Teorías de Torsión en la Categoría de Espacios Topológicos

por:

Julián David Rodríguez Arango

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

Maestría en Ciencias

en

Matemáticas Puras

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Departamento de Ciencias Matemáticas

Mayo de 2009

Aprobado por:

Gabriele Castellini, Ph.D. Presidente, Comité Graduado	Fecha
Luis F. Cáceres, Ph.D. Miembro, Comité Graduado	Fecha
Julio E. Barety, Ph.D. Miembro, Comité Graduado	Fecha
Jaime Seguel, Ph.D. Representante de Estudios Graduados	Fecha
Julio C. Quintana, Ph.D. Director del Departamento de Ciencias Matemáticas	Fecha

Abstract of Dissertation to the Graduate School

of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the

Requirements for the Degree of Master of Science

Torsion Theories in the Category of Topological Spaces

By

Julián David Rodríguez Arango

May 2009

Chair: Gabriele Castellini

Major Department: Department of Mathematical Sciences

Abstract

In Algebra, specifically within the category of abelian groups, there exist the concepts of torsion theory and radical. These concepts are closely related through a proposition which shows a one to one correspondence between them.

In this study, the concepts of torsion theory and radical are defined in the categories of topological spaces and pointed topological spaces. Some propositions that relates these concepts in a similar way to the algebraic case are presented.

Resumen de Disertación a Escuela Graduada

de la Universidad de Puerto Rico en Cumplimiento Parcial de los

Requisitos para el grado de Maestría en Ciencias

Teorías de Torsión en la Categoría de Espacios Topológicos

Por

Julián David Rodríguez Arango

Mayo 2009

Consejero: Gabriele Castellini

Departamento: Departamento de Ciencias Matemáticas

Resumen

En Álgebra, especificamente, dentro de la categoría de grupos abelianos, existen los conceptos de teoría de torsión y radical. Estos conceptos están estrechamente relacionados mediante una proposición que muestra una correspondencia uno a uno entre ellos.

En esta investigación se definen los conceptos de teoría de torsión y radical, en Topología. Más precisamente, dentro de las categorias de espacios topológicos y espacios topológicos puntados, y se presentan tres proposiciones que relacionan estos conceptos de una manera similar a como sucede en el caso algebráico.

Dedicado a: -

Mi padres Rubén y Marina,

Mis hermanos, y de manera muy especial a

La persona que siempre me ha hecho sentir que puedo lograrlo todo.

- Mi amorcito, Lorena.

Agradecimientos

Quiero dar gracias:

A Dios, porque siempre me ha acompañado en cada paso que doy.

Al Departamento de Matemáticas por haber considerado mi admisión a su programa graduado de Maestría en Matemática Pura, y por haber aprobado mi solicitud de apoyo económico, que sin ello, esto probablemente no hubiese sido posible.

A mi consejero, Gabriele Castellini, por ser el eje principal de mi formación en el programa, por su disposición para ser el presidente de mi comité graduado, también porque siempre estuvo dispuesto a escucharme, a aclarar mis dudas, y por la infinita paciencia y buen trato que me brindó siempre y durante el desarrollo de esta investigación.

Al profesor Julio E. Barety, por haberme orientado en mi primer año en el programa, y por su disposición para ser miembro de mi comité graduado.

Al profesor Luis F. Cáceres, por todo el apoyo que me brindó durante mi estancia en el programa, y por su disposición para ser miembro de mi comité graduado.

A mis padres, porque cuando tuve dificultades en el camino, ellos siempre me hicieron sentir que podía superarlas.

A mi princesita, porque siempre tuvo la confianza de que yo alcanzaría mis objetivos.

A todos mis amigos y compañeros del programa graduado de matemáticas, que siempre tuvieron para mi los mejores deseos, y la disposición de escucharme cuando quize enseñarles mi trabajo.

Índice general

Introducción

Las teorías de torsión se han estudiado mucho, pero con diferentes nombres y por diferentes autores y de manera independiente. Fueron estudiadas con este nombre y ocasionalmente con el de teorías de torsión hereditarias por Lambek [1] y Dickson [2]. Sin embargo, algunos conceptos equivalentes que se han estudiado son: filtros idempotentes de ideales a derecha por Bourbaki [3] y Gabriel [4], radicales de torsión o funciones de núcleo idempotente por Maranda [5] y Goldman [6], operaciones de clausura modular sobre el retículo de ideales a derecha por Chew [7], entre otros. Además, algunas teorías de torsión especiales, que contienen las bases de la teoría general, fueron desarrolladas en la construcción de anillos cociente generalizados por Findlay y Lambek [8]. Lambek en [9] presenta los conceptos de radical y teoría de torsión en la categoría de R módulos a derecha ModR, donde R es un anillo asociativo con identidad; y enuncia una proposición que relaciona estos conceptos. Proposición en la cual se establece una correspondencia uno a uno entre teorías de torsión y radicales.

En el capítulo 1 se presenta la terminología en [9] adaptada en la categoría de grupos abelianos. Se enuncia la Proposición 19 y se presenta la demostración en detalle.

En el capítulo 2 se precisa dentro de la categoría de espacios topológicos, los conceptos necesarios para introducir las nociones de teoría de torsión y radical. Se definen y establecen relaciones entre estos conceptos y se presentan algunos ejemplos.

Finalmente en el capítulo 3, se presentan las conclusiones de la investigación y se proponen futuros trabajos afines.

Capítulo 1

Teorías de Torsión y Radicales en la Categoría de Grupos Abelianos

Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección se incluye una parte de la terminología que se necesita para enunciar la Proposición 19. En la segunda sección se incluyen lemas que son importantes en el desarrollo de la demostración de la Proposición 19. En la tercera sección se incluyen, las definiciones de teoría de torsión y radical, y el enunciado y demostración de la Proposición 19.

1.1. Conceptos Básicos

En esta sección se incluye una parte de la terminología que se necesita para enunciar la Proposición 19.

Sea Ab la categoría de grupos abelianos y homomorfismos, y $[B, C]$ la clase de todos los homomorfismos de grupos $f : B \longrightarrow C$.

Definición 1 (Subgrupo).

Sea $M \in \text{Ab}$ y sea $K \subseteq M$. K se llama un **subgrupo** del grupo M, y denotamos $K \leq M$ si satisface:

1. $0 \in K$
2. $\{a, b\} \subseteq K \Longrightarrow (a + b) \in K$, para todo $\{a, b\} \subseteq K$
3. $a \in K \Longrightarrow (-a) \in K$, para todo $a \in K$

en donde 0 es el elemento neutro de M, "+" es la operación en M y $(-a)$ es el elemento inverso de a en M.

Todo subgrupo de un grupo abeliano es un subgrupo normal, así que se pueden definir cocientes.

Definición 2 (**Cociente**).

Sea $M \in \text{Ab}$ y sea $K \leq M$, el conjunto $M/K = \{m + K \mid m \in M\}$ con la operación $(a+K)+(b+K) = (a+b)+K$, es el **grupo factor de** M **módulo** K y se llama **grupo cociente**.

$(a+K) = (b+K)$ si y sólo si $(a-b) \in K$.

Definición 3 (**Suma de Subgrupos**).

Sea $M \in \text{Ab}$ y sea $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos de M.

Se define la **suma de subgrupos** $\displaystyle\sum_{i\in I} K_i$, como el conjunto

$$\sum_{i\in I} K_i = \left\{ \sum_{i\in I} k_i \mid k_i \in K_i \text{ para cada } i \in I \ \wedge \ k_i \neq 0 \text{ sólo para un número finito de } i \in I \right\}.$$

Observación 4.

Sea $M \in \text{Ab}$ y sea $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos de M. Entonces

$\displaystyle\sum_{i\in I} K_i$ es un subgrupo de M.

Demostración:

Sea $a \in \displaystyle\sum_{i\in I} K_i$, luego $a = \displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ en donde $a_i \in K_i$ para cada $i \in I$ y $a_i \neq 0$ sólo para un número finito de $i \in I$. Como $K_i \subseteq M$ para cada $i \in I$, entonces $a_i \in M$ para cada $i \in I$, así $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i \in M$, es decir, $a \in M$. Por tanto $\displaystyle\sum_{i\in I} K_i \subseteq M$.

1. $0 \in \underset{i\in I}{+} K_i$, pues $0 \in K_i$ para cada $i \in I$ y $0 = \sum_{i\in I} 0$.

2. Sean $a \in \underset{i\in I}{+} K_i$ y $b \in \underset{i\in I}{+} K_i$, se verá que $(a+b) \in \underset{i\in I}{+} K_i$.
   $a = \sum_{i\in I} a_i$ y $b = \sum_{i\in I} b_i$ en donde $\{a_i, b_i\} \subseteq K_i$ para cada $i \in I$ y, $a_i \neq 0 \wedge b_i \neq 0$ sólo para un número finito de $i \in I$.

   Como $M \in \text{Ab}$ y $\{a_i, b_i\} \subseteq M$, entonces $a+b$ se puede escribir como

   $a + b = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I}(a_i + b_i)$.
   Como $(a_i + b_i) \in K_i$ para cada $i \in I$ y $(a_i + b_i) \neq 0$ sólo para un número finito de $i \in I$,

   entonces $(a+b) \in \underset{i\in I}{+} K_i$.

3. Sea $a \in \underset{i\in I}{+} K_i$, se verá que su inverso también está en $\underset{i\in I}{+} K_i$.
   $a = \sum_{i\in I} a_i$ donde $a_i \in K_i$ para cada $i \in I$ y $a_i \neq 0$ sólo para un número finito de $i \in I$.
   Considérese $b = \sum_{i\in I}(-a_i)$, así $-a_i \in K_i$ para cada $i \in I$ y $-a_i \neq 0$ sólo para un número finito de $i \in I$.

   Luego $b \in \underset{i\in I}{+} K_i$, y como $a + b = 0$, entonces $b = -a$, de aquí $-a \in \underset{i\in I}{+} K_i$.

   Por tanto $\underset{i\in I}{+} K_i \leq M$.

$\square$

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos.

El conjunto $\prod_{i\in I} G_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \mid f(k) \in G_k$ para cada $k \in I\}$, se llama el **producto cartesiano** de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$.

Definición 5 (**Producto Directo de Grupos**).

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos.

Si para $f, g \in \prod_{i\in I} G_i$, es decir, para $f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ y $g : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ se define la operación binaria (producto) $fg : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ de manera que $i \longmapsto f(i)g(i)$, entonces $\prod_{i\in I} G_i$ junto con esa operación se llama el **producto directo** de la familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$.

Si se identifica $f \in \prod_{i\in I} G_i$ con su imagen $\{a_i\}_{i\in I}$ ($a_i = f(i)$ para cada $i \in I$) entonces la operación binaria en $\prod_{i\in I} G_i$ es la familiar multiplicación componente a componente

$(\{a_i\}_{i\in I})(\{b_i\}_{i\in I}) = \{(a_i)(b_i)\}_{i\in I}$.

Propiedad 6 (**Propiedad Fundamental del Producto Directo**).

Sea $\{f_k : B \longrightarrow C_k\}$ una familia de homomorfismos. Sea $\{P_k : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_k\}$ la familia de homomorfismos **Proyección Canónica** de $\prod_{i\in I} C_i$ en C_k.

$P_k(\{c_i\}_{i\in I}) = c_k$.

Entonces existe un único homomorfismo $f : B \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ tal que $f_k = P_k \circ f$.

De hecho, $f(b) = \{f_i(b)\}_{i\in I}$.

Definición 7 (**Suma Directa de Grupos**).

La **suma directa** de la familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ es un subgrupo de $\prod_{i\in I} G_i$ definido como $\bigoplus_{i\in I} G_i = \{f \in \prod_{i\in I} G_i \mid f(i) \neq e$ sólo para un número finito de $i \in I\}$.
En donde e es el elemento neutro de G_i para cada $i \in I$.

Propiedad 8 (**Propiedad Fundamental de la Suma Directa**).

Sea $\{f_k : B_k \longrightarrow C\}$ una familia de homomorfismos. Sea $\{J_k : B_k \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i\}$ la familia de homomorfismos **Inmersión Canónica** de B_k en $\bigoplus_{i\in I} B_i$.

$J_k(b_i) = \{b_k\}_{k\in I}$ donde $b_k = 0$ si $k \neq i$ ó $b_k = b_i$ si $k = i$.

Entonces existe un único homomorfismo $f : \bigoplus_{i\in I} B_i \longrightarrow C$ tal que $f_k = f \circ J_k$.

De hecho, $f(\{b_k\}_{k\in I}) = \sum_{k\in I} f_k(b_k)$.

Ahora, se precisa lo que significa que una subclase de grupos abelianos es cerrada bajo imágenes isomórficas, subespacios, cocientes, extensiones, sumas directas y productos directos.

