo de tubería, al entrar en detalle de la derivación, se observa que ambos coeficientes son iguales, la notación usada por cada autor es diferente. La expresión usada para describir la densidad de la mezcla, es igual a la usada por Tullis, donde, el aporte de la fase gaseosa a la densidad de la mezcla es despreciado.

La diferencia que se presenta entre las ecuaciones de Padmanabhan y wylie, término dentro del radical $\frac{1-\alpha}{K_l}$ y $\frac{1}{K_l}$ respectivamente, surge del análisis dado por cada autor al modulo bulk de elasticidad de la mezcla, como se ilustra a continuación.

$$K_m = \frac{-\nabla_m \Delta P}{\Delta \nabla_m} = \frac{K_l}{1 + \alpha \left(\frac{K_l}{K_g} - 1 \right)}$$

Al aplicar la definición de modulo bulk de elasticidad de la mezcla, en el denominador, se produce un término que involucra la razón entre el modulo bulk de elasticidad del líquido y el del gas. Wylie asume que esta relación es mucho mayor que uno (1), por lo cual, el modulo bulk de elasticidad de la mezcla, puede ser aproximado como.

$$K_m = \frac{-\nabla_m \Delta P}{\Delta \nabla_m} = \frac{K_l}{1 + \alpha \frac{K_l}{K_g}}$$

Padmanabhan no realiza ninguna asunción y conserva el término hasta el final de la derivación.

Bajo las condiciones analizadas, comportamiento del gas isotérmico, la asunción realizada por Wylie es valida, ya que el modulo bulk de elasticidad del agua (K_l), es del orden de magnitud de 10^9 , y el modulo bulk de elasticidad del gas, aproximado como $K_g \cong P$, es del orden de magnitud de 10^6 , por lo tanto, la razón entre ambos módulos es aproximadamente del orden de $10^3 \gg \gg 1$.

Por las razones anteriores, en esta investigación se adopta el uso de la ecuación planteada por Wylie. La derivación de la ecuación se presenta en el **Apéndice B**.

La asunción de que las burbujas de gas en la mezcla se comportan isotérmicamente, también es usada, para obtener una expresión que describa el comportamiento de la fracción de vacío en función de la presión de la mezcla. Al aplicar la ecuación de estado para gases ideales para flujo permanente y un estado cualquiera, y asumiendo que la masa de gas libre dentro de la mezcla permanece constante, se obtiene.

$$P_o \nabla_{g-o} = m_o RT = P \nabla_g$$

Dividiendo por el volumen de la mezcla, ∇_m .

$$P_o \frac{\nabla_{g-o}}{\nabla_m} = P \frac{\nabla_g}{\nabla_m}$$

Definiendo la fracción de vacío como. $\alpha = \frac{\nabla_g}{\nabla_m}$. Finalmente se obtiene.

$$\alpha = \frac{\alpha_o P_o}{P} \quad 5.50$$

La ecuación de Wylie puede expresarse como.

$$a_m = \sqrt{\frac{1}{\rho_l \left(1 - \frac{\alpha_o P_o}{P}\right) \left\{ \frac{1}{K_l} + \frac{\alpha_o P_o}{P^2} + \frac{D}{E^* e} C_1 \right\}}} \quad 5.51$$

Para el caso en el cual se asume un comportamiento adiabático, la fracción de vacío y el modulo bulk de elasticidad del gas, se expresan como.

$$\alpha = \alpha_o \left(\frac{P_o}{P}\right)^{1/n} \quad \text{y} \quad K_g \cong nP \quad 5.52$$

Donde n es el coeficiente politrópico para una expansión o compresión adiabática, el cual por definición, es aproximadamente igual a la razón de calores específicos (k).

La ecuación de Wylie puede expresarse como.

$$a_m = \sqrt{\frac{1}{\rho_l \left(1 - \alpha_o \left(\frac{P_o}{P}\right)^{1/n}\right) \left\{ \frac{1}{K_l} + \frac{\alpha_o (P_o)^{1/n}}{n(P)^{\frac{n+1}{n}}} + \frac{D}{E^* e} C_1 \right\}}} \quad 5.53$$

6 DESARROLLO NUMÉRICO

6.1 INTRODUCCIÓN

Una reducción significativa en la velocidad de la onda de presión se obtiene cuando la cantidad de gases disueltos en el líquido aumenta, éste fenómeno puede ser generado cuando la presión del líquido cae a valores cercanos o iguales a la presión de vapor del líquido, aumentando la fracción de vacío gracias a la formación de burbujas de vapor – cavitación. Dependiendo del comportamiento de la presión en el tiempo, o la severidad del transiente hidráulico, éste fenómeno puede ocurrir diferente número de veces, es decir, cavidades de vapor pueden ser creadas debido a la existencia de presiones sub-atmosféricas, o destruidas por el paso de una onda de presión positiva sobre la región en cavitación. En el primer caso, el flujo puede ser tratado como un flujo de dos fases, mezcla vapor líquido, en el cual, a diferencia de líquidos puros, los coeficientes de las ecuaciones gobernantes son altamente dependientes de la velocidad de la onda, la cual varía grandemente con el porcentaje de gases en la mezcla. Esto dificulta la manipulación de éstas mediante el método de las características. En el segundo caso, el colapso de las cavidades de vapor por el paso de ondas de presión positivas, posibilitan la formación de ondas de choque, limitando aún más el uso del método de las características, ya que es necesario incorporar las ecuaciones de la onda de choque como condiciones de frontera interna en la rejilla característica. El desarrollo numérico del modelo de simulación propuesto para flujo en estado transitorio bajo cavitación es presentado en esta sección, en donde se incorpora el uso del esquema numérico de MacCormack al tratamiento de las ecuaciones gobernantes para cavitación bajo flujo transitorio, el cual, no ha sido presentado previamente en la literatura.

6.2 DESARROLLO ESQUEMA NUMÉRICO MACCORMACK PARA NODOS INTERNOS

El procedimiento mostrado a continuación se aplica a los nodos internos de la rejilla numérica, las condiciones de frontera deben ser tratadas de forma especial.

Retomando las ecuaciones simplificadas de continuidad (3.52) y momentum (3.53), e incorporando la definición de densidad y velocidad de la onda de presión en la mezcla, se obtiene.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_m a_m^2 \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{f}{2D} V|V| = 0$$

Aplicando, a las ecuaciones anteriores, la definición del esquema de Maccormack (ecuaciones 3.87 a 3.94), y recordando que el símbolo (*) se usa para referirse a la variable calculada durante el paso predictor, el símbolo (**) se usa para la variable calculada durante el paso corrector, la letra (*j*) representa el nivel de tiempo conocido, y la letra (*i*) representa el nodo espacial en estudio. La aproximación obtenida para las derivadas parciales en el espacio y el tiempo, de las ecuaciones gobernantes, es escrita como.

^{ER} Alternativa – Paso Predictor. Aplicando las ecuaciones 3.87 y 3.89.

Ecuación de continuidad.

$$\frac{P_i^* - P_i^j}{\Delta t} + \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^j \left\{ \frac{V_i^j - V_{i-1}^j}{\Delta X} \right\} = 0$$

$$P_i^* = P_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^j (V_i^j - V_{i-1}^j)$$

Ecuación de momentum.

$$\frac{V_i^* - V_i^j}{\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^j \left\{ \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta X} \right\} + \left\{ \frac{f}{2D} \right\} (V_i^j |V_i^j|) = 0$$

$$V_i^* = V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^j \left\{ P_i^j - P_{i-1}^j \right\} - \left\{ \frac{f \Delta t}{2D} \right\} (V_i^j |V_i^j|) \quad \mathbf{6.2}$$

1^{ER}. Alternativa – Paso Corrector. Aplicando las ecuaciones 3.89 y 3.90.

Ecuación de continuidad.

$$\frac{P_i^{**} - P_i^j}{\Delta t} + \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^* \left\{ \frac{V_{i+1}^* - V_i^*}{\Delta X} \right\} = 0$$

$$P_i^{**} = P_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^* (V_{i+1}^* - V_i^*) \quad \mathbf{6.3}$$

Ecuación de momentum.

$$\frac{V_i^{**} - V_i^j}{\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \left\{ \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{\Delta X} \right\} + \left\{ \frac{f}{2D} \right\} (V_i^* |V_i^*|) = 0$$

$$V_i^{**} = V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \left\{ P_{i+1}^* - P_i^* \right\} - \left\{ \frac{f \Delta t}{2D} \right\} (V_i^* |V_i^*|) \quad \mathbf{6.4}$$

2^{DA}. Alternativa – Paso Predictor. Aplicando las ecuaciones 3.91 y 3.92.

Ecuación de continuidad.

$$\frac{P_i^* - P_i^j}{\Delta t} + \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^j \left\{ \frac{V_{i+1}^j - V_i^j}{\Delta X} \right\} = 0$$

$$P_i^* = P_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^j (V_{i+1}^j - V_i^j) \quad 6.5$$

Ecuación de momentum.

$$\frac{V_i^* - V_i^j}{\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^j \left\{ \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta X} \right\} + \left\{ \frac{f}{2D} \right\} (V_i^j | V_i^j) = 0$$

$$V_i^* = V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^j \left\{ P_{i+1}^j - P_i^j \right\} - \left\{ \frac{f \Delta t}{2D} \right\} (V_i^j | V_i^j) \quad 6.6$$

2^{DA} Alternativa – Paso Corrector. Aplicando las ecuaciones 3.93 y 3.94.

Ecuación de continuidad.

$$\frac{P_i^{**} - P_i^j}{\Delta t} + \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^* \left\{ \frac{V_i^* - V_{i-1}^*}{\Delta X} \right\} = 0$$

$$P_i^{**} = P_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^* (V_i^* - V_{i-1}^*) \quad 6.7$$

Ecuación de momentum.

$$\frac{V_i^{**} - V_i^j}{\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \left\{ \frac{P_i^* - P_{i-1}^*}{\Delta X} \right\} + \left\{ \frac{f}{2D} \right\} (V_i^* | V_i^*) = 0$$

$$V_i^{**} = V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \left\{ P_i^* - P_{i-1}^* \right\} - \left\{ \frac{f \Delta t}{2D} \right\} (V_i^* | V_i^*) \quad 6.8$$

Los valores de V y P , en el nivel de tiempo desconocido $j+1$, se calculan de la ecuación (3.95).

$$P_i^{k+1} = \frac{1}{2} [P_i^* + P_i^{**}] \qquad V_i^{k+1} = \frac{1}{2} [V_i^* + V_i^{**}]$$

1^{ER} Alternativa

$$P_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[P_i^* + P_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^* (V_{i+1}^* - V_i^*) \right] \qquad 6.9$$

$$V_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[V_i^* + V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \{ P_{i+1}^* - P_i^* \} - \left\{ \frac{f \Delta t}{2D} \right\} (V_i^* | V_i^*) \right] \qquad 6.10$$

2^{DA} Alternativa

$$P_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[P_i^* + P_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \rho_m a_m^2 \right\}_i^* (V_i^* - V_{i-1}^*) \right] \qquad 6.11$$

$$V_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[V_i^* + V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \{ P_i^* - P_{i-1}^* \} - \left\{ \frac{f \Delta t}{2D} \right\} (V_i^* | V_i^*) \right] \qquad 6.12$$

6.3 CONDICIONES DE FRONTERA MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.

Para definir las condiciones de flujo en las fronteras del sistema, se requiere resolver, simultáneamente, las ecuaciones características con las condiciones impuestas por la frontera. Estas condiciones son definidas mediante relaciones que permiten obtener la descarga, carga hidráulica o una relación entre ambas para la frontera. La ecuación característica negativa (Ec. 3.83) es usada para la frontera aguas arriba³, y la ecuación característica positiva (Ec. 3.82) es usada para la frontera aguas abajo. Asumiendo que el

³ El sistema de referencia es designado con respecto a la dirección de flujo inicial, sin importar que durante el estado transitorio pueda darse o no un revés en la dirección de flujo.

conducto es dividido en n intervalos, una sección al final de la frontera aguas arriba puede ser numerada como sección 1 y una al final de la frontera aguas abajo del sistema como $n + 1$. En esta sección solo serán tratadas las condiciones de frontera usadas en la presente investigación.

6.3.1 Tanque de Almacenamiento de Nivel Constante – Aguas Abajo.

En este caso se asume que el nivel en el tanque de almacenamiento permanece constante durante las condiciones de estado transitorio. La aproximación anterior simplifica considerablemente el análisis y no introduce errores significativos en los resultados.

Como se menciona anteriormente, para la frontera aguas abajo, la ecuación característica positiva debe ser resuelta de forma simultanea con la ecuación obtenida para la frontera, según se muestra en la Figura 27.

$$V_P = C_P - C_a P_P$$

$$C_P = V_A + \frac{1}{\rho a} P_A - \frac{f}{2D} \Delta t V_A |V_A|$$

$$C_a = \frac{1}{\rho a}$$

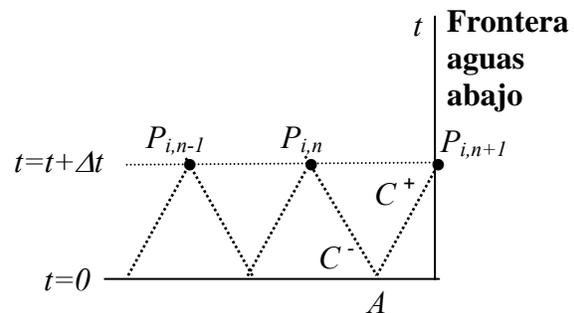


Figura 27. Método de las características – condición de frontera aguas abajo.

Tomando como referencia la Figura 28, el análisis de la condición de frontera se ilustra a continuación.

Resolviendo esta ecuación simultáneamente con la ecuación característica positiva (Ec. 3.82), resulta en.

$$K_1 V_{P_{i,n+1}}^2 - V_{P_{i,n+1}} + (C_P - C_a P_{res}) = 0 \quad \mathbf{6.14}$$

La ecuación anterior es una ecuación cuadrática, donde $K_1 = C_a \left(1 - \hat{K}\right) \frac{\rho}{2}$. Se toma la solución negativa de la ecuación cuadrática, ya que la positiva no tiene significación física. Por lo tanto la velocidad al final del paso del tiempo, puede ser expresada como.

$$V_{P_{i,n+1}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4K_1(C_P - C_a P_{res})}}{2K_1} \quad \mathbf{6.15}$$

Una vez determinada la velocidad o el flujo volumétrico, es posible determinar la presión o la carga hidráulica para el punto en estudio, mediante la aplicación de la ecuación característica positiva, donde.

$$P_{P_{i,n+1}} = \frac{C_P - V_{P_{i,n+1}}}{C_a} \quad \mathbf{6.16}$$

Si las pérdidas a la entrada y la carga de velocidad son despreciables, el análisis de la condición de frontera se simplifica significativamente, y las variables pueden ser determinadas como.

$$P_{P_{i,n+1}} = P_{res} \quad \mathbf{6.17}$$

$$V_{P_{i,n+1}} = C_P - C_a P_{res} \quad \mathbf{6.18}$$

6.3.2 Válvula a la Entrada de la Línea – Frontera Aguas Arriba.

El flujo en estado permanente a través de una válvula, asumiendo la velocidad de salida como un orificio ($V = \sqrt{2gh}$), puede ser escrita como.

$$Q_{O_{i,1}} = (C_d A_v) \sqrt{2gH_{O_{i,1}}} \quad 6.19$$

Donde el subíndice O indica las condiciones en estado permanente, C_d es el coeficiente de descarga, A_v es el área de abertura de la válvula, y $H_{O_{i,1}}$ es la carga piezométrica aguas arriba de la válvula.

Asumiendo que el flujo a través de la válvula en estado transitorio, puede ser descrito por una ecuación similar a la de flujo en estado estable.

$$Q_{P_{i,1}} = (C_d A_v) \sqrt{2gH_{P_{i,1}}} \quad 6.20$$

Definiendo la apertura relativa de la válvula (τ) como.

$$\tau = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_O}$$

Dividiendo la ecuación 6.20 entre la 6.19 y elevando al cuadrado, se obtiene.

$$\frac{Q_{P_{i,1}}}{Q_{O_{i,1}}} = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_O} \frac{\sqrt{2gH_{P_{i,1}}}}{\sqrt{2gH_{O_{i,1}}}} \quad Q_{P_{i,1}} = \tau \frac{\sqrt{H_{P_{i,1}}}}{\sqrt{H_{O_{i,1}}}} Q_{O_{i,1}}$$

$$\left(Q_{P_{i,1}} \right)^2 = \frac{H_{P_{i,1}}}{H_{O_{i,1}}} \left(\tau * Q_{O_{i,1}} \right)^2 \quad 6.21$$

Resolviendo la ecuación anterior simultáneamente con la forma alterna de la ecuación característica negativa, Figura 29.

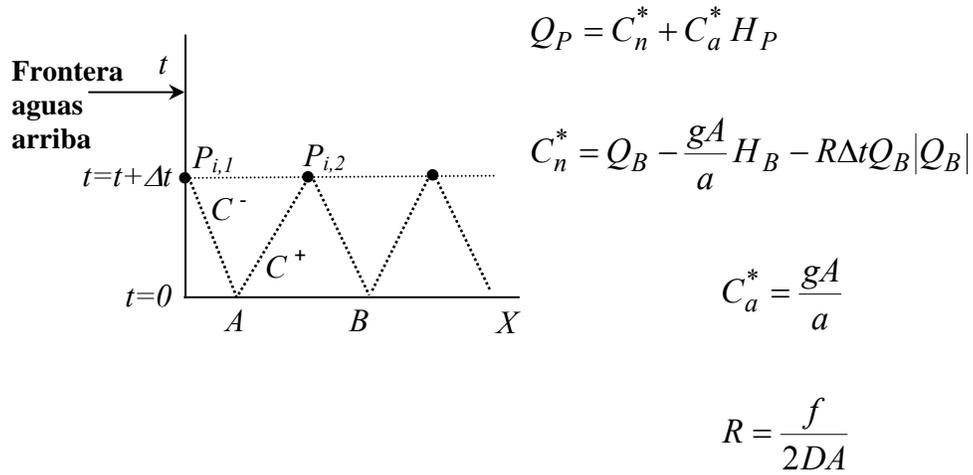


Figura 29. Método de las características – condición de frontera aguas arriba.

Despejando para H_P en la ecuación característica negativa y sustituyendo en la Ec.6.21.

$$H_{P_{i,1}} = \frac{Q_{P_{i,1}} - C_n^*}{C_a^*} \quad (Q_{P_{i,1}})^2 = \frac{(\tau^* Q_{O_{i,1}})^2}{H_{O_{i,1}}} \frac{Q_{P_{i,1}} - C_n^*}{C_a^*}$$

Sea: $C_v = \frac{(\tau^* Q_{O_{i,1}})^2}{C_a^* H_{O_{i,1}}}$, sustituyendo en la ecuación anterior.

$$Q_{P_{i,1}}^2 - C_v Q_{P_{i,1}} + C_v C_n^* = 0$$

Resolviendo para la parte positiva.

$$Q_{P_{i,1}} = \frac{C_v + \sqrt{C_v^2 - 4C_n^* C_v}}{2}$$

6. 22

Una vez determinado el flujo volumétrico, es posible determinar la carga hidráulica para el punto en estudio, mediante la aplicación de la ecuación característica negativa, donde

$$H_{P_{i,1}} = \frac{Q_{P_{i,1}} - C_n^*}{C_a^*} \quad \mathbf{6.23}$$

Para calcular las condiciones en estado transitorio para la abertura o cierre de la válvula, la curva τ Vs t puede ser especificada en forma de tabla o mediante una expresión matemática. Note que $\tau=1$ corresponde al valor de la válvula abierta completamente, en el cual el flujo a través de la válvula es $Q_{O_{i,1}}$ bajo una carga piezométrica de $H_{O_{i,1}}$, Figura 30.

Si el cierre de la válvula puede ser considerado rápido o instantáneo (tiempo de cierre $< 2L/a$), el análisis de la condición de frontera se simplifica significativamente, y las variables pueden ser determinadas como.

$$V_{P_{i,1}} = 0 \quad \text{Ó} \quad Q_{P_{i,1}} = 0 \quad \mathbf{6.24}$$

$$P_{P_{i,1}} = \frac{-C_n}{C_a} \quad \text{Ó} \quad H_{P_{i,1}} = \frac{-C_n^*}{C_a^*} \quad \mathbf{6.25}$$

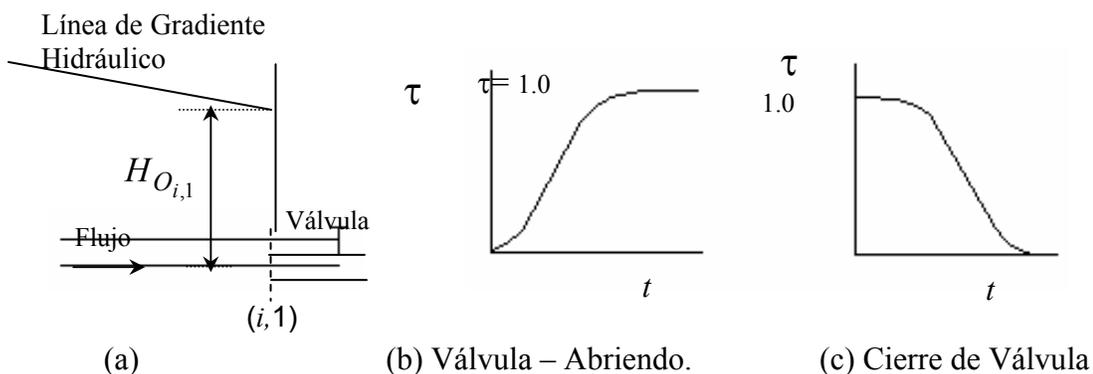


Figura 30. Válvula al inicio de la línea de conducción – aguas arriba.

6.3.3 Formación de una Cavity de Vapor en la Frontera Aguas Arriba.

Si la presión cae al valor de la presión de vapor en la válvula, la columna líquida se separa de la válvula, y como consecuencia, una cavidad de vapor se forma y comienza a crecer, hasta el momento en el cual la presión es nuevamente mayor que la presión de vapor.

Numéricamente la cavidad de vapor se trata como una condición de frontera interna (Figura 31), en la cual, durante la existencia de la cavidad, la velocidad o la descarga en la sección aguas abajo de la válvula (i'), se calcula de la ecuación característica negativa (Ec 3.83.), especificando la presión en el paso del tiempo $t + \Delta t$ como la presión de vapor ($P_p = P_{vapor}$). Adicionalmente, el tamaño o volumen de la cavidad es calculado en cada paso computacional, aplicando la ecuación de continuidad. Ambos procedimientos son mostrados a continuación.

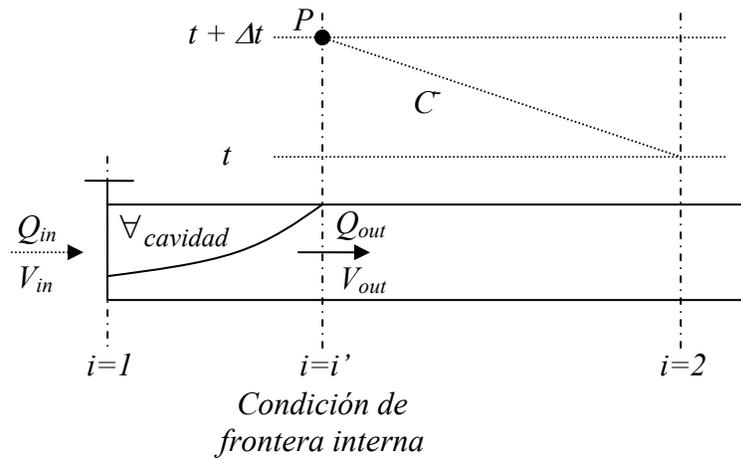


Figura 31. Formación cavidad – Tratamiento condición frontera interna.

Ecuación característica negativa.

$$P_P = P_{\text{vapor}} \quad C_a = \frac{1}{\rho_m a_m} \Bigg\}_{i=2}$$

$$C_n = V_{i=2}^j - \frac{1}{\rho_m a_m} \Bigg\}_{i=2} \quad P_{i=2}^j - \frac{f}{2D} \Delta t V_{i=2}^j |V_{i=2}^j|$$

$$V_{out}^{t+\Delta t} = V_P = C_n + C_a P_P$$

6. 26

Ecuación de continuidad.

$$\frac{d\forall_g}{dt} = Q_{out} - Q_{in} = A(V_{out} - V_{in})$$

Integrando

$$\forall_g = \forall_{cavidad}^{t+\Delta t} = \forall_{cavidad}^t + \frac{1}{2} \Delta t A \left\{ \left(V_{out}^{t+\Delta t} - V_{in}^{t+\Delta t} \right) + \left(V_{out}^t - V_{in}^t \right) \right\}$$

$$\forall_{cavidad}^{t+\Delta t} = \forall_{cavidad}^t + \frac{1}{2} \Delta t A \left\{ \left(V_{out}^{t+\Delta t} + V_{out}^t \right) - \left(V_{in}^{t+\Delta t} + V_{in}^t \right) \right\}$$

Para un cierre instantáneo de la válvula, aguas arriba de la tubería, $V_{in}^{t+\Delta t} = V_{in}^t = 0$, por lo tanto, el volumen de la cavidad es dado como.

$$\forall_{cavidad}^{t+\Delta t} = \forall_{cavidad}^t + \frac{1}{2} \Delta t A \left\{ V_{out}^{t+\Delta t} + V_{out}^t \right\} \quad \mathbf{6.27}$$

En el tiempo donde la cavidad desaparece, la presión se eleva debido al contacto de las columnas líquidas. La implementación numérica de la condición de frontera, incluyendo la cavidad de vapor o burbuja, es la siguiente.

