

ALGEBRAS DE COLOMBEU Y ONDAS DE CHOQUE

Por:

Juan Carlos Orozco García

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

MAESTRIA EN CIENCIAS

En

Matemáticas Aplicadas

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

Departamento de Matemáticas

Junio, 2008

Aprobado por:

Dr. Krzysztof Rózga
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Dr. Héctor Salas
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Dr. Lev Steinberg
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Dr. Félix Fernández
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Dr. Julio C. Quintana
Director del Departamento de Ciencias Matemáticas

Fecha

ABSTRACT

In this work we give a brief introduction to the algebra of Colombeau " G ", in which the product of distributions is defined, and we show some important relations in this algebra, such as the association " \approx ". We consider a problem of Riemann for a system of Partial Differential Equations (P.D.E's) that describes a linear elastic body with a constant density. The unknown functions are the velocity and the stress. Next we use some numerical schemes to find a numerical solution for this system. Since the system is nonconservative, we rewrite it in conservative form, and for that system find the explicit form of the weak solutions.

The numerical results suggest that the solutions can be considered as a superposition of two traveling waves that are represented by discontinuous functions. Since the system of P.D.E's has nonlinear terms which induce distribution products, we use the association in " G " to give a meaning to the above mentioned terms. In this way, following the ideas of Colombeau, we find the explicit form of the solutions in " G ", which are not in the literature we have reviewed.

RESUMEN

En este trabajo damos una breve introducción al álgebra de Colombeau " G ", en la cual tiene sentido el producto de distribuciones y mostramos algunas relaciones importantes de esta álgebra tal como la asociación " \approx ". Consideramos un problema de Riemann para un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (E.D.P) que describe un cuerpo lineal elástico, en el cual la densidad es tomada constante. Las funciones desconocidas son la velocidad y el esfuerzo. Después utilizamos algunos esquemas numéricos para encontrar una solución numérica a este sistema. Dado que el sistema es no-conservativo, lo escribimos en forma conservativa y para este sistema encontramos la forma explícita de las soluciones débiles.

Los resultados numéricos sugieren que las soluciones pueden ser consideradas como una superposición de dos ondas viajeras que representamos por medio de funciones discontinuas. Dado que el sistema de E.D.P tiene términos no lineales, los cuales inducen productos de distribuciones, entonces usamos la asociación en " G " para dar un significado a dichos términos. Así, siguiendo las ideas de Colombeau, hallamos la forma explícita de estas soluciones en " G ", las cuales no se encuentran en la literatura revisada.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco todo el apoyo, paciencia y colaboración brindada por el

Dr. Krzysztof Rózga.

Agradezco a los profesores:

**Dr. Lev Steinberg, Dr. Héctor Salas, Dr. Félix Fernández
miembros del comité que leyeron el trabajo e hicieron sugerencias valiosas.**

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ABSTRACT | II |
| 1 INTRODUCCIÓN | 8 |
| 1.2 LITERATURA REVISADA..... | 11 |
| 1.3 DEFINICIONES BÁSICAS..... | 11 |
| 2 ALGEBRAS DE COLOMBEAU | 15 |
| 2.1 CONSTRUCCIÓN DEL ÁLGEBRA DE COLOMBEAU..... | 15 |
| 2.2 RELACIÓN DE ASOCIACIÓN..... | 20 |
| 2.3 EJEMPLOS DE DISTRIBUCIONES ASOCIADAS | 21 |
| 2.4 ALGEBRA DE COLOMBEAU SIMPLIFICADA | 32 |
| 3 UN SISTEMA DE ECUACIONES PARA UN CUERPO ELASTICO UNIDIMENSIONAL Y SUS SOLUCIONES NUMERICAS | 37 |
| 3.1 EL SISTEMA DE ECUACIONES | 38 |
| 3.2 EL ESQUEMA NUMÉRICO | 40 |
| 3.3 ESTABILIDAD DEL ESQUEMA NUMÉRICO | 42 |
| 3.4 SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL PROBLEMA DE RIEMANN | 50 |
| 3.5 ESQUEMA NUMÉRICO MODIFICADO..... | 56 |
| 3.6 ESQUEMA NUMÉRICO ALTERNATIVO..... | 62 |
| 4 EL SISTEMA EN LA FORMA CONSERVATIVA Y SOLUCION DEBIL DEL PROBLEMA DE RIEMANN | 64 |
| 4.1 TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA EN LA FORMA CONSERVATIVA | 64 |
| 4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE RIEMANN | 65 |
| 5 SOLUCIONES EN EL ALGEBRA DE COLOMBEAU | 73 |
| 5.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... | 73 |
| 5.2 CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES..... | 74 |
| 5.3 FORMA EXPLÍCITA DE LAS SOLUCIONES | 78 |
| 5.4 COMPARACIÓN DE LAS SOLUCIONES EN EL ÁLGEBRA DE COLOMBEAU CON LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS | 81 |
| 5.5 DISCUSIÓN | 86 |
| 6 CONCLUSIONES | 88 |
| 7 TRABAJO FUTURO | 89 |
| APENDICE A. | 92 |
| APENDICE B. | 94 |
| APENDICE C. | 96 |

TABLA DE FIGURAS

| | |
|------------------------------------------|----|
| Figura 3.4.1 Esquema C.C.R | 50 |
| Figura 3.4.2 Esquema C.C.R | 51 |
| Figura 3.4.3 Esquema C.C.R | 51 |
| Figura 3.4.4 Esquema C.C.R | 52 |
| Figura 3.4.5 Esquema C.C.R | 52 |
| Figura 3.4.6 Esquema C.C.R | 53 |
| Figura 3.4.7 Esquema C.C.R | 53 |
| Figura 3.4.8 Esquema C.C.R | 54 |
| Figura 3.4.9 Esquema C.C.R | 54 |
| Figura 3.4.10 Esquema C.C.R | 55 |
| Figura 3.5.11 Esquema C.C.R.M..... | 59 |
| Figura 3.5.12 Esquema C.C.R.M..... | 60 |
| Figura 3.5.13 Esquema C.C.R.M..... | 60 |
| Figura 3.5.14 Esquema C.C.R.M..... | 61 |
| Figura 3.5.15 Esquema C.C.R.M..... | 61 |
| Figura 3.6.16 Esquema C.R.N.P | 62 |
| Figura 3.6.17 Esquema C.R.N.P | 63 |
| Figura 4.2.18 Solución Débil | 69 |
| Figura 4.2.19 Solución Débil | 70 |
| Figura 4.2.20 Solución Débil | 70 |
| Figura 4.2.21 Solución Débil | 71 |
| Figura 4.2.22 Solución Débil | 71 |
| Figura 4.2.23 Solución Débil | 72 |
| Figura 5.4.24 Aspecto Macroscópico | 82 |
| Figura 5.4.25 Aspecto Macroscópico | 82 |
| Figura 5.4.26 Aspecto Macroscópico | 83 |
| Figura 5.4.27 Aspecto Macroscópico | 84 |
| Figura 5.4.28 Aspecto Macroscópico | 85 |
| Figura 5.4.29 Aspecto Macroscópico | 85 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|------------------------------------------------------------|----|
| Table 5.3.1 Forma Explícita de las Soluciones en "G" | 78 |
| Table 5.3.2 Forma Explícita de las Soluciones en "G" | 79 |
| Table 5.3.3 Forma Explícita de las Soluciones en "G" | 80 |

LISTA DE SIMBOLOS

| | |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $Supp(\varphi)$ | Soporte de una función φ sobre \mathbb{R} . |
| C^∞ | Espacio de las funciones infinitamente diferenciables sobre \mathbb{R} . |
| C_0^∞ | Espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto. |
| $D = C_0^\infty$ | Espacio de las funciones de prueba sobre \mathbb{R} . |
| T | Funcional lineal continua sobre D . |
| D' | Espacio de las distribuciones sobre \mathbb{R} . |
| ∂ | Operador diferenciación. |
| H, Y | Función ó distribución de Heaviside. |
| δ | Distribución delta de Dirac. |
| H' | Derivada de la Función de Heaviside. |
| $T * \varphi$ | Convolución de T con φ . |
| \mathbb{N}_0 | El conjunto de los números enteros no negativos. |
| \mathbb{Z} | El conjunto de los números enteros. |
| \mathbb{R} | El conjunto de los números reales. |
| E_M | Clase de todos los mapeos de crecimiento moderado. |
| N | Espacio nulo. |
| \approx | Asociación. |
| G | Algebra de Colombeau. |
| G_S | Algebra de Colombeau Simplificada. |
| $"."$ | Producto en G . |
| $S(\mathbb{R})$ | Espacio de Schwartz. |
| $u(x, t)$ | Velocidad. |
| $\sigma(x, t)$ | Esfuerzo. |
| $u_0(x)$ | Valor inicial para $u(x, t)$. |
| $\sigma_0(x)$ | Valor inicial para $\sigma(x, t)$. |
| u_t | Derivada parcial de $u(x, t)$ en la variable t . |
| u_x | Derivada parcial de $u(x, t)$ en la variable x . |
| $BV(\mathbb{R})$ | El conjunto de funciones de variación acotada sobre \mathbb{R} . |
| C.C.R | Esquema numérico de Colombeau, Cauret y Le Roux. |
| C.C.R.M | Esquema numérico C.C.R modificado. |
| C.N.P.R | Esquema numérico alternativo de Colombeau, Le Roux, A.Noussair y B.Perrot. |