Definición 9. Sea $\underline{D}$ una subclase de Ab, se dice que:

1. $\underline{D}$ es **cerrada bajo imágenes isomórficas** si satisface:

   $(\ \phi : D \longrightarrow E$ isomorfismo en Ab $\ \wedge\ D \in \underline{D}\ ) \implies E \in \underline{D}$

2. $\underline{D}$ es **cerrada bajo subgrupos** si satisface:

   $(\ D \in \underline{D}\ \wedge\ A$ subgrupo de $D\ ) \implies A \in \underline{D}$

3. $\underline{D}$ es **cerrada bajo cocientes** si satisface:

   $(\ D \in \underline{D}\ \wedge\ A$ subgrupo de $D\ ) \implies D/A \in \underline{D}$

4. $\underline{D}$ es **cerrada bajo sumas directas** si satisface:

   $\{D_i\}_{i\in I}$ familia en Ab tal que $D_i \in \underline{D}$ para cada $i \in I \implies \bigoplus_{i\in I} D_i \in \underline{D}$

5. $\underline{D}$ es **cerrada bajo productos directos** si satisface:

   $\{D_i\}_{i\in I}$ familia en Ab tal que $D_i \in \underline{D}$ para cada $i \in I \implies \prod_{i\in I} D_i \in \underline{D}$

6. $\underline{D}$ es **cerrada bajo extensiones** si satisface:

   $(\ D \in \underline{D}\ \wedge\ E \in$ Ab tal que $E/D \in \underline{D}\ ) \implies E \in \underline{D}$

1.2. Lemas Importantes

En esta sección se enuncian y demuestran varios lemas que son importantes en el desarrollo de la demostración de la proposición central del cápitulo. La Proposición 19.

Lema 10. *Sean $f : M \longrightarrow C$ un homomorfismo en* Ab*, B un subgrupo de M y $q : M \longrightarrow M/B$ el homomorfismo cociente (definido por $m \longmapsto m + B$).*

Si $B \subseteq Kerf$, entonces existe un homomorfismo $\phi : M/B \longrightarrow C$ tal que $f = \phi \circ q$.

Demostración:

Sea $m \in M$. Defínase $\phi : M/B \longrightarrow C$ de manera que $m + B \longmapsto f(m)$.

Se verá que ϕ así definido es un homomorfismo tal que $f = \phi \circ q$.

ϕ esta bien definido:

Si $m+B \in M/B$ y $n+B \in M/B$ son tales que $m+B = n+B$, entonces $(m-n)+B = B$, de modo que $(m-n) \in B$, y como $B \subseteq Kerf$, $0 = f(m-n) = f(m) - f(n)$, y por tanto $\phi(m+B) = f(m) = f(n) = \phi(n+B)$.

ϕ es un homomorfismo:

Si $m + B \in M/B$ y $n + B \in M/B$, entonces $\phi((m + B) + (n + B)) = \phi((m + n) + B)) = f(m+n) = f(m) + f(n) = \phi(m + B) + \phi(n + B)$.

Por último, $f = \phi \circ q$:

Si $m \in M$, entonces $(\phi \circ q)(m) = \phi(q(m)) = \phi(m + B) = f(m)$, y por tanto $f = \phi \circ q$.

$\square$

Lema 11. *Sean* $\underline{B}$ *una subclase de* Ab *que es cerrada bajo imágenes isomórficas, cocientes, extensiones y sumas directas,* M *en* Ab *y* $T(M) = +\{K \mid K \leq M \wedge K \in \underline{B}\}$*. Entonces:*

1. $T(M) \in \underline{B}$.

2. *Si* $H \leq M/T(M)$ *es tal que* $H \in \underline{B}$*, entonces* $H = 0$.

Demostración:

Sea $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos tal que $K_i \in \underline{B}$ para cada $i \in I$.

Considérese el homomorfismo $\psi : \bigoplus_{i\in I} K_i \longrightarrow \underset{i\in I}{+} K_i$ tal que $\psi(\{k_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} k_i$.

ψ es un epimorfismo y por tanto $(\bigoplus_{i\in I} K_i)/Ker(\psi) \simeq \underset{i\in I}{+} K_i$.

Como $\underline{B}$ es cerrada bajo sumas directas, cocientes e imágenes isomórficas, entonces se puede afirmar que $\underset{i\in I}{+} K_i \in \underline{B}$. En particular $T(M) \in \underline{B}$.

Sea $H \leq M/T(M)$ tal que $H \in \underline{B}$.

Considérese el homomorfismo cociente $q : M \longrightarrow M/T(M)$.

Sea $\overline{q} = q|_{q^{-1}(H)}$ la restricción de q a $q^{-1}(H)$, es decir $\overline{q} : q^{-1}(H) \longrightarrow H$.

Como $T(M) = Ker(q) = Ker(\overline{q})$, entonces:

$$\begin{aligned} q^{-1}(H)/T(M) &= q^{-1}(H)/Ker(q) \\ &= q^{-1}(H)/Ker(\overline{q}) \\ &\simeq \overline{q}(q^{-1}(H)) \\ &= H \end{aligned}$$

Como $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas y $H \in \underline{B}$, entonces $q^{-1}(H)/T(M) \in \underline{B}$. Ahora, $T(M) \in \underline{B}$ y $\underline{B}$ es cerrada bajo extensiones, entonces $q^{-1}(H) \in \underline{B}$.

Se tiene que $q^{-1}(H)$ es tal que $q^{-1}(H) \leq M$ y $q^{-1}(H) \in \underline{B}$, entonces $q^{-1}(H) \subseteq T(M)$ y por tanto $H = \overline{q}(q^{-1}(H)) \subseteq \overline{q}(T(M)) = 0$.

$\square$

Lema 12. *Sean $\underline{C}$ una subclase de* Ab *que es cerrada bajo imágenes isomórficas y subgrupos y $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo en* Ab. *Si H es un subgrupo de N tal que $N/H \in \underline{C}$, entonces $M/f^{-1}(H) \in \underline{C}$.*

Demostración:

Sea $m \in M$. Defínase $\psi : M/f^{-1}(H) \longrightarrow N/H$ de manera que $m + f^{-1}(H) \longmapsto f(m) + H$. Se verá que ψ así definido es un homomorfismo injectivo.

ψ esta bien definido:

Si $m + f^{-1}(H) \in M/f^{-1}(H)$ y $n + f^{-1}(H) \in M/f^{-1}(H)$ son tales que

$m+f^{-1}(H) = n+f^{-1}(H)$, entonces $(m-n)+f^{-1}(H) = f^{-1}(H)$. De aquí $(m-n) \in f^{-1}(H)$, es decir $f(m-n) \in H$.

Como f es un homomorfismo, entonces $f(m-n)=f(m)-f(n)$, se obtiene entonces que $(f(m)-f(n))\in H$, es decir $f(m)+H=f(n)+H$. Por tanto $\psi(m+f^{-1}(H))=\psi(n+f^{-1}(H))$.

ψ es un homomorfismo:

Si $m+f^{-1}(H)\in M/f^{-1}(H)$ y $n+f^{-1}(H)\in M/f^{-1}(H)$, entonces

$\psi((m+f^{-1}(H))+(n+f^{-1}(H)))=\psi((m+n)+f^{-1}(H)))=f(m+n)+H=(f(m)+f(n))+H=(f(m)+H)+(f(n)+H)=\psi(m+f^{-1}(H))+\psi(n+f^{-1}(H))$.

ψ es injectivo:

Si $m+f^{-1}(H)\in M/f^{-1}(H)$ y $n+f^{-1}(H)\in M/f^{-1}(H)$ son tales que

$\psi(m+f^{-1}(H))=\psi(n+f^{-1}(H))$, es decir, $f(m)+H=f(n)+H$, entonces $(f(m)-f(n))\in H$. Como $f(m-n)=f(m)-f(n)$, entonces $f(m-n)\in H$, de modo que $(m-n)\in f^{-1}(H)$ y por tanto $m+f^{-1}(H)=n+f^{-1}(H)$.

Luego, $M/f^{-1}(H)\simeq\psi(M/f^{-1}(H))\leq N/H$. Ahora, como $N/H\in\underline{C}$ y $\underline{C}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas y subgrupos, entonces $M/f^{-1}(H)\in\underline{C}$.

$\square$

Lema 13. *Sean $\underline{C}$ una subclase de* Ab *que es cerrada bajo imágenes isomórficas, subgrupos, extensiones y productos directos, M en* Ab *y $T(M)=\bigcap\{K\mid K\leq M\wedge M/K\in\underline{C}\}$. Entonces:*

1. *$M/T(M)\in\underline{C}$.*

2. *Si $H\leq T(M)$ es tal que $T(M)/H\in\underline{C}$, entonces $M/H\in\underline{C}$.*

Demostración:

Sean $M \in$ Ab y $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos de M tal que $M/K_i \in \underline{C}$ para cada $i \in I$.

Defínase $C_i = M/K_i$ y considérese $\{q_i : M \longrightarrow C_i\}$ la familia de homomorfismos cocientes.

Considérese $\{P_k : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_k\}$ la familia de homomorfismos Proyección Canónica de $\prod_{i\in I} C_i$ en C_k.

Por la Propiedad 6, existe un único homomorfismo $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ tal que $q_k = P_k \circ f$, $f(m) = \{q_i(m)\}_{i\in I}$.

Entonces $f(M) \subseteq \prod_{i\in I} q_i(M) = \prod_{i\in I} C_i$.

Como $C_i \in \underline{C}$ para cada $i \in I$, y $\underline{C}$ es cerrado bajo productos directos y subgrupos, entonces $f(M) \in \underline{C}$.

Como $f(M) \simeq M/Ker(f)$, $Ker(f) = \bigcap\{K_i \mid K_i \leq M \wedge M/K_i \in \underline{C}\} = T(M)$ y $\underline{C}$ es cerrado bajo imágenes isomórficas, entonces $M/T(M) \in \underline{C}$.

Sea $H \leq T(M)$ tal que $T(M)/H \in \underline{C}$.

Como $T(M) \leq M$, entonces $H \leq M$, y $(M/H)/(T(M)/H) \simeq M/T(M)$.

Como $M/T(M) \in \underline{C}$ y $\underline{C}$ es cerrado bajo extensiones, entonces $M/H \in \underline{C}$.

$\square$

1.3. Relación entre Teorías de Torsión y Radicales

En esta sección se incluyen la definición de teoria de torsión y radical, y el enunciado y demostración de la Proposición 19.

Definición 14. *Sean* $\underline{B}$ *y* $\underline{C}$ *subclases de* Ab. *Se definen:*

$$\underline{B}^r = \{C \in \text{Ab} \mid \forall B \in \underline{B},\ [B,C] = 0\}$$

$$\underline{C}^l = \{B \in \text{Ab} \mid \forall C \in \underline{C},\ [B,C] = 0\}$$

en donde $[B,C] = 0$ *significa que la clase* $[B,C]$ *consta sólo del homomorfismo cero.*

Algunas consecuencias de la Definición 14 se presentan en la siguiente observación.

Observación 15.

1. $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r \Longleftrightarrow \underline{B} \subseteq \underline{C}^l$.

   Demostración:

   Sea $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$ y sea $B \in \underline{B}$, se verá que $B \in \underline{C}^l$.

   Sea $C \in \underline{C}$ y como $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$, entonces $C \in \underline{B}^r$ y así $[B,C] = 0$. Por tanto $B \in \underline{C}^l$.

   El recíproco se demuestra de manera similar.

2. *a*) $\underline{B} \subseteq \underline{B}^{rl}$.

   Demostración: Sea $B \in \underline{B}$, se verá que $B \in \underline{B}^{rl}$.

   Sea $C \in \underline{B}^r$ y como $B \in \underline{B}$, entonces $[B,C] = 0$. Por tanto $B \in \underline{B}^{rl}$.

b) $\underline{B_1} \subseteq \underline{B_2} \Longrightarrow \underline{B_2}^r \subseteq \underline{B_1}^r$.

Demostración: Sea $\underline{B_1} \subseteq \underline{B_2}$ y sea $B \in \underline{B_2}^r$, se verá que $B \in \underline{B_1}^r$.

Sea $C \in \underline{B_1}$, luego $C \in \underline{B_2}$ y como $B \in \underline{B_2}^r$, entonces $[B, C] = 0$. Por tanto $B \in \underline{B_1}^r$.

c) $\underline{B}^{rlr} \subseteq \underline{B}^r$.

Demostración: Se usan los dos literales anteriores. Dado que $\underline{B} \subseteq \underline{B}^{rl}$, entonces $\underline{B}^{rlr} \subseteq \underline{B}^r$.

Las afirmaciones duales también son ciertas, y la demostración de cada una de ellas se hace siguiendo un argumento similar. Es decir:

3. *a*) $\underline{C} \subseteq \underline{C}^{lr}$.

   b) $\underline{C_1} \subseteq \underline{C_2} \Longrightarrow \underline{C_2}^l \subseteq \underline{C_1}^l$.

   c) $\underline{C}^{lrl} \subseteq \underline{C}^l$.

Definición 16. Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de Ab. Se dice que el par $(\underline{B}, \underline{C})$ es una **teoría de torsión** si satisface que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Una observación inmediata de la Definición 16 es la siguiente.

Observación 17.

Para cualquier subclase $\underline{A}$ de Ab, dos teorías de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$ que se pueden obtener de manera inmediata son $(\underline{A}^l, \underline{A}^{lr})$ y $(\underline{A}^{rl}, \underline{A}^r)$.

Demostración:

Para $(\underline{A}^l, \underline{A}^{lr})$:

Sean $\underline{B} = \underline{A}^l$ y $\underline{C} = \underline{A}^{lr}$. Obviamente $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Se verá que $\underline{B} = \underline{C}^l$.

Como $\underline{C} = \underline{B}^r$, entonces $\underline{B}^{rl} = \underline{C}^l$, pero por la Observación 15 $\underline{B} \subseteq \underline{B}^{rl}$, así que $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$, y como por la Observación 15 $\underline{A}^{lrl} \subseteq \underline{A}^l$, es decir, $\underline{C}^l \subseteq \underline{B}$, entonces $\underline{B} = \underline{C}^l$.

Para $(\underline{A}^{rl}, \underline{A}^r)$:

Sean $\underline{B} = \underline{A}^{rl}$ y $\underline{C} = \underline{A}^r$. Obviamente $\underline{B} = \underline{C}^l$.