Una vez se detecte una presión de vapor, se establece una condición de frontera interna, sección i' , y se procede como sigue.

1. Establecer $P_P = P_{vapor}$.
2. Calcular $V_{out}^{t+\Delta t}$ de la Ec. 6.26.
3. Determinar el volumen de la cavidad de la Ec.6.27.

Mientras el tamaño de la cavidad sea positivo, la presión de vapor persiste, en cuanto el tamaño de la cavidad sea ≤ 0 , se procede como sigue.

1. Establecer $\forall_{cavidad}^{t+\Delta t} = 0$.
2. Calcular $P_{i=1}^{t+\Delta t}$ de la Ec.6.26, asignando el valor de $V_{out}^{t+\Delta t} = 0$.
3. Proceder como se hace usualmente en el tratamiento de la condición de frontera interna.

6.3.4 Válvulas de Entrada de Aire como Condición de Frontera Interna.

Chaudhry (1987), considera la válvula como una condición de frontera interna, para ello asume que la válvula se encuentra ubicada en medio de la unión de dos tuberías, la i y la $i+1$, como se muestra en la Figura 32.

No se ha encontrado en la literatura verificación experimental de este modelo, el cual, es muy similar al propuesto por **Wylie (1993)**. Estas referencias son frecuentemente citadas como texto de renombre en el área de transientes hidráulicos.

Retomando la forma alterna de las ecuaciones características y escribiéndolas para la válvula, se obtiene.

$$Q_{P_{i,n+1}} = C_P^* - C_{a_i}^* H_{P_{i,n+1}} \quad 6.28$$

$$Q_{P_{i+1,1}} = C_n^* + C_{a_{i+1}}^* H_{P_{i+1,1}} \quad 6.29$$

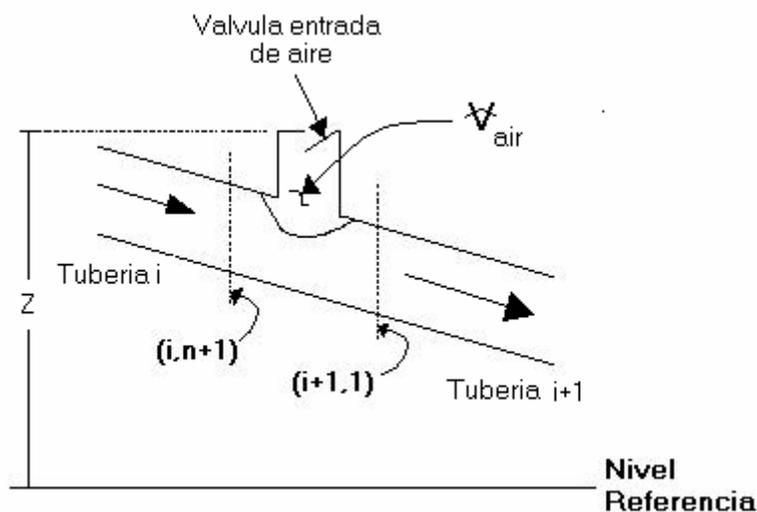


Figura 32. Notación para válvula de entrada de aire.

Adicionalmente se asume que las pérdidas de carga hidráulica en la tubería, generadas por la válvula, son despreciables, entonces.

$$H_{P_{i,n+1}} = H_{P_{i+1,1}} \quad \mathbf{6.30}$$

Como se menciono anteriormente, si $H_{P_{i,n+1}}$ o $H_{P_{i+1,1}}$ es menor que un valor “ Y ”, menor que la presión atmosférica, entonces la válvula se abre y permite la entrada de aire al sistema, una vez $H_{P_{i,n+1}} > Y$ o $H_{P_{i+1,1}} > Y$, la válvula se cierra.

Si el intervalo de tiempo (Δt) en el que ocurre esta secuencia de eventos es pequeño, y m_a es la masa de aire atrapada dentro de la tubería al inicio del paso en el tiempo, entonces, la cantidad de masa de aire, m_{P_a} al final del paso en el tiempo es.

$$m_{P_a} = m_a + \dot{m} \Delta t \quad \mathbf{6.31}$$

Donde \dot{m} es el flujo de masa de aire que entra a la tubería, es decir el flujo de masa a través de la válvula.

El volumen de aire atrapado satisface la ecuación de continuidad.

$$\forall_{P_{aire}} = \forall_{aire} + 0.5 \Delta t [(Q_{P_{i+1,1}} + Q_{i+1,1}) - (Q_{P_{i,n+1}} + Q_{i,n+1})] \quad \mathbf{6.32}$$

Donde $\forall_{P_{aire}}$ y \forall_{aire} , son el volumen de aire al final y al inicio del intervalo de tiempo, respectivamente, el subíndice P representa el valor desconocido de la variable al final del intervalo de tiempo, los subíndices i , o $i+1$ representan el número de la tubería (tubería i), y los subíndices 1 , o $n+1$ representan el número de sección.

Sustituyendo las ecuaciones 6.28 a 6.30 en la 6.32, se obtiene.

$$\forall_{P_{aire}} = C_{aire} + 0.5 \Delta t (C_{a_i}^* + C_{a_{i+1}}^*) H_{P_{i,n+1}} \quad \mathbf{6.33}$$

Donde: $C_{aire} = \forall_{aire} + 0.5 \Delta t (C_n^* + Q_{i+1,1} - C_P^* - Q_{i,n+1})$

Todos los valores de C_{aire} son conocidos en el tiempo t , y se desea calcular los valores de H_{P_i} , $\forall_{P_{aire}}$, $H_{P_{i+1}}$, Q_{P_i} , $Q_{P_{i+1}}$, en el tiempo $t+\Delta t$.

Si la expansión y contracción del volumen de aire dentro de la tubería sucede isotérmicamente, la ecuación de gases ideales puede ser aplicada, entonces.

$$P \forall_{P_{aire}} = m_{P_a} R T \quad \mathbf{6.34}$$

Donde R es la constante del gas, P y T son la presión y temperatura absoluta del volumen de aire dentro de la tubería. La presión absoluta, P , es relacionada con $H_{P_{i,n+1}}$ a través de la siguiente ecuación.

$$P = P_{P_{i,n+1}} = \gamma (H_{P_{i,n+1}} - z + H_b) \quad \mathbf{6.35}$$

$$H_{P_{i,n+1}} = \frac{P}{\gamma} + z - H_b \quad \mathbf{(6.35a)}$$

En la cual z es la altura de la válvula con respecto al nivel de referencia, γ es el peso específico del líquido dentro de la tubería, y H_b representa la presión barométrica.

Sustituyendo $H_{P_{i,n+1}}$ de la ecuación 6.35a y $\forall_{P_{aire}}$ de la ecuación 6.34 en la 6.33, se obtiene

$$m_{P_a} R T = P \left[C_{air} + 0.5 \Delta t (C_{a_i}^* + C_{a_{i+1}}^*) \left(\frac{P}{\gamma} + z - H_b \right) \right]$$

Sustituyendo la masa de aire m_{P_a} en la ecuación anterior, se obtiene.

$$\left(m_a + \dot{m} \Delta t \right) R T = P \left[C_{air} + 0.5 \Delta t (C_{a_i}^* + C_{a_{i+1}}^*) \left(\frac{P}{\gamma} + z - H_b \right) \right] \quad \mathbf{6.36}$$

En esta ecuación, todas las variables son conocidas excepto P y \dot{m} . Dos casos distintos para el flujo de masa a través de la válvula son analizados.

Flujo Isentrópico.

Como se vio anteriormente, en flujo compresible a través de boquillas convergentes, si la presión absoluta, P , dentro de la tubería es menor que $0.53 P_a$, siendo P_a la presión atmosférica, el flujo de aire a través de la válvula es sónico, por lo cual en la Ec.6.36, la siguiente ecuación puede ser aplicada (Ec.4.62).

$$\dot{m} = 0.6847 \frac{C_d A_v P_a}{\sqrt{RT_a}}$$

En la ecuación anterior, se introdujo un factor de corrección, denominado coeficiente de descarga de la válvula C_d , y A_v es el área de apertura de la válvula en su garganta.

Si la presión absoluta, P , dentro de la tubería es mayor que $0.53 P_a$, pero menor que P_a , entonces el flujo de aire a través de la válvula es subsónico, y la siguiente ecuación puede ser aplicada (Ec.4.64).

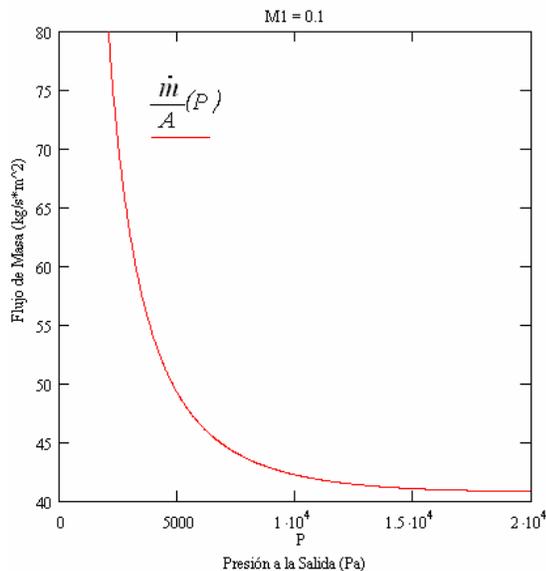
$$\dot{m} = C_d A_v \sqrt{7P_o \rho_o \left(\left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.42857} - \left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.71428} \right)}$$

La sustitución de las ecuaciones 4.62 y 4.64 en la ecuación 6.36, puede producir una ecuación no lineal en P , la cual es resuelta aplicando el método de Newton Raphson.

Flujo No - Isentrópico.

De acuerdo al valor de la presión, dentro de la tubería, en el paso del tiempo anterior, mediante interpolación parabólica, el valor de flujo masa a través de la válvula

es obtenido de la grafica presentada en el análisis realizado en la sección 5.2 bajo condiciones de flujo No - Isentrópico.



Una vez calculado el valor de flujo de masa \dot{m} o la presión P , las demás variables ($H_{P_{i,n+1}}$, $\forall P_{aire}$, $H_{P_{i+1,1}}$, $Q_{P_{i,n+1}}$, $Q_{P_{i+1,1}}$), pueden ser calculadas de las ecuaciones 6.35, 6.33, 6.30, 6.28, y 6.29 respectivamente.

6.3.5 Disipación De Energía En Flujo Transitorio.

El tratamiento dado al término que representa las pérdidas de energía en la ecuación de momentum, es dependiente de la frecuencia. Por lo cual la aproximación de primer orden para el término $\int \frac{f}{2D} V|V| dt$, realizada anteriormente no es aplicable. En esta investigación se adopta el procedimiento desarrollado por **Schohl (1993)**, cuya implementación numérica es descrita a continuación.

La ecuación de momentum (3.53), es expresada nuevamente como.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial P}{\partial X} + f'(t) = 0 \quad \mathbf{6.37}$$

Donde el término $f'(t)$ es usado para representar la disipación de energía por unidad de longitud en el sistema, y puede ser escrito como.

$$f'(t) = \frac{4\tau_o(x,t)}{\rho D} \quad \mathbf{6.38}$$

Donde $\tau_o(x,t)$ representa los esfuerzos cortantes en las paredes de la tubería, dado como.

$$\tau_o(x,t) = \frac{f\rho_m}{8} V(x,t)|V(x,t)| + \frac{4\rho_m v}{D} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial u} W(t-u) du \quad \mathbf{6.39}$$

La integral de la ecuación anterior, es aproximada como la suma de k términos exponenciales, de la forma $W(t) \cong W_{new}(\tau) = \sum_{i=1}^k m_i e^{-n_i \tau}$. De acuerdo a Schohl,

Ecuación 3.98, $k = 5$.

$$W_{new}(\tau) = 1.051e^{-26.65\tau} + 2.358e^{-100\tau} + 9.021e^{-669.6\tau} + 29.47e^{-6497\tau} + 79.55e^{-57990\tau}$$

Con el tiempo adimensional igual a: $\tau = \frac{t^* 4\nu}{D^2}$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido, y D es el diámetro de la tubería.

Por lo tanto, el esfuerzo cortante en el punto computacional j (nodo espacial), en el tiempo t es:

$$\tau_o(x,t) = \frac{f\rho_m}{8} V(x,t)|V(x,t)| + \frac{4\rho_m v}{D} * \sum_{i=1}^5 m_i Y_{ij}(t) \quad \mathbf{6.40}$$

Para el tiempo $t+\Delta t$, el esfuerzo cortante se define como:

$$\tau_o(t + \Delta t) = \frac{f\rho_m}{8} V(t + \Delta t)|V(t + \Delta t)| + \frac{4\rho_m v}{D} * \sum_{i=1}^5 m_i Y_{ij}(t + \Delta t) \quad 6.41$$

En la ecuación anterior, f representa el factor de fricción bajo flujo permanente, ρ_m representa la densidad de la mezcla, y el término $Y_{ij}(t)$, representa la i th suma acumulada, de la función de peso, en el punto j , definida como.

En el tiempo t :

$$Y_{ij}(t) = e^{-n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) t} \int_0^t \frac{\partial V_j}{\partial u} e^{n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) u} du \quad 6.42$$

Y en el tiempo $t + \Delta t$

$$Y_{ij}(t + \Delta t) = e^{-n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) \Delta t} e^{-n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) t} \int_0^t \frac{\partial V_j}{\partial u} e^{n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) u} du + e^{-n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) (t + \Delta t)} \int_t^{t + \Delta t} \frac{\partial V_j}{\partial u} e^{n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) u} du \quad 6.43$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se observa que.

$$Y_{ij}(t + \Delta t) = e^{-n_i \left(\frac{4v}{D^2} \right) \Delta t} * Y_{ij}(t) + \Delta Y_{ij}(t) \quad 6.44$$

El primer término de de la ecuación anterior, ya fue definido previamente mediante la ecuación 6.42. El segundo término, representa el incremento en la suma para el tiempo $t + \Delta t$, y se evalúa, asumiendo una variación de la velocidad lineal, entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$.

$$\Delta Y_{ij}(t) = \left(1 - e^{-n_i \frac{4v}{D^2} \Delta t} \right) * \left(n_i \frac{4v}{D^2} \Delta t \right)^{-1} \{ V_j(t + \Delta t) - V_j(t) \} \quad 6.45$$

Una vez todos los términos de la ecuación 6.44, han sido definidos, es posible resolver la ecuación 6.41 para el tiempo $t+\Delta t$, es decir, determinar $\tau_{oj}(t+\Delta t)$. Por lo tanto, la ecuación 6.38 puede ser ahora resuelta como.

$$f'(t+\Delta t) = \frac{4\tau_o(t+\Delta t)}{\rho_m D}$$

El procedimiento anterior se realiza solo para los nodos internos, la aproximación usada para el término de disipación de energía en las condiciones de frontera es de primer orden.

En el método de MacCormack, la evaluación del término de disipación de energía, se hace en base al valor obtenido en el paso del tiempo anterior. Las ecuaciones 6.10 y 6.12 pueden ser escritas como.

1^{ER}. Alternativa

$$V_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[V_i^* + V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \{ P_{i+1}^* - P_i^* \} - \{ f'(t) * \Delta t \}_i^j \right] \quad \mathbf{6.46}$$

2^{DA}. Alternativa

$$V_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[V_i^* + V_i^j - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} \right) \left\{ \frac{1}{\rho_m} \right\}_i^* \{ P_i^* - P_{i-1}^* \} - \{ f'(t) * \Delta t \}_i^j \right] \quad \mathbf{6.47}$$

7 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.

7.1 INTRODUCCIÓN.

No se encontró en la literatura ningún montaje experimental para medir las presiones obtenidas durante el paso de ondas de presión por válvulas de admisión de aire. Lee (1999), presenta la respuesta de presiones medidas en la condición de frontera donde se origina el transiente hidráulico, pero el autor no registró las presiones en la válvula. El experimento que se describe a continuación será usado por los modelos matemáticos propuestos en esta investigación.

La investigación experimental del efecto de dispositivos para el control de subpresiones o presiones sub-atmosféricas que generen cavitación, es una de las mayores fases de esta investigación. El equipo experimental usado, incluyendo tubería y sistema de adquisición de datos desarrollado para medir la respuesta del sistema, es descrito en este capítulo. Igualmente, una descripción de la forma como se calibran los equipos y como se determinan algunos parámetros y variables de interés en esta investigación, es presentada. Por último, el procedimiento para conducir la investigación experimental es descrito.

7.2 DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO EXPERIMENTAL.

Para producir cavitación, a nivel experimental, y describir el comportamiento de la presión del fluido con respecto al tiempo y a la entrada de aire al sistema, se realizó un montaje experimental (Figura 33), el cual consistía de una tubería PVC-SCH40 de 94 m de longitud y diámetro nominal de 2 in. El suministro de agua al sistema se realizó mediante un tanque de almacenamiento de carga constante, ubicado 8 m por encima del nivel de la tubería, a la entrada del sistema, condición de frontera upstream, se ubico una válvula reguladora de flujo (Figura 34), con la cual se genero el estado transitorio mediante un cierre rápido. Al final de la tubería, condición de frontera downstream, se instalo un tanque de almacenamiento con carga constante - $H=86$ cm, (Figura 35).

Adicionalmente, a una longitud equivalente a la mitad de la tubería, se ubicó una válvula de admisión de aire - Air Inlet, (Figura 36).

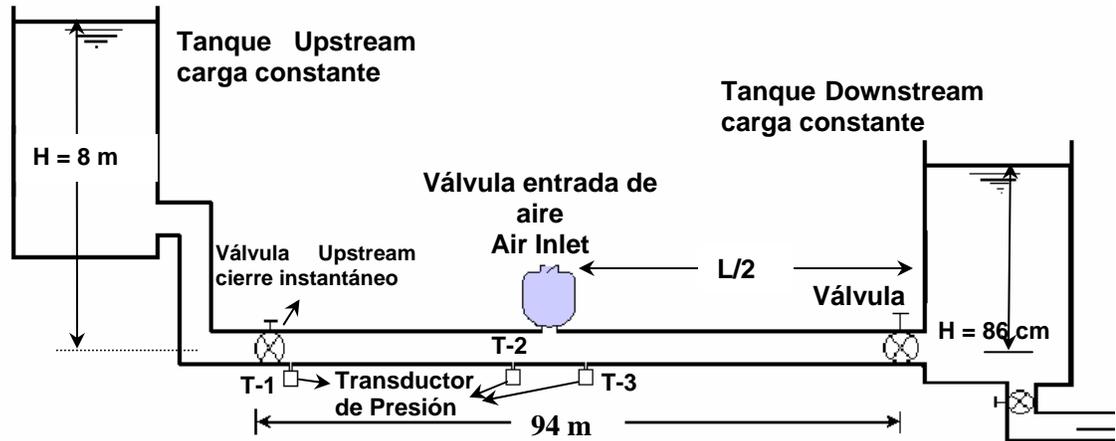


Figura 33 Esquema montaje experimental.



Figura 34. Válvula tipo globo, condición de frontera Upstream

Para registrar la respuesta del sistema en el tiempo, se ubicaron tres transductores de presión, distribuidos de la siguiente forma: A la entrada del sistema, válvula de cierre upstream, se ubicó el transductor # 1 (200 psia). Antes y después de la válvula de admisión de aire (Air Inlet), se ubicaron dos transductores de presión, transductor # 2 -

200 psia y transductor # 3 – 50 psia respectivamente. Los tres transductores estaban conectados a un sistema de adquisición de datos por computador, éste último facilitaba el almacenamiento de datos para posterior análisis. A continuación se hace una descripción de los componentes del montaje experimental.



Figura 35. Tanque de almacenamiento – carga constante, condición de frontera Downstream



Figura 36. Válvula de admisión de aire – Air inlet.

7.2.1 Transductor De Presión.

Para adquirir los datos en la frontera de la tubería, a la entrada y salida de la válvula de admisión de aire, se utilizaron tres transductores de presión electrónicos *Sensotec Pressure Transducer Model TJE* (Figura 37), de rango 0 - 200 psia, y 0 - 50 psia, con una precisión de 0.1% de la escala total del instrumento. Los transductores permiten adquirir datos de forma continua en el tiempo, por lo cual es posible realizar el análisis de datos bajo condiciones transitorias.

La calibración de los transductores se hace bajo condiciones de flujo permanente, para ello se usa como medida de referencia la proporcionada por un manómetro. Para todos los transductores, se realizan pruebas a distintas presiones y se registra el voltaje entregado en el tiempo, los resultados obtenidos y las curvas de calibración se ilustran en el **Apéndice C**.



Figura 37. Transductores de presión.

7.2.2 Medidor De Flujo – Flowmeter.

Para medir el flujo en estado estacionario a la entrada del sistema, se uso un dispositivo medidor de flujo por ultrasonido, *Flowmeter – Controlotron Model 1010*, de acuerdo con el fabricante el instrumento presenta deficiencias en precisión de la medida

cuando se usa en tubería PVC, por lo cual se realizó una curva de calibración, en la cual el flujo real se obtuvo aplicando el método volumétrico, los resultados obtenidos se presentan en el **Apéndice C**.

7.2.3 Programa De Adquisición De Datos.

Para la adquisición y almacenamiento de datos se utilizó un programa de adquisición de datos previamente desarrollado en LABVIEW (Figura 38, y Figura 39), el programa permite ajustar la frecuencia o datos adquiridos por segundo, y el tiempo de muestreo a los valores deseados por el experimentador, así mismo el programa cuenta con un canal de adquisición por cada transductor, y adicionalmente permite visualizar el fenómeno en proceso para tiempo real. Los datos obtenidos se utilizan como base de comparación contra los modelos teóricos de la respuesta del sistema bajo flujo transitorio, sin válvula de admisión de aire, y la respuesta del sistema a la entrada de aire, una vez instalada la válvula de admisión.

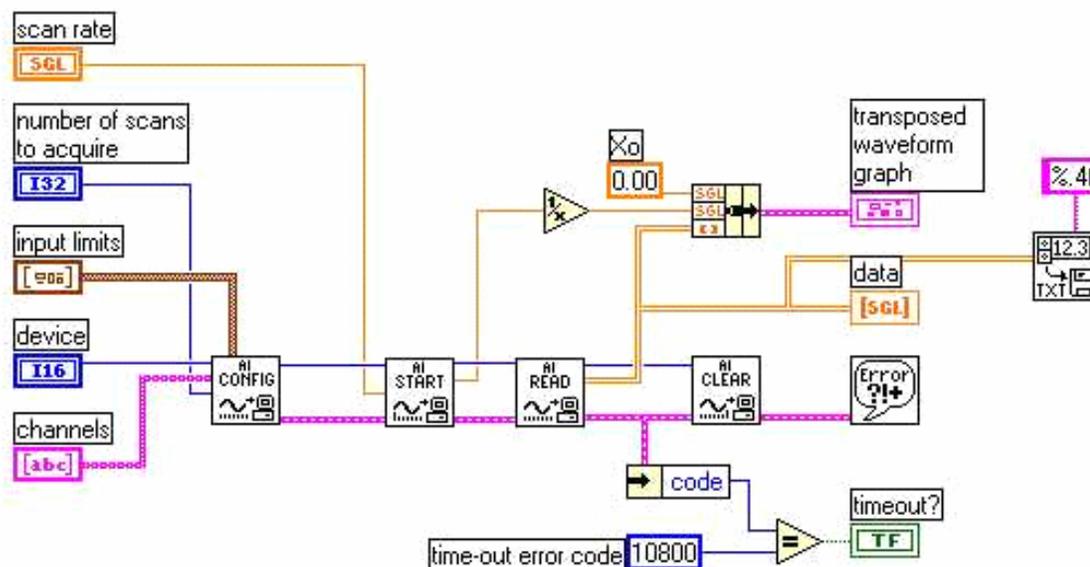


Figura 38. Diagrama de Bloques LABVIEW Programa Adquisición de Datos.