1 INTRODUCCIÓN

En el año 1927 Dirac [13] colocó los fundamentos de la teoría cuántica, cuantificando el campo electromagnético clásico. Éxitos y fallas del quantum electromagnético fueron inmediatos. El éxito fue debido al hecho que la teoría condujo a resultados numéricos en acuerdo con los experimentos. Estos fueron obtenidos por el uso injustificado de aproximaciones e inmediatamente después de mejorar estas aproximaciones conducían a cantidades infinitas sin sentido. Puesto que la teoría fue hecha de cálculos sobre objetos matemáticos que no fueron rigurosamente definidos este hecho no nos puede sorprender; los objetos matemáticos que fueron tratados en estos cálculos fueron las funciones diferenciables sobre los reales y operadores real valuados, los cálculos utilizados fueron la diferenciación, la multiplicación e integración.

Veinte años más tarde con algunos procedimientos se lograron descubrir resultados finitos de estas cantidades infinitas que dieron un resultado numérico en perfecto acuerdo con los experimentos realizados.

Las bases de la teoría matemática de funciones generalizadas fueron puestas por el matemático ruso S.L. Sobolev en 1936 cuando aplicó sucesivamente funciones generalizadas al estudio del problema de Cauchy para sistemas hiperbólicos.

Después del éxito de la teoría de distribuciones de Schwartz, fue descubierto en los años 50 que los objetos matemáticos más simples de la teoría, los operadores de campo libre, no eran funciones sino distribuciones. Puesto que los cálculos clásicos comienzan con el producto de operadores libres de campo, la carencia de un producto general de distribuciones está en el origen de la teoría cuántica.

Estos conceptos proporcionan un sentido matemático riguroso a los cálculos clásicos de la física que son nuestra motivación.

En el análisis y la física matemática surgen frecuentemente dificultades relacionadas con la no diferenciabilidad de diversas funciones. Como es bien sabido los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales han sido de gran importancia para modelar el comportamiento de materiales elásticos.

Consideremos como en [2],[3] el siguiente sistema de E.D.P.

$$(*) \begin{cases} u_t + uu_x = \sigma_x \\ \sigma_t + u\sigma_x = u_x \end{cases}$$

Sujeto a condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ \sigma(x, 0) &= \sigma_0(x) \end{aligned}$$

donde $u_0(x), \sigma_0(x)$ son funciones discontinuas.

En los estudios de las ondas de choque [6] hay la necesidad de considerar las soluciones no diferenciables, que típicamente tienen la forma $\Delta\rho H(x-ct) + \rho_L$, donde $\Delta\rho$, c y ρ_L son ciertas constantes y H es la función de Heaviside. Como es bien sabido, estos problemas no lineales en elasticidad, tienen naturalmente forma no conservativa. Si las ecuaciones diferenciales tienen la forma conservativa, entonces existe un procedimiento estándar de dar sentido a tales soluciones. Sin embargo, en caso no conservativo uno tiene que bregar con expresiones de la forma $H\delta$, donde δ es la distribución Delta de Dirac. Tales expresiones no están definidas en la teoría de distribuciones de Schwartz, pero tienen un sentido en el álgebra de funciones generalizadas de Colombeau "G" [1], [4].

De hecho, J.F. Colombeau y A.Y.Le.Roux [3] son los primeros en plantear los problemas relacionados con el uso de dichas álgebras para los estudios de las ondas de choque.

En el **Capítulo II** presentamos conceptos básicos sobre el Álgebra de Colombeau " G ", dentro de la cual encontramos una nueva herramienta que nos permite dar sentido a términos no lineales que implican multiplicación de distribuciones, esto es la Asociación " \approx ".

En el **Capítulo III** mostraremos los esquemas numéricos desarrollados por J.F. Colombeau y A.Y.Le.Roux [3], J.J. Cauret [2] y H.A. Biagioni [4], para resolver (*).

También daremos una demostración del **Teorema de Estabilidad** más detallada que la mostrada en [4] para este esquema, cuando el valor inicial para u es $u_0(x) \geq 0$. Luego modificaremos el esquema para $u_0(x) \leq 0$. Este esquema obtenido no se encuentra en la literatura revisada. Finalmente mostraremos algunos resultados numéricos para u, σ en ambos casos.

En el **Capítulo IV** transformaremos el sistema de ecuaciones (*), el cual no es conservativo, a la forma conservativa; luego encontraremos las soluciones débiles de éste, la forma explícita de estas tampoco se encuentra en los trabajos que estudiamos; por último mostraremos algunas gráficas de estas soluciones en varios tiempos. Finalmente en el **Capítulo V**, resolvemos (*) en G . Para esto usamos los hechos discutidos en [10]. Esto nos permite encontrar la forma explícita de estas soluciones; cabe resaltar que esta forma explícita no se encuentra en la literatura revisada. Luego las compararemos con las soluciones numéricas y observamos que ellas son aspectos macroscópicos de las soluciones en G , en una de las tres clases posibles. Al final de este capítulo daremos una breve discusión de los resultados obtenidos.

Las soluciones numéricas en el **capítulo III**, se consiguen usando **Matlab**. Para obtener las soluciones explícitas en **IV** y **V** nos ayudamos con el programa **Mathematica**.

1.2 Literatura Revisada

Durante todo nuestro trabajo para álgebras de Colombeau, seguimos las definiciones básicas y la notación utilizada en M. Oberguggenberger, [1] y H.A. Biagioni, [4]. Para las definiciones mas simples, seguimos la notación usada en G. Shilov, [11], R. Kamwal, [12] y F. Tréves, [14].

1.3 Definiciones Básicas

Definición 1.3.1

Sea $\varphi(x)$ una función real definida sobre $-\infty < x < \infty$. El soporte de una función continua φ es definido como la clausura del conjunto que consiste de todos los puntos x tal que $\varphi(x) \neq 0$, y es denotado por $Supp(\varphi)$, [12].

Definición 1.3.2

Una función $\varphi(x)$ es llamada una función de prueba si:

- $\varphi(x)$ es infinitamente diferenciable; tales funciones son llamadas funciones C^∞ .
- $\varphi(x)$ tiene soporte compacto, [12].

Definición 1.3.3

El espacio D es definido como el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, dicho de otra forma es el espacio de las funciones de prueba, [12].

Definición 1.3.4

Un funcional lineal T sobre el espacio D es una operación por medio del cual asignamos a cualquier función de prueba φ un número real, denotado por $\langle T, \varphi \rangle$ y que cumple

$$\langle T, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \rangle = c_1\langle T, \varphi_1 \rangle + c_2\langle T, \varphi_2 \rangle \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ [12].}$$

Definición 1.3.5

Una sucesión de funciones de prueba $\{\varphi_m(x)\}_{m=1,2,\dots}$ converge a cero en D , si todas las funciones φ_m se desvanecen fuera de la misma región acotada y convergen uniformemente a cero junto con sus derivadas de cualquier orden.

Una sucesión de funciones de prueba $\{\varphi_m(x)\}_{m=1,2,\dots}$ converge a φ_0 , si $\varphi_m(x) - \varphi_0(x)$ converge a cero en D , [11].

Definición 1.3.6

Un funcional lineal T sobre D es continuo si la sucesión $\langle T, \varphi_m \rangle$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$, cuando la sucesión de funciones $\{\varphi_m\}$ converge a φ , [12].