Se verá que $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Como $\underline{B} = \underline{C}^l$, entonces $\underline{C}^{lr} = \underline{B}^r$, pero por la Observación 15 $\underline{C} \subseteq \underline{C}^{lr}$, así que $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$, y como por la Observación 15 $\underline{A}^{rlr} \subseteq \underline{A}^r$, es decir, $\underline{B}^r \subseteq \underline{C}$, entonces $\underline{C} = \underline{B}^r$.

$\square$

Definición 18. Una función $T : \text{Ab} \longrightarrow \text{Ab}$ se llama un **radical** si:

1. $T(M) \subseteq M$,

2. $f : M \longrightarrow N \Longrightarrow f(T(M)) \subseteq T(N)$,

3. $T(M/T(M)) = 0$,

para todos $M, N \in \text{Ab}$ y para todo homomorfismo $f \in [M, N]$.

La proposición 19 es un resultado clásico cuyo enunciado aparece en [9]. Se desarrolla la demostración con la finalidad de familiarizarse con el problema, y por tanto se incluye aquí.

Proposición 19. *Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de* Ab*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\underline{B} = \underline{C}^l$ *y* $\underline{C} = \underline{B}^r$.

2. $\underline{B}$ *es cerrada bajo imágenes isomórficas, cocientes, extensiones y sumas directas. Además* $\underline{C} = \underline{B}^r$.

3. $\underline{C}$ *es cerrada bajo imágenes isomórficas, subgrupos, extensiones de grupo y productos directos. Además* $\underline{B} = \underline{C}^l$.

4. *Existe un radical T sobre* Ab *tal que $T(T(M)) = T(M)$ para todo grupo M. Además* $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ *y* $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$.

Demostración:

La demostración de la Proposición 19 se hará siguiendo el siguiente plan:

Se demuestra primero que: $(4) \Longrightarrow (1) \Longrightarrow (2) \wedge (3)$.

Después, se demuestra $(2) \Longrightarrow (4)$ definiendo $T(M)$ como la suma de todos los subgrupos de M que están en $\underline{B}$.

Por último, se demuestra $(3) \Longrightarrow (4)$ definiendo $T(M)$ como la intersección de todos los subgrupos K de M para los cuales M/K está en $\underline{C}$.

$(4) \Longrightarrow (1)$:

Sea $T : \mathrm{Ab} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ un radical tal que $T(T(M)) = M$ para todo $M \in \mathrm{Ab}$.

Sean $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$. Se verá que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Para $\underline{B} = \underline{C}^l$:

Sea $B \in \underline{B}$, se verá que $B \in \underline{C}^l$.

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $\phi : B \longrightarrow C$ un homomorfismo, se verá que $\phi(B) = 0$.

Como $B \in \underline{B}$, entonces $T(B) = B$ y así dado que T es un radical y que $C \in \underline{C}$, se tiene que $\phi(B) = \phi(T(B)) \subseteq T(C) = 0$. Por tanto $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$.

Recíprocamente, sea $B \in \underline{C}^l$, se verá que $B \in \underline{B}$. Para esto se mostrará que $T(B) = B$.

Como $T(B) \subseteq B$, basta mostrar que $B \subseteq T(B)$.

Considérese entonces el homomorfismo sobreyectivo $\phi : B \longrightarrow B/T(B)$.

Como $T(B/T(B)) = 0$, entonces $B/T(B) \in \underline{C}$ y como $B \in \underline{C}^l$, entonces $\phi(B) = 0$, es decir, $B/T(B) = 0$. De aquí $T(B) = B$ y así $B \in \underline{B}$. Por tanto $\underline{C}^l \subseteq \underline{B}$.

Para $\underline{C} = \underline{B}^r$:

Como $\underline{B} = \underline{C}^l$, en particular $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$, y de la Observación 15, se puede afirmar que $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$.

Luego, basta mostrar que $\underline{B}^r \subseteq \underline{C}$.

Sea $C \in \underline{B}^r$, se verá que $C \in \underline{C}$ y para esto se verá que $T(C) = 0$.

Como T es un radical tal que $T(T(C)) = T(C)$, entonces $T(C) \in \underline{B}$. Considérese el homomorfismo inclusión $\phi : T(C) \longrightarrow C$. Como $C \in \underline{B}^r$, entonces $T(C) = \phi(T(C)) = 0$.

(1) $\Longrightarrow$ (2):

Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de Ab tales que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$. Se verá que $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas, cocientes, extensiones de grupos y sumas directas.

Para imágenes isomórficas y cocientes:

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $\phi : B \longrightarrow M$ un epimorfismo, donde $M \in$ Ab. Se verá que $\phi(B) = M \in \underline{B}$, es decir, se verá que $M \in \underline{C}^l$.

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $f : M \longrightarrow C$ un homomorfismo. Se verá que $f(M) = 0$.

Como $f \circ \phi : B \longrightarrow C$ es un homomorfismo, ϕ es un epimorfismo y $B \in \underline{C}^l$, entonces $0 = (f \circ \phi)(B) = f(\phi(B)) = f(M)$. Por lo tanto $M \in \underline{C}^l$.

En particular, como los isomorfismos y los cocientes son epimorfismos, se puede concluir que $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas y cocientes.

Para extensiones:

Sea $M \in$ Ab y sea B un subgrupo de M tal que $B \in \underline{B}$ y $M/B \in \underline{B}$. Se verá que $M \in \underline{B}$, es decir, se verá que $M \in \underline{C}^l$.

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $f : M \longrightarrow C$ un homomorfismo. Se verá que $f(M) = 0$.

Considérese el homomorfismo cociente $q : M \longrightarrow M/B$.

Como $\underline{C} = \underline{B}^r$, entonces $C \in \underline{B}^r$, y como $B \in \underline{B}$ y B un subgrupo de M, entonces $f(B) = 0$, de modo que $B \subseteq Kerf$. Ahora, por el Lema 10, existe un homomorfismo $\phi : M/B \longrightarrow C$ tal que $f = \phi \circ q$.

Como $M/B \in \underline{B}$ y $\underline{B} = \underline{C}^l$, entonces $M/B \in \underline{C}^l$ y como $\phi : M/B \longrightarrow C$, entonces $f(M) = (\phi \circ q)(M) = \phi(q(M)) = \phi(M/B) = 0$. Por lo tanto $M \in \underline{C}^l$.

Para sumas directas:

Sea $\{B_k\}_{k\in I}$ una familia de grupos abelianos tal que $B_k \in \underline{B}$ para cada $k \in I$. Se verá que $\bigoplus_{i\in I} B_i \in \underline{B}$, es decir, se verá que $\bigoplus_{i\in I} B_i \in \underline{C}^l$.
Sea $C \in \underline{C}$ y sea $\phi : \bigoplus_{i\in I} B_i \longrightarrow C$ un homomorfismo. Se verá que $\phi(\bigoplus_{i\in I} B_i) = 0$.
Considérese los homomorfismos Inmersión Canónica $J_k : B_k \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i$, y defínase $f_k = \phi \circ J_k$. Luego $\{f_k : B_k \longrightarrow C\}$ es una familia de homomorfismos.

Por la Propiedad 8, existe un único homomorfismo $f : \bigoplus_{i\in I} B_i \longrightarrow C$ tal que $f_k = f \circ J_k$ y $f(\{b_k\}_{k\in I}) = \sum_{k\in I} f_k(b_k)$. Por lo tanto $\phi = f$.

Como $B_i \in \underline{B}$ para cada $i \in I$, entonces $f_i(B_i) = 0$ para cada $i \in I$, de modo que:

$\phi(\bigoplus_{i\in I} B_i) = f(\bigoplus_{i\in I} B_i) \subseteq \sum_{i\in I} f_i(B_i) = 0$. Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} B_i \in \underline{B}$.

$(1) \Longrightarrow (3)$:

Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de Ab tales que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$. Se verá que $\underline{C}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas, subgrupos, extensiones de grupos y productos directos.

Para imágenes isomórficas y subgrupos:

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $\phi : M \longrightarrow C$ un monomorfismo. Se verá que $M \in \underline{C}$, es decir, se verá que $M \in \underline{B}^r$.

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $f : B \longrightarrow M$ un homomorfismo. Se verá que $f(B) = 0$.

Luego $\phi \circ f : B \longrightarrow C$ es un homomorfismo y como $C \in \underline{B}^r$, entonces se obtiene que $0 = (\phi \circ f)(B) = \phi(f(B))$. De aquí $f(B) \subseteq Ker(\phi) = 0$. Por tanto $M \in \underline{B}^r$.

En particular, como los isomorfismos y las inclusiones de subgrupos son monomorfismos, se puede concluir que $\underline{C}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas y subgrupos.

Para extensiones:

Sea $M \in$ Ab y sea C un subgrupo de M tal que $C \in \underline{C}$ y $M/C \in \underline{C}$. Se verá que $M \in \underline{C}$, es decir, se verá que $M \in \underline{B}^r$.

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $f : B \longrightarrow M$ un homomorfismo. Se verá que $f(B) = 0$.

Considérese $q : M \longrightarrow M/C$ el homomorfismo cociente.

Luego $q \circ f : B \longrightarrow M/C$ es un homomorfismo, y como $M/C \in \underline{B}^r$, entonces se obtiene que $0 = (q \circ f)(B) = q(f(B))$. De aquí $f(B) \subseteq Ker(q) = C$ y como $C \in \underline{B}^r$, entonces $f(B) = 0$.

Por lo tanto $M \in \underline{B}^r$.

Para productos directos:

Sea $\{C_k\}_{k\in I}$ una familia de grupos abelianos tal que $C_k \in \underline{C}$ para cada $k \in I$. Se verá que $\prod_{i\in I} C_i \in \underline{C}$, es decir, se verá que $\prod_{i\in I} C_i \in \underline{B}^r$.

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $\phi : B \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ un homomorfismo. se verá que $\phi(B) = 0$.

Considérese los homomorfismos Proyección Canónica $P_k : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_k$, y defínase $f_k = P_k \circ \phi$. Luego $\{f_k : B \longrightarrow C_k\}$ es una familia de homomorfismos.

Por la Propiedad 6, existe un único homomorfismo

$f : B \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ tal que $f_k = P_k \circ f$ y $f(b) = \{f_i(b)\}_{i\in I}$. Por lo tanto $\phi = f$.

Como $C_i \in \underline{B}^r$ para cada $i \in I$, entonces $f_i(B) = 0$ para cada $i \in I$, de modo que:

$\phi(B) = f(B) \subseteq \prod_{i\in I} f_i(B) = 0$. Por lo tanto $\prod_{i\in I} C_i \in \underline{B}^r$.

$(2) \Longrightarrow (4)$:

Sea $\underline{B}$ cerrado bajo imágenes isomórficas, cocientes, extensiones y sumas directas. Sea, además $\underline{C} = \underline{B}^r$. Se verá que existe un radical T sobre Ab tal que $T(T(M)) = T(M)$ para cada $M \in$ Ab y que además $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$.

Sea $T(M)$ la suma de todos los subgrupos de M que están en $\underline{B}$, es decir:

$T(M) = +\{K \mid K \leq M \wedge K \in \underline{B}\}$.

Por la definición de $T(M)$, $T : \text{Ab} \longrightarrow \text{Ab}$. Se verá que T es un radical.

1. $T(M) \subseteq M$ pues, por la Observación 4, se tiene que $T(M)$ es subgrupo de M.

2. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo. Se verá que $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

$$\begin{aligned} f(T(M)) &= f(+\{K \mid K \leq M \wedge K \in \underline{B}\}) \\ &\subseteq +\{f(K) \mid f(K) \leq N \wedge K \in \underline{B}\} \\ &\subseteq +\{f(K) \mid f(K) \leq N \wedge f(K) \in \underline{B}\} \\ &\subseteq +\{H \mid H \leq N \wedge H \in \underline{B}\} \\ &= T(N) \end{aligned}$$

   La contención $+\{f(K) \mid f(K) \leq N \wedge K \in \underline{B}\} \subseteq +\{f(K) \mid f(K) \leq N \wedge f(K) \in \underline{B}\}$ es cierta. La razón es que $K \leq M$ y así $f(K) \leq N$, la restricción $\overline{f} : K \longrightarrow N$ es un homomorfismo, de modo que $K/Ker(\overline{f}) \simeq f(K)$, y como $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas y cocientes, entonces $K \in \underline{B}$ implica que $f(K) \in \underline{B}$.

3. $T(M/T(M)) = 0$ pues, por el Lema 11,

$$\begin{aligned} T(M/T(M)) &= +\{H \mid H \leq M/T(M) \wedge H \in \underline{B}\} \\ &\subseteq 0 \end{aligned}$$

Ahora, T cumple que $T(T(M)) = T(M)$ pues, se sabe que $T(T(M)) \subseteq T(M)$ y, por la definición de $T(T(M))$, dado que $T(M) \leq T(M)$ y por el Lema 11, $T(M) \in \underline{B}$, entonces $T(M) \subseteq T(T(M))$.

Por último, sea $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Se verá que $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$.

Para $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$:

Sea $M \in \underline{B}$.

Como $T(M) \leq M$ y $\underline{B}$ es cerrado bajo cocientes, entonces $M/T(M) \in \underline{B}$.

Como $M/T(M) \leq M/T(M)$, entonces, por el Lema 11, $M/T(M) = 0$. De aquí $T(M) = M$ y así $\underline{B} \subseteq \{M \mid T(M) = M\}$.