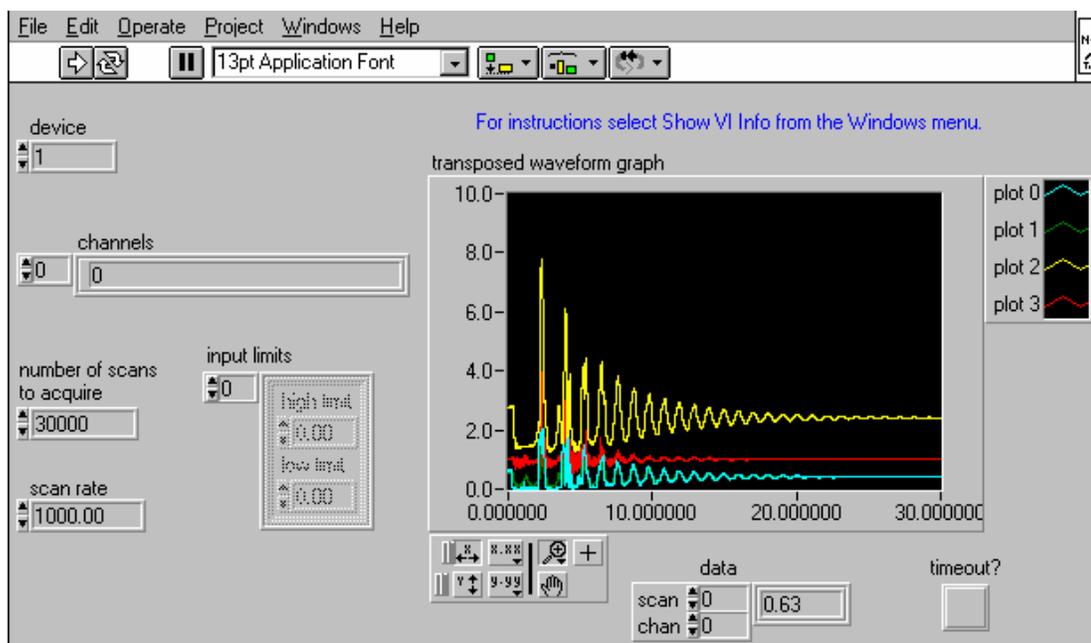


Figura 39. Ventana Adquisición y Visualización Tiempo Real Datos De Presión Expresada como Voltaje.

7.3 PARÁMETROS DE ENTRADA MODELOS NUMÉRICOS.

Los modelos numéricos que describen el flujo transitorio a través de conductos cerrados y el flujo compresible a través de la válvula de aire, requieren de una serie de datos o parámetros de entrada que dependen de las características del sistema, a continuación se hace una descripción de dichos parámetros y la forma como fueron obtenidos.

7.3.1 Factor De Fricción En Función Del Número De Reynolds.

Para determinar el factor de fricción, bajo flujo permanente, se parte de la ecuación general para el cálculo de pérdidas de energía por rozamiento a lo largo de un conducto cerrado, denominada ecuación de Darcy – Weisbach, dada por la siguiente expresión.

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} \quad 7.1$$

Donde h_f son las pérdidas por fricción, f es el factor de fricción de la tubería que depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, L es la longitud de la tubería, V es la velocidad promedio a la cual se desplaza el fluido dentro la tubería, D es el diámetro interno de la tubería y g es la aceleración gravitacional.

Las pérdidas por fricción h_f pueden ser escritas como: $h_f = \frac{\Delta P}{\gamma}$, donde ΔP es la pérdida de presión en un tramo de tubería, γ es el peso específico del fluido.

Despejando en la Ec. 7.1 para f se obtiene

$$f = \frac{2 * \Delta P * D}{\rho * L * V^2} \quad 7.2$$

Para determinar el factor de fricción se tomó una sección recta de la tubería, evitando así las pérdidas menores generadas por accesorios tales como codos. El factor de fricción se determinó en estado de flujo permanente, para la sección de tubería elegida, se midió la pérdida de presión para diferentes flujos volumétricos (diferentes números de Reynolds). El número de Reynolds por definición es $Re = \frac{VD}{\nu}$, donde V es la velocidad promedio del fluido, D es el diámetro interno y ν es la viscosidad cinemática del fluido, esta última es definida como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, donde μ es la viscosidad dinámica o total del fluido y ρ es la densidad, ambas variables se calculan en función de la temperatura mediante las siguientes ecuaciones (Laboratorio Mecánica de Fluidos - UPRM).

$$\rho = 1000 + 0.03254 * T - \left(T^2 * 6.52381 \cdot 10^{-3}\right) - \left(T^3 * 2.222 \cdot 10^{-5}\right) \quad 7.3$$

$$\rho = \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right] \quad T = [^{\circ}\text{C}]$$

$$\mu = e^{\left[a + b \left(\frac{T_0}{T_{ST}} \right) + c \left(\frac{T_0}{T_{ST}} \right)^2 + \ln(\mu_0) \right]} \quad \mathbf{7.4}$$

Donde $\mu = \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right]$, $a, b, c, \mu_0, T_0, T_{ST}$ son constantes con los siguientes valores.

$$a = -1.94, b = -4.8, c = 6.74, \mu_0 = 1.792 \times 10^{-3}, T_0 = 273 [^{\circ}\text{K}], T_{ST} = T [^{\circ}\text{C}] + 273.15$$

En la **Tabla 6** se muestran los valores obtenidos experimentalmente para los parámetros mencionados. Al sustituir dichos parámetros en la ecuación 7.2 se obtiene el factor de fricción en función del número de Reynolds.

Tabla 6. Determinación del factor de fricción.

Vol. (m ³)	t prom. (s)	Q (m ³ /s)	V (m/s)	ΔP (Pa)	Re	f_{EXP-} <i>BLASSIUS</i>
0.0867	29.390	0.00295	1.3912	10686.874	84871.47	0.035465
0.0867	30.115	0.00288	1.3577	10342.136	82828.24	0.036035
0.0867	30.753	0.00282	1.3296	9928.450	81111.21	0.036073
0.0867	34.428	0.00252	1.1876	8273.709	72452.91	0.037675
0.0867	42.770	0.00203	0.9560	5515.806	58320.61	0.038764
0.0867	57.613	0.00150	0.710	3102.641	43295.68	0.039565

Experimentalmente se ha comprobado que una ecuación genérica para el factor de fricción en función del número de Reynolds es de la forma $f = \frac{k}{\text{Re}^n}$, donde n y k son constantes de la ecuación que dependen de la rugosidad de la tubería. Para determinar estas constantes, con los datos experimentales de Re y f , se hace un ajuste de tipo doble logarítmico utilizando el método de los mínimos cuadrados. El ajuste será de la forma

$\ln(f) = \ln(k) - n * \ln(\text{Re})$, donde $\ln(k)$ y n son el intercepto y la pendiente que se obtienen con la regresión.

La Figura 40 muestra los valores medidos, así como los obtenidos mediante la regresión. Para el caso en estudio los valores de las constantes son.

$$n = 0.1591 \quad \text{y} \quad k = 0.21887$$

$$f = \frac{0.21887}{\text{Re}^{0.1591}} \quad 7.5$$

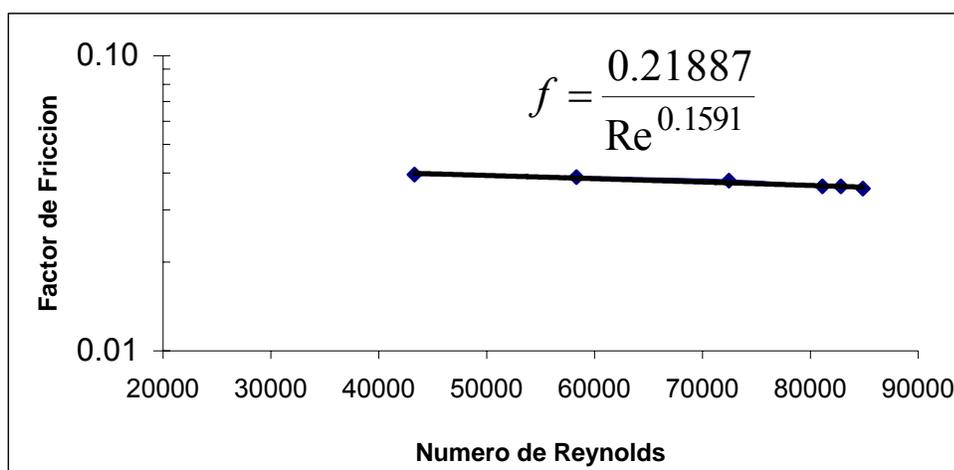


Figura 40. Curva experimental Factor de Fricción Vs número de Reynolds.

Con la ecuación anterior se obtiene un porcentaje de error promedio de 1.15 % con respecto al valor experimental, por lo cual se considera una aproximación válida.

Tabla 7. Comparación Factor de Fricción Experimental Vs Teórico.

$f_{EXP-BLASSIUS}$	$f_{Teórico}$	%ERROR
0.035465	0.035976	1.42
0.036035	0.036116	0.22
0.036073	0.036236	0.45
0.037675	0.036893	2.12
0.038764	0.038189	1.51
0.039565	0.040042	1.19

7.3.2 Cálculo De La Velocidad De La Onda De Presión En Líquido Puro.

Dada la dificultad de medir experimentalmente la velocidad de la onda, se procede teóricamente, usando la ecuación dada por Halliwell (Ec. 3.58).

$$a = \sqrt{\frac{k}{\rho \left(1 + \frac{k * \varphi}{E} \right)}}$$

Donde a es la velocidad con que se transmite la onda de presión en un líquido puro, E es el módulo de elasticidad de Young's de las paredes de la tubería, ρ es la densidad del fluido, φ es un parámetro adimensional que depende de las propiedades elásticas de la tubería, y k es el módulo bulk de elasticidad del fluido.

Para definir el valor de φ , es necesario conocer el tipo de tubería con la cual se está trabajando, conductos con paredes de espesor delgado o grueso, para el caso en estudio, se aplica la ecuación para un conducto elástico de paredes delgadas con anclaje contra movimiento longitudinal.

$$\varphi = \frac{D}{e} * (1 - \nu^2)$$

Donde ν es la razón de Poisson, D es el diámetro interno de la tubería, y e es el espesor de las paredes de la tubería.

En la Tabla 8 se muestran los parámetros usados para calcular el valor de la onda de presión en líquido puro y los resultados obtenidos.

Tabla 8. Parámetros usados en el cálculo de la velocidad de la onda de presión.

Parámetro	Unidades	Valores
k	<i>Gpa</i>	2.19
ρ	<i>Kg/m³</i>	995.31
E	<i>Gpa</i>	2.6
ν	<i>Adimensional</i>	0.4
e	<i>m</i>	0.00418
D	<i>m</i>	0.05196
φ	<i>Adimensional</i>	10.442
a	<i>m/s</i>	473.866

7.3.3 Tiempo De Cierre De La Válvula Para La Condición De Frontera Aguas Arriba.

Las características del flujo en la frontera, dependen de las condiciones impuestas por la misma, estas condiciones son definidas básicamente mediante relaciones que permiten obtener la descarga, carga hidráulica o una relación entre ambas para la frontera. En el caso de interés, se tiene una válvula tipo globo, aguas arriba del sistema, con la cual se realizó un cierre rápido⁴– presión negativa.

Dadas las características de la válvula, cierre no lineal, es necesario determinar la fracción de cierre o apertura de la válvula, de acuerdo a la posición del vástago. La fracción de cierre o apertura de la válvula se define como el área de la válvula parcialmente abierta (A_P), dividida por el área de la válvula completamente abierta (A_T). El procedimiento usado fue el siguiente.

⁴ Si el tiempo de cierre es menor que $t=2L/a$, el cierre puede ser considerado instantáneo.

Inicialmente se divide la sección de cierre ($1/4$ de circunferencia), en 8 secciones iguales (11.25°). Posteriormente, se toma una fotografía del área de cierre de la válvula de acuerdo a la posición del vástago ($1/8$ ó 11.25° , $3/8$, etc.); para garantizar el mismo tamaño y facilitar el posterior procesamiento de la imagen obtenida, la fotografía debe ser tomada a igual distancia, resolución, velocidad de apertura del lente, e igual cantidad de luz. Una vez se tienen las imágenes, con la ayuda de un programa desarrollado en Matlab[®], se definen los contornos de la imagen, se convierte la imagen de formato RGB (Red - Green - Blue), a una imagen binaria en la escala de grises, luego esta imagen, de acuerdo a un límite de intensidad, es convertida a una imagen en blanco y negro, Matlab por defecto, asigna el valor de cero (negro) a todos los pixels con intensidad menor que el límite asignado y el valor de uno (blanco) para el resto de los pixels. El procedimiento descrito anteriormente, se ilustra gráficamente en la Figura 41.

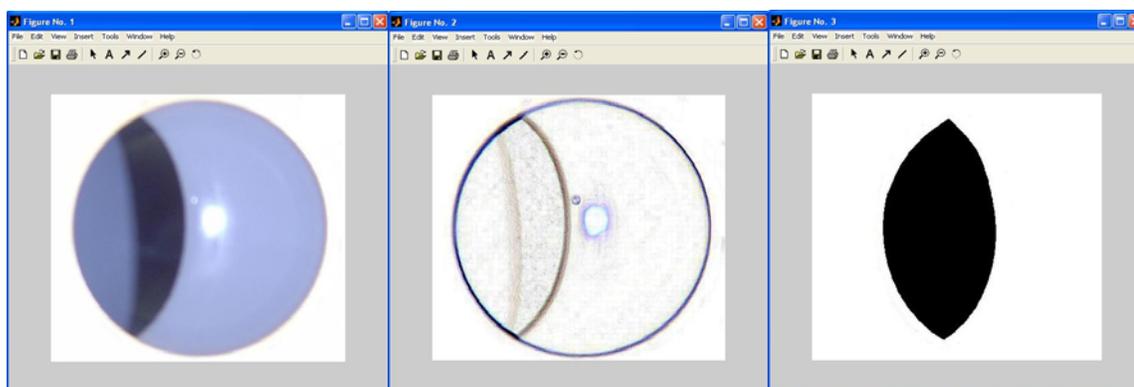


Figura 41. Esquema procesamiento de imagen para obtener el área de flujo.

Una vez la figura esta en formato blanco y negro, el programa realiza una sumatoria de pixels, y con base a la cantidad de pixels obtenida para la válvula completamente abierta, se obtiene la relación o fracción de apertura de la válvula. La información obtenida, y la relación entre fracción de apertura y flujo en estado permanente, es presentada en la Tabla 9 y la Figura 42 respectivamente.

En la Figura 42, se observa que para una posición de la válvula $1/2$ abierta, la reducción en porcentaje de flujo es de solo un 8.2 % con respecto al flujo a través de la

válvula completamente abierta, por lo cual esta posición es tomada como punto de partida para realizar el cierre rápido de la válvula.

Tabla 9. Fracción de apertura de la válvula de acuerdo a posición del vástago.

Posición del vástago.	Área. (pixels)	Fracción Apertura. (A_P / A_T)	Flujo Volumétrico. (lt/s)	% de Flujo
Cerrada	0°	0	0	0
1/8 abierta	11.25°	4572	0.0081	6.8
1/4 abierta	22.5°	33423	0.0591	51.02
3/8 abierta	33.75°	92762	0.1642	82.32
1/2 abierta	45°	159927	0.2830	91.84
5/8 abierta	56.25°	223647	0.3958	97.28
3/4 abierta	67.5°	315168	0.5577	99.32
7/8 abierta	78.75°	493869	0.8740	100
Completamente abierta	90°	565081	1	100

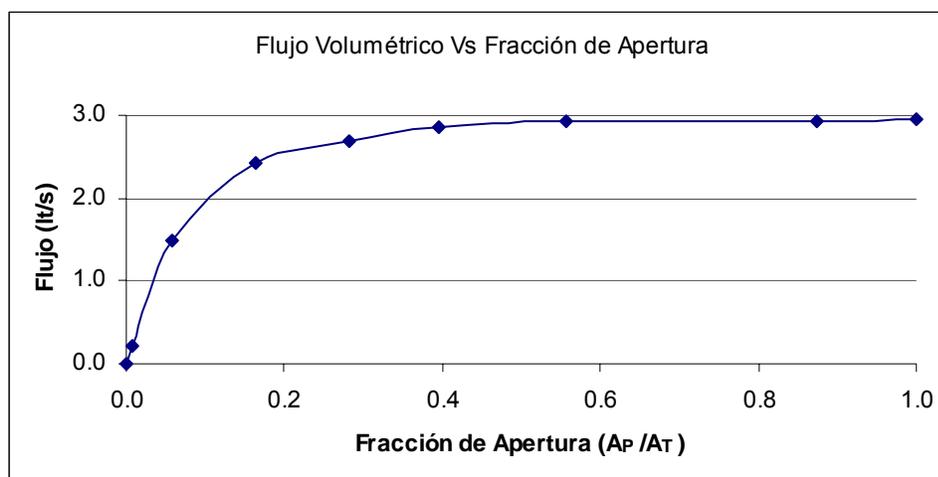


Figura 42. Flujo volumétrico con respecto a la fracción de apertura de la válvula

Es necesario recordar que el cierre de una válvula es considerado rápido o instantáneo, solo si el tiempo de cierre es menor que el tiempo que tarda la onda en viajar hasta el final de la tubería y regresar al punto donde fue originada, para el caso en estudio

esto es, $t = \frac{2 * L}{a} = \frac{2 * 94 m}{473.955 m/s} = 0.397 s$. Por lo tanto, para valores de tiempo de cierre

por debajo de este número, el cierre puede ser considerado rápido o instantáneo, es decir, $t_{cierre} \cong 0$, y la condición de frontera es definida como cero flujo a través de la válvula, $V = 0$.

Para valores de tiempo de cierre superiores a este número ($t > 0.397 s$), el cierre puede ser considerado lento, en este caso el procedimiento a seguir para definir el comportamiento de la condición de frontera es el siguiente.

El comportamiento hidráulico de una válvula puede expresarse como.

$$Q = Q_o * \tau * \sqrt{\frac{\Delta H}{\Delta H_o}}$$

Donde: C_d : Coeficiente de descarga de la válvula.

A : Área efectiva de apertura de la válvula.

ΔH : Caída de carga a través de la válvula.

El subíndice “o” se refiere a la condición inicial de flujo, normalmente la posición de apertura total.

τ : Es un número adimensional que describe el coeficiente de descarga de la válvula en función del área de apertura de la misma, y se define como.

$$\tau = \frac{C_d * A}{C_{do} * A_o}$$

Para la válvula completamente abierta, flujo permanente, $\tau = 1$, y para la condición de no flujo a través de la válvula (cerrada), $\tau = 0$.

El coeficiente de descarga es función del grado de apertura de la válvula, y aumenta a medida que el área de flujo disminuye (área de la válvula), es decir, disminuye el número de Reynolds en la tubería, el coeficiente puede ser expresado como.

$$C_d = \frac{Q_{real}}{Q_{teórico}}$$

Donde Q_{real} , es el caudal medido con el flowmeter, y $Q_{teórico}$, es el caudal que se obtiene al aplicar la ecuación para flujo a través de un orificio de arista afilada, $Q_{teórico} = A * \sqrt{2g\Delta H}$. Los resultados obtenidos al aplicar el procediendo anterior se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10. Coeficiente de descarga para diferentes grados de apertura de la válvula.

Q_{real}	ÁREA VÁLVULA	ΔH	$Q_{teor.}$	C_d	τ
lt/s	m^2	m	lt/s	$Q_{real} / Q_{teor.}$	$C_d * A / C_{do} * A_o$
2.91	2.685×10^{-3}	0.3163	6.688	0.43	1.0
2.89	2.347×10^{-3}	0.3514	6.162	0.47	0.94
2.87	1.498×10^{-3}	0.5271	4.816	0.59	0.76
2.80	1.063×10^{-3}	0.9137	4.499	0.62	0.57
2.73	7.599×10^{-4}	1.6516	4.326	0.63	0.41
2.30	4.408×10^{-4}	3.3736	3.586	0.64	0.24
1.40	1.588×10^{-4}	7.4851	1.925	0.73	0.10
0.24	2.172×10^{-5}	9.2422	0.293	0.82	0.02

Finalmente, para describir por completo la condición de frontera aguas arriba de la tubería, es necesario conocer el tiempo de cierre de la válvula, para ello se construye un dispositivo que permite medir el tiempo, el cual consiste en dos interruptores conectados a la tarjeta de adquisición de datos, la forma como funciona el dispositivo es descrita a continuación.

Como posición inicial de la válvula a flujo permanente, se toma parcialmente abierta a $\frac{1}{2}$ de la apertura total (8.2 % menos flujo). Para esta posición, el interruptor # 1 se pone en contacto con el vástago de la válvula; la posición del interruptor es normalmente cerrado, es decir mientras este en contacto con el vástago de la válvula,

estará enviando una señal de 8 voltios a la tarjeta de adquisición de datos. Una vez se inicia el cierre, el vástago de la válvula deja de accionar el interruptor y éste inmediatamente deja de enviar la señal y su voltaje cae a cero, permaneciendo en esta posición durante el tiempo restante, Figura 43a.

El segundo interruptor se ubica en la posición del vástago correspondiente a cierre completo de la válvula, el funcionamiento es similar al del interruptor # 1, sin embargo la posición del interruptor # 2 es completamente abierta, es decir mientras no este en contacto con el vástago de la válvula, envía, a la tarjeta de adquisición de datos, una señal de 8 voltios, una vez el vástago acciona el segundo interruptor, cierre completo de la válvula, éste inmediatamente deja de enviar la señal y su voltaje cae a cero, Figura 43b.

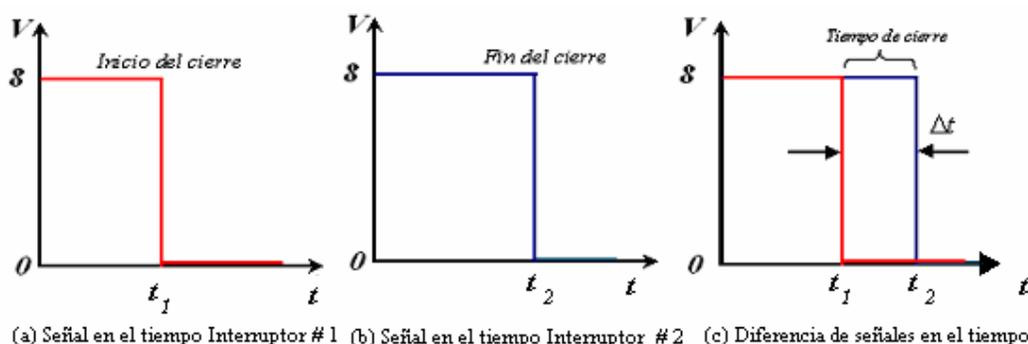


Figura 43. Esquema Procedimiento Adquisición Tiempo de Cierre de la Válvula.

El tiempo de cierre de la válvula, es obtenido entonces, al restar las señales adquiridas en el tiempo, es decir, la diferencia entre el tiempo de accionamiento de ambos interruptores, la Figura 43, muestra una representación grafica del procedimiento anterior, y la Figura 44 muestra el montaje experimental de los interruptores y sus respectivas posiciones.

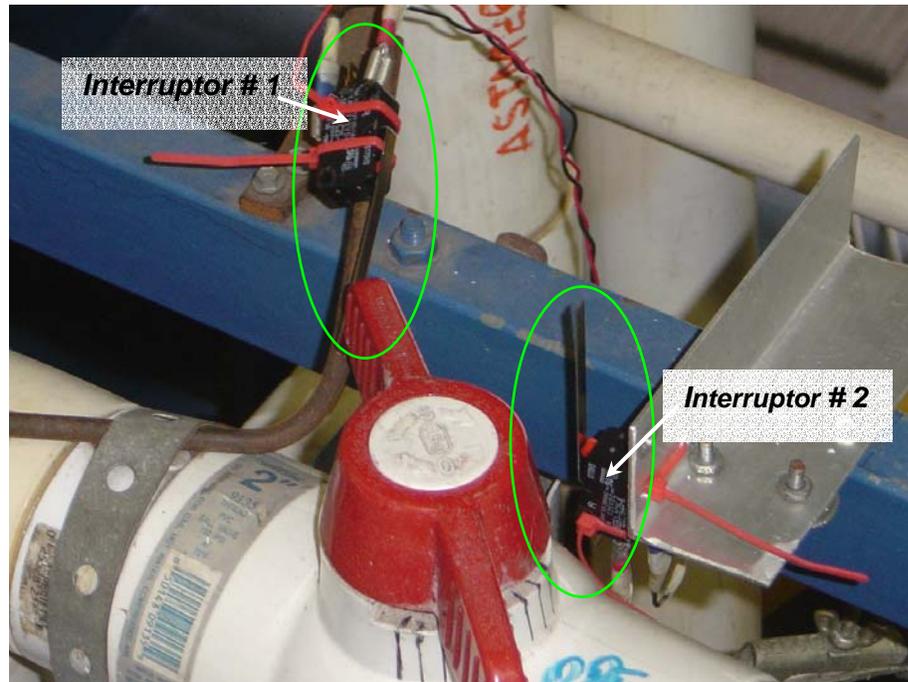


Figura 44. Posición de los Interruptores Sobre el Vástago al Inicio y Final del Cierre.

Una vez se tiene el tiempo de cierre de la válvula (t_c), es posible definir completamente la condición de frontera aguas arriba para cierres lentos, asumiendo una velocidad de cierre constante, y graficando el número adimensional del coeficiente de descarga de la válvula en función del área de apertura, contra el tiempo de cierre adimensional ($t_a = t/t_c$), τ Vs t_a .