Definición 1.3.7

Una función $f(x)$ es localmente integrable en \mathbb{R} , si $\int_{R_1} |f(x)| dx$ existe para cualquier región

acotada R_1 de \mathbb{R} . [12]

Definición 1.3.8

Un funcional lineal continuo sobre el espacio D , es llamado una distribución.

Las distribuciones más sencillas son las generadas por funciones localmente integrables. Una función localmente integrable f genera una distribución a través

$$\langle f, \varphi \rangle := \int f(x)\varphi(x)dx.$$

Estas reciben el nombre de distribuciones regulares y todas las otras se llaman distribuciones singulares. Dentro de las distribuciones singulares tenemos la distribución delta de Dirac " δ ", esto es:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

O sea que δ es el funcional que asigna a cada función de prueba φ el número $\varphi(0)$, [12].

Definición 1.3.9

El espacio D' se define como el espacio de todas las distribuciones, [12].

Definición 1.3.10

Sea ∂ el operador diferenciación y sea T una distribución. Definimos la derivada distribucional de T , ∂T por: $\langle \partial T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial \varphi \rangle$ donde $\partial \varphi = \varphi'$.

Las derivadas de orden superior las podemos definir, repitiendo este proceso.

De lo cual resulta: $\langle \partial^k T, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \partial^k \varphi \rangle$, [12].

Ejemplo 1.3.9.11

Muestre que $H' = \delta$, donde $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Sea $\varphi \in D$, Sabemos que

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= \langle \partial H, \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} H \varphi' dx = -\int_0^{\infty} \varphi' dx = \int_{-\infty}^0 \varphi' dx = \varphi(0) \quad \text{pues } \varphi \text{ es de soporte compacto} \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D, \text{ de donde concluimos que } H' = \delta. \end{aligned}$$

Definición 1.3.12

Sean $\varphi \in C^\infty$ y $T \in D'$ una distribución. Si al menos uno de los dos conjuntos $Supp(\varphi)$ ó $Supp(T)$ es compacto, entonces la función $x \rightarrow \langle T_y, \varphi(x-y) \rangle$ es una función C^∞ , llamada la convolución de φ con T ; y denotada por $\varphi * T$ o $T * \varphi$, es decir: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_y, \varphi(x-y) \rangle.$$

La notación T_y significa que la distribución T actua sobre la función $\varphi(x-y)$ que depende de la variable y . Cuando la distribución T es generada por una función localmente integrable f , [14] entonces:

$$\langle T_y, \varphi(x-y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(x-y) dy.$$

2 ALGEBRAS DE COLOMBEAU

2.1 Construcción del álgebra de Colombeau

Consideremos el conjunto A_q , definido para cada $q \in \mathbb{N}_0$ de la siguiente manera:

$$A_0 = \left\{ \Phi \in D : \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 1 \right\}$$

y para $q > 0$

$$A_q = \left\{ \Phi \in D : \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 1 \wedge \int_{-\infty}^{\infty} x^j \Phi(x) dx = 0, 1 \leq j \leq q \right\}.$$

Lema 2.1.1

Para cada $q \in \mathbb{N}_0$, $A_q \neq \emptyset$.

Demostración

Tomemos $\psi \in D$, que es par y que cumple la condición $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$. De esta manera tenemos

que $\psi \in A_1$, ya que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x) dx = 0$. Entonces $A_1 \neq \emptyset$.

Luego, dado tal ψ , definamos $\varphi = \psi + \lambda \psi''$ donde λ es un parámetro a determinar, y veamos

que $\varphi \in A_1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi + \lambda \psi'') dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi'' dx = 1 + \lambda \psi' \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Luego $\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x\psi + \lambda x\psi'') dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x\psi'' dx$ que después de integrar por partes

resulta en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi dx + \lambda [x\psi' \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi' dx] = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi' dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi dx = 0, \text{ es decir } \varphi \in A_1.$$

Ahora encontremos λ para el cual $\varphi \in A_2$, por lo cual basta probar que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi dx = 0$. Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi'' dx. \text{ Luego, integrando por partes tenemos que:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx + \lambda [x^2\psi' \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x\psi' dx] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx - 2\lambda [x\psi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi dx]$$

Por tanto $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi dx$. Entonces para que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi dx = 0$ necesitamos que

$$\lambda = (-1/2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx. \text{ Para este } \lambda, \varphi \in A_2, \text{ lo que demuestra que } A_2 \neq \emptyset.$$

De hecho, porque para ψ par, ψ'' también es par, se obtiene que $\varphi \in A_3$; es decir $A_3 \neq \emptyset$.

Inclusive si redefinimos $\varphi = \psi + \lambda_1\psi'' + \lambda_2\psi^{(4)}$ y si tomamos $\lambda_2 = (-1/4!) \int_{-\infty}^{\infty} x^4\psi dx$ entonces

obtenemos que $\varphi \in A_4$. De esta manera se forma una cadena infinita descendente de conjuntos

no vacíos así:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_q. \square$$

Uno puede demostrar que $\bigcap_0^{\infty} A_q = \emptyset$.

Ahora pasemos a construir el álgebra de Colombeau sobre \mathbb{R} , la cual denotaremos por G . Para ello definamos $E = (C^\infty(\mathbb{R}))^{A_0(\mathbb{R})}$, que es la clase de todos los mapeos $u : A_0 \rightarrow C^\infty$.

Sobre E introducimos la estructura de un álgebra diferencial. Sean $u, v \in E$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces definimos operaciones pertinentes y la derivación ∂ así:

$$(u + v)(\varphi) = u(\varphi) + v(\varphi)$$

$$(cu)(\varphi) = cu(\varphi)$$

$$(uv)(\varphi) = u(\varphi)v(\varphi)$$

$$(\partial u)(\varphi) = \partial(u(\varphi)), \text{ para cada } \varphi \in A_0.$$

E es un álgebra diferencial sobre \mathbb{R} , en el sentido que:

- La derivación ∂ es un operador lineal es decir $\forall u, v \in E$ y $\forall r, s \in \mathbb{R}$,

$$\partial(ru + sv) = r\partial u + s\partial v$$

- Cumple la regla de Leibniz para el producto en E :

$$\partial(uv) = u(\partial v) + (\partial u)v. \quad \mathbf{2.1.2}$$

Veamos solamente que en E se cumple la regla de Leibniz.

$$(\partial(uv))(\varphi) = \partial((uv)(\varphi)) = u(\varphi)\partial(v(\varphi)) + \partial(u(\varphi))v(\varphi) = (u\partial(v))(\varphi) + (\partial(u)v)(\varphi) \text{ de donde}$$

$$(\partial(uv))(\varphi) = (u\partial(v))(\varphi) + (\partial(u)v)(\varphi) = (u\partial(v) + \partial(u)v)(\varphi). \text{ Por tanto cumple } \mathbf{(2.1.2)}.$$

Además tenemos un mapeo lineal inyectivo $\ell : D' \rightarrow E$ talque para cada $w \in D'$ se tiene que

$$\ell(w) : A_0 \ni \varphi \mapsto w * \varphi. \quad \mathbf{2.1.3}$$

Veamos que ℓ es inyectivo. En efecto, sea $w_1, w_2 \in D'$ con $\ell(w_1) = \ell(w_2)$.

Entonces por definición tenemos que $w_1 * \varphi = w_2 * \varphi$, y como para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\varphi \in A_0 \Leftrightarrow \varphi_\varepsilon \in A_0, \text{ donde } \varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ por tanto } w_1 * \varphi_\varepsilon = w_2 * \varphi_\varepsilon.$$

Ahora para cada $\psi \in D$, tenemos $\langle w_1 * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \langle w_2 * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle$. Luego pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tenemos de [1] que $\langle w_1, \psi \rangle = \langle w_2, \psi \rangle$ para cualquier $\psi \in D$. Entonces concluimos $w_1 = w_2$ y así ℓ es inyectiva. \square

Ahora introducimos el espacio nulo N , el cual consiste de todos los mapeos $u \in E$ que tienen la siguiente propiedad:

Para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $q \geq N$ y para todo $\varphi \in A_q$, existen constantes positivas $c > 0$, $\eta > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in (0, \eta)$

$$\sup_{x \in K} \left| \partial^\alpha u(\varphi_\varepsilon, x) \right| \leq c \varepsilon^{q-N} \quad \mathbf{2.1.4}$$

donde se utiliza la notación $u(\varphi, x) = u(\varphi)(x)$. También notemos que los elementos de N tienden a cero más rápido que cualquier potencia de ε , cuando q es lo suficientemente grande.