Recíprocamente, sea $M \in \text{Ab}$ tal que $T(M) = M$.

Como $T(M) \in \underline{B}$, entonces $M \in \underline{B}$, y así $\{M \mid T(M) = M\} \subseteq \underline{B}$.

Por tanto $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$.

Para $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$:

Sea $M \in \underline{C}$.

Considérese el homomorfismo inclusión $\phi : T(M) \longrightarrow M$.

Como $\underline{C} = \underline{B}^r$, entonces $M \in \underline{B}^r$ y como $T(M) \in \underline{B}$, entonces $0 = \phi(T(M)) = T(M)$, de modo que $\underline{C} \subseteq \{M \mid T(M) = 0\}$.

Recíprocamente, sea $M \in \text{Ab}$ tal que $T(M) = 0$. Se verá que $M \in \underline{C}$, es decir que $M \in \underline{B}^r$.

Sean $B \in \underline{B}$ y $\phi : B \longrightarrow M$ un homomorfismo. Se verá que $\phi(B) = 0$.

Como $T(B) = B$ y T es un radical, entonces $\phi(B) = \phi(T(B)) \subseteq T(M) = 0$.

Luego $M \in \underline{B}^r$, y así $\{M \mid T(M) = 0\} \subseteq \underline{C}$.

Por tanto $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$.

$(3) \Longrightarrow (4)$:

Sea $\underline{C}$ cerrado bajo imágenes isomórficas, subgrupos, extensiones y productos directos. Sea, además $\underline{B} = \underline{C}^l$. Se verá que existe un radical T sobre Ab tal que $T(T(M)) = T(M)$ para cada $M \in$ Ab y que además $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$.

Sea $T(M)$ la intersección de todos los subgrupos K de M para los cuales M/K esta en $\underline{C}$, es decir:

$T(M) = \bigcap\{K \mid K \leq M \wedge M/K \in \underline{C}\}$.

Por la definición de $T(M)$, $T : \text{Ab} \longrightarrow \text{Ab}$. Se verá que T es un radical.

1. $T(M) \subseteq M$ pues, $T(M) \leq M$ en virtud de que la intersección de subgrupos es subgrupo.

2. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo. Se verá que $f(T(M)) \subseteq T(N)$. Para esto se verá que $T(M) \subseteq f^{-1}(T(N))$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(T(N)) &= f^{-1}(\bigcap\{H \mid H \leq N \wedge N/H \in \underline{C}\}) \\ &= \bigcap\{f^{-1}(H) \mid H \leq N \wedge N/H \in \underline{C}\} \end{aligned}$$

   Por el Lema 12, se tiene que

   $\{f^{-1}(H) \mid H \leq N \wedge N/H \in \underline{C}\} \subseteq \{f^{-1}(H) \mid f^{-1}(H) \leq M \wedge M/f^{-1}(H) \in \underline{C}\}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} f^{-1}(T(N)) &= \bigcap\{f^{-1}(H) \mid H \leq N \wedge N/H \in \underline{C}\} \\ &\supseteq \bigcap\{f^{-1}(H) \mid f^{-1}(H) \leq M \wedge M/f^{-1}(H) \in \underline{C}\} \\ &\supseteq \bigcap\{K \mid K \leq M \wedge M/K \in \underline{C}\} \\ &= T(M) \end{aligned}$$

3. $T(M/T(M)) = 0$ pues, $0 \leq M/T(M)$ y $(M/T(M))/0 \simeq M/T(M)$.

   Por el Lema 13, $M/T(M) \in \underline{C}$ y como $\underline{\mathrm{C}}$ es cerrado bajo imágenes isomórficas, entonces $(M/T(M))/0 \in \underline{C}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} T(M/T(M)) &= \bigcap\{K \mid K \leq M/T(M) \wedge (M/T(M))/K \in \underline{C}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, se verá que T cumple que $T(T(M)) = T(M)$.

Se sabe que $T(T(M)) \subseteq T(M)$, basta mostrar que $T(M) \subseteq T(T(M))$.

Por el Lema 13, se tiene que $\{H \mid H \leq T(M) \wedge T(M)/H \in \underline{C}\} \subseteq \{H \mid H \leq M \wedge M/H \in \underline{C}\}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} T(M) &= \bigcap\{H \mid H \leq M \wedge M/H \in \underline{C}\} \\ &\subseteq \bigcap\{H \mid H \leq T(M) \wedge T(M)/H \in \underline{C}\} \\ &= T(T(M)) \end{aligned}$$

Por último, sea $\underline{B} = \underline{C}^l$.

Se verá que $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$ y $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$.

Para $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$:

Sea $M \in \underline{C}$.

Como $M \simeq M/0$ y $\underline{C}$ es cerrado bajo imágenes isomórficas, entonces $M/0 \in \underline{C}$, de modo que:

$T(M) = \bigcap\{K \mid K \leq M \wedge M/K \in \underline{C}\} = 0$.

Así $\underline{C} \subseteq \{M \mid T(M) = 0\}$.

Recíprocamente, sea $M \in \text{Ab}$ tal que $T(M) = 0$. Se verá que $M \in \underline{C}$.

Como $M/T(M) \in \underline{C}$, $M/T(M) = M/0 \simeq M$ y $\underline{C}$ es cerrado bajo imágenes isomórficas, entonces $M \in \underline{C}$, y así $\{M \mid T(M) = 0\} \subseteq \underline{C}$.

Por tanto $\underline{C} = \{M \mid T(M) = 0\}$.

Para $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$:

Sea $M \in \underline{B}$.

Considérese el homomorfismo cociente $\phi : M \longrightarrow M/T(M)$.

Como por el Lema 13, $M/T(M) \in \underline{C}$ y como $M \in \underline{C}^l$, entonces $0 = \phi(M) = M/T(M)$, de modo que $T(M) = M$, y así $\underline{B} \subseteq \{M \mid T(M) = M\}$.

Recíprocamente, sea $M \in \text{Ab}$ tal que $T(M) = M$.

Sean $C \in \underline{C}$ y $\phi : M \longrightarrow C$ un homomorfismo.

Como T es un radical y $T(C) = 0$, entonces $\phi(M) = \phi(T(M)) \subseteq T(C) = 0$, de modo que $M \in \underline{C}^l$, y así $\{M \mid T(M) = M\} \subseteq \underline{B}$.

Por tanto $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$.

$\square$

Capítulo 2

Teorías de Torsión y Radicales en la Categoría de Espacios Topológicos

Este capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera sección se incluye una parte de la terminología que se necesita para enunciar la Proposición 38. En la segunda sección se incluyen lemas que son importantes en el desarrollo de la demostración de la Proposición 38. En la tercera sección se incluyen, las definiciones de teoría de torsión y radical en Topología, y se establecen relaciones entre estos conceptos en las Proposiciones 38, 39 y 40. En la cuarta sección se incluyen algunos ejemplos de teorías de torsión y radicales en Top y Top$\star$.

2.1. Conceptos Básicos

Sea Top la categoría de espacios topológicos y funciones continuas, y $[B, C]$ la clase de todas las funciones continuas $f : B \longrightarrow C$ en Top.

Un espacio topológico puntuado es un espacio topológico X con un punto distinguido $x_0 \in X$. Esto se denota (X, x_0). Las funciones continuas en los espacios topológicos puntuados son funciones continuas en Top que preservan el punto distinguido, es decir, funciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ tales que $f(x_0) = y_0$. Esto se denota $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

Sea Top$\star$ la categoría de espacios topológicos puntuados y funciones continuas. Se usa la misma notación que en Top para referirse a funciones continuas en Top$\star$.

$[(B, b_0), (C, c_0)]$ es la clase de todas las funciones continuas $f : (B, b_0) \longrightarrow (C, c_0)$ en Top$\star$.

Definición 20 (**Subespacio Topológico**).

Sea X un espacio topológico y M un subconjunto de X.

La **topología relativa** para M es la topología en la cual un conjunto es abierto en M si es un conjunto de la forma $A \cap M$ donde A es un abierto en X.

El conjunto M dotado con la topología relativa se llama **subespacio** del espacio topológico X. Esto se denota por $M \preceq X$.

Un subespacio de un espacio topológico puntuado (X, x_0), es un subespacio M de X, el cual comparte su punto distinguido con X. Es decir, los subespacios de (X, x_0) son los subespacios de X que contienen x_0.

Si M es un subespacio de X que contiene al punto x_0, entonces (M, x_0) es un subespacio de (X, x_0). Esto se denota por $(M, x_0) \preceq (X, x_0)$.

Observación 21.

Sea $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una función continua en Top$\star$.

Sean $(M, x_0) \preceq (X, x_0)$ y $(N, y_0) \preceq (Y, y_0)$. Entonces:

1. $f((M, x_0)) = (f(M), y_0)$.

2. $f^{-1}((N, y_0)) = (f^{-1}(N), x_0)$.

3. Si $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es constante, entonces $f((X, x_0)) = (\{y_0\}, y_0)$.

Demostración:

1. y 2. son obvios.

3. Como $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es constante, entonces existe $c \in Y$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $f(x) = c$. Luego $f((X, x_0)) = (f(X), f(x_0)) = (\{c\}, y_0)$, pero $x_0 \in X$, así que $y_0 = f(x_0) = c$. Por tanto $f((X, x_0)) = (\{y_0\}, y_0)$.

$\square$

Definición 22 (Cociente Topológico).

Sean X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva.

La **topología cociente** para Y (relativa a la función f) es la topología más fina para Y que hace que f sea continua. En este caso f se llama **mapa cociente**.

Un subconjunto N de Y es un abierto relativo a la topología cociente si y sólo si $f^{-1}(N)$ es abierto en X.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ sobre un espacio topológico X, el cociente $Y = X/_{\sim}$ dotado con la topologia cociente relativa a la **proyección** $\phi : X \longrightarrow Y$, se llama el **espacio cociente**.

Se puede formar el cociente de un espacio topológico puntuado (X, x_0) bajo cualquier relación de equivalencia. El punto distinguido del cociente es la imagen de x_0 bajo la proyección.

Definición 23. Sea M en Top y sea B un subespacio de M. Se define:

1. La relación $\overset{B}{\sim}$ como:

   $x \overset{B}{\sim} y \Longleftrightarrow (\ x = y\ o\ \{x, y\} \subseteq B)$.

2. El espacio cociente M/B como:

   $M/B = M/_{\overset{B}{\sim}} = \{[x] \mid x \in M\}$ con la topología cociente,

   en donde $[x]$ representa la clase de equivalencia de x.

En el espacio cociente M/B, por cada punto de M que no está en B se tiene una clase de equivalencia y B (todos los puntos de B) es otra clase de equivalencia.

Definición 24. Sea (M, m) en Top$\star$ y sea (B, m) un subespacio de (M, m). Se define:

1. La relación $\overset{(B,m)}{\sim}$ como:

   $x \overset{(B,m)}{\sim} y \Longleftrightarrow x \overset{B}{\sim} y.$

2. El espacio cociente cociente $(M, m)/(B, m)$ como:

   $(M, m)/(B, m) = (M, m)/_{\overset{(B,m)}{\sim}} = (\ \{[x] \mid x \in M\}\ , [m]\ )$ con la topología cociente,

   en donde $[x]$ representa la clase de equivalencia de x respecto a la relación $\overset{B}{\sim}$.

Con la notación de la Definición 23, si $(M, m) \in$ Top$\star$ y (B, m) es un subespacio de (M, m), entonces $(M, m)/(B, m) = (M/B, [m])$.

Definición 25 (Producto Topológico).

Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea $\prod_{i\in I} X_i$ el producto cartesiano de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$.

Sea $\pi_k : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_k$ la función que asigna a cada elemento del espacio producto, su k-ésima coordenada, esto es, $\pi_k(\{x_i\}_{i\in I}) = x_k$.

π_k se llama la **proyección canónica** asociada al índice k.

Sea S_k la colección $S_k = \{\pi_k^{-1}(U_k) \mid U_k$ es abierto en $X_k\}$ y sea S la unión de esas colecciones, esto es, $S = \bigcup_{k\in I} S_k$.

La topología generada por la subbase S se llama la **topología producto**.

En esta topología $\prod_{i\in I} X_i$ se llama el **espacio producto** de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$.

La base β generada por la subbase S consta de todas las intersecciones finitas de elementos de S, así un elemento típico de B de β puede escribirse como $B = \prod_{i\in I} U_i$ donde $U_i \neq X_i$ sólo para un número finito de $i \in I$.

Propiedad 26 (**Propiedad Universal del Producto Topológico**).

Sea $\{f_k : B \longrightarrow C_k\}$ una familia de funciones continuas. Sea $\{\pi_k : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_k\}$ la familia de proyecciones de $\prod_{i\in I} C_i$ en C_k, $\pi_k(\{c_i\}_{i\in I}) = c_k$.

Entonces existe una única función continua $f : B \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ tal que $f_k = \pi_k \circ f$.

De hecho, $f(b) = \{f_i(b)\}_{i\in I}$.