El procedimiento para definir la condición de frontera de un cierre lento es el siguiente, mientras $t < t_c$, el flujo a través de la válvula se define como.

$V = V_o * \frac{A_o}{A} * \tau * \sqrt{\frac{P}{P_o}}$. Cuando $t = t_c$, la condición de frontera es definida como cero

flujo a través de la válvula, es decir $V = 0$.

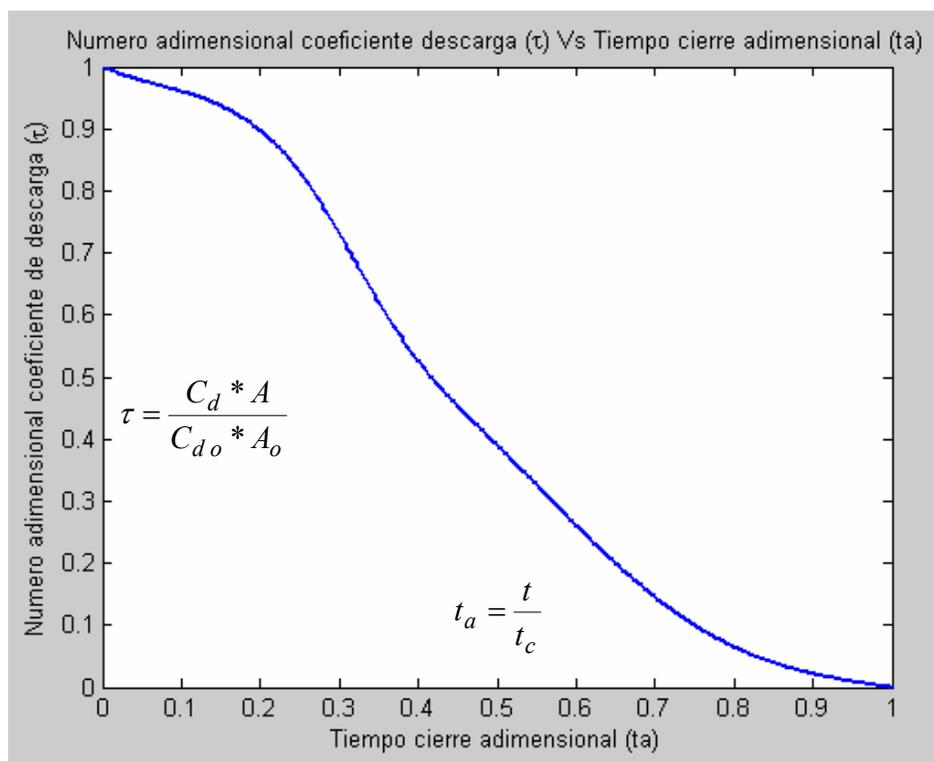


Figura 45. Relación coeficiente de descarga contra tiempo de cierre.

7.4 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL PARA GENERACIÓN DE GOLPE DE ARIETE

Para obtener información que permitiera verificar los modelos numéricos desarrollados, la fase experimental se efectuó en dos etapas. En la primer etapa se determinaron las condiciones de experimentación que garantizaran la formación de una zona de cavitación a lo largo de la tubería, para ello, mediante el cierre rápido de una válvula ubicada a la entrada del sistema, se indujo un cambio en las condiciones de flujo o un flujo en estado transitorio, cuya respuesta o magnitud es función del grado de apertura de la válvula (velocidad inicial de flujo), y de la rapidez de cierre. La respuesta del sistema, magnitud del transient y rapidez del cierre, fue medida con el sistema de

adquisición de datos descrito anteriormente, la ubicación de los transductores de presión en el sistema es mostrada en la Figura 33.

Una vez determinadas las condiciones de experimentación se ejecutó la segunda etapa, la cual consistía en la instalación de la válvula de admisión de aire, y posterior medición del efecto de la válvula como dispositivo para el control de presiones sub-atmosféricas, la respuesta del sistema hidráulico a la entrada de aire, fue medida nuevamente con la ayuda del sistema de adquisición de datos. Las condiciones recomendadas en la primera etapa, fueron reproducidas.

8 RESULTADOS EXPERIMENTALES.

En este capítulo, se hace una descripción de los resultados obtenidos en las pruebas experimentales. Como parte de este estudio, diferente número de pruebas fueron desarrolladas, en el documento, solo son reportados los casos en los cuales se presentó la formación de una zona de cavitación. El comportamiento de la presión con respecto al tiempo es graficado para las posiciones de los transductores a la entrada, frontera aguas arriba y a la mitad de la tubería. El tiempo de cierre de la válvula es calculado, y por lo tanto el cierre es clasificado como rápido o lento. Por último, para visualizar la presencia de la variación de la velocidad de la onda, un análisis en el dominio de la frecuencia de los datos adquiridos por los transductores es realizado.

Las pruebas experimentales se desarrollaron en dos etapas. Inicialmente se determinaron las condiciones de experimentación para formación de zonas de cavitación y posteriormente, fue estudiado el efecto de los dispositivos de control de cavitación bajo flujo transitorio. Los resultados de ambas etapas son mostrados, interpretados, y analizados a continuación.

8.1 FORMACIÓN ZONA DE CAVITACIÓN.

Para facilitar la comprensión del fenómeno en estudio, a continuación, se hace una descripción idealizada de la secuencia de eventos durante el cierre de la válvula en la frontera aguas arriba del sistema, asumiendo velocidad de la onda constante e igual a la de líquido puro (a_L).

Aunque es físicamente imposible cerrar una válvula instantáneamente, el estudio del caso de cierre instantáneo ayuda al estudio de los casos reales. Al cerrarse por completo la válvula de la Figura 46, se origina una onda de presión negativa (sub-atmosférica) que se propaga con velocidad a_L , la cual en el instante considerado tiene la misma dirección a la velocidad V_0 del fluido; se ha creado una onda elástica, o sea una onda de presión que se propaga por la tubería, la cual se refleja en el tanque de almacenamiento aguas abajo, vuelve a la válvula, de nuevo al tanque, y así

sucesivamente; originando sub-presiones y sobre-presiones en la tubería, la cual se contrae o expande al paso de la onda. El tiempo que tarda la onda en recorrer una vez la distancia entre la válvula y el tanque es $t=L/a_L$. Al cabo de un tiempo $T=4 t$, el ciclo se repite.

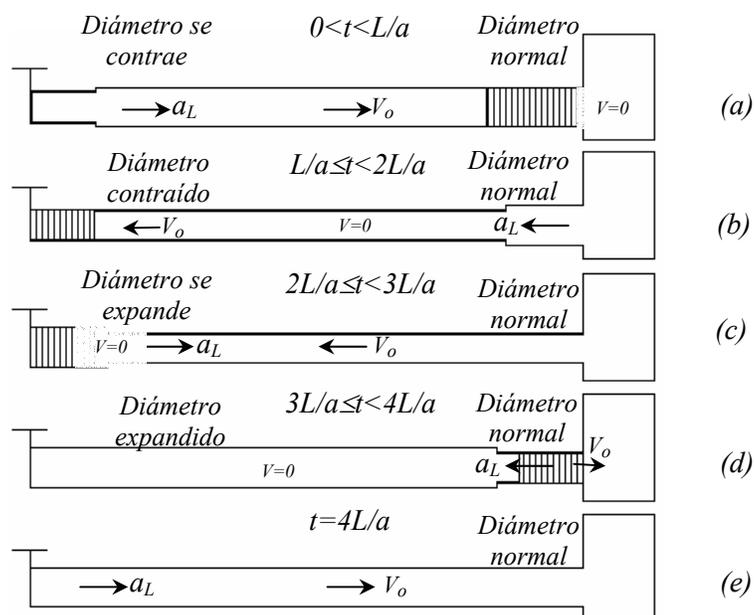


Figura 46. Secuencia de eventos cierre instantáneo de válvula aguas arriba.

La serie de acontecimientos en la tubería durante un período $T=4 t$ son mostrados en la Figura 46, y pueden ser explicados como.

$0 \leq t < L/a_L$, Figura 46a: Inicialmente no hay perturbación, el régimen es permanente, el líquido en la tubería se mueve de la válvula al tanque a una velocidad V_o . Cuando la válvula es cerrada, la velocidad de flujo en la válvula se reduce a cero ($V=0$), lo que causa una caída en la presión de $\Delta P = -\rho a_L V_o$, una onda de presión negativa se mueve de la válvula al tanque, El diámetro de la tubería se contrae con el paso de la onda. La velocidad del fluido comienza a ser cero, desde el tanque hacia la válvula.

$L/a_L \leq t < 2L/a_L$, Figura 46b: En el tiempo $t=L/a_L$ la onda de presión llega al tanque y se refleja con un valor igual a la presión del tanque (P_{resv}), en toda la tubería el fluido esta en reposo ($V=0$), pero no en equilibrio. La dirección del flujo comienza a ser desde el tanque a la válvula, es decir $V=-V_0$, iniciando con las partículas del fluido más cercanas a la válvula. El diámetro de la tubería recupera su tamaño normal.

$2L/a_L \leq t < 3L/a_L$, Figura 46c: En el tiempo $t=2L/a_L$, la dirección del flujo es del tanque a la válvula ($V=-V_0$). La onda de presión llega nuevamente a la válvula y es reflejada como una onda de presión positiva igual a $\Delta P = \rho a_L V_0$ (no se considera disipación). La velocidad del fluido comienza a ser cero, desde la válvula hacia el tanque ($V=0$). El diámetro de la tubería se expande con el paso de la onda.

$3L/a_L \leq t < 4L/a_L$, Figura 46d: En el tiempo $t=3L/a_L$, la tubería esta completamente dilatada. En toda la tubería el fluido esta en reposo ($V=0$), pero no en equilibrio. La onda de presión llega al tanque y se refleja con un valor igual a la presión del tanque (P_{resv}), la velocidad del fluido comienza a ser $V=V_0$, iniciando con las partículas del fluido más cercanas al tanque. La tubería comienza a recuperar su diámetro normal.

$t = 4L/a_L$, Figura 46e: En el tiempo $t=4L/a_L$, el diámetro de la tubería es normal. La onda de presión llega nuevamente a la válvula. Todo el fluido esta en movimiento con velocidad $V=V_0$, de la válvula hacia el tanque. Todo igual que en el tiempo $t=0$.

Teóricamente este movimiento, si no hay disipación de energía, continuaría indefinidamente.

Las pruebas experimentales fueron desarrolladas en una tubería horizontal de diámetro nominal de 2 pulgadas (0.0508 m), con 94 m de longitud. La tubería cuenta con una rugosidad artificial, la cual se obtuvo revistiendo el interior de las paredes con arena fina. La rugosidad artificial o revestimiento de arena fina, bajo flujo permanente, posibilita la adhesión nucleica de partículas de aire no disueltas las cuales, durante el

evento transitorio, sirven como núcleo de formación y crecimiento de las burbujas de vapor.

Un resumen de las pruebas desarrolladas es mostrado en la **Tabla 11**.

Tabla 11. Condiciones iniciales de experimentación.

Posición Válvula de Cierre	Flujo Volumétrico (lt/s)	Velocidad (m/s)	Tiempo de Cierre (s)	Tipo de Cierre
5/8 abierta	2.01	0.95	0.093	Rápido
5/8 abierta	2.22	1.05	0.1010	Rápido
½ abierta	2.38	1.13	0.1150	Rápido
½ abierta	2.50	1.18	0.1040	Rápido
½ abierta	2.55	1.20	0.1210	Rápido

El tiempo de cierre de la válvula (t_c), fue calculado al obtener la diferencia en el tiempo de accionamiento de los interruptores ubicados en la válvula (Figura 47). Una clasificación del tipo de cierre fue hecha de acuerdo al criterio $t_c < \frac{2L}{a_L}$, donde a_L es la velocidad de la onda en un líquido puro, $a_L = 475 \text{ m/s}$. $L =$ longitud de la tubería, $L = 94 \text{ m}$. con $t_c = 0.39 \text{ s}$.

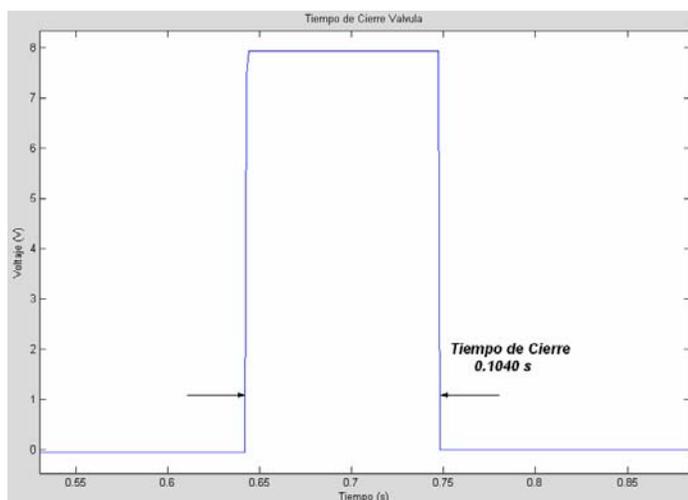


Figura 47. Diferencia en el tiempo de accionamiento de interruptores los en la válvula de cierre.

El comportamiento de la presión en el tiempo, para todas las pruebas realizadas fue similar (Figura 48); solo se presentó una leve variación en la magnitud del pulso de presión generado, ya que este depende del tiempo de cierre y de la velocidad inicial del fluido a flujo permanente; por lo cual, se presenta una descripción cualitativa del fenómeno observado para todas las pruebas.

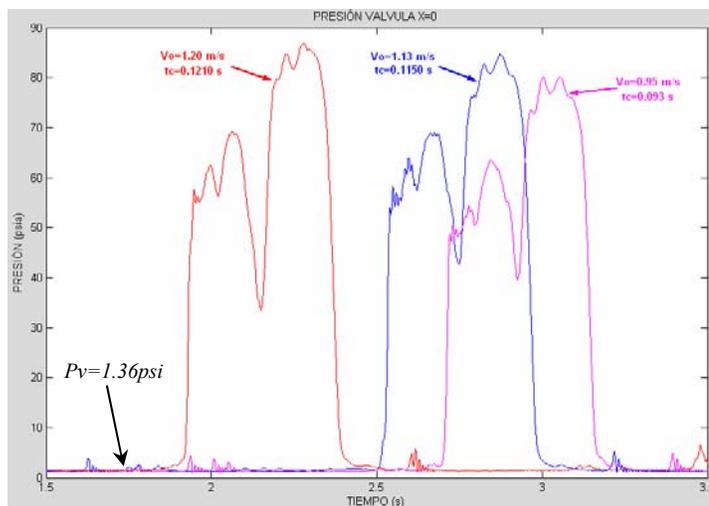


Figura 48. Variación del pulso de presión en función de la velocidad inicial y del tiempo de cierre.

El comportamiento de la presión en el tiempo, registrado por el transductor ubicado en la frontera aguas arriba (upstream), es mostrado en la Figura 49.

Los resultados experimentales proveen evidencia de la formación y posterior colapso de una cavidad de vapor en la frontera aguas arriba del sistema. La presencia de dos picos de diferente magnitud, durante los tres primeros pulsos de presión, confirman el colapso de la cavidad. El primer pico representa el valor de la presión que se obtiene por reflexión de la onda de presión en tiempos $2L/a$, $6L/a$, y $10L/a$. El segundo pico se presenta debido al colapso de la cavidad en la válvula alcanzando un valor $\Delta P'$ por encima del valor de Joukowski, el cual representa la máxima presión alcanzada si el cierre es instantáneo.

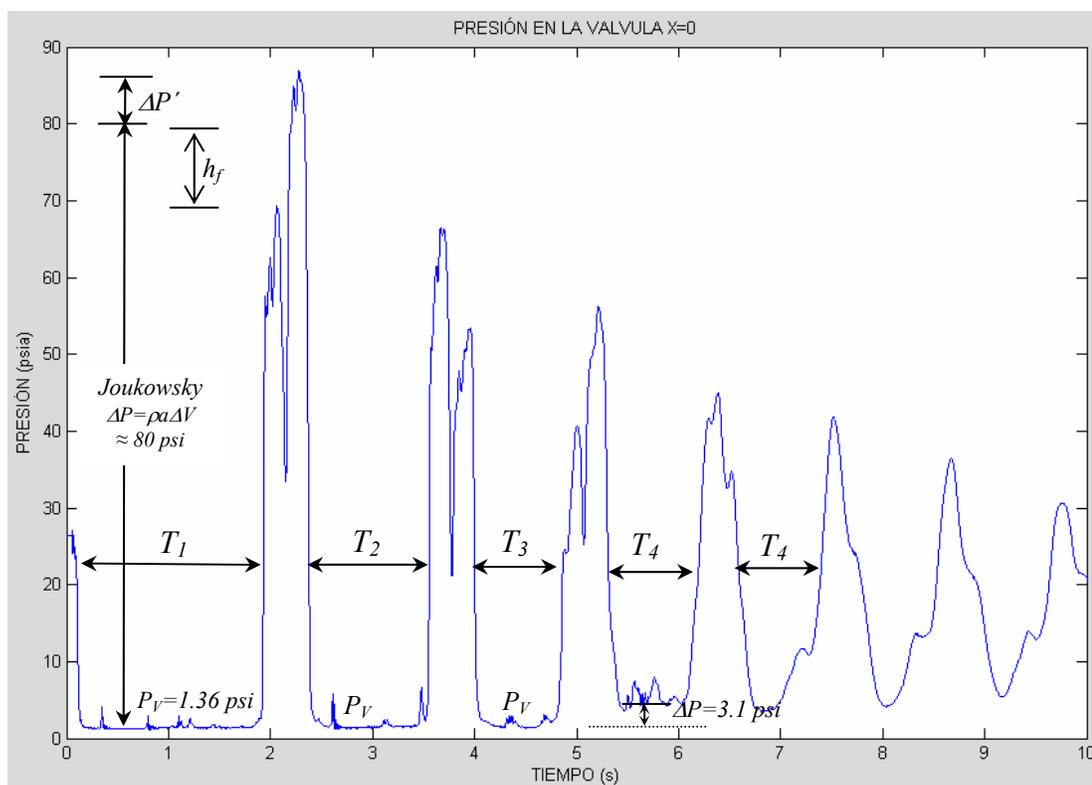


Figura 49. Comportamiento de la presión en el tiempo para la frontera aguas arriba.

Teóricamente, ambos eventos reflexión de la onda y colapso de la cavidad ocurren de forma simultánea. La diferencia en tiempo de ocurrencia de estos eventos puede explicarse desde el punto de vista físico, ya que no necesariamente la cavidad se haya concentrada en la válvula; es decir físicamente se puede estar dando la formación de pequeñas cavidades en la zona adyacente a la válvula, las cuales se van agrupando y comprimiendo cuando el pulso de presión positivo regresa a la válvula con magnitud aproximada a la carga del tanque de almacenamiento. Debido a que las burbujas no ocupan completamente la sección de la tubería, cuando la onda llega a la válvula ($T \approx 2L/a$), se da la reflexión e incremento del pulso de presión, este pulso de presión continua comprimiendo la cavidad hasta que esta alcanza el valor crítico y colapsa. El pulso de presión generado debido al colapso de una cavidad en la válvula es de corta duración, y representa un incremento en la magnitud de aproximadamente un 25% con respecto a la que se obtendría en el caso de golpe de ariete sin formación de cavidad. El valor h_f , representa la disipación de energía del pulso de presión, con respecto al valor teórico de Joukwosky.

De acuerdo a los resultados obtenidos, para tiempos menores de 6 segundos ($12L/a$), la presión de vapor es alcanzada ($P_v=1.26\text{psia}=8687\text{Pa}$), una cavidad de vapor se forma en la válvula y una región de cavitación aparece, extendiéndose desde la válvula hacia el tanque; experimentalmente es difícil comprobar la longitud exacta hasta la cual se extiende la región de cavitación.

Adicionalmente, en la Figura 49, se observa una variación en el período de la onda (T_1, T_2, T_3, T_4). Los tres primeros valores de periodos se presentan cuando la presión cae a un valor igual a la presión de vapor del líquido (cavitación), y varían en función de la magnitud del pulso de presión, es decir, a medida que pasa el tiempo, la disipación de energía amortigua el efecto del transient, por lo tanto $T_1 > T_2 > T_3$. En la región de cavitación, se generan burbujas de vapor incrementando la fracción de vacío en el líquido y por lo tanto, en la mezcla vapor-líquido, se presenta una variación en la velocidad de la

onda de presión; las burbujas de vapor generadas durante la cavitación colapsan una vez un pulso de presión positivo se desplaza sobre la región de cavitación.

El cuarto período (T_4), corresponde a valores de la presión por encima de la presión de vapor del líquido, por lo cual, no existe formación de burbujas de vapor o cavitación. La velocidad de la onda correspondiente a este período es constante e igual a la inicial en la mezcla, el período obtenido es igual a $T_4=0.87s$, con este período, se obtiene un valor de velocidad de la onda igual a $a_m = 4L/T = 432.2m/s$. De acuerdo a la fracción de vacío inicial asumida en el líquido ($\alpha_o = 0.0001$), el valor de velocidad de la onda obtenido teóricamente mediante la ecuación de Wylie es igual aproximadamente a $a_m = 440m/s$.

La presencia de una velocidad de la onda variable en la mezcla vapor-líquido, se visualizó mas fácilmente al realizar un análisis en el dominio de la frecuencia para los datos obtenidos por el transductor.

La Figura 50 muestra el análisis en el dominio de la frecuencia, para los datos de presión en la válvula aguas arriba y a la mitad de la tubería, se observa la presencia de diferentes componentes frecuenciales, lo que confirma la existencia de una variación en la velocidad de la onda.

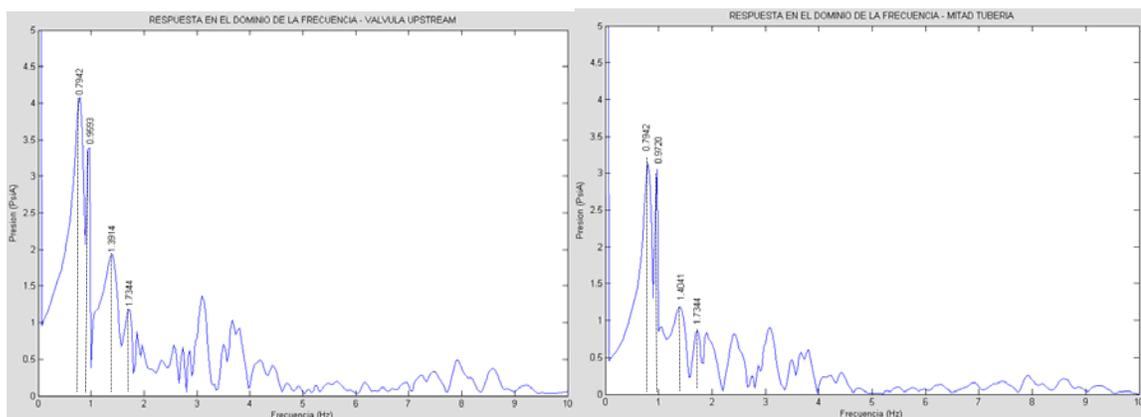


Figura 50. Análisis en el dominio de la frecuencia, datos de presión en la válvula aguas arriba y a la mitad de la tubería.

Para el transductor ubicado a una longitud equivalente a la mitad de la tubería, el registro de la presión en el tiempo es mostrado en la Figura 51.

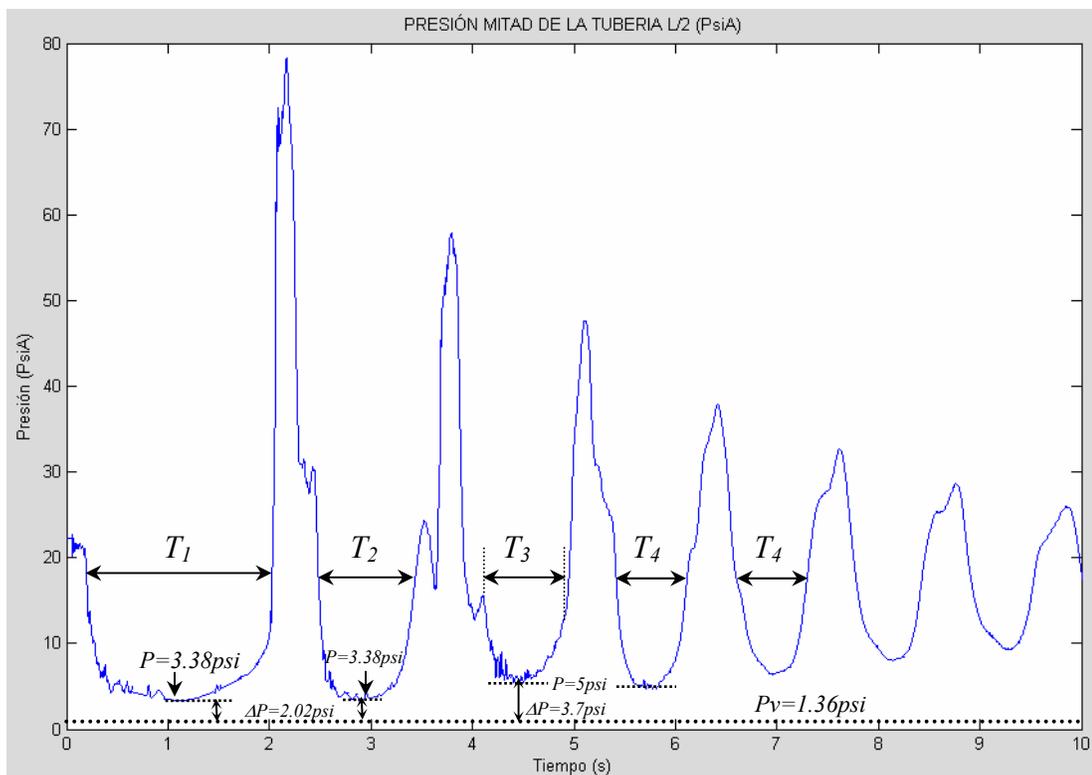


Figura 51. Comportamiento de la presión en el tiempo para la mitad de la tubería.