N es una subálgebra cerrada bajo diferenciación, pero no es un ideal en E , desde que E contiene elementos de crecimiento arbitrario cuando ε tiende a cero. Por ejemplo, si para cada

$$\varphi \in A_0, u(\varphi) = e^\varphi \text{ y } \varphi(0) = 1 \text{ entonces}$$

$$u(\varphi_\varepsilon, 0) = e^{\varphi_\varepsilon(0)} = e^{(1/\varepsilon)\varphi(0)} = e^{(1/\varepsilon)} \rightarrow \infty \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Por tal razón debemos excluir este tipo de crecimiento. Para ello definamos el conjunto E_M , de todos los mapeos de crecimiento moderado, es decir de todos los mapeos $u \in E$ tal que para todo

subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $\varphi \in A_N$ se tiene que existen constantes positivas $c > 0$ y $\eta > 0$ talque $\forall \varepsilon \in (0, \eta)$,

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(\varphi_\varepsilon, x)| \leq c\varepsilon^{-N}. \quad \mathbf{2.1.5}$$

Estos elementos de E son llamados moderados. Ellos constituyen un álgebra diferencial y N es un ideal en E_M .

Finalmente, nosotros definimos $G = \frac{E_M}{N}$. En otras palabras G es el conjunto de todas las clases de equivalencia de todos los mapeos $u \in E_M$ módulo N . Por tanto si $U \in G$ entonces:

$$U = [u] = u + N$$

donde $u \in E_M$.

Además las operaciones en G tales como diferenciación, adición y multiplicación están definidas mediante los representantes en E_M . En particular para $U, V \in G$:

$$U \cdot V = [u] \cdot [v] = [uv].$$

El espacio D' es considerado como un subespacio de G , pues cualquier distribución w sobre \mathbb{R} es considerada como la clase del mapeo moderado $\ell(w)(\varphi) = w * \varphi$ y ℓ es inyectiva.

De esta manera escribimos que $D' \subseteq G$.

Es de notar que el álgebra C^∞ de todas las funciones infinitamente diferenciales sobre \mathbb{R} , es una subálgebra de G , pues cualquier $f \in C^\infty$ es considerada como la clase del mapeo constante, $u_f : A_0 \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ talque $u_f(\varphi, x) = f(x)$. También podemos aplicar a f el mapeo ℓ , **[1]** pero $u_f - \ell(f) \in N$ entonces $[u_f] = [\ell(f)]$. Recordemos que en teoría de distribuciones no se

define el producto de ellas. Ahora dado que $D' \subseteq G$ entonces en G si podemos multiplicar distribuciones arbitrarias. Luego como G es un álgebra diferencial que contiene a las distribuciones, entonces G es también invariante bajo la superposición de funciones suaves polinomialmente acotadas, es decir si $[u_1], [u_2], [u_3], \dots, [u_m]$ son miembros de G y $F \in O_M(\mathbb{R}^m)$, entonces se tiene

$$F([u_1], [u_2], \dots, [u_m]) = [F(u_1, u_2, \dots, u_m)].$$

Aquí $O_M(\mathbb{R}^m)$ consiste de todas las funciones suaves C^∞ , cuyas derivadas no crecen más rápido que polinomios de $|x|$.

Finalmente indicamos que si $w \in D'$ entonces $[\ell(w)]$, lo denotaremos por w mismo.

2.2 Relación de asociación

Definición 2.2.1

Un elemento $U \in G$ se dice que admite una distribución asociada $w \in D'$, si U tiene un representante $u \in E_M$ tal que:

para todo $\psi \in D$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\varphi \in A_N$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = \langle w, \psi \rangle .$$

Decimos que U_1 y U_2 son asociadas y escribimos, $U_1 \approx U_2$, si $U_1 - U_2 \approx 0$.

Sea T una distribución, decimos que una función generalizada $U \in G$, tiene a T como aspecto macroscópico si $U \approx T$.

A continuación daremos algunos ejemplos de elementos de G que admiten una distribución asociada.

2.3 Ejemplos de distribuciones asociadas

Ejemplo 2.3.1

Mostremos que $x \cdot \delta(x) \approx 0$, donde $\delta(x)$ es la distribución Delta de Dirac con soporte $\{0\}$.

Notemos que $x \cdot \delta(x) \neq x\delta(x)$. Según la teoría de distribuciones de Schwartz

$\langle x\delta(x), \psi \rangle = \langle \delta(x), x\psi \rangle = 0\psi(0) = 0$. Por tanto $x\delta(x) = 0$. Pero en $x \cdot \delta(x)$ el "." denota el producto en G .

Ahora sea $\varphi \in A_0$ y sea $\psi \in D$. Es claro que $x \cdot \delta(x) \in G$ y un representante de él es de la forma $u(\varphi, x) = x\varphi(x)$.

$$\text{Luego } u(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{x}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ y } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y) \psi(\varepsilon y) dy \right) = 0.$$

Por tanto $x \cdot \delta(x) \approx 0$.

Observación

Si U y V son elementos de G tal que $U \approx V$ entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$ y para todo $F \in C^\infty$,

tenemos que:

$$\partial^\alpha U \approx \partial^\alpha V$$

$$F \cdot U \approx F \cdot V$$

También la asociación " \approx " es preservada bajo la suma es decir si $U_1 \approx U_2$ y $V_1 \approx V_2$ entonces

$$U_1 + V_1 \approx U_2 + V_2.$$

Estas son todas las operaciones que son compatibles con la asociación. La asociación no puede ser preservada bajo la multiplicación de miembros generales de G .

Note que en G , $x \cdot \delta(x) \approx 0$ pero $x \cdot \delta^2(x)$ donde $\delta^2 = \delta \cdot \delta$ no está asociado a cero.

El concepto de asociación ofrece una generalización del concepto de igualdad de teoría de distribuciones. Desde la asociación damos la generalización del concepto de solución débil de ecuaciones diferenciales parciales.

A continuación daremos algunas asociaciones importantes.

Sea H la función de Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Dado que G es invariante bajo la superposición de funciones suaves polinomialmente acotadas, entonces $\sin(H)$ es un elemento de G .

Ejemplo 2.3.2

Probemos que en G , $\sin(H) \approx H$.

El representante u de $\sin(H)$ en E_M es:

$$u(\varphi, x) = \sin[(H * \varphi)(x)] \quad \text{y de esta manera } u(\varphi_\varepsilon, x) = \sin[(H * \varphi_\varepsilon)(x)].$$

$$\text{Por otro lado } (H * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(y) \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy.$$

Haciendo el cambio de variable y en $z = \frac{x-y}{\varepsilon}$ tenemos $(H * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz$ y así

$$u(\varphi_\varepsilon, x) = \sin\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz\right).$$

Sea $\psi \in D$. Luego $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz\right) \psi(x) dx$. Ahora notemos que la

función integrante está acotada por una función integrable, esto es así:

$$\left| \sin\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz\right) \psi(x) \right| \leq |\psi(x)| \text{ pues } \psi \text{ es integrable. Además la función integrante converge}$$

casi en toda parte a $\sin(1)H(x)\psi(x)$. Veamos que esto es así.

$$\text{Como } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin\left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz\right] \psi(x) = \begin{cases} \sin(1)\psi(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin\left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz\right] \psi(x) = \sin(1)H(x)\psi(x)$ casi en toda parte. Ahora considerando el

teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz\right) \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin\left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz\right] \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(1)H(x)\psi(x) dx = \langle \sin(1)H, \psi \rangle \end{aligned}$$

Por tanto $\sin(H) \approx \sin(1)H$.

Similarmente se demuestra que $\sin^n(H) \approx \sin^n(1)H$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.3.3

Sea F una función suave y acotada, entonces $F(\delta) \approx F(0)$.