Definición 27. Sea $\underline{D}$ una subclase de Top (respectivamente de Top$\star$), decimos que:

1. $\underline{D}$ es **cerrada bajo imágenes homeomórficas** si satisface:

   $(\ \phi : D \longrightarrow E$ homeomorfismo en Top $\ \wedge\ D \in \underline{D}\ ) \implies E \in \underline{D}$

   (respectivamente si satisface:

   $(\ \phi : (D,d) \longrightarrow (E,e)$ homeomorfismo en Top$\star$ $\ \wedge\ (D,d) \in \underline{D}\ ) \implies (E,e) \in \underline{D}\ )$

2. $\underline{D}$ es **cerrada bajo subespacios** si satisface:

   $(\ D \in \underline{D}\ \wedge\ A$ subespacio de $D\ ) \implies A \in \underline{D}$

   (respectivamente si satisface:

   $(\ (D,d) \in \underline{D}\ \wedge\ (A,d)$ subespacio de $(D,d)\ ) \implies (A,d) \in \underline{D}\ )$

3. $\underline{D}$ es **cerrada bajo imágenes de funciones continuas** si satisface:

   ($\phi : D \longrightarrow E$ función continua en Top $\wedge$ $D \in \underline{D}$) $\implies$ $\phi(D) \in \underline{D}$

   (respectivamente si satisface:

   ($\phi : (D,d) \longrightarrow (E,e)$ función continua en Top$\star$ $\wedge$ $(D,d) \in \underline{D}$) $\implies$ $\phi((D,d)) \in \underline{D}$)

4. $\underline{D}$ es **cerrada bajo la unión de subespacios con un punto en común** si satisface:

   $D \in$ Top $\wedge$ $\{D_i\}_{i \in I}$ familia de subespacios de D tal que $\{D_i\}_{i \in I} \subseteq \underline{D}$

   $\wedge$ $(\exists d)($ $d \in D$ tal que $d \in \bigcap_{i \in I} D_i$) $\implies$ $\bigcup_{i \in I} D_i \in \underline{D}$

   (respectivamente **cerrada bajo la unión de subespacios** si satisface:

   $(D,d) \in$ Top$\star$ $\wedge$ $\{(D_i,d)\}_{i \in I}$ familia de subespacios de (D,d) tal que $\{(D_i,d)\}_{i \in I} \subseteq \underline{D}$

   $\implies$ $(\bigcup_{i \in I} D_i, d) \in \underline{D}$)

5. $\underline{D}$ es **cerrada bajo productos** si satisface:

   $\{D_i\}_{i \in I}$ familia en Top tal que $D_i \in \underline{D}$ para cada $i \in I$

   $\implies$ $\prod_{i \in I} D_i \in \underline{D}$

   (respectivamente si satisface:

   $\{(D_i,d_i)\}_{i \in I}$ familia en Top$\star$ tal que $(D_i,d_i) \in \underline{D}$ para cada $i \in I$

   $\implies$ $(\prod_{i \in I} D_i, \{d_i\}_{i \in I}) \in \underline{D}$)

6. $\underline{D}$ es **cerrada bajo extensiones** si satisface:

   ($D \in \underline{D}$ $\wedge$ $D \preceq E$ tal que $E/D \in \underline{D}$) $\implies$ $E \in \underline{D}$

   (respectivamente si satisface:

   ($(D,e) \in \underline{D}$ $\wedge$ $(D,e) \preceq (E,e)$ tal que $(E,e)/(D,e) \in \underline{D}$) $\implies$ $(E,e) \in \underline{D}$)

2.2. Lemas Importantes

Lema 28. *Sean* $f : M \longrightarrow C$ *una función continua en* Top, B *un subespacio de* M *y* $q : M \longrightarrow M/B$ *el cociente. Si* $B \subseteq f^{-1}(\{c\})$ *para algún* $c \in C$, *entonces existe una función continua* $\phi : M/B \longrightarrow C$ *tal que* $f = \phi \circ q$.

Demostración:

Sea $m \in M$. Defínase $\phi : M/B \longrightarrow C$ de manera que $[m] \longmapsto f(m)$.

Se verá que ϕ así definida es una función continua tal que $f = \phi \circ q$.

ϕ está bien definida:

Si $[m] \in M/B$ y $[n] \in M/B$ son tales que $[m] = [n]$, entonces $m = n$ o $\{m, n\} \subseteq B$.

Si $m = n$, entonces dado que f es función, $f(m) = f(n)$.

Si $\{m, n\} \subseteq B$. Considérese la restricción $f|_B : M \longrightarrow B$ que es continua.

Como $B \subseteq f^{-1}(\{c\})$ para algún $c \in C$, entonces $(f|_B)(M) = \{c\}$ para algún $c \in C$, y por tanto $f(m) = c = f(n)$.

En cualquier caso $f(m) = f(n)$ de modo que $\phi([m]) = \phi([n])$.

ϕ es tal que $f = \phi \circ q$:

Si $m \in M$, entonces $(\phi \circ q)(m) = \phi(q(m)) = \phi([m]) = f(m)$, y por tanto $f = \phi \circ q$.

ϕ es una función continua:

Si D es un abierto en C entonces $f^{-1}(D) = (\phi \circ q)^{-1}(D) = q^{-1}(\phi^{-1}(D))$.

Como f es una función continua entonces $f^{-1}(D)$ es un abierto en M, es decir, $q^{-1}(\phi^{-1}(D))$ es un abierto en M y como q es el cociente entonces $\phi^{-1}(D)$ es un abierto en M/B.

$\square$

Lema 29. *Sean $\underline{B}$ una subclase de* Top$\star$ *tal que $\underline{B}$ es cerrada bajo imagenes de funciones continuas, $f : (M, m) \longrightarrow (N, n)$ una función continua y (K, m) un subespacio de (M,m) tal que $(K, m) \in \underline{B}$. Entonces $(f(K), n) \in \underline{B}$.*

Demostración:

Sea $\overline{f} = f|_{(K,m)}$, es decir, la restricción de f a (K, m), entonces $\overline{f} : (K, m) \longrightarrow (f(K), n)$ es una función continua. Como $(K, m) \in \underline{B}$ y $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes de funciones continuas, entonces $\overline{f}((K, m)) \in \underline{B}$, pero $\overline{f}((K, m)) = f((K, m)) = (f(K), n)$, así que $(f(K), n) \in \underline{B}$.

$\square$

Lema 30. *Sean $\underline{B}$ una subclase de* Top$\star$ *que es cerrada bajo imágenes homeomórficas, extensiones y uniones de subespacios, (M, m) en* Top$\star$ *y $T((M, m)) = (T(M), m)$, en donde $T(M) = \bigcup\{K \mid (K, m) \preceq (M, m) \wedge (K, m) \in \underline{B}\}$. Entonces:*

1. *$T((M, m)) \in \underline{B}$.*
2. *Si $(H, [m])$ es un subespacio de $(M/T(M), [m])$ tal que $(H, [m]) \in \underline{B}$, entonces $(H, [m]) = (\{[m]\}, [m])$.*

Demostración:

Como $\underline{B}$ es cerrada bajo uniones de subespacios, entonces se puede afirmar que

$\bigcup\{K \mid (K, m) \preceq (M, m) \wedge (K, m) \in \underline{B}\} \in \underline{B}$. Por tanto $T((M, m)) \in \underline{B}$.

Sea $(H, [m])$ un subespacio de $(M, m)/T((M, m))$ tal que $(H, [m]) \in \underline{B}$.

Considérese el cociente $q : (M, m) \longrightarrow (M, m)/T((M, m))$.

Sea $\overline{q} = q|_{q^{-1}((H,[m])}$ la restricción de q a $q^{-1}((H, [m])) = (q^{-1}(H), m)$, es decir

$\overline{q} : (q^{-1}(H), m) \longrightarrow (H, [m])$.

Se tiene que $T((M,m)) = q^{-1}(\{[m]\}, [m]) = \overline{q}^{\ -1}(\{[m]\}, [m]) \subseteq \overline{q}^{\ -1}(H, [m]) = (q^{-1}(H), m)$, luego:

$$\begin{aligned}
(q^{-1}(H), m)/T((M,m)) &= q((q^{-1}(H), m)) \\
&= \overline{q}((q^{-1}(H), m)) \\
&= \overline{q}(q^{-1}((H, [m])) \\
&= (H, [m])
\end{aligned}$$

Como $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes homeomórficas y extensiones y, $(H, [m]) \in \underline{B}$ y $T((M,m)) \in \underline{B}$, entonces $(q^{-1}(H), m) \in \underline{B}$.

Se tiene que $(q^{-1}(H), m)$ es un subespacio de (M, m) tal que $(q^{-1}(H), m) \in \underline{B}$, entonces $q^{-1}((H, [m])) = (q^{-1}(H), m) \subseteq T((M,m))$, luego:

$$\begin{aligned}
(H, [m]) &= \overline{q}((q^{-1}(H), m)) \\
&= \overline{q}(q^{-1}(H, [m])) \\
&\subseteq \overline{q}(T((M,m))) \\
&= (\{[m]\}, [m])
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 31. *Sean* $\underline{C}$ *una subclase de* $\mathrm{Top}\star$ *cerrada bajo subespacios,* $f : (M, m) \longrightarrow (N, n)$ *una función continua en* $\mathrm{Top}\star$*,* $(H, n) \preceq (N, n)$ *y* $g : (N, n) \longrightarrow (Z, z)$ *una función continua y sobreyectiva, con* $(Z, z) \in \underline{C}$ *tal que* $(H, n) = g^{-1}((\{z\}, z))$*.*

Entonces existen $(K, m) \preceq (M, m)$ *y una función* $h : (M, m) \longrightarrow (W, w)$*, con* $(W, w) \in \underline{C}$ *continua y sobreyectiva tales que* $(K, m) = h^{-1}((\{z\}, z))$ *y* $f((K, m)) \subseteq (H, n)$*.*

Demostración:

Defínase h como la restricción de $(g \circ f) : (M, m) \longrightarrow (Z, z)$ a su imagen, y $K = f^{-1}(H)$, es decir, $h : (M, m) \longrightarrow (g \circ f)((M, m))$, y $(K, m) = (f^{-1}(H), m) = f^{-1}((H, n))$.

Sea $(W, w) = (g \circ f)((M, m))$.

Como $(g \circ f)((M, m)) \preceq (Z, z)$, $(Z, z) \in \underline{C}$ y $\underline{C}$ es cerrada bajo subespacios, entonces $h : (M, m) \longrightarrow (W, w)$ es una función continua y sobreyectiva, con $(W, w) \in \underline{C}$.

Ahora, $h^{-1}((\{z\}, z)) = (g \circ f)^{-1}((\{z\}, z)) = f^{-1}(g^{-1}((\{z\}, z))) = f^{-1}((H, n)) = (K, m)$, y $f((K, m)) = f(f^{-1}((H, n))) \subseteq (H, n)$.

$\square$

2.3. Teorías de Torsión y Radicales en Top y Top$\star$

Definición 32. Una función $T : \text{Top} \longrightarrow \text{Top}$ se llama un **radical** si:

1. $T(M) \subseteq M$,
2. $f : M \longrightarrow N \Longrightarrow f(T(M)) \subseteq T(N)$,
3. $T(M/T(M)) = \{[m]\}$, para algún $m \in M$,

para todos $M, N \in \text{Top}$ y para toda función continua $f \in [M, N]$.

El concepto de radical en Top$\star$ se puede definir de manera similar como en la Definición 32 para radical en Top. La terminología es la siguiente.

Definición 33. Una función $T : \text{Top}\star \longrightarrow \text{Top}\star$ se llama un **radical** si:

1. $T((M, m)) \subseteq (M, m)$,
2. $f : (M, m) \longrightarrow (N, n) \Longrightarrow f(T((M, m))) \subseteq T((N, n))$,
3. $T((M, m)/T((M, m))) = (\{[m]\}, [m])$

para todos $(M, m), (N, n) \in \text{Top}\star$ y para toda función continua $f \in [(M, m), (N, n)]$.

Definición 34. *Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de* Top. *Se definen:*

$$\underline{B}^r = \{C \in \text{Top} \mid \forall B \in \underline{B},\ [B,C] = \textit{const}\ \}$$

$$\underline{C}^l = \{B \in \text{Top} \mid \forall C \in \underline{C},\ [B,C] = \textit{const}\ \}$$

en donde $[B,C] = const$ significa que la clase $[B,C]$ consta sólo de las funciones continuas constantes $f : B \longrightarrow C$, es decir, de las funciones continuas de B a C cuya imagen contiene un solo punto.

Se usa la misma notación para las clases $\underline{B}$ y $\underline{C}$ en Top$\star$, y se pueden definir las clases $\underline{B}^r$ y $\underline{C}^l$ para Top$\star$ de manera similar que en la Definición 34 para Top. La terminología es la siguiente.

Definición 35. Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de Top$\star$. Se definen:

$$\underline{B}^r = \{(C,c) \in \text{Top} \mid \forall (B,b) \in \underline{B},\ [(B,b),(C,c)] = \text{const}\ \}$$

$$\underline{C}^l = \{(B,b) \in \text{Top} \mid \forall (C,c) \in \underline{C},\ [(B,b),(C,c)] = \text{const}\ \}$$

en donde $[(B,b),(C,c)] = \text{const}$ significa que la clase $[(B,b),(C,c)]$ consta sólo de las funciones continuas constantes $f : (B,b) \longrightarrow (C,c)$, es decir, de las funciones continuas de (B,b) a (C,c) tales que $f((B,b)) = (\{c\},c)$.

De la misma manera que en el caso algebráico, se presentan unas primeras consecuencias de la Definición 34 en la siguiente observación.

Observación 36.

1. $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r \Longleftrightarrow \underline{B} \subseteq \underline{C}^l$.

2. a) $\underline{B} \subseteq \underline{B}^{rl}$.

   b) $\underline{B_1} \subseteq \underline{B_2} \Longrightarrow \underline{B_2}^r \subseteq \underline{B_1}^r$.

   c) $\underline{B}^{rlr} \subseteq \underline{B}^r$.