Los resultados indican que para este punto ($L/2$), la presión alcanzada, esta por encima de la presión de vapor del líquido. De acuerdo al comportamiento anterior y al observado en la gráfica de la presión en la válvula, es posible afirmar que para tiempos menores a 6 segundos, existe una región de cavitación entre la válvula y este punto, sin embargo, como ya se mencionó es difícil predecir su localización exacta. Para tiempos mayores a 6 segundos, el comportamiento exhibido es típico de un flujo en estado transitorio o golpe de ariete, en el cual la presión de vapor no es alcanzada en ningún punto de la tubería, y por lo tanto, un tratamiento del fenómeno mediante métodos tradicionales puede ser realizado, ya que los coeficientes de las ecuaciones gobernantes

dejan de ser dependientes de la presión, es decir, la velocidad de la onda de presión y la densidad del líquido permanecen constantes en el tiempo.

Para el período de la onda, nuevamente se observa una variación, comportamiento similar al exhibido para el punto de análisis en la válvula. Una vez el fenómeno de cavitación deja de presentarse, el período de la onda es aproximadamente constante (T_4).

8.2 EFECTO DE DISPOSITIVOS DE CONTROL.

La Figura 52 muestra la respuesta del sistema para la ubicación del transductor de presión en un punto aguas abajo de la válvula de entrada de aire. Se observa que la válvula controla eficientemente el transient, cuando se generan presiones por debajo de la atmosférica, la válvula se abre y equilibra las presiones del sistema a un valor cercano a la presión atmosférica local. El momento exacto en el cual ocurre el evento es difícil de predecir dado la rapidez del fenómeno. Para este punto, adicionalmente se observa que la válvula actúa como un tanque de amortiguamiento hidroneumático o cámara de aire, ya que los pulsos de presión positivos también son disipados o controlados. La no uniformidad en la señal adquirida se debe al aire introducido al sistema, el cual genera ruido o distorsión en la señal de los transductores.

La respuesta en el tiempo, entregada por el transductor ubicado aguas arriba de la válvula de admisión de aire, puede ser observada en la Figura 53. En términos generales la respuesta es similar a la obtenida por el transductor aguas abajo de la válvula, sin embargo, se observa la presencia de un pulso de presión positivo o de magnitud mayor que la presión atmosférica, este punto corresponde a la reflexión de la onda en un período aproximadamente de $4L/a$. La presencia y baja magnitud del pulso apoya la teoría de funcionamiento de la válvula como dispositivo de amortiguamiento hidrodinámico.

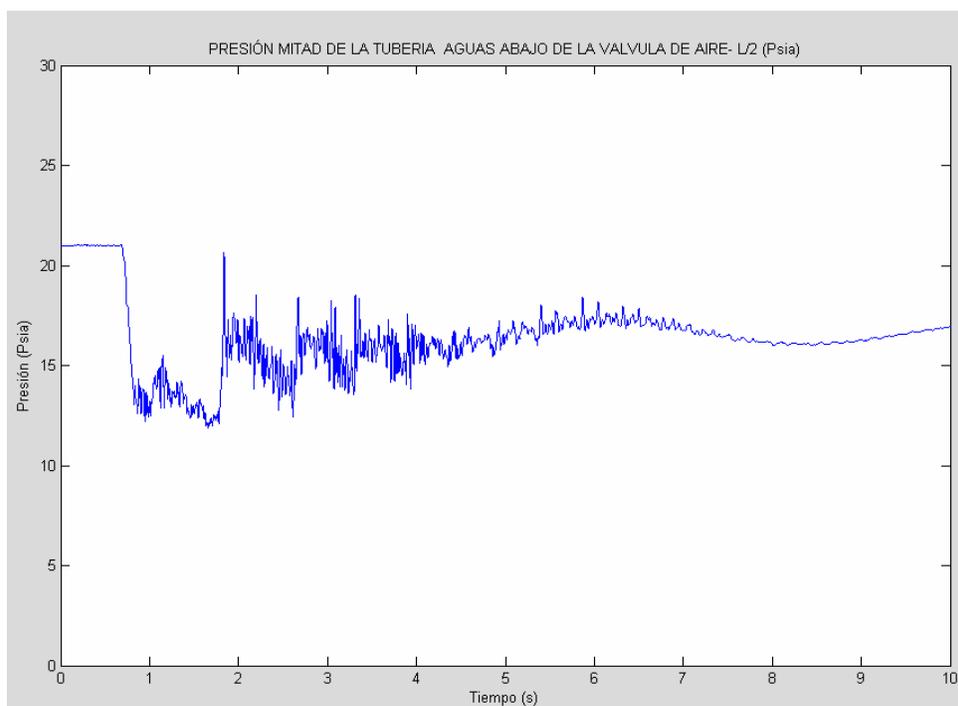


Figura 52. Respuesta en el tiempo transductor aguas abajo de la válvula de admisión de aire.

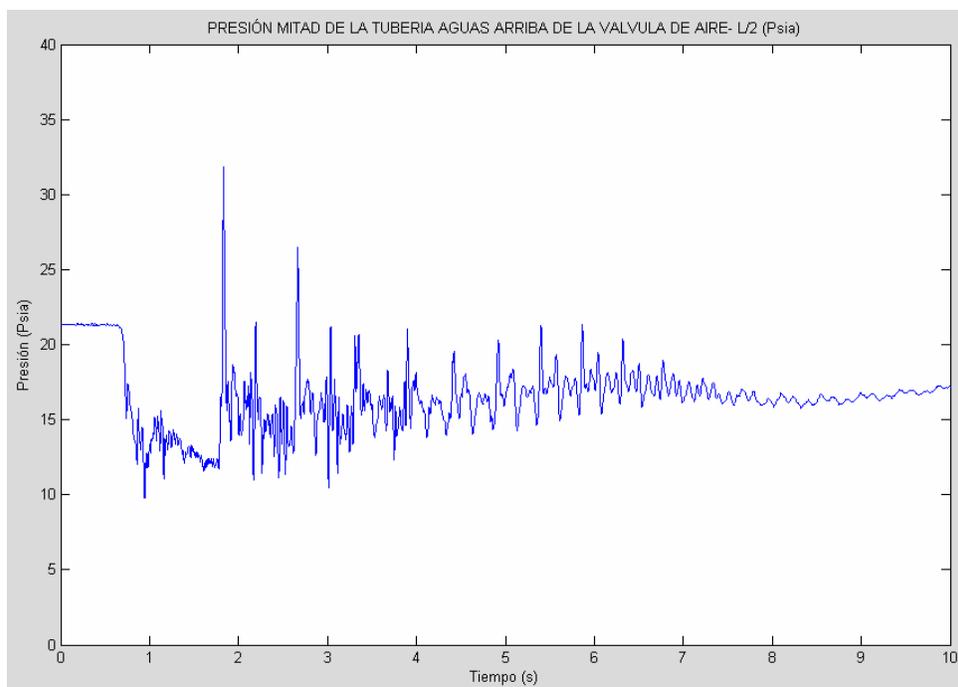


Figura 53. Respuesta en el tiempo transductor aguas arriba de la válvula de admisión de aire.

Al comparar la respuesta obtenida por ambos transductores (Figura 54), aguas arriba y aguas abajo de la válvula de admisión de aire, se nota la diferencia en magnitud de los pulsos positivos, mostrando el efecto de disipación o amortiguamiento para pulsos positivos; así mismo la eficiencia de la válvula en el control de presiones negativas, en las regiones adyacentes a ella.

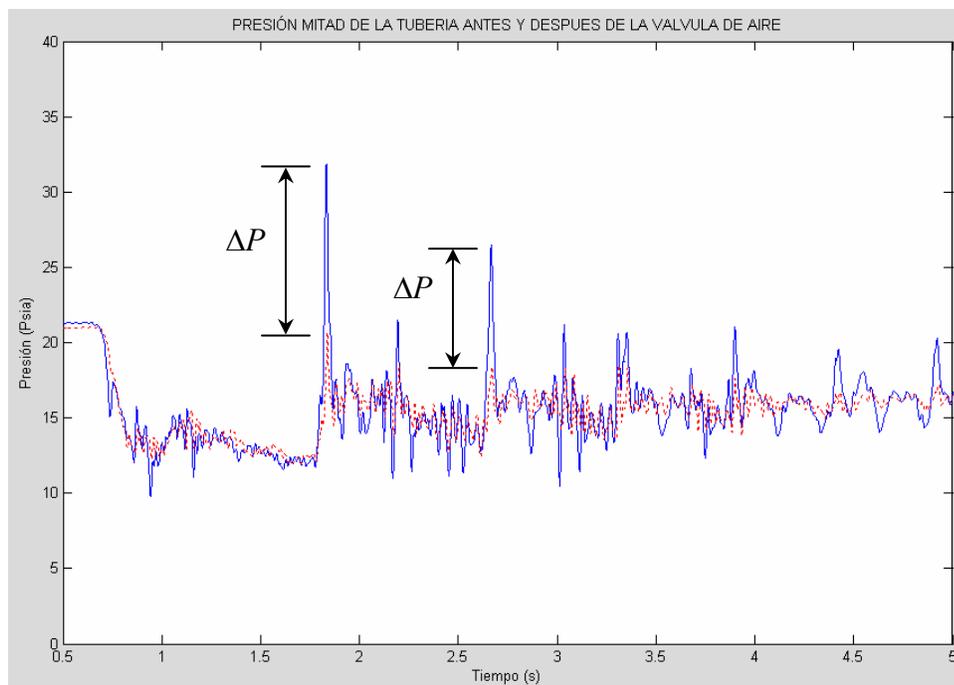


Figura 54. Respuesta en el tiempo aguas arriba y aguas abajo de la válvula de admisión de aire.

La Figura 55 muestra la respuesta del sistema para la ubicación del transductor de presión en la frontera aguas arriba del sistema, punto en el cual se genera el cambio instantáneo en las condiciones de flujo o estado transitorio. Se observa la permanencia en el tiempo de pulsos de presión positivos y negativos o presiones de vapor, lo anterior indica que la válvula es eficiente como dispositivo de control de sobrepresiones y subpresiones solo a nivel local, contrario a lo esperado, control del flujo transitorio en todo el sistema.

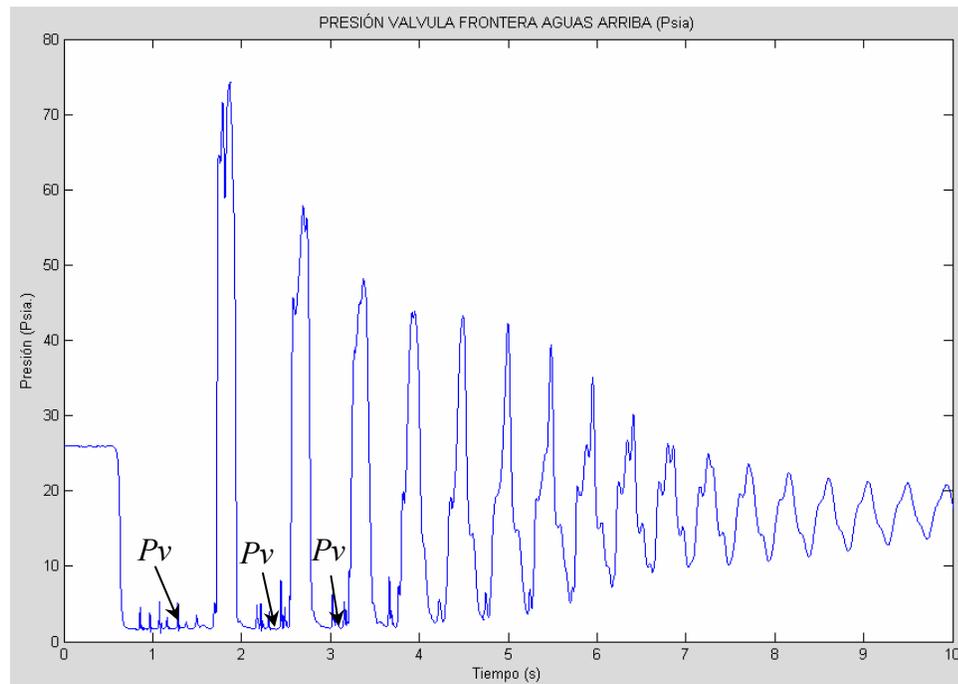


Figura 55. Respuesta en el tiempo frontera aguas arriba del sistema.

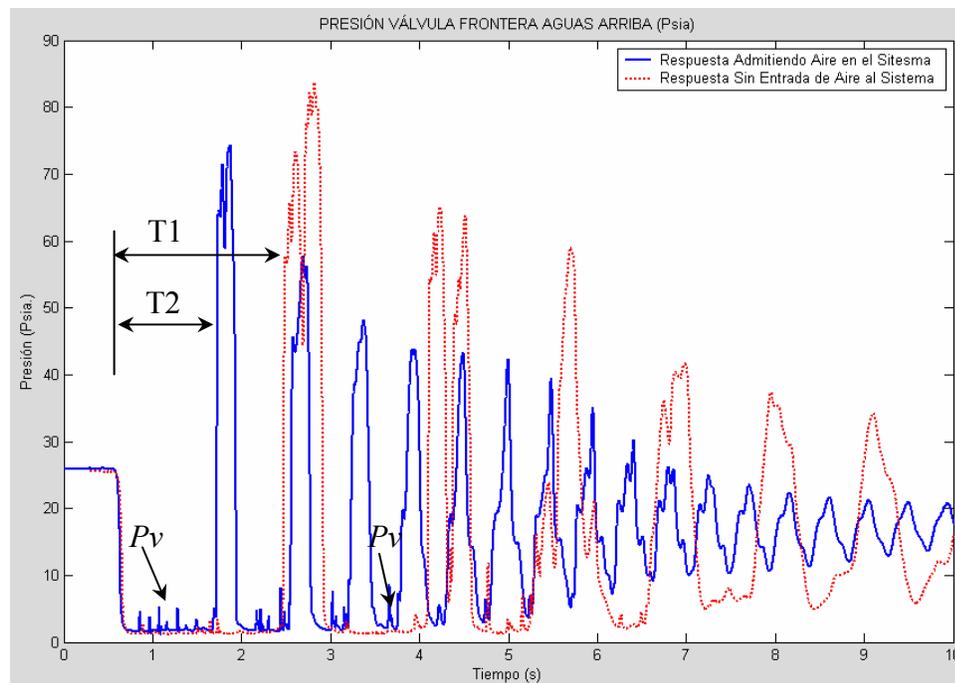


Figura 56. Respuesta en la frontera aguas arriba, antes y después de la instalación de la válvula

La Figura 56 muestra la respuesta en la frontera aguas arriba del sistema, para la ocurrencia del fenómeno, sin válvula de admisión de aire y con válvula de admisión de aire. Se observa que la disipación del pulso de presión es mínima con respecto al caso en el cual no se uso dispositivo de control, es decir, cuando se instala una válvula de admisión de aire como dispositivo de control, la onda de presión se propaga a lo largo de la tubería con características similares a las obtenidas cuando no se usa dispositivo de control, lo anterior confirma que las válvulas son eficaces o eficientes para el control de transients solo en zonas adyacentes al punto en el cual están ubicadas. En la figura, también puede observarse que la velocidad a la cual se propaga la onda es mayor en el caso en que se tiene un dispositivo de control, esto era de esperarse ya que al actuar la válvula, se rompe el crecimiento de la zona de cavitación vaporosa, por lo cual la onda se propaga en un líquido con fracción de vacío mucho menor o casi cero, es decir velocidad de la onda es constante y aproximadamente igual a la del líquido puro.

Adicionalmente, en la Figura 56 también puede observarse que la razón de disipación obtenida para flujo sin dispositivo de control o zona de cavitación vaporosa, es mayor a la obtenida cuando se instala un dispositivo de control (líquido puro), esta respuesta o disipación adicional puede deberse a las pérdidas de energía o transferencia de calor involucradas en el proceso de expansión y compresión de las burbujas de vapor dentro del líquido, comportamiento que no fue considerado en esta investigación.

La Figura 57 muestra el comportamiento de la presión en la mitad de la tubería, con válvula de admisión de aire y sin válvula. Para este punto, el comportamiento confirma la eficacia de la válvula en el control de presiones sobre – y sub atmosféricas en zonas adyacentes a la válvula.

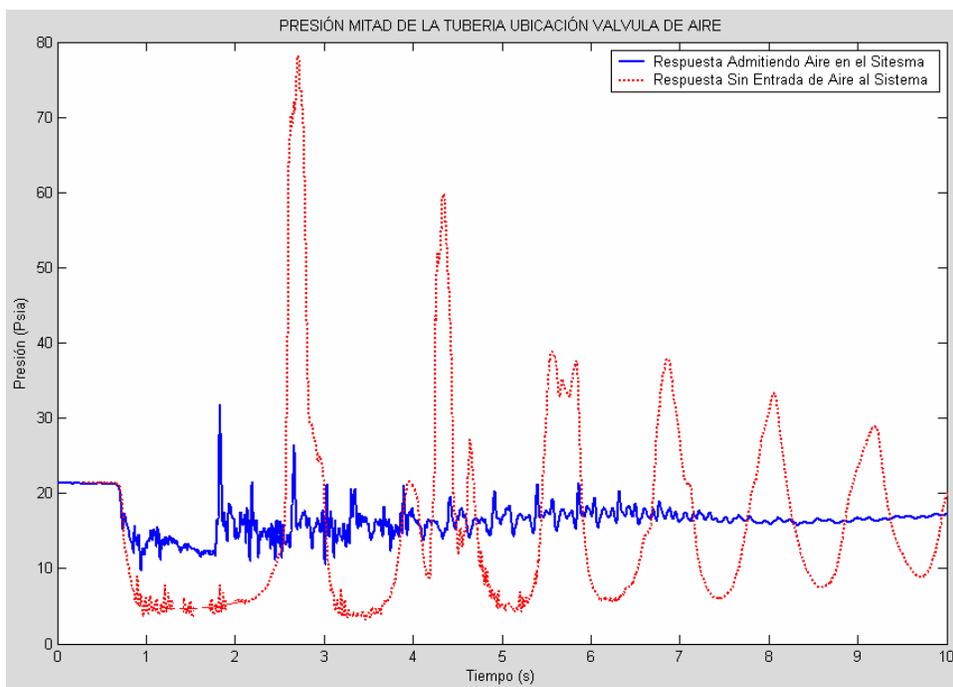


Figura 57. Respuesta en la mitad de la tubería, frontera aguas arriba, antes y después de la instalación de la válvula

9 COMPARACIÓN DE RESULTADOS EXPERIMENTALES Y MODELOS NUMÉRICOS

En este capítulo, se presentan los resultados obtenidos al comparar el modelo numérico y la implementación del esquema de MacCormack para el tratamiento de las ecuaciones gobernantes con los resultados experimentales discutidos en el capítulo anterior.

Se realizó una comparación entre los resultados experimentales y la solución tradicional de las ecuaciones gobernantes asumiendo la velocidad de la onda constante, dos casos fueron considerados: formación y no formación de una cavidad de vapor en la válvula de cierre.

Adicionalmente, cuando se consideró la velocidad de la onda variable, se estudió el efecto y validez de la asunción de un comportamiento de la burbuja de vapor isotérmico o adiabático, ambos resultados fueron comparados con los obtenidos experimentalmente.

El modelo que mostró mejor predicción de los resultados experimentales fue usado para el estudio de los dispositivos de control de cavitación bajo flujo transitorio, al incorporar una válvula de entrada de aire como condición de frontera interna y analizar la respuesta del sistema a la entrada de aire bajo condiciones de flujo isentrópico y no isentrópico. La comparación de los resultados obtenidos por el modelo y las pruebas experimentales también son mostrados en este capítulo.

9.1 SIMULACIÓN DE CAVITACIÓN BAJO FLUJO TRANSITORIO

Para visualizar el efecto de la cavitación bajo flujo transitorio y la necesidad de aplicar expresiones que permitan predecir el comportamiento de la velocidad de la onda en función de la fracción de vacío y de la presión, se resolvieron las ecuaciones gobernantes usando la velocidad de la onda constante e igual a la inicial en la mezcla ($a_m = 441.32 \text{ m/s}$), considerando una fracción de vacío inicial $\alpha_o = 0.0001$.

9.1.1 Velocidad De La Onda Constante.

La Figura 58 muestra los resultados obtenidos al resolver las ecuaciones para golpe de ariete sin considerar la formación de una cavidad en la válvula de cierre. Se observa que la onda de presión se desplaza con mayor rapidez en comparación con la experimental, bajo estas condiciones, los resultados obtenidos por el modelo no reproducen los resultados experimentales. Dado que en la solución del modelo, bajo golpe de ariete, no se establece ninguna condición que restrinja la caída de la presión a valores iguales a la presión de vapor del líquido como máximo, el modelo predice presiones absolutas negativas lo cual es físicamente imposible.

En la Figura 59 se muestran los resultados obtenidos por el modelo al asumir la velocidad de la onda constante y considerar la formación de una cavidad de vapor en la válvula de cierre. Se observó una buena predicción en tiempo de ocurrencia y magnitud para los dos primeros pulsos, sin embargo los pulsos restantes presentan diferencias significativas en el tiempo de ocurrencia y magnitud; igualmente se observa mayor razón de disipación en comparación con los resultados experimentales.

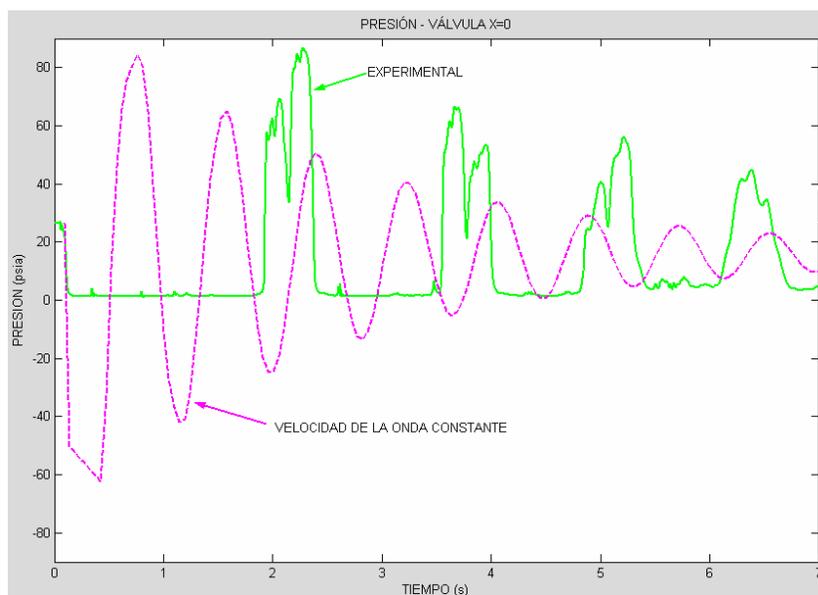


Figura 58. Comportamiento de la presión asumiendo velocidad de la onda constante contra resultados experimentales.