En efecto un representante de $F(\delta)$ es $u(\varphi, x) = F((\delta * \varphi)(x)) = F(\varphi(x))$, sea $\psi \in D$ luego

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varphi_\varepsilon(x)) \psi(x) dx \quad \text{y dado que la función integrante converge casi}$$

en toda parte a $F(0)\psi(x)$, esto es:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \psi(x) = \begin{cases} F(0)\psi(x) & x > 0 \\ F(0)\psi(x) & x < 0 \end{cases} \quad \text{ya que } \varphi(x) \text{ es de soporte compacto.}$$

También notemos que la función integrante es mayorada por una función integrable, esto es:

$$\left| F\left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \psi(x) \right| \leq C |\psi(x)| \quad \text{pues } F \text{ es acotada y } \psi \text{ es integrable, donde } C \text{ es una constante}$$

que no depende de ε . Luego

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varphi_\varepsilon(x)) \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\varphi_\varepsilon(x)) \psi(x) dx \quad \text{por el teorema de Lebesgue} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(0) \psi(x) dx = \langle F(0), \psi \rangle \quad \text{, y así } F(\delta) \approx F(0). \end{aligned}$$

En particular como el $\sin x$ y el $\cos x$ son funciones suaves y acotadas entonces

$$\sin(\delta) \approx \sin(0) = 0 \quad \text{y} \quad \cos(\delta) \approx \cos(0) = 1.$$

Ejemplo 2.3.4

$\forall n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, $H^n \neq H$ en G , sin embargo $H^n \approx H$.

Para demostrar la primera parte razonemos por el absurdo.

Supongamos que $\exists n \geq 2$ tal que $H^n = H$, derivando a ambos lados, obtenemos

$$nH^{n-1}H' = H' . \quad 2.3.4.1$$

Luego multiplicando por H se tiene $nH^nH' = HH'$. Pero, como $H^n = H$ entonces concluimos que $nHH' = HH'$ de donde $(n-1)HH' = 0$, por tanto

$$HH' = 0 . \quad 2.3.4.2$$

Ahora (2.3.4.2) implica que $H^2H' = 0$ y $H^kH = 0 \quad \forall k \geq 1$.

Así de (2.3.4.1) concluimos que

$$H' = 0$$

lo cual es una contradicción, ya que $H' = \delta$.

Ahora veamos que $H^n \approx H$ en G .

Un representante de H^n es $u(\varphi, x) = (H * \varphi)^n(x)$ de donde $u(\varphi_\varepsilon, x) = (H * \varphi_\varepsilon)^n(x)$.

Sea $\psi \in D$. Luego encontremos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (H * \varphi_\varepsilon)^n \psi(x) dx$.

Notemos que la función integrante converge casi en toda parte a $H(x)\psi(x)$, esto es

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H * \varphi_\varepsilon)^n \psi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz \right)^n \psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

de donde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz \right)^n \psi(x) = H(x) \psi(x)$ casi en toda parte; y como la función integrante es mayorada por una función integrable, entonces considerando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (H * \varphi_\varepsilon)^n \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H * \varphi_\varepsilon)^n \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \varphi(z) dz \right)^n \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \psi(x) dx = \langle H, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Así demostramos que $H^n \approx H$ en G .

Comentario

Una característica importante del concepto de asociación es que abre más las posibilidades de modelar fenómenos físicos. Por ejemplo en la teoría de distribuciones hay un solo objeto en el cual se puede modelar la discontinuidad de una cantidad de un valor a otro, este se conoce como la función de Heaviside H .

También existe solo una representación del punto de masa, esta es la medida de Dirac δ . Esto está muy bien para problemas lineales, pero cuando trabajamos con problemas no lineales, no es agradable encontrar un producto de distribuciones $H \cdot \delta$, es aquí donde la asociación nos ofrece un remedio $H \cdot \delta \approx \frac{1}{2} \delta$, y en general

existe una gran variedad de elementos de G que son asociados con la función de Heaviside, pero no iguales a esta, ver [1], por ejemplo $H^n \approx H$.

Usaremos tales miembros para representar la discontinuidad de algunas cantidades físicas que permitan introducir propiedades no lineales deseadas.

A continuación mostraremos algunos resultados sobre la asociación, que serán de gran utilidad para desarrollar el trabajo.

Ejemplo 2.3.5

Sea H la función de Heaviside, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists K \in G$ tal que $K \approx H$,

$$HK' \approx \left(\frac{n}{n+1}\right)H' \quad \text{y} \quad H'K \approx \frac{1}{n+1}H'.$$

Demostración

Sea $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $H^{n+1} \approx H$, entonces derivando tenemos $(H^{n+1})' = (n+1)H^n H' \approx H'$,

lo cual podemos escribir así:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)(nH^{n-1}H')H \approx H'$$

$$(nH^{n-1}H')H \approx \left(\frac{n}{n+1}\right)H' \quad \text{esto es}$$

$$H(H^n)' \approx \left(\frac{n}{n+1}\right)H'.$$

Luego escojamos $K = H^n$ y así

$$HK' \approx \left(\frac{n}{n+1}\right)H'.$$

Es claro que $0 < \frac{n}{n+1} < 1$.

Además como $(n+1)H^n H' \approx H'$ entonces $H^n H' \approx \frac{1}{n+1}H'$ pero $K = H^n$ y por tanto

$$H'K \approx \frac{1}{n+1} H' . \square$$

Proposición 2.3.6

Sean H la función de Heaviside, $f \in O_M$ y $L = f(H)$. Entonces $L \approx f(1)H + (1-H)f(0)$.

Demostración

Sabemos que un representante de $L = f(H)$ es de la forma:

$$u(\varphi, x) = f((H * \varphi)(x)) = f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(y)\varphi(x-y)dy\right).$$

Luego $\forall \psi \in D$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x)\psi(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} H(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy\right)\psi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(x-z\varepsilon)\varphi(z)dz\right)\psi(x)dx . \end{aligned}$$

Pero la función integrante es acotada por una función integrable y además converge casi en toda parte a $f(H(x))\psi(x)$, ya que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(x-z\varepsilon)\varphi(z)dz\right)\psi(x) = f(H(x)) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz \psi(x) = f(H(x))\psi(x)$$

pues como $\varphi \in A_0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1$.

De otro lado $f(H(x)) = \begin{cases} f(1) & x > 0 \\ f(0) & x < 0 \end{cases}$, por tanto $f(H(x)) = f(1)H(x) + f(0)(1-H(x))$.

$$\text{Ahora, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x)\psi(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(x-z\varepsilon)\varphi(z)dz\right)\psi(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(x - z\varepsilon)\varphi(z)dz\right)\psi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(H(x))\psi(x)dx = \langle f(1)H + f(0)(1-H), \psi \rangle.
\end{aligned}$$

Luego de la definición de asociación se sigue que $L \approx f(1)H + (1-H)f(0)$. \square

Proposición 2.3.7

Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, existen $f, g \in O_M$ con las siguientes propiedades:

i. $f(1) = 1 = g(1)$ y $f(0) = 0 = g(0)$.

ii. $c = \int_0^1 f(w)g'(w)dw$.

iii. si $L = f(H)$ y $K = g(H)$ entonces $LK' \approx cH'$ y $KL' \approx (1-c)H'$. Más aun $(LK)' = H'$.

Demostración

Supongamos que $L = f(H)$ y $K = g(H)$.

Primero mostremos que $LK' \approx \left(\int_0^1 f(w)g'(w)\right)H'$. Sabemos que un representante de LK' es de

la forma $u(\varphi, x) = f((H * \varphi)(x))g'((H * \varphi)(x))\varphi(x)$ y por tanto,

$$u(\varphi_\varepsilon, x) = f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(x - \varepsilon z_1)\varphi(z_1)dz_1\right)g'\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(x - \varepsilon z_2)\varphi(z_2)dz_2\right)\frac{1}{\varepsilon}\varphi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Sea $\psi \in D$, luego haciendo un cambio de variable $v = \frac{x}{\varepsilon}$, resulta en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(\varepsilon(v-z_1)) \varphi(z_1) dz_1\right) g'\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(\varepsilon(v-z_2)) \varphi(z_2) dz_2\right) \varphi(v) \psi(\varepsilon v) dv$$

Pero sabemos que $H(\varepsilon(v-z_1)) = H(v-z_1)$ y $H(\varepsilon(v-z_2)) = H(v-z_2)$. Así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(v-z_1) \varphi(z_1) dz_1\right) g'\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(v-z_2) \varphi(z_2) dz_2\right) \varphi(v) \psi(\varepsilon v) dv$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(v-z_1) \varphi(z_1) dz_1\right) g'\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(v-z_2) \varphi(z_2) dz_2\right) \varphi(v) \psi(\varepsilon v) dv &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\int_{-\infty}^v \varphi(z_1) dz_1\right) g'\left(\int_{-\infty}^v \varphi(z_2) dz_2\right) \varphi(v) \psi(0) dv \\ &= \psi(0) \int_0^1 f(w) g'(w) dw = \left\langle \int_0^1 f(w) g'(w) dw \right\rangle H', \psi \end{aligned}$$

donde $w = \int_{-\infty}^v \varphi(z) dz$ y $dw = \varphi(v) dv$, puesto que $H' = \delta$.