3. a) $\underline{C} \subseteq \underline{C}^{lr}$.

   b) $\underline{C_1} \subseteq \underline{C_2} \Longrightarrow \underline{C_2}^l \subseteq \underline{C_1}^l$.

   c) $\underline{C}^{lrl} \subseteq \underline{C}^l$.

La demostración de cada una de ellas se hace siguiendo un argumento similar al usado en la demostración de la Observación 15.

La Observación 36 también es cierta si las clases $\underline{B}^r$ y $\underline{C}^l$ se consideran en Top$\star$ como en la Definición 35.

Definición 37. Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de Top (respectivamente de Top$\star$).

Se dice que el par $(\underline{B}, \underline{C})$ es una **teoría de torsión** en Top (respectivamente en Top$\star$) si satisface que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$.

En la siguiente Proposición, se establecen en Top, relaciones entre los conceptos de radical y teoría de torsión. Pero también se establecen otras relaciones que no necesariamente son ciertas en Top, pero si en Top$\star$.

Proposición 38. *Sean* $\underline{B}$ *y* $\underline{C}$ *subclases de* Top. *Se consideran los siguientes enunciados:*

1. $\underline{B} = \underline{C}^l$ *y* $\underline{C} = \underline{B}^r$.

2. $\underline{B}$ *es cerrada bajo imágenes de funciones continuas, extensiones y uniones de subespacios con un punto en común. Además* $\underline{C} = \underline{B}^r$.

3. $\underline{C}$ *es cerrada bajo imágenes homeomórficas, subespacios, extensiones y productos. Además* $\underline{B} = \underline{C}^l$.

4. *Existe un radical* T *sobre* Top *tal que* $T(T(M)) = T(M)$ *para todo espacio topológico* M. *Además* $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ *y* $\underline{C} = \{M \mid T(M) = \{m\}\}$ *para algún* $m \in M$.

Entonces: $(4) \Longrightarrow (1)$, $(1) \Longrightarrow (3)$ *y* $(1) \Longrightarrow (2)$ *son ciertos en* Top, *y por tanto en* Top$\star$, *además* $(2) \Longrightarrow (4)$ *es cierto en* Top$\star$. *Así que* $(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3)$ *es cierto en* Top$\star$.

Demostración:

$(4) \Longrightarrow (1)$:

Sea $T : \text{Top} \longrightarrow \text{Top}$ un radical tal que $T(T(M)) = M$ para todo $M \in \text{Top}$.

Sean $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M \mid T(M) = \{m\}$ para algún $m \in M\}$.

Se verá que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Para $\underline{B} = \underline{C}^l$:

Sea $B \in \underline{B}$, se verá que $B \in \underline{C}^l$.

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $\phi : B \longrightarrow C$ una función continua, se verá que $\phi(B) = \{c\}$ para algún $c \in C$.

Como $B \in \underline{B}$, entonces $T(B) = B$ y así dado que T es un radical y que $C \in \underline{C}$, se tiene que

$\phi(B) = \phi(T(B)) \subseteq T(C) = \{c\}$ para algún $c \in C$. Por tanto $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$.

Recíprocamente, sea $B \in \underline{C}^l$, se verá que $B \in \underline{B}$. Para esto se mostrará que $T(B) = B$.

Como $T(B) \subseteq B$, basta mostrar que $B \subseteq T(B)$. Considérese la función continua sobreyectiva $\phi : B \longrightarrow B/T(B)$.

Como $T(B/T(B)) = \{[b]\}$ para algún $[b] \in B/T(B)$, entonces $B/T(B) \in \underline{C}$ y como $B \in \underline{C}^l$, entonces $\phi(B) = \{[t]\}$ para algún $[t] \in B/T(B)$, es decir, $B/T(B) = \{[t]\}$. De aquí, $T(B) = B$ y así $B \in \underline{B}$. Por tanto $\underline{C}^l \subseteq \underline{B}$.

Para $\underline{C} = \underline{B}^r$:

Como $\underline{B} = \underline{C}^l$, en particular $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$, y de la Observación 36, se puede afirmar que $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$.

Luego, basta mostrar que $\underline{B}^r \subseteq \underline{C}$.

Sea $C \in \underline{B}^r$, se verá que $C \in \underline{C}$ y para esto se verá que $T(C) = \{c\}$ para algún $c \in C$.

Como T es un radical tal que $T(T(C)) = T(C)$, entonces $T(C) \in \underline{B}$. Considérese la función continua inclusión $\phi : T(C) \longrightarrow C$. Como $C \in \underline{B}^r$, entonces $T(C) = \phi(T(C)) = \{c\}$ para algún $c \in C$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) tambien es cierto en Top$\star$ y la prueba se hace de manera similar.

$(1) \Longrightarrow (3)$:

Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de Top tales que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$. Se verá que $\underline{C}$ es cerrada bajo imágenes homeomórficas, subespacios, extensiones y productos.

Para imágenes homeomórficas y subespacios:

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $\phi : M \longrightarrow C$ una función continua injectiva. Se verá que $M \in \underline{C}$, es decir, se verá que $M \in \underline{B}^r$.

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $f : B \longrightarrow M$ una función continua. Se verá que $f(B) = \{m\}$ para algún $\{m \in M\}$.

Luego $\phi \circ f : B \longrightarrow C$ es una función continua y como $C \in \underline{B}^r$, entonces

$\{c\} = (\phi \circ f)(B) = \phi(f(B))$ para algún $c \in C$.

De aquí $f(B) \subseteq \phi^{-1}(\{c\})$ para algún $c \in C$, y dado que ϕ es injectiva $\phi^{-1}(\{c\}) = \{m\}$ para un solo punto $m \in M$ tal que $\phi(m) = c$, luego $f(B) = \{m\}$ para algún $m \in M$.

Por tanto $M \in \underline{B}^r$.

En particular, como los homeomorfismos y las inclusiones de subespacios son funciones continuas injectivas, se puede concluir que $\underline{C}$ es cerrada bajo imágenes homeomórficas y subespacios.

Para extensiones:

Sea $M \in$ Top y sea C un subespacio de M tal que $C \in \underline{C}$ y $M/C \in \underline{C}$. Se verá que $M \in \underline{C}$, es decir, se verá que $M \in \underline{B}^r$.

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $f : B \longrightarrow M$ una función continua. Se verá que $f(B) = \{m\}$ para algún $m \in M$.

Considérese el cociente $q : M \longrightarrow M/C$.

Luego $q \circ f : B \longrightarrow M/C$ es una función continua, y como $M/C \in \underline{B}^r$, entonces

$\{[m]\} = (q \circ f)(B) = q(f(B))$ para algún $m \in M$, y así $f(B) \subseteq q^{-1}(\{[m]\})$.

Si $m \in C$ entonces $f(B) \subseteq q^{-1}(\{[m]\}) = C$ y como $C \in \underline{B}^r$, entonces la restricción de f a su imagen $\overline{f} : B \longrightarrow f(B)$ cumple que $f(B) = \overline{f}(B) = \{n\}$ para algún $n \in M$ tal que $[n] = [m]$.

Si $m \notin C$ entonces $f(B) \subseteq q^{-1}(\{[m]\}) = \{m\}$.

En cualquier caso $f(B) = \{m\}$ para algún $m \in M$.

Por lo tanto $M \in \underline{B}^r$.

Para productos:

Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones continuas tal que $C_i \in \underline{C}$ para cada $i \in I$. Se verá que $\prod_{i \in I} C_i \in \underline{C}$, es decir, se verá que $\prod\limits_{i \in I} C_i \in \underline{B}^r$.

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $\phi : B \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} C_i$ una función continua. Se verá que $\phi(B) = \{c_i\}_{i \in I}$ para alguna familia $\{c_i\}_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} C_i$.

Considérese las proyecciones canónicas $\pi_k : \prod\limits_{i \in I} C_i \longrightarrow C_k$, y defínase $f_k = \pi_k \circ \phi$.

$f_k : B \longrightarrow C_k$ es una familia de funciones continuas, de modo que por la Propiedad 26, existe una única función continua $f : B \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} C_i$ tal que $f_k = \pi_k \circ f$ y $f(b) = \{f_i(b)\}_{i \in I}$.

Por lo tanto $\phi = f$.

Como $C_i \in \underline{B}^r$ para cada $i \in I$, entonces para cada $i \in I$, se tiene que $f_i(B) = \{c_i\}$ para algún $c_i \in C_i$, luego $\phi(B) = f(B) \subseteq \prod\limits_{i \in I} f_i(B) = \{c_i\}_{i \in I}$, donde $c_i \in C_i$ para cada $i \in I$.

Por lo tanto $\prod\limits_{i \in I} C_i \in \underline{B}^r$.

(1) $\Longrightarrow$ (3) también es cierto en Top$\star$ y la prueba se hace de manera similar.

(1) $\Longrightarrow$ (2):

Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de Top tales que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$. Se verá que $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes de funciones continuas, extensiones y uniones de subespacios con un punto en común.

Para imágenes de funciones continuas:

Sea $B \in \underline{B}$ y sea $\phi : B \longrightarrow M$ una función continua, que se puede asumir sobreyectiva, donde $M \in$ Top. Se verá que $\phi(B) = M \in \underline{B}$, es decir, se verá que $M \in \underline{C}^l$.

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $f : M \longrightarrow C$ una función continua. Se verá que $f(M) = \{c\}$ para algún $c \in C$.

Como $f \circ \phi : B \longrightarrow C$ es una función continua, ϕ es sobreyectivo y $B \in \underline{C}^l$, entonces para algún $c \in C$, $\{c\} = (f \circ \phi)(B) = f(\phi(B)) = f(M)$. Por lo tanto $M \in \underline{C}^l$.

En particular, como los homeomorfismos y los cocientes son funciones continuas sobreyectivas, se puede concluir que $\underline{B}$ es cerrada tambien bajo imágenes homeomórficas y cocientes.

Para extensiones:

Sea $M \in$ Top y sea B un subespacio de M tal que $B \in \underline{B}$ y $M/B \in \underline{B}$. Se verá que $M \in \underline{B}$, es decir, se verá que $M \in \underline{C}^l$.

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $f : M \longrightarrow C$ una función continua. Se verá que $f(M) = \{c\}$ para algún $c \in C$.

Considérese el cociente $q : M \longrightarrow M/B$.

Como $\underline{C} = \underline{B}^r$, entonces $C \in \underline{B}^r$, y como $B \in \underline{B}$ y B es un subespacio de M, entonces $f(B) = \{c\}$ para algún $c \in C$, de modo que $B \subseteq f^{-1}(\{c\})$ para algún $c \in C$. Ahora, por el Lema 28, existe una función continua $\phi : M/B \longrightarrow C$ tal que $f = \phi \circ q$.

Como $M/B \in \underline{B}$ y $\underline{B} = \underline{C}^l$, entonces $M/B \in \underline{C}^l$ y como $\phi : M/B \longrightarrow C$, entonces $f(M) = (\phi \circ q)(M) = \phi(q(M)) = \phi(M/B) = \{d\}$ para algún $d \in C$ (De hecho $d = c$).

Para uniones de subespacios con un punto común:

Sea B en Top y sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios topológicos de B tal que $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \underline{B}$.

Sea $b \in B$ tal que $b \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Se verá que $\bigcup_{i\in I} B_i \in \underline{B}$, es decir, se verá que $\bigcup_{i\in I} B_i \in \underline{C}^l$.

Sea $C \in \underline{C}$ y sea $\phi : \bigcup_{i\in I} B_i \longrightarrow C$ una función continua, se verá que $\phi(\bigcup_{i\in I} B_i) = \{c\}$ para algún $c \in C$.

Considérese $f_i = \phi|_{B_i}$, es decir, $f_i : B_i \longrightarrow C$ es la restricción de ϕ a B_i.

La familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de funciones continuas y como $B_i \in \underline{B}$ para cada $i \in I$, entonces para cada $i \in I$ se tiene que $f_i(B_i) = \{c_i\}$ para algún $c_i \in C$.

Como $b \in \bigcap_{i\in I} B_i$, entonces para cada $i \in I$, se tiene que $c_i = f_i(b) = \phi(b) = c$ para algún $c \in C$. Como para cada $i \in I$ se tiene que $B_i \in \underline{B}$, $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $C \in \underline{C}$, entonces $f_i(B_i) = c$ para cada $i \in I$. Luego:

$$\begin{aligned} \phi(\bigcup_{i\in I} B_i) &= \bigcup_{i\in I} f_i(B_i) \\ &= \bigcup_{i\in I} \{c\} \\ &= \{c\} \end{aligned}$$

Por tanto $\bigcup_{i\in I} B_i \in \underline{B}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) también es cierto en Top$\star$ y la prueba se hace de manera similar.

$(2) \Longrightarrow (4)$:

Sea $\underline{B}$ una subclase de Top$\star$ cerrada bajo imágenes de funciones continuas, extensiones y uniones de subespacios. Sea, además $\underline{C} = \underline{B}^r$. Se verá que existe un radical T sobre Top$\star$ tal que $T(T((M,m))) = T((M,m))$ para cada $(M,m) \in$ Top$\star$ y que además $\underline{B} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (M,m)\}$ y $\underline{C} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (\{m\},m)\}$.

Sea $T((M,m))$ la unión de todos los subespacios de (M,m) que están en $\underline{B}$, es decir $T((M,m)) = (T(M),m)$, en donde $T(M) = \bigcup\{K \mid (K,m) \preceq (M,m) \wedge (K,m) \in \underline{B}\}$.

Por la definición de $T((M,m))$, se obtiene una función de objetos $T : \text{Top}\star \longrightarrow \text{Top}\star$.