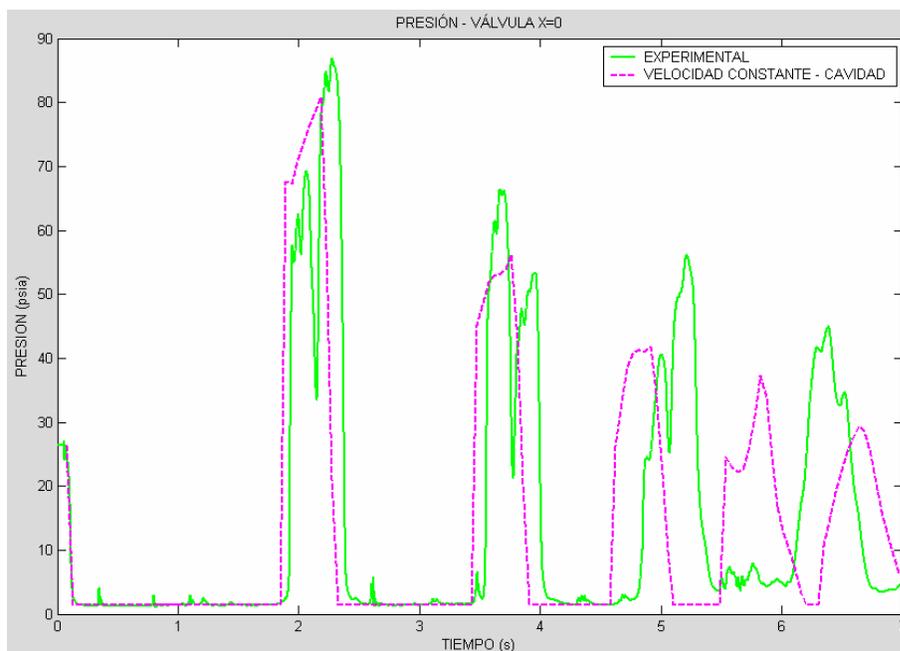


Figura 59. Comportamiento de la presión considerando formación de cavidad en la válvula contra resultados experimentales.

9.1.2 Velocidad De La Onda Variable.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la solución numérica de las ecuaciones gobernantes para el modelo de cavitación vaporosa distribuida aplicando el esquema numérico de MacCormack, asumiendo una velocidad de la onda variable con comportamiento de la burbuja de vapor isotérmico o adiabático. Adicionalmente se considera disipación de energía en flujo transitorio.

En la Figura 60 se muestra la respuesta de la presión en el tiempo para los resultados experimentales y el modelo de cavitación vaporosa distribuida con comportamiento adiabático o isotérmico. Se observó buena predicción en la magnitud de los pulsos de presión.

Para el tiempo de ocurrencia, solo el primer pulso se predice con exactitud. En ambos casos: adiabático e isotérmico, la predicción del segundo pulso de presión está desfasada con respecto a la experimental, para un comportamiento de la burbuja

adiabático el pulso se presenta 0.14 s después del experimental y para un comportamiento isotérmico el pulso se retrasa 0.2 s con respecto al experimental. Para el tercer pulso de presión, el desfase disminuye en ambos modelos, 0.09 s adiabático y 0.17 s isotérmico. A partir de este pulso de presión ambos casos se adelantan en la ocurrencia del evento en el tiempo.

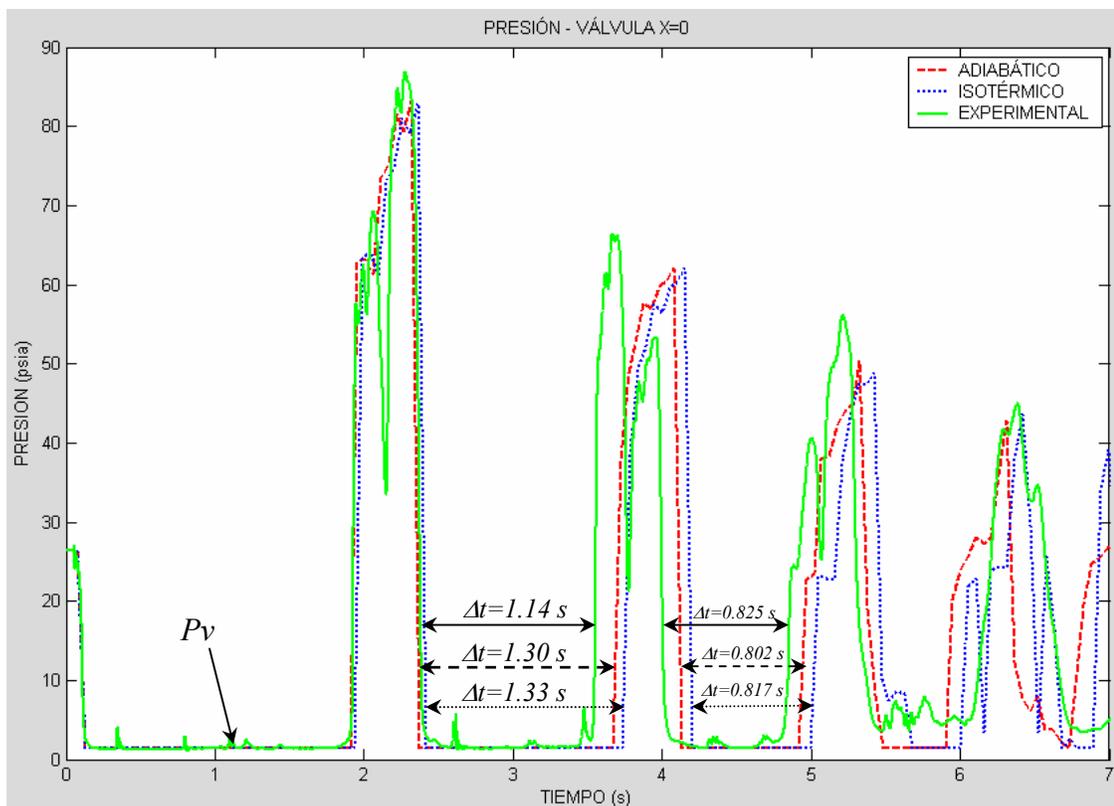


Figura 60. Comportamiento de la presión considerando cavitación vaporosa distribuida contra resultados experimentales en $X=0$ (válvula de cierre).

Lo anterior indica que la predicción en el tiempo de creación y colapso de la primer cavidad esta en concordancia con lo experimental, en comparación con los resultados obtenidos para la segunda y tercer cavidad los cuales difieren. Se observó que a pesar de que la tercera cavidad no se predice con exactitud su duración o tiempo de existencia en los tres casos es muy similar, 0.825 s experimental, 0.802 s adiabático y

0.817 s isotérmico. Adicionalmente el modelo predijo la creación y colapso de una cuarta cavidad no presente en los resultados experimentales, Figura 61.

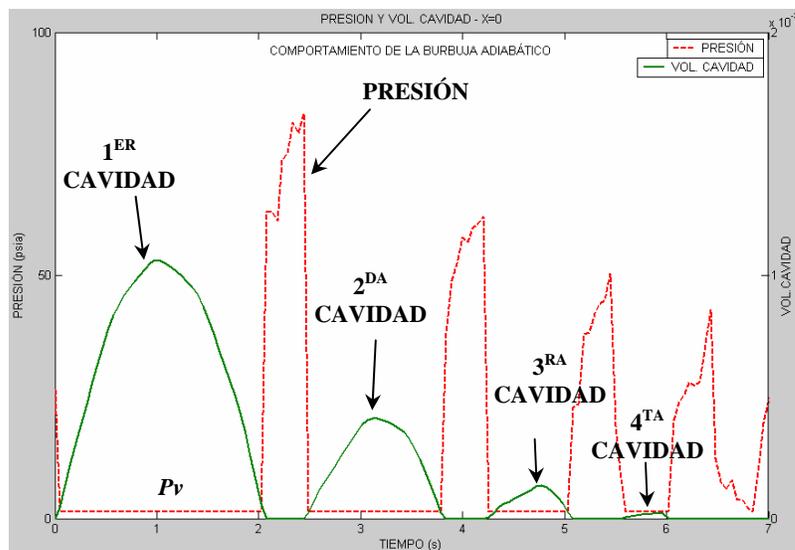


Figura 61. Cavidad de vapor en la válvula.

La formación y distribución de las cavidades en el tiempo, para un comportamiento de la burbuja de vapor adiabático o isotérmico, puede ser observado en la Figura 62. La magnitud o tamaño de la cavidad obtenido con ambos comportamientos es similar; a partir de la segunda cavidad se observa un desfase en el tiempo de formación de la burbuja, comportamiento similar al observado en la predicción de la presión.

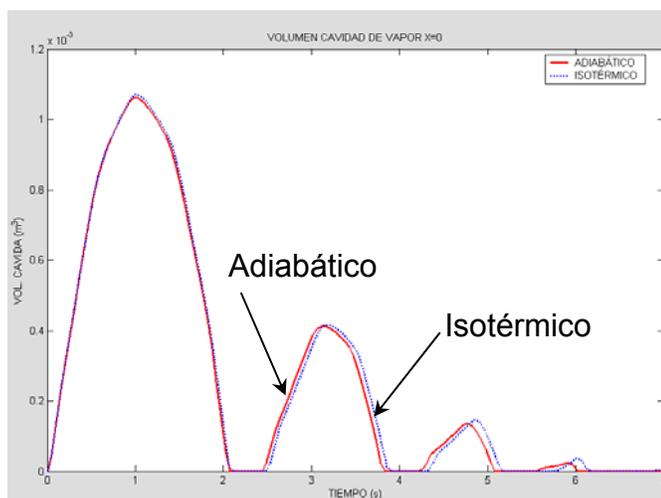


Figura 62. Cavidad de vapor comportamiento adiabático contra isotérmico.

Los resultados para el segundo punto en análisis ($L/2$), se muestran en la Figura 63. Se observó una respuesta en el tiempo similar a la obtenida para la primer sección (válvula - $X=0$). La predicción en la magnitud del pulso de presión positivo es aceptable para ambas condiciones o comportamiento de la burbuja, sin embargo, el modelo predijo presiones de vapor inexistentes para esta sección en condiciones experimentales.

Al comparar el cambio o magnitud del pulso de presión de los resultados experimentales (ΔP_E) y los resultados teóricos (ΔP_T), en un período dado, se observa que en todos los casos $\Delta P_T > \Delta P_E$ por lo cual es posible afirmar que la razón de disipación en la respuesta experimental es mayor que la respuesta teórica.

Adicionalmente se observan oscilaciones de alta frecuencia atribuidas a la difusión numérica involucrada por el esquema numérico de segundo orden en el tratamiento del término convectivo de las ecuaciones gobernantes $\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)$. Mayores oscilaciones se presentan cuando un comportamiento de las burbujas de vapor isotérmico fue asumido.

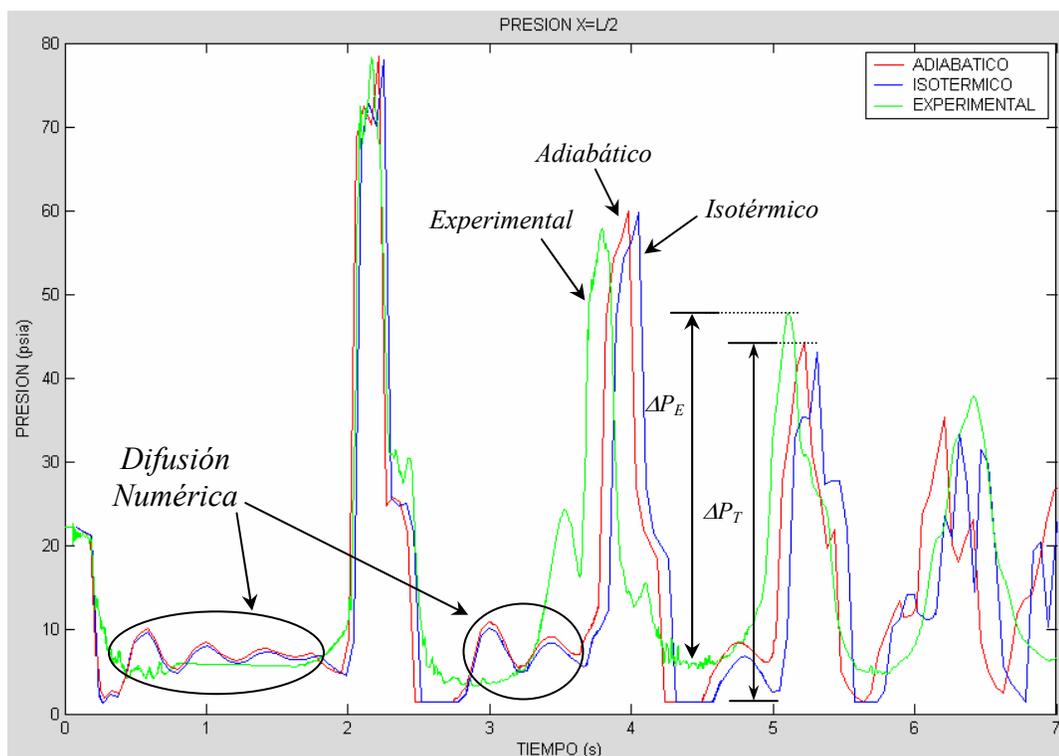


Figura 63. Comportamiento de la presión contra resultados experimentales en $X=L/2$

El efecto o diferencia entre la asunción de comportamiento adiabático o isotérmico, puede visualizarse más fácilmente graficando la fracción de vacío en el líquido para cada caso. En la Figura 64 se observa la respuesta en el tiempo de la fracción de vacío en función de la presión. Al asumir un comportamiento de las burbujas de vapor isotérmico o adiabático con coeficientes politrópicos para el vapor iguales a $n=1.2 - n=1.3$ y asumiendo en el caso más ideal burbujas de aire $n=1.4$.

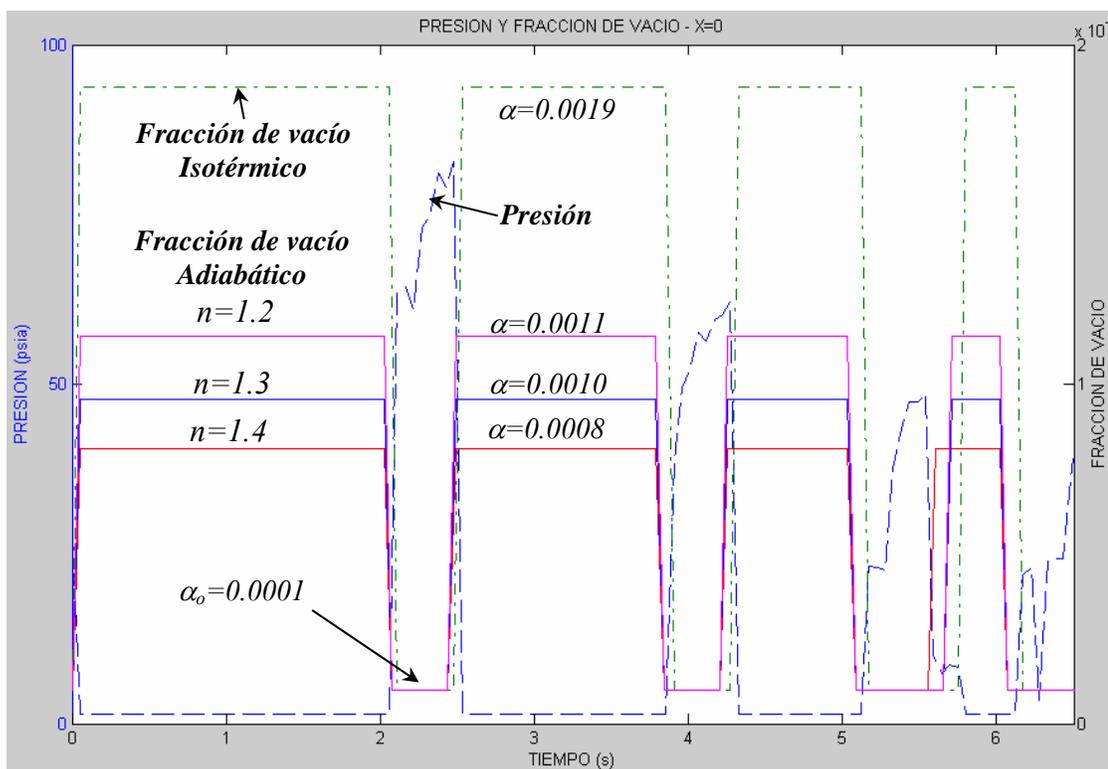


Figura 64. Comportamiento fracción de vacío – presión, en el tiempo.

Los resultados indican que, bajo comportamiento adiabático, cualquiera de los coeficientes politrópicos estudiados produce una fracción de vacío menor a la del comportamiento isotérmico, lo anterior explica la velocidad de desplazamiento mayor o desfase en el tiempo para el comportamiento adiabático, se recuerda que a menor fracción de vacío menor contenido de vapor por lo tanto la mezcla tiende más a líquido puro.

Adicionalmente, se observa correspondencia con el fenómeno físico, cuando un pulso de presión positivo se desplaza sobre una zona de burbujas o cavitación, estas por compresión colapsan y desaparecen, disminuyendo la fracción de vacío y aumentando por lo tanto, la velocidad de la onda de presión.

La Figura 65 muestra la respuesta en el tiempo para la velocidad de la onda. Se observa mas claramente la dependencia de la presión confirmando lo dicho anteriormente

durante el análisis de la fracción de vacío. Adicionalmente se observó una reducción en la velocidad de la onda de hasta un 75% cuando la presión de vapor es alcanzada para el comportamiento isotérmico y de un 70% para el caso adiabático.

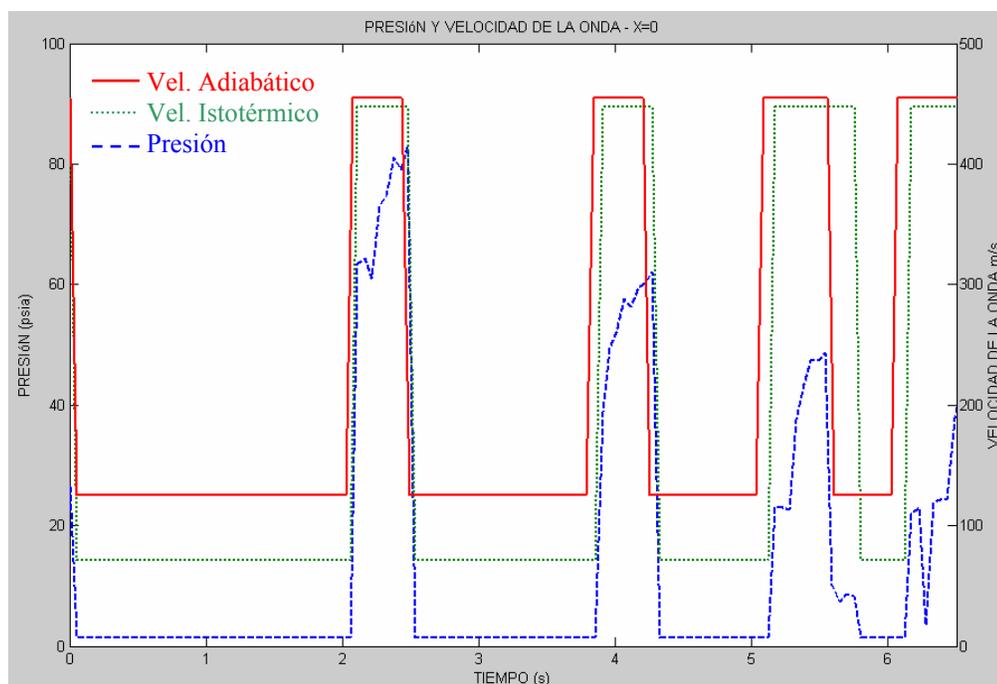


Figura 65. Velocidad de la onda de presión en el tiempo.

Del análisis anterior para el comportamiento de la burbuja de vapor adiabático o isotérmico, junto al realizado para la respuesta de la presión en el tiempo, una conclusión preliminar puede ser dada: La asunción de comportamiento adiabático no representa mayor diferencia en la predicción de la magnitud del pulso de presión, sin embargo bajo condiciones adiabáticas la velocidad de la onda en la mezcla es mayor que bajo condiciones isotérmicas, por lo cual la respuesta obtenida, con ambos comportamientos, se encuentra desfasada en el tiempo.

La inclusión del término de disipación de energía en flujo transitorio adoptando el tratamiento desarrollado por **Schohl (1993)**, permitió visualizar el comportamiento de los esfuerzos cortantes en las paredes de la tubería. La Figura 66 muestra los resultados obtenidos al aplicar este procedimiento.

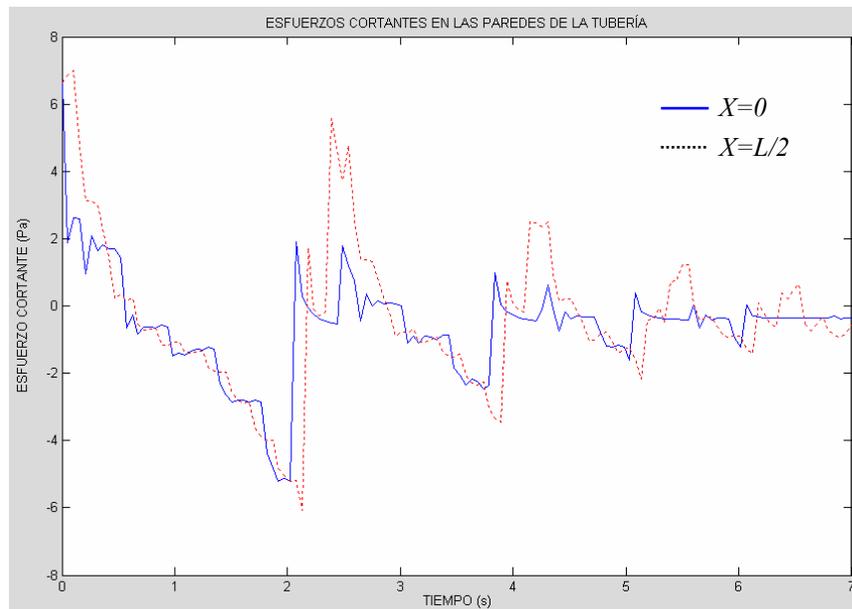


Figura 66. Distribución esfuerzos cortantes en las paredes de la tubería.

Para las condiciones estudiadas, los resultados obtenidos al asumir comportamiento de la burbuja de vapor adiabático o isotérmico fueron aceptables, por lo tanto durante la siguiente etapa, cualquiera de los dos modelos puede ser usado en el estudio del efecto de dispositivos de control de flujo transitorio.

9.2 SIMULACIÓN DE DISPOSITIVOS DE CONTROL DE FLUJO TRANSITORIO.

El estudio del comportamiento de las válvulas de admisión de aire como dispositivos para el control de flujo transitorio, así como la validación de la teoría para el cálculo o predicción de la respuesta del sistema ante la entrada de aire, fue una de las principales fases de este trabajo. Por lo tanto a continuación se presentan los resultados obtenidos de la simulación para flujo transitorio.

La Figura 67 muestra los resultados obtenidos al comparar los datos experimentales contra la predicción numérica asumiendo flujo isentrópico a través de la válvula. Experimentalmente, una vez la válvula se abre, las presiones son equilibradas a valores cercanos a la presión atmosférica, presentándose pequeñas oscilaciones. Se observa claramente que el modelo teórico no reproduce el fenómeno experimental; el modelo predice la ocurrencia de pulsos de presión positivos no existentes experimentalmente, lo anterior se debe a que los modelos asumen que una vez el aire está dentro de la tubería, este se aloja en zonas adyacentes a la válvula y es evacuado lentamente, a medida que las subpresiones se disipan. Contrario a esto, la respuesta obtenida en la ubicación de la válvula muestra un alto efecto de amortiguamiento o disipación sobre los pulsos positivos, lo anterior indica un efecto, adicional de la válvula, ya que además de actuar como dispositivo de control de presiones subatmosféricas, también actúa como dispositivo hidroneumático amortiguando las presiones positivas; por lo tanto, una condición de frontera numérica que simule solo el efecto de la entrada de aire al sistema no predice eficientemente el comportamiento, es necesario entonces complementar este criterio con la inclusión de comportamiento hidroneumático, una vez se detectan presiones positivas en el sistema.

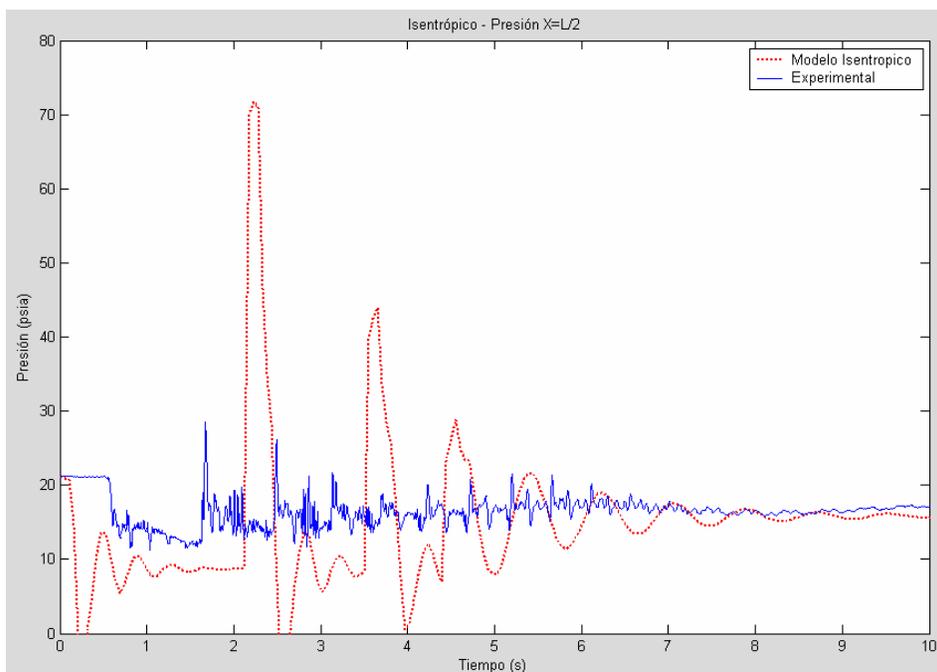


Figura 67. Presión en la válvula de admisión de aire, modelo isentrópico contra resultados experimentales.