Luego por la definición de asociación se sigue que

$$LK' \approx \left(\int_0^1 f(w) g'(w) dw \right) H'. \quad 2.3.7.1$$

De manera similar se demuestra que

$$KL' \approx \left(\int_0^1 f'(w) g(w) dw \right) H'. \quad 2.3.7.2$$

Tomemos $f(w) = \frac{\sin(aw)}{\sin(a)}$ $a \neq 0, \pm\pi, \dots$, y $g(w) = w$.

Así **(i)** se cumple de inmediato.

También notemos que

$$\int_0^1 f(w)g'(w)dw = \int_0^1 \frac{\sin(aw)}{\sin(a)}dw = \frac{1 - \cos(a)}{a \sin(a)} = a^{-1} \tan\left(\frac{a}{2}\right). \quad \mathbf{2.3.7.3}$$

Sea $c \in \mathbb{R}$, y asumamos que la función $\mu(a) = a^{-1} \tan\left(\frac{a}{2}\right)$ es restringida a $(\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi)$,

dado que $\lim_{a \rightarrow \pi^+} \mu(a) = -\infty$ y $\lim_{a \rightarrow 3\pi^-} \mu(a) = \infty$, y como $\mu(a)$ es continua en $(\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi)$,

entonces por una aplicación del teorema del valor intermedio, tenemos que para $c \neq 0$,

existe $a \in (\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi)$ talque $\mu(a) = c$. Usando esto en **(2.3.7.3)** obtenemos que **(ii)** se cumple.

Notemos también que

$$\int_0^1 f(w)g'(w)dw + \int_0^1 f(w)'g(w)dw = \int_0^1 [f(w)g(w)]'dw = f(w)g(w)\Big|_0^1 = 1$$

y por **(ii)** se sigue que

$$\int_0^1 f(w)'g(w)dw = 1 - \int_0^1 f(w)g'(w)dw = 1 - c. \quad \mathbf{2.3.7.4}$$

Ahora reemplazando **(ii)** en **(2.3.7.1)** y **(2.3.7.4)** en **(2.3.7.2)** obtenemos:

$LK' \approx cH'$ y $KL' \approx (1-c)H'$ respectivamente; así **(iii)** se cumple.

Ahora dado que la asociación se conserva bajo la suma, entonces

$LK' + KL' \approx cH' + (1-c)H' = H'$ y de aquí que $(KL)' \approx H'$.

El caso $c = 0$ debe tratarse separadamente, ver **[10]**. \square

Ejemplo 2.3.8

Consideremos $f(w) = w^n$, $g(w) = w$ con $L = f(H) = H^n$ y $K = g(H) = H$ luego de (2.3.7.1) en la demostración para la **Proposición 2.3.7**, tenemos que

$$LK' \approx \left(\int_0^1 w^n dw \right) H' = \frac{1}{n+1} H' \text{ y } KL' \approx \left(\int_0^1 n w^{n-1} w dw \right) H' = \frac{n}{n+1} H' .$$

Esto es consistente con el **Ejemplo 2.3.5**.

2.4 Algebra de Colombeau simplificada

Nosotros ahora definiremos un subespacio G_S de G , en el cual el subíndice S se entiende por simplificada. Consideremos el álgebra de todas las secuencias $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in (\mathbb{C}^\infty)^{(0,\infty)}$ y su subálgebra $E_{M,S}$ formada por todas las secuencias que cumplen con la siguiente propiedad:

Para todo subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0^+ .$$

Recordemos que la notación $f(z) = \mathcal{O}(\varphi(z))$ cuando $z \rightarrow z_0$ significa que existe una constante positiva $A > 0$ y una vecindad V de z_0 de modo que $|f(z)| \leq A|\varphi(z)|$ para $z \in V \setminus \{z_0\}$.

El ideal N_S de $E_{M,S}$ consiste de todas las secuencias tal que:

Para todo subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$ y para todo $q \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^q) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0^+ .$$

Ahora definimos $G_S = \frac{E_{M,S}}{N_S}$. Esta es un álgebra diferencial que tiene todas las propiedades

esenciales de G , excepto que no hay un mapeo canónico de D' en G_S .

La derivación en G_S es el operador lineal ∂ siguiente: si $G_S \ni U = [R]$, entonces

$$\partial U = [\partial R].$$

Sea E' el espacio de todas las distribuciones con soportes compactos. Entonces podemos construir un mapeo de E' en G_S de la siguiente manera. Sea $S(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las

funciones C^∞ que junto con sus derivadas decrecen cuando $|x| \rightarrow \infty$, más rápido que $\frac{1}{|x|^N}$ para

cada $N = 1, 2, 3, \dots$. Es obvio que las funciones de prueba están contenidas en $S(\mathbb{R})$. Pero es en

$S(\mathbb{R})$ y no en D , que existe ρ tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1 \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \rho(x) dx = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

Esto nos permite definir el mapeo $\iota : E' \rightarrow G_S$ así: $\iota(w) = (w * \rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ para cada $w \in E'$. Este

mapeo puede extenderse a D' , a través del mapeo $w \mapsto (w * (\chi \rho_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ donde χ es una función suave de soporte compacto idénticamente igual a uno en una vecindad de cero, [1].

También uno puede demostrar que G_S es una subálgebra de G . De hecho la inclusión de G_S en

G es dada por $[u] \rightarrow [\varphi \mapsto u_{\iota(\varphi)}]$ donde $\iota(\varphi) = \sup \{|x| : \varphi(x) \neq 0\}$.

A continuación daremos definiciones de algunas funciones generalizadas en G_S .

Definición 2.4.1

Decimos que $U_1, U_2 \in G_S$ son asociados, sí y solo sí, para cada $\psi \in D$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} [R_1(\varepsilon, x) - R_2(\varepsilon, x)]\psi(x)dx \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

donde $R_1 \in E_{M,S}$ es un representante de U_1 y $R_2 \in E_{M,S}$ es un representante de U_2 .

Definición 2.4.2

Sea T una distribución. Decimos que $U \in G_S$, tiene a T como aspecto macroscópico [4], si existe un representante $R \in E_{M,S}$ de G tal que para todo $\psi \in D$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} R(\varphi_\varepsilon, x)\psi(x)dx = \langle T, \psi \rangle$$

Definición 2.4.3

Una función generalizada H en G_S es llamada función generalizada de Heaviside, si H tiene un representante $R_H \in E_{M,S}$ para el cual existe $A(\varepsilon) > 0$ tal que $A(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y cumplen las siguientes condiciones:

1. $R_H(\varepsilon, x) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ y } \forall x < -A(\varepsilon).$

2. $R_H(\varepsilon, x) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ y } \forall x > A(\varepsilon).$

3. $\int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} |R_H(\varepsilon, x)|dx \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$

Proposición 2.4.4

Si H y K son dos funciones generalizadas de Heaviside, entonces $H \approx K$.

Demostración

Sea $\psi \in D$. Luego, como H y K son funciones generalizadas de Heaviside, entonces existen sus representantes $R_H, R_K \in G_{M,S}$, que cumplen (1)-(3) de la **Definición 2.4.3**.

Ahora probemos que $\int_{-\infty}^{\infty} [R_H(\varepsilon, x) - R_K(\varepsilon, x)]\psi(x)dx \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [R_H(\varepsilon, x) - R_K(\varepsilon, x)]\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} R_H(\varepsilon, x)\psi(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} R_K(\varepsilon, x)\psi(x)dx. \quad 2.4.4.1$$

De otro lado

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_H(\varepsilon, x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{-A(\varepsilon)} R_H(\varepsilon, x)\psi(x)dx + \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} R_H(\varepsilon, x)\psi(x)dx + \int_{A(\varepsilon)}^{\infty} R_H(\varepsilon, x)\psi(x)dx \quad 2.4.4.2$$

$$\text{y } \int_{-\infty}^{\infty} R_K(\varepsilon, x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{-A(\varepsilon)} R_K(\varepsilon, x)\psi(x)dx + \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} R_K(\varepsilon, x)\psi(x)dx + \int_{A(\varepsilon)}^{\infty} R_K(\varepsilon, x)\psi(x)dx. \quad 2.4.4.3$$