Se verá que T es un radical.

1. $T((M,m)) \subseteq (M,m)$ pues $T((M,m))$ es un subespacio de (M,m).

2. Sea $f : (M,m) \longrightarrow (N,n)$ una función continua. Se verá que $f(T((M,m))) \subseteq T((N,n))$.

$$\begin{aligned}
f(T((M,m))) &= f((T(M),m)) \\
&= (f(T(M)),n) \\
&= (f(\bigcup\{K \mid (K,m) \preceq (M,m) \wedge (K,m) \in \underline{B}\}),n) \\
&= (\bigcup\{f(K) \mid (K,m) \preceq (M,m) \wedge (K,m) \in \underline{B}\},n) \\
&\subseteq (\bigcup\{f(K) \mid (f(K),n)) \preceq (N,n) \wedge (f(K),n) \in \underline{B}\},n) \\
&\subseteq (\bigcup\{H \mid (H,n) \preceq (N,n) \wedge (H,n) \in \underline{B}\},n) \\
&= (T(N),n) \\
&= T((N,n))
\end{aligned}$$

La contención

$\bigcup\{f(K) \mid (K,m) \preceq (M,m) \wedge (K,m) \in \underline{B}\}$

$\subseteq \bigcup\{f(K) \mid (f(K),n)) \preceq (N,n) \wedge (f(K),n) \in \underline{B}\}$ está justificada por el Lema 29.

3. $T((M,m)/T((M,m))) = (\{[m]\},[m])$ pues, por el Lema 30,

$$\begin{aligned} T((M,m)/T((M,m))) &= T((M/T(M)),[m]) \\ &= \left(\bigcup\{H \mid (H,[m]) \preceq (M/T(M),[m]) \wedge \ (H,[m]) \in \underline{B}\},[m] \ \right) \\ &= (\{[m]\},[m]) \end{aligned}$$

Ahora, se verá que T cumple que $T(T((M,m))) = T((M,m))$.

Se sabe que $T(T((M,m))) \subseteq T((M,m))$. Ahora, por la definición de $T(T((M,m)))$, dado que $T((M,m))$ es un subespacio de $T((M,m))$ y por el Lema 30, $T((M,m)) \in \underline{B}$, entonces $T((M,m)) \subseteq T(T((M,m)))$.

Por último, sea $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Se verá que $\underline{B} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (M,m)\}$ y $\underline{C} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (\{m\},m)\}$.

Para $\underline{B} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (M,m)\}$:

Sea $(M,m) \in \underline{B}$.

Como (M,m) es un subespacio de (M,m) tal que $(M,m) \in \underline{B}$, entonces, por la definición de $T((M,m))$, se tiene que $(M,m) \subseteq T((M,m))$, y se sabe que $T((M,m)) \subseteq (M,m)$, entonces $T((M,m)) = (M,m)$. Así $\underline{B} \subseteq \{(M,m) \mid T((M,m)) = (M,m)\}$.

Recíprocamente, sea $(M,m) \in \mathrm{Top}\star$ tal que $T((M,m)) = (M,m)$. Por el Lema 30 se tiene que $T((M,m)) \in \underline{B}$, entonces $(M,m) \in \underline{B}$. Así $\{(M,m) \mid T((M,m)) = (M,m)\} \subseteq \underline{B}$.

Por tanto $\underline{B} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (M,m)\}$.

Para $\underline{C} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (\{m\},m)\}$:

Sea $(M,m) \in \underline{C}$.

$T((M,m)) = \bigcup\{(K,m) \mid (K,m) \text{ es subespacio de } (M,m) \wedge (K,m) \in \underline{B}\}$.

Sea (K,m) un subespacio de (M,m) tal que $(K,m) \in \underline{B}$.

Considérese el homomorfismo inclusión $\phi : (K,m) \longrightarrow (M,m)$.

Como $(K,m) \in \underline{B}$, $(M,m) \in \underline{C}$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$, entonces $(K,m) = \phi((K,m)) = (\{m\},m)$,

de aquí $(K,m) = (\{m\},m)$.

Luego $T((M,m)) = (\{m\},m)$, y así $\underline{C} \subseteq \{(M,m) \mid T((M,m)) = (\{m\},m)\}$.

Recíprocamente, sea $(M,m) \in \text{Top}\star$ tal que $T((M,m)) = (\{m\},m)$, se verá que $(M,m) \in \underline{C}$,

es decir, se verá que $(M,m) \in \underline{B}^r$.

Sean $(N,n) \in \underline{B}$ y $\phi : (N,n) \longrightarrow (M,m)$ una función continua.

Como $(N,n) \in \underline{B}$ y T es un radical, $\phi((N,n)) = \phi(T((N,n))) \subseteq T((M,m)) = (\{m\},m)$.

De aquí $(M,m) \in \underline{B}^r$, es decir, $(M,m) \in \underline{C}$. Así $\{(M,m) \mid T((M,m)) = (\{m\},m)\} \subseteq \underline{C}$.

Por tanto $\underline{C} = \{(M,m) \mid T((M,m)) = (\{m\},m)\}$.

$\square$

Proposición 39. *Sean $\underline{C}$ una subclase de* Top$\star$ *cerrada bajo subespacios. Entonces existe una función de objetos* $T : \mathrm{Top}\star \longrightarrow \mathrm{Top}\star$ *tal que:*

1. $T((M,m)) \subseteq (M,m)$, *y*

2. $f : (M,m) \longrightarrow (N,n) \Longrightarrow f(T((M,m))) \subseteq T((N,n))$

para todos $(M,m),(N,n) \in \mathrm{Top}\star$ *y para toda función continua* $f \in [(M,m),(N,n)]$. *Además, si* $\underline{B} = \underline{C}^l$, *entonces:*

$\underline{C} \subseteq \{(M,m) \mid T((M,m)) = (\{m\},m)\}$ *y* $\{(M,m) \mid T((M,m)) = (M,m)\} \subseteq \underline{B}$.

Demostración:

Sea $T((M,m))$ la intersección de todos los subespacios (K,m) de (M,m) para los cuales existe una función continua y sobreyectiva $g : (M,m) \longrightarrow (C,c)$ con $(C,c) \in \underline{C}$ tal que $(K,m) = g^{-1}((\{c\},c))$, es decir $T((M,m)) = (T(M),m)$, en donde

$$T(M) = \bigcap\{K \mid (K,m) \preceq (M,m) \ \wedge \ (\exists g)(g : (M,m) \longrightarrow (C,c) \text{ continua y}$$
$$\text{sobreyectiva tal que}(C,c) \in \underline{C}) \wedge (K,m) = g^{-1}((\{c\},c))\}.$$

Por la definición de $T((M,m))$, se obtiene una función de objetos $T : \mathrm{Top}\star \longrightarrow \mathrm{Top}\star$.

1. $T((M,m)) \subseteq (M,m)$ pues la intersección de subespacios es un subespacio.

2. Sea $f : (M,m) \longrightarrow (N,n)$ una función continua. Se verá que $f(T((M,m))) \subseteq T((N,n))$.

   Sea $\underline{S} = \{(H,n) \mid (H,n) \preceq (N,n) \wedge \ (\exists g)(g : (N,n) \longrightarrow (Z,z)$ continua y
   sobreyectiva tal que $(Z,z) \in \underline{C}) \wedge (H,n) = g^{-1}((\{z\},z))\}$

$$
\begin{aligned}
T((N,n)) &= (T(N),n)\\
&= \left(\bigcap\{H \mid (H,n)\in \underline{S}\},n\right)\\
&\supseteq \Big(\bigcap\{f(K) \mid (K,m)\preceq (M,m)\ \wedge\ (\exists h)(h:(M,m)\longrightarrow (W,w) \text{ continua y}\\
&\qquad\qquad \text{sobreyectiva tal que } (W,w)\in \underline{C})\wedge (K,m)=h^{-1}((\{w\},w))\\
&\qquad\qquad \wedge\ (f(K),n)\preceq (H,n) \text{ para algún } (H,n)\in \underline{S}\},n\Big)\\
&\supseteq \Big(f(\bigcap\{K \mid (K,m)\preceq (M,m)\ \wedge\ (\exists h)(h:(M,m)\longrightarrow (W,w) \text{ continua y}\\
&\qquad\qquad \text{sobreyectiva tal que } (W,w)\in \underline{C})\wedge (K,m)=h^{-1}((\{w\},w))\\
&\qquad\qquad \wedge\ (f(K),n)\preceq (H,n) \text{ para algún } (H,n)\in \underline{S}\}),n\Big)\\
&\supseteq \Big(f(\bigcap\{K \mid (K,m)\preceq (M,m)\ \wedge\ (\exists h)(h:(M,m)\longrightarrow (W,w) \text{ continua y}\\
&\qquad\qquad \text{sobreyectiva tal que } (W,w)\in \underline{C})\wedge (K,m)=h^{-1}((\{w\},w))\}),n\Big)\\
&= (f(T(M)),n)\\
&= f((T(M),m))\\
&= f(T(M,m))
\end{aligned}
$$

El Lema 31 justifica la inclusión:

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigcap\{H \mid (H,n)\in \underline{S}\},n\right)\\
\supseteq\ &\Big(\bigcap\{f(K) \mid (K,m)\preceq (M,m)\ \wedge\ (\exists h)(h:(M,m)\longrightarrow (W,w) \text{ continua y}\\
&\qquad\qquad \text{sobreyectiva tal que } (W,w)\in \underline{C})\wedge (K,m)=h^{-1}((\{w\},w))\\
&\qquad\qquad \wedge\ (f(K),n)\preceq (H,n) \text{ para algún } (H,n)\in \underline{S}\},n\Big)
\end{aligned}
$$

Por último, sea $\underline{B} = \underline{C}^l$.

Se verá que $\underline{C} \subseteq \{(M, m) \mid T((M, m)) = (\{m\}, m)\}$ y $\{(M, m) \mid T((M, m)) = (M, m)\} \subseteq \underline{B}$.

Para $\underline{C} \subseteq \{(M, m) \mid T((M, m)) = (\{m\}, m)\}$:

Sea $(M, m) \in \underline{C}$.

Sea $q : (M, m) \longrightarrow (M, m)/(\{m\}, m)$ el cociente. En este caso q es un homeomorfismo.

Luego $(M, m) \simeq (M, m)/(\{m\}, m) = (M/\{m\}, [m])$ y como $(M, m) \in \underline{C}$ y $\underline{C}$ es cerrada bajo homeomorfismos entonces $(M/\{m\}, m) \in \underline{C}$.

Se tiene que $q : (M, m) \longrightarrow (M/\{m\}, [m])$ es una función continua sobreyectiva tal que $(M/\{m\}, [m]) \in \underline{C}$ y $(\{m\}, m) = q^{-1}((\{[m]\}, [m]))$, entonces

$$
\begin{aligned}
T((M, m)) &= (T(M), m) \\
&= \Big(\bigcap\{K \mid (K, m) \preceq (M, m) \ \wedge \ (\exists h)(h : (M, m) \longrightarrow (Z, z) \text{ continua y} \\
&\qquad \text{sobreyectiva tal que } (Z, z) \in \underline{C}) \wedge (K, m) = h^{-1}((\{z\}, z))\}, m\Big) \\
&= (\{m\}, m)
\end{aligned}
$$

Así $\underline{C} \subseteq \{(M, m) \mid T((M, m)) = (\{m\}, m)\}$.

Para $\{(M, m) \mid T((M, m)) = (M, m)\} \subseteq \underline{B}$:

Sea $(M, m) \in \mathrm{Top}\star$ tal que $T((M, m)) = (M, m)$. Veamos que $(M, m) \in \underline{B}$.

Sean $(C, c) \in \underline{C}$ y $\phi : (M, m) \longrightarrow (C, c)$ una función continua.

Como $\underline{C} \subseteq \{(M, m) \mid T((M, m)) = (\{m\}, m)\}$, entonces $T((C, c)) = (\{c\}, c)$, así $\phi((M, m)) = \phi(T((M, m))) \subseteq T((C, c)) = (\{c\}, c)$, de modo que $(M, m) \in \underline{C}^l$.

Así $\{(M, m) \mid T((M, m)) = (M, m)\} \subseteq \underline{B}$.

$\square$

Proposición 40. *Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ subclases de* Top$\star$ *tales que $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$. Entonces $T_{\underline{B}}((M,m)) = T_{\underline{C}}((M,m))$ para cada $(M,m) \in$* Top$\star$.

En donde $T_{\underline{B}}((M,m)) = (T_{\underline{B}}(M), m)$, y $T_{\underline{C}}((M,m)) = (T_{\underline{C}}(M), m)$, con

$T_{\underline{B}}(M) = \bigcup\{K \mid (K,m) \preceq (M,m) \wedge (K,m) \in \underline{B}\}$, y

$$T_{\underline{C}}(M) = \bigcap\{K \mid (K,m) \preceq (M,m) \;\wedge\; (\exists g)(g : (M,m) \longrightarrow (C,c) \textit{ continua y sobreyectiva tal que} (C,c) \in \underline{C}) \wedge (K,m) = g^{-1}((\{c\}, c))\}$$

Demostración:

Se verá que para cada $(M,m) \in$ Top$\star$ se cumple que $T_{\underline{B}}((M,m)) = T_{\underline{C}}((M,m))$.

Para $T_{\underline{B}}((M,m)) \subseteq T_{\underline{C}}((M,m))$:

Sea $(K,m) \preceq (M,m)$ tal que $(K,m) \in \underline{B}$.

Sea $f : (M,m) \longrightarrow (Z,z)$ una función continua sobreyectiva con $(Z,z) \in \underline{C}$.