De forma similar, la respuesta obtenida en la frontera aguas arriba del sistema con el modelo numérico, difiere del fenómeno experimental (Figura 68). Se observa una buena predicción en la magnitud del primer pulso de presión, sin embargo, el tiempo de duración de presiones subatmosféricas calculadas con el modelo es mayor que el observado experimentalmente y mayor que el calculado con el modelo de cavitación vaporosa presentado en el capítulo anterior. Un mayor tiempo de permanencia de presiones negativas, refleja una disminución en la rapidez de desplazamiento de la onda, debido principalmente a la burbuja de aire asumida en la válvula de admisión.

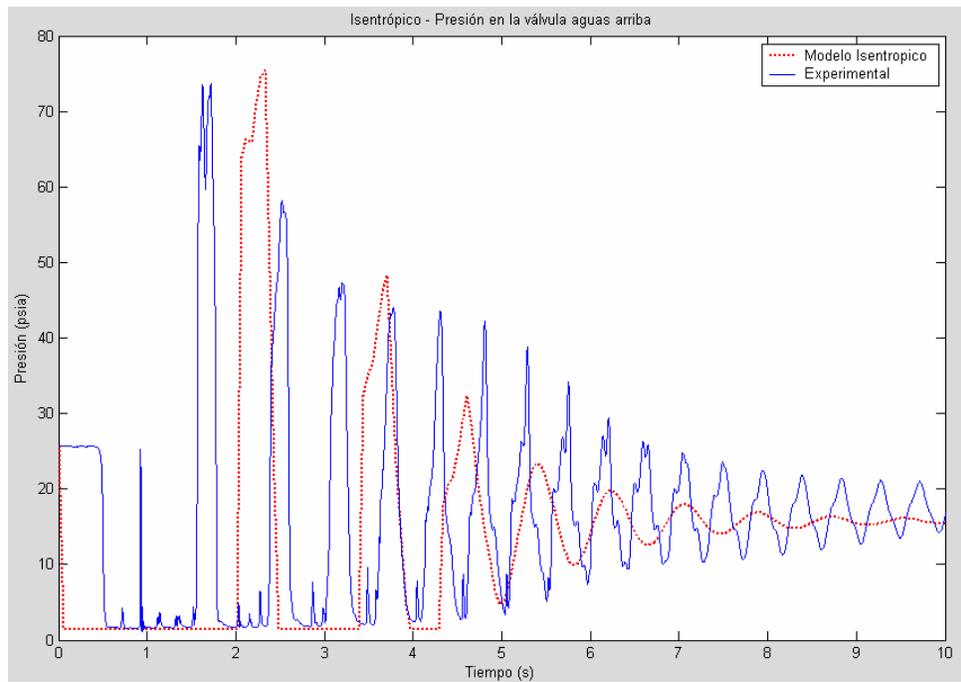


Figura 68. Presión en la frontera aguas arriba del sistema, modelo isentrópico contra resultados experimentales.

En las Figura 69 y 70 se observan los resultados obtenidos al comparar el modelo de flujo no isentrópico con los resultados experimentales, la respuesta obtenida es similar a la observada en el caso de flujo isentrópico.

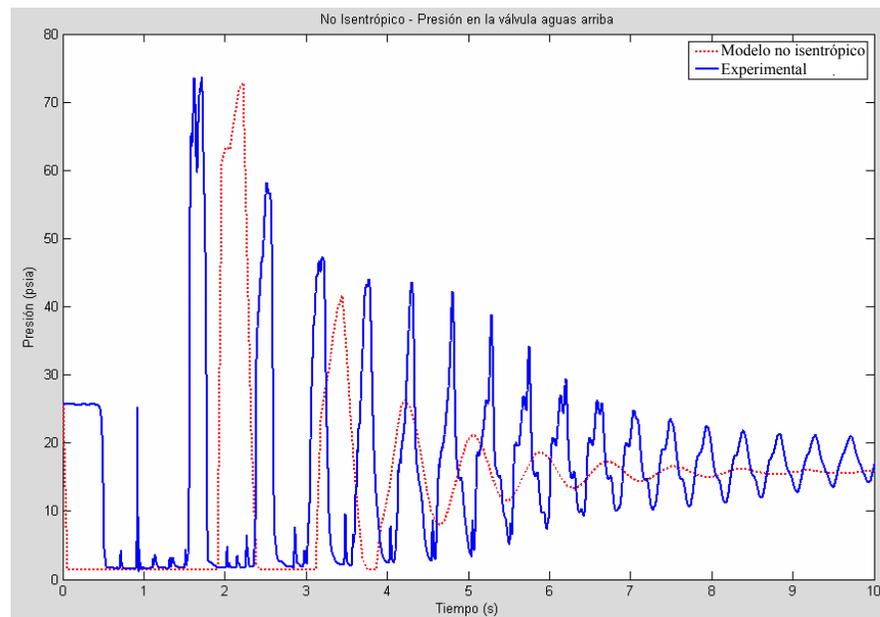


Figura 69. Presión en la frontera aguas arriba, modelo no - isentrópico contra resultados experimentales.

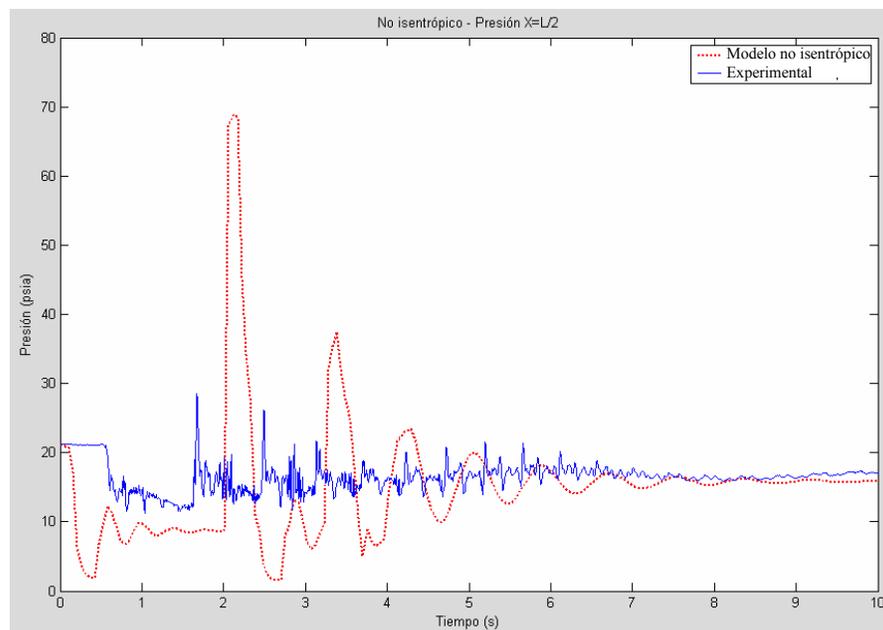


Figura 70. Presión en la válvula de admisión de aire, modelo no - isentrópico contra resultados experimentales.

En las figuras 71 y 72 se observa la respuesta obtenida al comparar el modelo de flujo isentrópico con el no isentrópico, la respuesta obtenida es similar, solo se presenta diferencia en la velocidad de desplazamiento de la onda de presión, siendo mayor para condiciones de entrada de aire no isentrópico, respuesta esperada ya que bajo condiciones no isentrópicas la cantidad de aire que ingresa al sistema es menor. Ninguno de los dos modelos de flujo estudiado predice el comportamiento de la presión en el sistema observado experimentalmente.

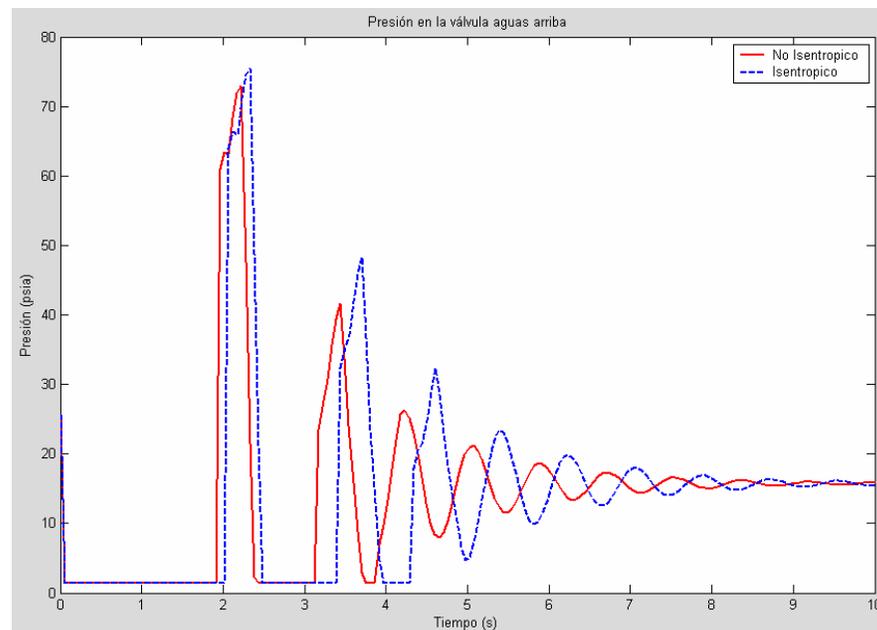


Figura 71. Presión en la frontera aguas arriba, modelo no - isentrópico contra modelo isentrópico

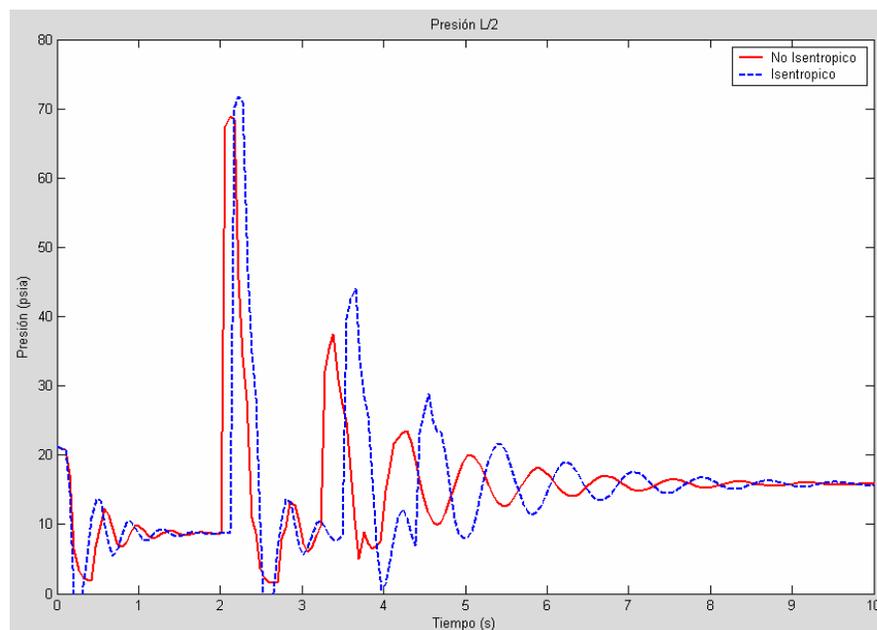


Figura 72. Presión en la válvula de admisión de aire, modelo no - isentrópico contra modelo isentrópico

Las Figuras 73 a 75 muestran la construcción interna de la válvula estudiada. De acuerdo a lo observado, la hipótesis de comportamiento como dispositivo hidroneumático para control de sobrepresiones, adicional al control de subpresiones, cobra peso.

De acuerdo a la Figura 73, la válvula cuenta con una zona que permite la acumulación de agua y aire, en esta zona se ubica un flotador con el cual se activa o desactiva el dispositivo que permite la entrada de aire al sistema (pistón), a través de una sección de área uniforme (Figura 74). Para el caso en estudio el diámetro de la sección de entrada es de aproximadamente una pulgada, y el de salida de aproximadamente dos milímetros (Figura 75). El menor diámetro de salida y la configuración estructural del dispositivo, dificultan la salida de aire nuevamente a la atmósfera, por lo cual, se acumula en la válvula o en la región aledaña a la misma.

De acuerdo a lo anterior, es necesario incluir el comportamiento o efecto que tiene el aire acumulado en la zona de almacenamiento o en la tubería, para poder obtener una respuesta más aproximada a la realidad del fenómeno en todo el sistema.



Figura 73. Cuerpo o estructura de la válvula.

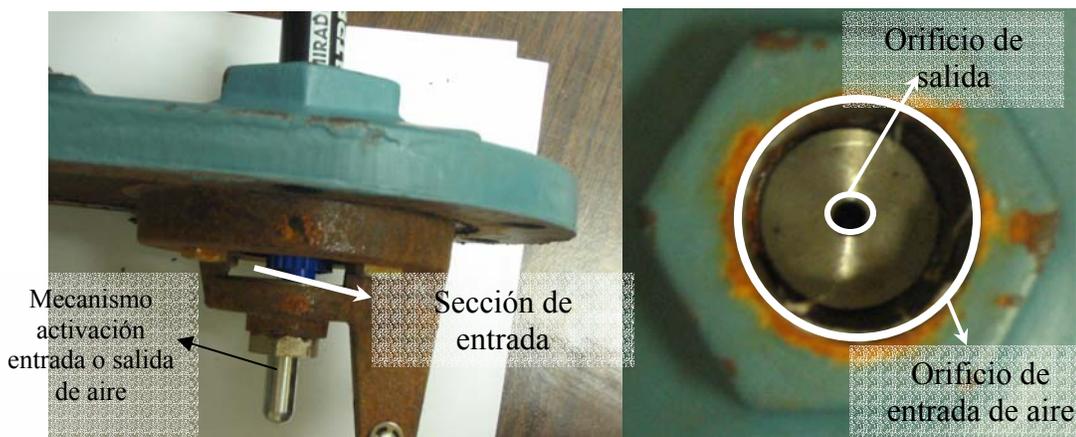


Figura 74. Sección de entrada a la válvula.

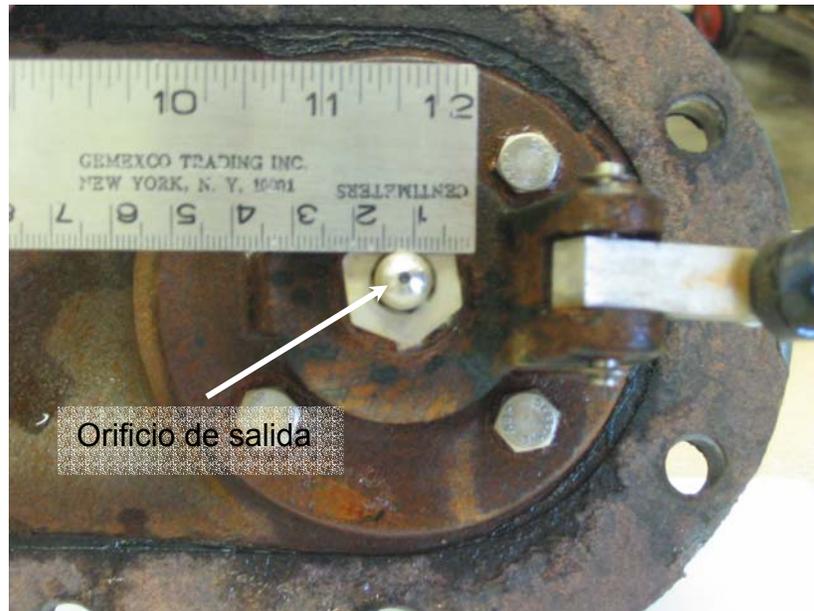


Figura 75. Orificio de salida válvula de admisión de aire.

10 CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados experimentales y teóricos obtenidos durante este estudio, las siguientes conclusiones pueden ser dadas.

- El esquema numérico de MacCormack ha sido introducido con eficacia en la solución de las ecuaciones gobernantes para el problema de flujo transitorio en dos fases o cavitación, los resultados obtenidos muestran concordancia con el fenómeno físico.
- El esquema de MacCormack permite un desarrollo numérico más simple, en comparación con el conocido método de las características, en el cual es necesario desarrollar expresiones que predigan el comportamiento de la onda de choque generada en la interfase de las regiones de flujo bajo cavitación y golpe de ariete. Adicionalmente, para garantizar estabilidad, el método de las características requiere realizar interpolaciones en la rejilla de características.
- Si se desea predecir adecuadamente el comportamiento de la presión en un flujo transitorio en dos fases o cavitación, es necesario el uso de expresiones para la velocidad de la onda, que consideren la dependencia de esta, con el gradiente de presión y la fracción de vacío. Los cálculos realizados muestran que si no se considera este efecto, los pulsos de presión no se predicen correctamente ni en tiempo de ocurrencia ni en magnitud.
- La asunción de comportamiento isotérmico o adiabático de las burbujas de vapor, realizada durante la derivación de la ecuación para velocidad de la onda en flujo de mezcla gas – líquido, no representa diferencia significativa en la predicción de la magnitud del pulso de presión, sin embargo para la predicción en el tiempo de ocurrencia de los pulsos, se presenta desfase entre ellas, desplazándose con mayor rapidez bajo condiciones adiabáticas. Los resultados experimentales indican que el

modelo que predice con mayor exactitud el tiempo de ocurrencia de los pulsos es el adiabático.

- Teórica y experimentalmente se ha comprobado que la respuesta del sistema a la entrada de aire, depende no solo del tipo de flujo o de la forma como se modele a través de la válvula, sino también de su comportamiento una vez dentro del sistema y de la rapidez con que es evacuado si es el caso.
- De acuerdo a los resultados experimentales y teóricos, el comportamiento de las válvulas de aire como dispositivos de disipación de flujo transitorio, varía de acuerdo al fenómeno que se este presentando. Si la presión dentro de la tubería es menor que la presión atmosférica, la válvula permite la entrada de aire y puede ser modelada como flujo a través de una boquilla convergente, sin embargo, cuando se dan presiones positivas o mayores a la atmosférica, la válvula se comporta de forma similar a un dispositivo de amortiguamiento hidroneumático, cuya simulación numérica se sale del alcance de este trabajo.
- Para obtener una respuesta teórica que se aproxime más a los resultados experimentales, se recomienda, en la modelación de dispositivos de control, explorar el uso combinado de las condiciones de frontera interna para flujo isentrópico y recipientes de amortiguamiento hidroneumático.
- Para condiciones de flujo isentrópico y no isentrópico a través de la válvula, los resultados obtenidos por la simulación numérica difieren del fenómeno físico. la predicción del control de presiones subatmosféricas por parte de los modelos es aceptable, para pulsos de presión positivos los modelos sobrestiman la magnitud del pulso alcanzado en la válvula.
- No hay argumentos conclusivos para establecer cual de los dos modelos (isentrópico o adiabático) es más preciso; sin embargo, mayor simplicidad en la manipulación numérica del modelo isentrópico fue observada y, en general, ambos modelos predicen la magnitud de la presión máxima del primer pulso con precisión.

11 BIBLIOGRAFÍA.

1. American Water Works Association. 2001. Air Release, Air Vacuum, and Combination Air Valves, Manual of Water Supply Practices M51. American Water Works Association USA. 37 pp.
2. Anderson D. A., Tannehill J. C. and Pletcher R. H. 1984. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation. New York USA. 590 pp.
3. Anderson Jr. J. D. 1990. Modern Compressible Flow. McGraw Hill. New York USA. 650 pp.
4. Benedict R.P. and Wyler J.S. 1978. Analytical and Experimental Studies of ASME Flow Nozzles. Journal of Fluids Engineering, September, Vol. 100, pp. 265 – 274.
5. Campbell A. 1983. The effect of Air on Surge in Pipelines. Proceeding 4th International Conference on Pressure Surges, BHRA, Bath, United Kingdom, Paper C1, pp. 89 – 102.
6. Chaudhry M.H.1987. Applied Hydraulic Transients. Van Nostrand Reinhold Company, New York, USA, pp. 289 – 336.
7. Chaudhry M. H., Bhallamudi S. M., Martin C. S. and Naghash M. 1990. Analysis of Transient Pressures in Bubbly, Homogeneous, Gas – Liquid Mixtures. Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME. Vol. 112, June, pp 225 – 231.
8. Chaudhry M.H.1993. Open Channel Flow. Prentice Hall, New Jersey, USA, 483 pp.
9. Fletcher C.A.J. 1991. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume I. Springer – Verlag, New York, USA, pp. 276 – 329.
10. Imrie B. W. 1973. Compressible Fluid Flow. John Wiley & Sons. Toronto, Canada, 130 pp.
11. Janna W.S. 1987. Introduction to Fluid Mechanics. Pws-Kent, Massachusetts USA, pp. 341 – 376.
12. Kranenburg C. 1974. Gas Release During Transient Cavitation in Pipes. Journal of Hydraulics Division, ASCE, October, Vol. 100, pp. 1383 – 1398.

13. Lee T.S. 1999. Air Influence on Hydraulic Transients on Fluid System With Air Valves. Transactions of the ASME, September, Vol. 21, pp. 646 – 650.
14. Moran M.J. and Shapiro H.N. 1999. Fundamentals of Engineering Thermodynamics. John Wiley & Sons. New York, USA. 918 pp.
15. Oosthuizen P. H. and Carscallen W. E. 1997. Compressible Fluid Flow. McGraw Hill. New York USA. 548 pp.
16. Olson A.T. 1974. Nozzles Discharge Coefficients – Compressible Flow. Journal of Fluids Engineering, March, pp. 21 – 24.
17. Padmanabhan M., Ames W. F. and Martin C. S. 1978. Numerical Analysis of Pressure Transients in Bubbly two – phase Mixtures by Explicit – Implicit Methods. Journal of Engineering Mathematics, Vol. 12 No. 1, January, pp. 83 - 93.
18. Roberson J.A., Cassidy J.J. and Chaudhry M.F. 1997. Hydraulic Engineering. John Wiley & Sons. New York, USA. pp. 550 – 580.
19. Rotty R. M. 1966. Introducción a la Dinámica de Gases. Herrero Hermanos Sucs. S.A. México D. F. 282 pp.
20. Shapiro A.H. 1953. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, Volume I. Ronald Press Company, New York USA. 646 pp.
21. Schohl G. A. 1993. Improved Approximate Method for Simulating Frequency – Dependent Friction in Transient Laminar Flow. Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME. Vol. 115, September. pp 420 – 424.
22. Simpson A. R. 1986. Large Water Hammer Pressures Due to Column Separation In Sloping Pipes. Ph.D. Thesis, University of Michigan. pp 275.
23. Schreier S. 1982. Compressible Flow. Wiley, New York USA. pp 576.
24. Streeter V.L. and Wyle E.B. 1997. Mecánica de los Fluidos. McGraw Hill. New York USA. pp. 282 – 316.
25. Swaffield J.A. and Boldy, P. A. 1993. Pressure Surge in Pipe and Duct Systems. Avebury Technical, Brookfield USA. pp. 354.
26. Trikha A. K. 1975. An Efficient Method for Simulating Frequency – Dependent Friction in Transient Liquid Flow. Journal of Fluids Engineering, March, pp. 97 – 105.
27. Tullis J. P., Streeter V. L. and Wylie E. B. 1976. Waterhammer Analysis with Air Release. Proceeding 2nd International Conference on Pressure Surges, BHRA Fluid Engineering, London, England. Paper C3, pp. 35 – 47.

28. Vincenti W.G. and Kruger C. 1965. Introduction to Physical Gas Dynamics. Wiley, New York USA. pp. 530.
29. Wark JR. K. 1994. Advanced Thermodynamics for Engineers. Mc Graw Hill, New York USA. pp. 1 – 130.
30. White F.M. 1999. Fluid Mechanics. Mc Graw Hill. New York USA. pp. 571 – 130.
31. Wiggert D.C. Sundquist M.J. 1979. The effect of Gaseous Cavitation on Fluid Transients. Journal of Fluids Engineering, March, Vol.101, pp. 79 – 86.
32. Wylie E.B. and Streeter V.L. 1983. Fluid Transients. Feb Press, Corrected Edition, Michigan. pp. 380.
33. Wylie E.B. and Streeter V.L. 1993. Fluid Transients in Systems. Prentice Hall, New Jersey USA. pp. 463.
34. Young F.R. 1989. Cavitation. Imperial College Press. New York USA. pp. 444.
35. Zucrow M.J. and Hoffman J.D. 1976. Gas Dynamics. Wiley, New York USA. pp. 770.

APÉNDICES

APÉNDICE A

FLUJO DE MASA EN FUNCIÓN DE LAS CONDICIONES DE LA SECCIÓN.