Entonces pasando al límite en (2.4.4.2) y (2.4.4.3) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_H(\varepsilon, x)\psi(x)dx \rightarrow \int_0^{\infty} \psi(x)dx = \langle H, \psi \rangle \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R_K(\varepsilon, x)\psi(x)dx \rightarrow \int_0^{\infty} \psi(x)dx = \langle H, \psi \rangle. \quad 2.4.4.4$$

Ahora de (2.4.4.4) y (2.4.4.1) obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [R_H(\varepsilon, x) - R_K(\varepsilon, x)]\psi(x)dx \rightarrow 0 \text{ para toda } \psi \in D, \text{ y de aquí que } H \approx K.$$

Definición 2.4.5

Una función generalizada δ en G_s es llamada función generalizada de Dirac si δ tiene un representante $R_\delta \in E_{M,S}$ para el cual existe $A(\varepsilon) > 0$ talque $A(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y cumplen las siguientes condiciones:

1. $R_\delta(\varepsilon, x) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |x| > A(\varepsilon).$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} R_\delta(\varepsilon, x) dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$
3. $\sup_{\varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |R_\delta(\varepsilon, x)| dx < \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0.$

3 UN SISTEMA DE ECUACIONES PARA UN CUERPO ELASTICO UNIDIMENSIONAL Y SUS SOLUCIONES NUMERICAS

Consideremos un medio elástico unidimensional ocupando el eje x , con densidad $\rho(x,t)$ y velocidad de flujo $u(x,t)$. La conservación de la masa en forma diferencial dice que la tasa de cambio de la densidad es igual a menos el gradiente del flujo ρu , esto es

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0.$$

La conservación del momentum dice que

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x = \sigma_x,$$

donde σ es el esfuerzo.

Para modelar la velocidad de las colisiones de metales, se utiliza adicionalmente la ley de Hook, y esto resulta en la ecuación

$$\sigma_t + u\sigma_x = k^2 u_x,$$

donde k es una constante de elasticidad que depende del medio.

Este sistema de elasticidad en una dimensión es usado frecuentemente por los ingenieros para simulación numérica de choques.

De las últimas dos ecuaciones, asumiendo que la densidad ρ es muy cerca de un valor constante ρ_0 , obtenemos el sistema simplificado de ecuaciones diferenciales parciales para u y σ , [4], [6], que discutimos a continuación.

3.1 El Sistema De Ecuaciones

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$u_t + uu_x = \frac{1}{\rho_0} \sigma_x \quad 3.1.1$$

$$\sigma_t + u\sigma_x = k^2 u_x \quad 3.1.2$$

para un cuerpo elástico unidimensional en el cual las variaciones de la densidad son despreciables.

Las incógnitas son: la velocidad $u(x,t)$ y el esfuerzo $\sigma(x,t)$, además ρ_0 denota la densidad; u_x y u_t denotan las derivadas parciales en las variables reales x y t .

Este sistema lo podemos escribir en la forma simplificada, esto es

$$u_t + uu_x = \sigma_x \quad 3.1.3$$

$$\sigma_t + u\sigma_x = u_x \quad 3.1.4$$

Para ello definamos: X, T, U y Σ por las siguientes ecuaciones

$$X = \frac{x}{\gamma} \quad \text{y} \quad T = \frac{t}{\delta} \quad 3.1.5$$

$$U(X, T) = \frac{1}{\alpha} u(x, t) \quad 3.1.6$$

$$\Sigma(X, T) = \frac{1}{\beta} \sigma(x, t) \quad 3.1.7$$

donde α, β, γ y δ son parámetros diferentes de cero a determinar.

Ahora notemos que $u(x,t) = \alpha U\left(\frac{x}{\gamma}, \frac{t}{\delta}\right)$, de donde $u_t = \frac{\alpha}{\delta} U_T$ y $u_x = \frac{\alpha}{\gamma} U_X$.

Similarmente como $\sigma(x,t) = \beta \Sigma\left(\frac{x}{\gamma}, \frac{t}{\delta}\right)$ entonces $\sigma_t = \frac{\beta}{\delta} \Sigma_T$ y $\sigma_x = \frac{\beta}{\gamma} \Sigma_X$.

Ahora remplazando esto en **(3.1.1)** tenemos:

$$U_T + \frac{\alpha\delta}{\gamma} U U_X = \frac{\delta\beta}{\alpha\rho_0\gamma} \Sigma_X. \quad \mathbf{3.1.8}$$

Similarmente de **(3.1.2)** se obtiene:

$$\Sigma_T + \frac{\alpha\delta}{\gamma} U \Sigma_X = \frac{k^2\alpha\delta}{\beta\gamma} U_X. \quad \mathbf{3.1.9}$$

El sistema **(3.1.8),(3.1.9)** va a tener la forma del sistema **(3.1.3),(3.1.4)** sí y solo sí

$\frac{\delta\alpha}{\gamma} = 1$, $\frac{\delta\beta}{\alpha\rho_0\gamma} = 1$ y $\frac{k^2\alpha\delta}{\beta\gamma} = 1$. Resolviendo estas tres condiciones para α, β, γ se obtiene

$$\beta = k^2 \quad \mathbf{3.1.10}$$

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{k^2}{\rho_0}} \quad \mathbf{3.1.11}$$

$$\gamma = \pm \delta \sqrt{\frac{k^2}{\rho_0}} \quad \mathbf{3.1.12}$$

donde δ es un parámetro.

Bajo estas condiciones el sistema puede escribirse en la forma simplificada.

$$U_T + U U_X = \Sigma_X \quad \mathbf{3.1.13}$$

$$\Sigma_T + U\Sigma_X = U_X \quad 3.1.14$$

3.2 El Esquema Numérico

Ahora consideremos el sistema (3.1.3)-(3.1.4) y supongamos que los valores iniciales para u, σ que denotamos por u_0, σ_0 están en el espacio $BV(\mathbb{R})$, de todas las funciones de variación acotada sobre \mathbb{R} . Sea $h > 0$ el paso en el espacio, y sea $\Delta t = rh$, con $r > 0$ fijo, el paso en el tiempo. Entonces denotamos por (u_i^n, σ_i^n) , con $i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$, la aproximación a (u, σ) en el punto (x_i, t_n) , donde $x_i = ih$ y $t_n = nrh$.

Asumimos que las cantidades u_i^0 y σ_i^0 son obtenidas como los valores promedios de los datos iniciales u_0 y σ_0 sobre cada malla $|x - x_i| < \frac{h}{2}$ o lo que es lo mismo, sobre cada $I_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$.

Esto es $u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{I_i} u_0(x, 0) dx$ y $\sigma_i^0 = \frac{1}{h} \int_{I_i} \sigma_0(x, 0) dx$. Por motivos de simplificar trabajo,

tomaremos el campo de velocidades como no negativo, esto es $u_0 \geq 0$.

Supongamos que las condiciones iniciales satisfacen la siguiente desigualdad: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\sigma_0(x)| \leq u_0(x) \quad 3.2.1$$

En práctica esta condición se cumple frecuentemente [2], y dado que $u_0(x)$ es acotada, entonces tiene sentido definir $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} (u_0(x) + |\sigma_0(x)|)$.

Para construir (u_i^n, σ_i^n) procedemos de la siguiente manera. Si (u_i^n, σ_i^n) es ya conocido entonces podemos encontrar $(u_i^{n+1}, \sigma_i^{n+1})$ por inducción así.

Definamos $w_i^n = \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2}$ 3.2.2

$$v_i^n = u_i^n - r w_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad 3.2.3$$

$$t_i^n = \sigma_i^n - r w_i^n (\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n) \quad 3.2.4$$

Entonces computamos

$$u_i^{n+1} = v_i^n + r \left(\frac{t_{i+1}^n - t_{i-1}^n}{2} \right) + r \left(\frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{2} \right) \quad 3.2.5$$

$$\sigma_i^{n+1} = t_i^n + r \left(\frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2} \right) + r \left(\frac{t_{i+1}^n - 2t_i^n + t_{i-1}^n}{2} \right) \quad 3.2.6$$

Las funciones $u_h(x)$ y $\sigma_h(x)$ las definimos iguales a u_i^n y σ_i^n respectivamente para $|x - x_i| < \frac{h}{2}$

y $|t - t_n| < \frac{rh}{2}$.

El esquema numérico (3.2.2)-(3.2.6) lo denotaremos por **C.C.R** en honor a sus autores Colombeau, Cauret y Roux.