Considérese $i : (K,m) \longrightarrow (M,m)$ la función inclusión, que es continua, y defínase $h = f \circ i$, así $h : (K,m) \longrightarrow (Z,z)$ es una función continua. Como $(K,m) \in \underline{B}$, $(Z,z) \in \underline{C}$ y $\underline{B} = \underline{C}^l$, entonces $(\{z\}, z) = h((K,m)) = (f \circ i)((K,m)) = f(i((K,m))) = f((K,m))$.

Luego, $(K,m) \subseteq f^{-1}((\{z\}, z))$.

De lo anterior, se tiene que $(K,m) \subseteq (H,m)$ para cada función continua sobreyectiva $f : (M,m) \longrightarrow (Z,z)$ con $(Z,z) \in \underline{C}$ tal que $(H,n) = f^{-1}((\{z\}, z))$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(K,m) &\subseteq (\bigcap\{H \mid (H,m) \preceq (M,m) \;\wedge\; (\exists f)(f : (M,m) \longrightarrow (Z,z) \text{ continua y} \\
&\qquad \text{sobreyectiva tal que } (Z,z) \in \underline{C}) \wedge (H,m) = f^{-1}((\{z\}, z))\}, m) \\
&= (T_{\underline{C}}(M), m) \\
&= T_{\underline{C}}((M,m))
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que $(K,m) \subseteq T_{\underline{C}}((M,m))$ para cada $(K,m) \preceq (M,m)$ tal que $(K,m) \in \underline{B}$, entonces:

$$\begin{aligned} T_{\underline{C}}((M,m)) &\supseteq (\bigcup\{K \mid (K,m) \preceq (M,m) \wedge (K,m) \in \underline{B}\}, m) \\ &= (T_{\underline{B}}(M), m) \\ &= T_{\underline{B}}((M,m)) \end{aligned}$$

Así que $T_{\underline{B}}((M,m)) \subseteq T_{\underline{C}}((M,m))$ para cada $(M,m) \in \mathrm{Top}\star$.

Para $T_{\underline{C}}((M,m)) \subseteq T_{\underline{B}}((M,m))$:

Por la Proposición 38, $T_{\underline{B}}$ es un radical, entonces $T_{\underline{B}}$ satisface que $T_{\underline{B}}((M,m)/T_{\underline{B}}((M,m))) = (\{[m]\},[m])$ para cada $(M,m) \in \mathrm{Top}\star$, de modo que $(M,m)/T_{\underline{B}}((M,m)) \in \underline{C}$.

Considérese el cociente $q : (M,m) \longrightarrow (M,m)/T_{\underline{B}}((M,m))$.

q es una función continua y sobreyectiva tal que $q^{-1}((\{[m]\},[m])) = T_{\underline{B}}((M,m))$, luego, por la definición de $T_{\underline{C}}((M,m))$, se obtiene que $T_{\underline{C}}((M,m)) \subseteq q^{-1}((\{[m]\},[m])) = T_{\underline{B}}((M,m))$.

Así $T_{\underline{C}}((M,m)) \subseteq T_{\underline{B}}((M,m))$ para cada $(M,m) \in \mathrm{Top}\star$.

Por tanto $T_{\underline{B}}((M,m)) = T_{\underline{C}}((M,m))$.

$\square$

2.4. Ejemplos

En esta sección se presentan algunos ejemplos de teorías de torsión y radicales en topología.

Ejemplo 41.

Sea $M \in$ Top y $T(M) = \bigcup\{K \mid K \preceq M \ \wedge \ K$ numerable$\}$, entonces T es una función de objetos tal que:

1. $T(M) \subseteq M$, y

2. $f : M \longrightarrow N \Longrightarrow f(T(M)) \subseteq T(N)$,

para todos $M, N \in$ Top y para toda función continua $f \in [M, N]$.

Verificación:

1. $T(M) \subseteq M$, es obvio.

2. Sea $f : M \longrightarrow N$ una función continua en Top. Se verá que $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

$$\begin{aligned} f(T(M)) &= f(\bigcup\{K \mid K \preceq M \ \wedge \ K \text{ numerable}\}) \\ &= \bigcup\{f(K) \mid K \preceq M \ \wedge \ K \text{ numerable}\} \\ &\subseteq \bigcup\{f(K) \mid f(K) \preceq N \ \wedge \ f(K) \text{ numerable}\} \\ &\subseteq \bigcup\{H \mid H \preceq N \ \wedge \ H \text{ numerable}\} \\ &= T(N) \end{aligned}$$

La contención $\bigcup\{f(K) \mid K \preceq M \wedge K$ numerable$\} \subseteq \bigcup\{f(K) \mid f(K) \preceq N \wedge f(K)$ numerable$\}$ es cierta. La razón es que si $K \preceq M$ y K es numerable, como $f : M \longrightarrow N$ es una función continua, entonces la restricción $\overline{f} = f|_K$, $\overline{f} : K \longrightarrow f(K)$ es una función continua sobreyectiva, y así $f(K) \preceq N$ y $f(K)$ es numerable.

Algunos conceptos clásicos utilizados por Castellini en [10] se presentan en la siguiente definición.

Definición 42. Sea X un espacio topológico. Se dice que:

1. X es **Conexo** si no existe un par U, V de abiertos de X, no vacios y disjuntos, tales que $X = U \cup V$.

2. X es **Totalmente Desconectado** si sus únicos subconjuntos conexos son los conjuntos que constan de un solo punto.

3. X es **Absolutamente Conectado** si no puede ser descompuesto en una familia disjunta L de subconjuntos cerrados no vacios, con $|L| > 1$.

4. X es **Discreto** si cada subconjunto de X es abierto.

5. X es **Indiscreto** si sus únicos subconjuntos abiertos son Φ y X.

6. X es $\mathbf{T}_0$ si para cada $\{x, y\} \subseteq X$, existe un abierto U_x que contiene a x pero no contiene a y ó existe un abierto U_y que contiene a y pero no contiene a x.

7. X es $\mathbf{T}_1$ si para cada $\{x, y\} \subseteq X$, existe un abierto U_x que contiene a x pero no contiene a y y existe un abierto U_y que contiene a y pero no contiene a x.

Se consideran las siguientes subclases de Top:

$Con = \{X \in \text{Top} \mid X \text{ es Conexo}\}$,

$TD = \{X \in \text{Top} \mid X \text{ es Totalmente Desconectado}\}$,

$Ind = \{X \in \text{Top} \mid X \text{ es Indiscreto}\}$,

$AC = \{X \in \text{Top} \mid X \text{ es Absolutamente Conectado}\}$,

$Top_0 = \{X \in \text{Top} \mid X \text{ es } \mathrm{T}_0\}$,

$Top_1 = \{X \in \text{Top} \mid X \text{ es } \mathrm{T}_1\}$

Ejemplo 43.

El par (Con, TD) es una teoría de torsión en Top, también en Top$\star$ y el radical asociado es $T((M, m_0)) =$ Componente conexo que contiene a m_0.

Verificación:

Veamos que se satisfacen las igualdades $Con = (TD)^l$ y $TD = (Con)^r$.

Veamos que $Con \subseteq (TD)^l$ y $TD \subseteq (Con)^r$:

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua en Top con $X \in Con$ y $Y \in TD$.

Como X es conexo y f es continua, entonces $f(X)$ es conexo. Como $f(x) \preceq Y$ y Y es totalmente desconectado, entonces $f(X) = \{y_0\}$ para algún $y_0 \in Y$. Luego $Con \subseteq (TD)^l$ y $TD \subseteq (Con)^r$.

Veamos que $(TD)^l \subseteq Con$:

Sea $X \in (TD)^l$, veamos que $X \in Con$.

Si X no es conexo, entonces existen abiertos disjuntos A y B no vacios, tales que $A \cap B = X$.

Es claro que A y B son cerrados.

Considérese la función $g : X \longrightarrow \{0,1\}$ definida por $g(A) = \{0\}$ y $g(B) = \{1\}$, y en donde a $\{0,1\}$ se le dota con la topología discreta, así $\{0,1\} \in TD$.

De esta manera, g es una función continua que no es constante, y esto es una contradicción pues $X \in (TD)^l$. Por lo tanto $X \in Con$.

Veamos que $(Con)^r \subseteq TD$:

Sea $Y \in (Con)^r$, veamos que $Y \in TD$.

Sea $C \preceq Y$ tal que C es conexo. Considérese la inclusión $i : C \longrightarrow Y$. i es una función continua, y como $Y \in (Con)^r$, entonces i es una función constante. Así, $i(C) = C = \{y_0\}$ para algún $y_0 \in Y$.

Luego, cada subconjunto conexo de Y necesariamente es un conjunto con un solo punto. Por lo tanto $Y \in TD$.

Se concluye que el par (Con, TD) es una teoría de torsión en Top.

De la misma manera se puede verificar que es una teoría de torsión en Top$\star$.

Si de define $T(M, m_0) = (\bigcup\{K \mid (K, m_0) \preceq (M, m_0) \ \wedge \ K \in Con\}, m_0)$, entonces por la Proposición 38, T es un radical en Top$\star$ y es el radical asociado al par (Con, TD).

Se sabe que la unión de conexos con un punto común es conexo, así que podemos describir a T como $T((M, m_0))$ = Componente conexo que contiene a m_0.

Los siguientes dos ejemplos se pueden verificar siguiendo un razonamiento similar.

Ejemplo 44.

El par (Ind, Top_0) es una teoría de torsión Top, también en Top$\star$ y el radical asociado es

$T((M, m_0)) =$ Subespacio indiscreto más grande que contiene a m_0.

Ejemplo 45.

El par (AC, Top_1) es una teoría de torsión Top y también en Top$\star$.

Capítulo 3

Conclusiones y Problemas Abiertos

En el desarrollo de esta investigación se lograron los siguientes objetivos.

1. Se definieron los conceptos de teoría de torsión y radical en Topología.

2. Se establecieron tres proposiciones que relacionan los conceptos de teoría de torsión y radical, en Topología. Las Proposiciones 38, 39 y 40.

   En Top la Proposición 38 quiere decir que:

   a) Si $(\underline{B}, \underline{C})$ es una teoría de torsión, entonces necesariamente las clases $\underline{B}$ y $\underline{C}$ cumplen que $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes de funciones continuas, extensiones y uniones de subespacios con un punto en común; y $\underline{C}$ es cerrada bajo imágenes homeomórficas, subespacios, extensiones y productos.

   b) Si T es un radical idempotente, entonces las clases $\underline{B}$ y $\underline{C}$ obtenidas por $\underline{B} = \{M \mid T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M \mid T(M) = \{m\}$ para algún $m \in M\}$ definen la teoría de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$.

Sin embargo, no se pudo definir de manera explícita un radical a partir de las subclases $\underline{B}$ y $\underline{C}$. Esto constituye uno de los problemas abiertos.

En Top$\star$ la Proposición 38 quiere decir que:

c) Los literales *a*) y *b*) también son ciertos en Top$\star$.

d) Si $\underline{B}$ es una clase cerrada bajo imágenes continuas, extensiones y uniones de subespacios, entonces existe un radical $T_{\underline{B}}$ idempotente asociado a la clase $\underline{B}$ tal que si se define $\underline{C} = \underline{B}^r$, el par $(\underline{B}, \underline{C})$ es una teoría de torsión y $T_{\underline{B}}$ es el radical asociado.

En Top$\star$ la Proposición 39 quiere decir que:

e) Si $\underline{C}$ es una clase cerrada bajo subespacios, entonces existe una función de objetos $T_{\underline{C}}$ asociada a la clase $\underline{C}$ tal que si se define $\underline{B} = \underline{C}^l$, entonces se cumple que: $\{(M, m) \mid T((M, m)) = (M, m)\} \subseteq \underline{B}$ y $\underline{C} \subseteq \{(M, m) \mid T((M, m)) = (\{m\}, m)\}$. Aún añadiendo a $\underline{C}$ todas las propiedades como en la Proposición 38 (3.) no se sabe si $(\underline{B}, \underline{C})$ es una teoría de torsión, ni que $T_{\underline{C}}$ es un radical. Esto constituye el otro de los problemas abiertos.

En Top$\star$ la Proposición 40 quiere decir que:

f) Si $(\underline{B}, \underline{C})$ es una teoría de torsión, entonces la función de objetos $T_{\underline{C}}$ resulta ser igual al radical $T_{\underline{B}}$, es decir, $T_{\underline{C}}$ es un radical idempotente.

Bibliografía

[1] J. Lambek. *Completions of Categories, Lecture Notes in Mathematics, 24*. Springer Verlag, Heidelberg, 1966.

[2] S.C. Dickson. A torsion theory for abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 21:223–235, 1966.

[3] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique, fasc. 27, Algèbre Commutative, Chapters 1, 2*. Paris, 1961.

[4] P. Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90:323–448, 1962.

[5] J.M. Maranda. Injective structures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110:98–135, 1964.

[6] O. Goldman. Rings and modules of quotients. *J. Alg.*, 13:10–47, 1969.

[7] K.L. Chew. *Closure Operations in the Study of Rings of Quotients, Bull. Math. Soc., Nanyang University*. 1965.

[8] J. Lambek G.D. Findlay. A generalized ring of quotients i, ii. *Can. Math. Bull*, 1:77–85, 155–167, 1958.

[9] J. Lambek. *Torsion Theories, Additive Semantics and Rings of Quotients, Lecture Notes in Mathematics, 177*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[10] G. Castellini. *Categorical Closure Operators, Mathematics: Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston, 2003.