Partiendo de la Ecuación de continuidad.

$$\rho V = \frac{\dot{m}}{A}$$

$$V = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R(T_0 - T)}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R(T_0 - T)} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/k} \rho_0$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R(T_0 - T)} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{2/k} \rho_0^2$$

$$P = \rho R T$$

$$R = \frac{P_0}{\rho_0 T_0}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{P_0}{\rho_0 T_0} (T_0 - T)} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{2/k} \rho_0^2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} P_0 \rho_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right)} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{2/k}$$

$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{P}{P_o} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Al reemplazar, finalmente se obtiene.

$$\dot{m} = A \sqrt{2P_o \rho_o \frac{k}{k-1} \left(\frac{P}{P_o} \right)^{\frac{2}{k}} \left(1 - \left(\frac{P}{P_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right)}$$

Para el caso particular del aire, con $k = 1.4$, se obtiene.

$$\dot{m} = A \sqrt{7P_o \rho_o \left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.42857} \left(1 - \left(\frac{P}{P_o} \right)^{0.28571} \right)}$$

$$\dot{m} = A \sqrt{7P_o \rho_o \left(\left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.42857} - \left(\frac{P}{P_o} \right)^{1.71428} \right)}$$

Partiendo de la ecuación general para flujo de masa isentrópico por unidad de área

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_o}{\sqrt{T_o}} \frac{M}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}$$

$$\frac{P_o}{P} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{1}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} = \frac{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{1/2}}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_o}{\sqrt{T_o}} M \frac{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{1/2}}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{\frac{k}{k-1}}} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_o}{\sqrt{T_o}} \frac{P}{P_o} M \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{P_o}{P} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_o}{\sqrt{T_o}} \frac{P}{P_o} \sqrt{\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}}} M$$

$$M = \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{2 \frac{k}{k-1} R (T_o - T)}}{\sqrt{kRT}} = \sqrt{\frac{2 \frac{k}{k-1} (T_o - T)}{kT}}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{P_o}{\sqrt{T_o}} \frac{P}{P_o} \sqrt{\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}}} \sqrt{\frac{2 \frac{k}{k-1} (T_o - T)}{kT}}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{P^2}{RT} \left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} 2 \frac{k}{k-1} (T_o - T)}$$

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{P\rho\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} 2\frac{k}{k-1}\left(1-\frac{T}{T_o}\right)} = \sqrt{P\rho\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} 2\frac{k}{k-1}\left(1-\left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

$$\rho = \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{1}{k}} \rho_o = \left(\frac{P_o}{P}\right)^{-\frac{1}{k}} \rho_o$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}}{A} &= \sqrt{P\left(\frac{P_o}{P}\right)^{-\frac{1}{k}} \rho_o\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} 2\frac{k}{k-1}\left(1-\left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)} = \sqrt{P\rho_o\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}-\frac{1}{k}} 2\frac{k}{k-1}\left(1-\left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)} \\ &\left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}-\frac{1}{k}} = \left(\frac{P_o}{P}\right)^{\frac{k-2}{k}} = \left(\frac{P_o}{P}\right)\left(\frac{P_o}{P}\right)^{-\frac{2}{k}} = \left(\frac{P_o}{P}\right)\left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{2}{k}} \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{P\rho_o\left(\frac{P_o}{P}\right)\left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{2}{k}} 2\frac{k}{k-1}\left(1-\left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

Finalmente se obtiene.

$$\dot{m} = A \sqrt{2\rho_o P_o \frac{k}{k-1} \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{2}{k}} \left(1 - \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

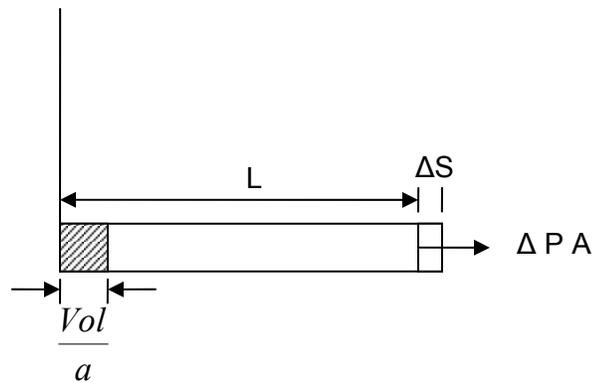
Para el caso particular del aire.

$$\dot{m} = A \sqrt{7P_o \rho_o \left(\left(\frac{P}{P_o}\right)^{1.42857} - \left(\frac{P}{P_o}\right)^{1.71428} \right)}$$

APÉNDICE B

DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE VELOCIDAD DE LA ONDA DE PRESIÓN EN MEZCLAS GAS - LÍQUIDO

Inicialmente se plantea el análisis para velocidad de propagación de la onda en líquidos puros y luego se extiende a mezclas gas – líquido.



Si la compuerta aguas abajo del sistema, se cierra súbitamente la tubería puede expandirse una longitud ΔS dependiendo de cómo este soportado el sistema. Puede asumirse que la compuerta se mueve esta distancia en L/a segundos, por lo cual la velocidad es $\Delta S \ a/L$. Por lo tanto, la velocidad del fluido en la compuerta ha sido cambiada por $\Delta V = \Delta S \frac{a}{L} - V_o$, durante L/a segundos después del cierre, la masa que ingresa a la tubería es $\rho A V_o \frac{L}{a}$, la cual es acomodada dentro de la tubería, por incremento de su sección transversal, por lleno del volumen extra debido a la expansión de la tubería ΔS , y por compresión del líquido debido a su alta presión; es decir,

$$\rho A V_o \frac{L}{a} = \rho L \Delta A + \rho A \Delta S + L A \Delta \rho$$

$$\Delta V = \Delta S \frac{a}{L} - V_o \Rightarrow V_o = \Delta S \frac{a}{L} - \Delta V$$

$$\rho A \frac{L}{a} \left\{ \Delta S \frac{a}{L} - \Delta V \right\} = \rho L \Delta A + \rho A \Delta S + L A \Delta \rho$$

$$-\frac{\Delta V}{a} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

De la ecuación de momentum se tiene que

$$\Delta P = -\rho a \Delta V \Rightarrow \Delta V = -\frac{\Delta P}{\rho a} \Rightarrow a^2 = \frac{\Delta P / \rho}{\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \rho}{\rho}}$$

Note que si la tubería esta soportada $\Delta S = 0$ y el mismo resultado es obtenido con o sin juntas de expansión.

Definiendo el modulo de elasticidad volumétrico del fluido como

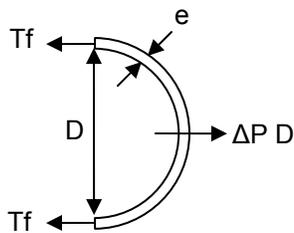
$$K = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta \rho}{\rho}}$$

Remplazando

$$a^2 = \frac{K / \rho}{1 + \frac{\Delta A}{A} \frac{\rho}{\Delta \rho}} \Rightarrow a^2 = \frac{k / \rho}{1 + \left\{ \frac{k}{A} \frac{\Delta A}{\Delta P} \right\}} \quad (1)$$

La evaluación de la velocidad de transmisión de la onda en un conducto típico, requiere del conocimiento del modulo de elasticidad volumétrico y la densidad del fluido, así como de la evaluación de la condición de elasticidad del conducto expresada por el término $\frac{\Delta A}{A\Delta P}$

Para la evaluación del termino de elasticidad $\frac{\Delta A}{A\Delta P}$, un número de diferentes situaciones han sido derivadas previamente por Wylie and Streeter. A modo de ilustración se examina el caso de un conducto de pared delgada.



El cambio en el esfuerzo a tensión es dado por

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta T_f}{e} = \frac{\Delta P \cdot D}{2e}$$

T_f : tensión superficial por unidad de longitud de la tubería. e : espesor de la tubería

Dividiendo la expresión anterior por el módulo de elasticidad de Young, se obtiene el cambio en deformación unitaria circunferencial $\frac{\Delta\sigma}{E} = \frac{\Delta P D}{2Ee}$

El equivalente radial es dado por

$$\frac{\Delta\sigma \pi D^2}{2E} = \frac{\Delta P D^2}{4Ee} \cdot \pi D \Rightarrow \frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{D}{Ee} \quad \text{caso tubería de pared delgada}$$

Ahora la ecuación 1 puede ser evaluada para tuberías de pared delgada como

$$a^2 = \frac{k/\rho}{1 + \left(\frac{k}{E}\right)\left(\frac{D}{e}\right)}$$

Escribiendo la velocidad de la onda como

$$a^2 = \frac{k/\rho}{1 + \left\{\frac{k}{E} \frac{D}{e}\right\} c_1} \quad (2)$$

donde $\frac{D}{Ee} c_1 = \frac{\Delta A}{A\Delta P}$, y c_1 es un término que depende de las condiciones elásticas y restricciones externas del conducto

En la ecuación anterior a es presentada como una colección de parámetros que envuelven propiedades del fluido y elasticidad de la tubería

A continuación, la velocidad de la onda es escrita de forma general y es examinada para el caso de una tubería de pared delgada con 3 diferentes tipos o situaciones de soporte longitudinal

En la ecuación 1, el término $\frac{\Delta A}{A\Delta P}$, debe ser evaluado para tres casos. El cambio en área es el resultado total de un cambio en la deformación lateral o circunferencial

$$\Delta\sigma = \frac{D\Delta P}{2e}$$

Caso 1: tubería anclada contra el movimiento axial

$$\frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{2}{\Delta PE} (\Delta\sigma - \nu^2 \Delta\sigma) \Rightarrow \frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{D}{Ee} (1 - \nu^2)$$

Caso 2: tubería anclada en su condición de frontera aguas arriba solamente

$$\frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{2}{\Delta PE}(\Delta\sigma - \nu\Delta\sigma) \Rightarrow \frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{D}{Ee}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

Donde ν es la razón de Poisson.

Caso 3: tubería anclada con juntas de expansión frecuentes

$$\frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{2\Delta\sigma}{\Delta PE} = \frac{D}{Ee}$$

Al comparar con la ecuación 2 se puede concluir que la variable C_1 , toma los siguientes valores

Caso 1. $C_1 = 1 - \nu^2$

Caso 2 $C_1 = 1 - \frac{\nu}{2}$

Caso 3 $C_1 = 1$

Tubería de pared gruesa

Para las tuberías en las cuales la pared es relativamente gruesa con respecto al diámetro, los esfuerzos en las paredes, no son uniformemente distribuidos a través de las paredes. En esta condición, como cuando la razón D/e es menor a 25. Los siguientes coeficientes debe ser usados

Caso 1: Tubería anclada en condición de frontera aguas arriba solamente

$$C_1 = \frac{2e}{D}(1 + \nu) + \frac{D}{D + e}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

Caso 2: Tubería anclada contra movimiento longitudinal

$$C_1 = \frac{2e}{D}(1+\nu) + \frac{D(1-\nu^2)}{D+e}$$

Caso 3: Tubería anclada con juntas de expansión frecuentes

$$C_1 = \frac{2e}{D}(1+\nu) + \frac{D}{D+e}$$

En tuberías de pared gruesa, el tipo de restricción tiene poco efecto sobre la velocidad de la onda. Se puede observar que a medida que el espesor de la pared tiende a ser pequeño, cada coeficiente se aproxima a su caso correspondiente para tubería de pared delgada

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN EN MEZCLAS

La velocidad del sonido en el fluido, incluyendo el efecto de la elasticidad de las paredes, es dado por:

$$a_m = \sqrt{\frac{k_m / \rho_m}{1 + \left(\frac{k_m}{A}\right)\left(\frac{\Delta A}{\Delta P}\right)}}$$

a_m : velocidad del fluido en la mezcla

k_m : módulo de elasticidad volumétrico de la mezcla

ρ_m : densidad de la mezcla

Análisis ρ_m

Definiendo la masa, el volumen de la mezcla y la fracción de vacío como:

$$m_m = m_L + m_g$$

$$V_m = V_L + V_g$$

Sea α = fracción de vacío $\alpha = \frac{V_g}{V_m}$ es posible demostrar que

$$\rho_m = (1 - \alpha)\rho_L + \rho_g\alpha \quad (3)$$

Para bajas fracciones de vacío, el segundo término de la derecha de la ecuación 3 es pequeño y puede ser despreciado

$$\rho_m = (1 - \alpha)\rho_L \quad (4)$$

ANÁLISIS k_m

El módulo de elasticidad volumétrico de la mezcla es definido como

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta \rho / \rho} = - \frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

El módulo de elasticidad volumétrico de los componentes individuales puede ser expresado por

$$k_{L/Q} = - \frac{\Delta P}{\Delta V_L / V_L} \quad ; \quad k_G = - \frac{\Delta P}{\Delta V_G / V_G}$$

$$\Delta V_L = - \frac{\Delta P \cdot V_L}{K_L} \quad \Delta V_G = - \frac{\Delta P \cdot V_G}{K_G}$$

$$k_m = - \frac{\Delta P \cdot V}{\Delta K} = - \frac{\Delta P \cdot V_m}{\Delta V_L + \Delta V_G} \Rightarrow k_m = \frac{k_L}{1 + \alpha \left\{ \frac{k_L}{k_G} - 1 \right\}} \quad \text{el término } \frac{k_L}{k_G} \text{ es } \gg \gg \gg 1$$

$$k_m = \frac{k_L}{1 + \alpha \left\{ \frac{k_L}{k_G} \right\}} \quad (7)$$

Sustituyendo los valores obtenidos para k_m (ecuación 7), y ρ_m (ecuación 4), en la ecuación 1, es posible obtener una expresión para la velocidad de la onda en la mezcla.

$$a_m^2 = \frac{k_m / \rho_m}{1 + \left(\frac{k_m}{A}\right)\left(\frac{\Delta A}{\Delta P}\right)} \quad \text{Sustituyendo en la ecuación 4 y 7}$$

$$a_m^2 = \frac{k_m}{(1-\alpha)\rho_L \left[1 + k_m \left\{\frac{\Delta A}{A\Delta P}\right\}\right]} \Rightarrow a_m^2 = \frac{k_L \cdot k_G}{(1-\alpha)\rho_L \left[k_G + \alpha k_L + [k_L \cdot k_G] \frac{\Delta A}{A\Delta P}\right]} \Rightarrow$$

$$a_m^2 = \frac{k_L}{(1-\alpha)\rho_L \left[1 + \alpha \frac{k_L}{k_G} + k_L \frac{\Delta A}{A\Delta P}\right]} \Rightarrow a_m^2 = \frac{a_L^2}{(1-\alpha) \left[1 + \alpha \frac{\rho_L}{k_G} a_L^2\right]}$$

Se asume que el proceso es isotérmico, es decir $k_G = P$

Finalmente se obtiene

$$a_m = \sqrt{\frac{a_L^2}{(1-\alpha) \left\{1 + \frac{\alpha \rho_L}{P} a_L^2\right\}}} \quad (8)$$

La ecuación anterior (8), considera las restricciones externas de la tubería al incluirlas en el término $a_L = f\left(\frac{\Delta A}{A\Delta P}\right)$, como se demostró anteriormente

$$\frac{\Delta A}{A\Delta P} = \frac{D}{Ee} c_1 \quad \text{Donde } C_1 \text{ es dado de acuerdo al tipo de restricción.}$$

APÉNDICE C

CURVAS DE CALIBRACIÓN TRANSDUCTORES Y FLOWMETER

Calibración Transductores de Presión.

Tabla 12. Datos curva de calibración Transductor # 1 – 200 psia.

Lectura Manómetro (PsiG)	Presión Absoluta (PsiA)	Máximo Voltaje (Voltios)	Mínimo Voltaje (Voltios)	Voltaje Promedio (Voltios)	Coefficiente de Variación C.V.	Desviación Estándar (S)
0.45	14.98	0.3564	0.3467	0.3528	0.0066	0.0023
0.9	15.43	0.3711	0.3564	0.3642	0.0074	0.0027
1.9	16.43	0.4004	0.3809	0.3903	0.008	0.0031
2.35	16.88	0.4102	0.3955	0.4024	0.0077	0.0031
3.2	17.73	0.4395	0.4102	0.4243	0.0079	0.0034
4.55	19.08	0.4736	0.4443	0.4571	0.0087	0.004
6.95	21.48	0.5322	0.498	0.517	0.0096	0.005
8.75	23.28	0.5811	0.5469	0.5633	0.0097	0.0055
10.15	24.68	0.6152	0.5762	0.597	0.0083	0.0049
11.9	26.43	0.6592	0.6201	0.6404	0.0072	0.0046

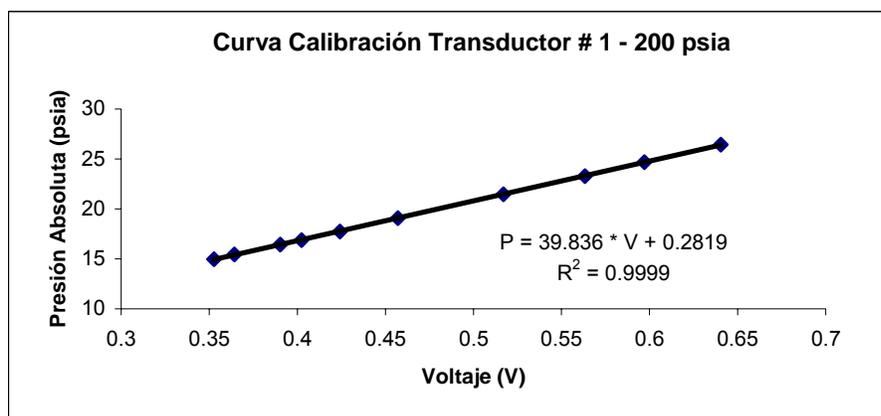


Figura 76. Curva de calibración Transductor # 1 – 200 psia.

Tabla 13. Datos curva de calibración Transductor # 2 - 200 psia.

Lectura Manómetro (PsiG)	Presión Absoluta (PsiA)	Máximo Voltaje (Voltios)	Mínimo Voltaje (Voltios)	Voltaje Promedio (Voltios)	Coefficiente de Variación C.V.	Desviación Estándar (S)
0.5	15.03	0.376	0.3662	0.3708	0.0074	0.0027
1.3	15.83	0.4053	0.3857	0.3944	0.0077	0.003
2.65	17.18	0.4395	0.415	0.4279	0.008	0.0034
4.2	18.73	0.4785	0.4541	0.4658	0.0083	0.0039
5.05	19.58	0.5029	0.4736	0.4879	0.0086	0.0042
7.4	21.93	0.5664	0.5273	0.5457	0.0105	0.0057
8.65	23.18	0.6006	0.5615	0.5793	0.0103	0.006
9.6	24.13	0.6201	0.5895	0.6022	0.0085	0.0051
12.05	26.58	0.6787	0.6494	0.6636	0.0067	0.0045

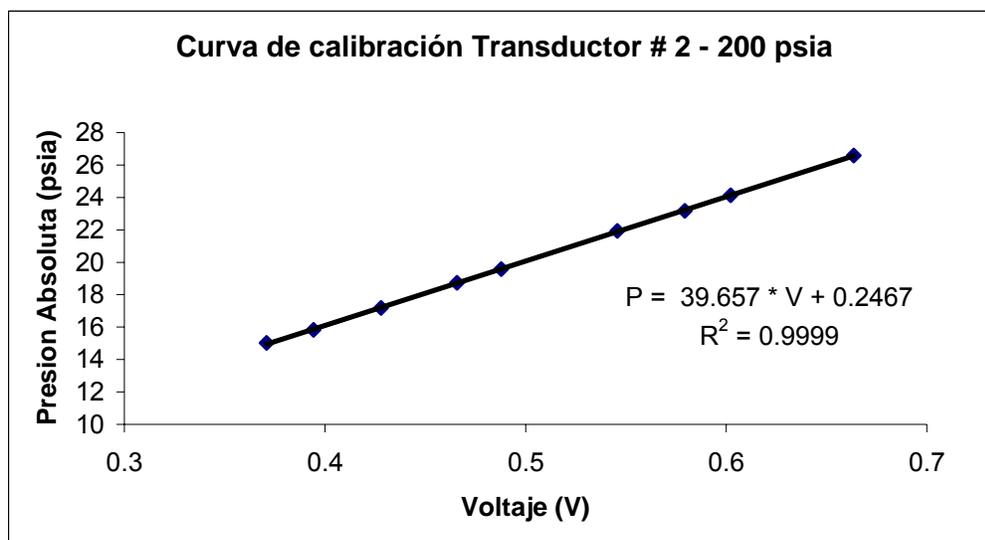


Figura 77. Curva de calibración Transductor # 2 – 200 psia.

Tabla 14. Datos curva de calibración Transductor # 3 - 50 psia.

Lectura Manómetro (PsiG)	Presión Absoluta (PsiA)	Máximo Voltaje (Voltios)	Mínimo Voltaje (Voltios)	Voltaje Promedio (Voltios)	Coefficiente de Variación C.V.	Desviación Estándar (S)
0.55	15.08	2.3682	2.3486	2.3582	0.0011	0.0026
1	15.53	2.4268	2.3926	2.4092	0.0021	0.0051
1.9	16.43	2.5195	2.4609	2.4887	0.0030	0.0075
2.8	17.33	2.5977	2.5293	2.5643	0.0035	0.0089
3.625	18.155	2.6807	2.5977	2.64	0.0039	0.0104
5.55	20.08	2.8613	2.7539	2.8017	0.0052	0.0147
7.5	22.03	3.0420	2.9004	2.9732	0.0062	0.0185
9.85	24.38	3.2520	3.1055	3.1716	0.0055	0.0174
12.15	26.68	3.4375	3.3203	3.3766	0.0043	0.0147
13.2	27.73	3.5107	3.4326	3.4727	0.0030	0.0103

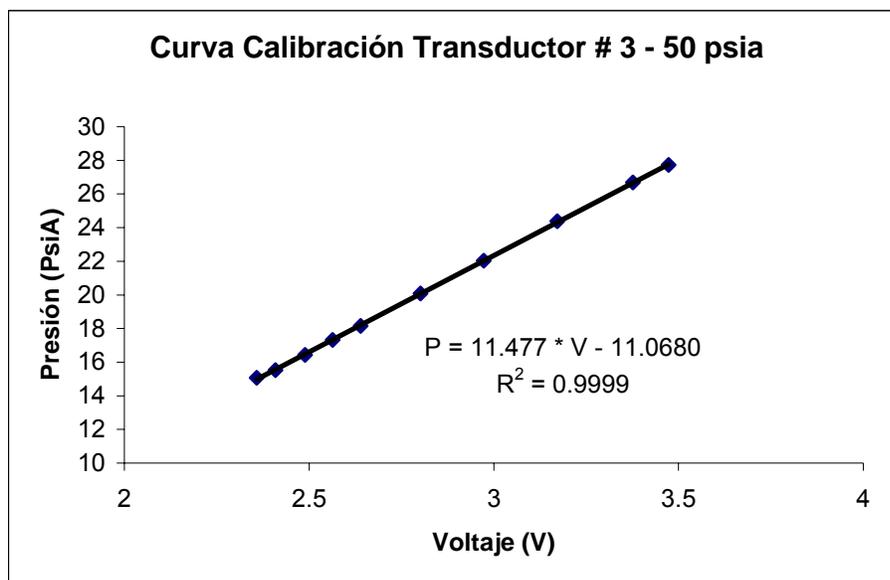


Figura 78. Curva de calibración Transductor # 3 – 50 psia.

Medidor de Flujo – Flowmeter.

Tabla 15. Datos curva de calibración medidor flowmeter.

Volumen Referencia (lt)	Tiempo Promedio (s)	Flujo Volumétrico (Mét. Vol.) (lt/s)	Flujo Volumétrico (flowmeter) (lt/s)
57.8	19.72	2.93	2.62
57.8	20.42	2.83	2.51
57.8	22.92	2.52	2.245
57.8	24.85	2.33	2.055
57.8	35.17	1.64	1.41
57.8	42.72	1.35	1.127
28.9	34.15	0.85	0.63

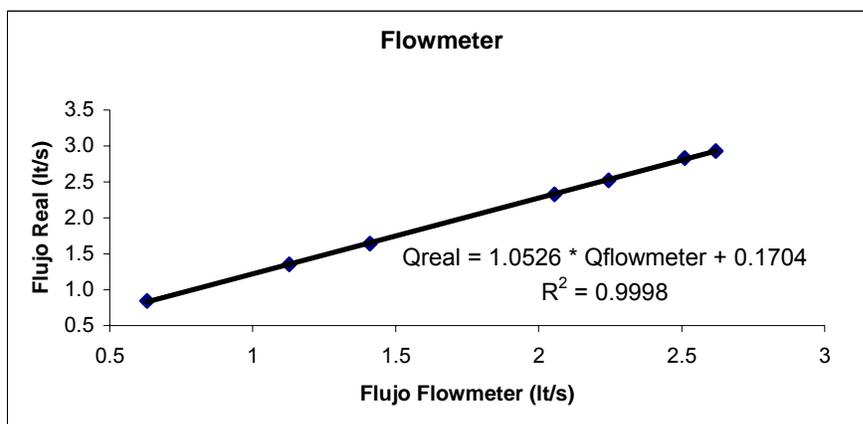


Figura 79. Curva de calibración Flowmeter.