3.3 Estabilidad Del Esquema Numérico

Teorema 3.3.1

Supongamos que las condiciones iniciales (u_0, σ_0) satisfacen que $u_0 \geq 0$ y $|\sigma_0(x)| \leq u_0(x)$ para

todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} (u_0(x) + |\sigma_0(x)|)$ y además sea $r > 0$ tal que

$$r \text{Max}\{M, 1\} \leq 1. \quad \text{3.3.2}$$

Entonces el esquema numérico (3.2.2)-(3.2.6) es estable para la norma L^∞ , para la variación total en el espacio y para la variación total en el tiempo, en el sentido Tonnelli-Cesarís, lo cual significa que existen constantes $A > 0$, $B > 0$ y $C > 0$ independientes de i , n y h tales que:

$$\begin{cases} 0 \leq u_i^n \leq A \\ |\sigma_i^n| \leq A \end{cases} \quad \text{Estabilidad para la norma } L^\infty.$$

$$\begin{cases} \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq B \\ \sum_i |\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n| \leq B \end{cases} \quad \text{Estabilidad para la variación total en el espacio.}$$

$$\begin{cases} \sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq C \\ \sum_i |\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n| \leq C \end{cases} \quad \text{Estabilidad para la variación total en el tiempo.}$$

Demostración

Para cada i , n definimos

$$R_i^n = \sigma_i^n + u_i^n \quad 3.3.3$$

$$Q_i^n = \sigma_i^n - u_i^n \quad 3.3.4$$

$$\rho_i^n = t_i^n + v_i^n \quad 3.3.5$$

$$\xi_i^n = t_i^n - v_i^n \quad 3.3.6$$

Ahora de (3.3.6) tenemos $t_i^n = v_i^n + \xi_i^n$ y de (3.3.4) $\sigma_i^n = Q_i^n + u_i^n$. Reemplazando esto en (3.2.4) obtenemos:

$$v_i^n + \xi_i^n = Q_i^n (1 - rw_i^n) + rw_i^n Q_{i-1}^n + [u_i^n - rw_i^n (u_i^n - u_{i-1}^n)] \text{ y de (3.2.3)}$$

$$\xi_i^n = Q_i^n (1 - rw_i^n) + rw_i^n Q_{i-1}^n. \quad 3.3.7$$

Luego (3.3.3) tenemos $u_i^n = R_i^n - \sigma_i^n$ y de (3.3.5) $v_i^n = \rho_i^n - t_i^n$. Reemplazando u_i^n y v_i^n en (3.2.3) resulta en:

$$\rho_i^n - t_i^n = R_i^n (1 - rw_i^n) + rw_i^n R_{i-1}^n - [\sigma_i^n - rw_i^n (\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n)] \text{ y de (3.2.4) obtenemos}$$

$$\rho_i^n = R_i^n (1 - rw_i^n) + rw_i^n R_{i-1}^n. \quad 3.3.8$$

Ahora reemplazando (3.2.5) y (3.2.6) en (3.3.3) obtenemos

$$R_i^{n+1} = t_i^n + v_i^n + \frac{r}{2} (t_{i+1}^n + v_{i+1}^n - t_{i-1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{r}{2} (t_{i+1}^n + v_{i+1}^n - 2(t_i^n + v_i^n) + t_{i-1}^n + v_{i-1}^n) \text{ que después de}$$

utilizar (3.3.5) resulta en:

$$R_i^{n+1} = \rho_i^n (1 - r) + r \rho_{i+1}^n \quad 3.3.9$$

Similarmente se prueba que

$$Q_i^{n+1} = \xi_i^n (1-r) + r\xi_{i-1}^n. \quad \mathbf{3.3.10}$$

Ahora por inducción sobre n , probemos que existe $K > 0$, tal que:

$$I. \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad |\sigma_i^n| \leq u_i^n$$

$$II. \quad \text{Max}_{i \in \mathbb{Z}} \{u_i^n + \sigma_i^n\} \leq M$$

$$III. \quad \text{Max}_{i \in \mathbb{Z}} \{u_i^n - \sigma_i^n\} \leq M$$

$$IV. \quad \sum_i |R_{i+1}^n - R_i^n| \leq K$$

$$V. \quad \sum_i |Q_{i+1}^n - Q_i^n| \leq K$$

Primero veamos que estas propiedades son ciertas para $n = 0$.

Demostremos I , utilizando la definición de σ_i^0 y (3.2.1), de las cuales obtenemos que

$$|\sigma_i^0| \leq \frac{1}{h} \int_{I_i} |\sigma_0(x, 0)| dx \leq \frac{1}{h} \int_{I_i} u_0(x, 0) dx = \frac{1}{h} \int_{I_i} u_0(x, 0) dx = u_i^0. \text{ Entonces } I \text{ es cierto para } n = 0.$$

Para II , notemos que

$$u_i^0 + \sigma_i^0 = \frac{1}{h} \int_{I_i} (u_0(x) + \sigma_0(x)) dx \leq \frac{1}{h} \int_{I_i} M dx = M, \text{ por tanto } u_i^0 + \sigma_i^0 \leq M \text{ y tomando el máximo}$$

sobre i tenemos $\text{Max}_{i \in \mathbb{Z}} \{u_i^0 + \sigma_i^0\} \leq M$. Así II se cumple para $n = 0$.

Similarmente se demuestra III , para $n = 0$.

Para IV , notemos que de (3.3.3) tenemos

$$|R_{i+1}^0 - R_i^0| \leq |\sigma_{i+1}^0 - \sigma_i^0| + |u_{i+1}^0 - u_i^0| \text{ por tanto } \sum_i |R_{i+1}^0 - R_i^0| \leq \sum_i |\sigma_{i+1}^0 - \sigma_i^0| + \sum_i |u_{i+1}^0 - u_i^0|.$$

Pero u_0 y σ_0 son de variación acotada. Entonces podemos asumir que $\sum_i |\sigma_{i+1}^0 - \sigma_i^0| \leq B$ y

$\sum_i |u_{i+1}^0 - u_i^0| \leq B$ para cierta constante $B > 0$. De esta manera obtenemos que

$$\sum_i |R_{i+1}^0 - R_i^0| \leq \sum_i |\sigma_{i+1}^0 - \sigma_i^0| + \sum_i |u_{i+1}^0 - u_i^0| \leq K \text{ donde } K = 2B.$$

Similarmente se obtiene que V es cierto para $n = 0$.

Ahora asumimos que estas propiedades se cumplen para $n \geq 0$ y veamos que se cumplen para $n+1$.

De I se sigue que $-\sigma_i^n \leq u_i^n$, de II y **(3.3.3)** $0 \leq u_i^n + \sigma_i^n = R_i^n \leq \mathop{\text{Max}}_{i \in \mathbb{Z}} \{u_i^n + \sigma_i^n\} \leq M$.

De aquí concluimos que

$$0 \leq R_i^n \leq M . \quad \mathbf{3.3.11}$$

Además de **(3.3.4)** se sigue que $-Q_i^n = u_i^n - \sigma_i^n$ y porque de I , $\sigma_i^n \leq u_i^n$ entonces $Q_i^n \leq 0$. Ahora usando la hipótesis de inducción tenemos de III , $u_i^n - \sigma_i^n \leq M$, $Q_i^n \geq -M$; y finalmente

$$-M \leq Q_i^n \leq 0 . \quad \mathbf{3.3.12}$$

Ahora de la expresión **(3.3.3)** y **(3.3.4)** obtenemos $u_i^n = \frac{R_i^n - Q_i^n}{2}$. Pero por hipótesis

$u_i^n \geq 0$ entonces de **(3.3.11)** y **(3.3.12)** tenemos

$$0 \leq u_i^n \leq M . \quad \mathbf{3.3.13}$$

Luego usando **(3.3.13)** obtenemos

$$0 \leq w_i^n \leq M . \quad \mathbf{3.3.14}$$

Ahora utilizando **(3.3.14)**, **(3.3.11)**, **(3.3.12)** y **(3.3.2)** en **(3.3.8)** podemos inferir

$$0 \leq \rho_i^n \leq M . \quad \mathbf{3.3.15}$$

De igual manera usando (3.3.7), (3.3.14), (3.3.12) y (3.3.2) tenemos:

$$0 \geq \xi_i^n \geq -M . \quad \mathbf{3.3.16}$$

Ahora de (3.3.9), (3.3.15) y (3.3.2) se sigue

$$0 \leq R_i^{n+1} \leq M . \quad \mathbf{3.3.17}$$

Similarmente de (3.3.10), (3.3.16) y (3.3.2) obtenemos

$$0 \geq Q_i^{n+1} \geq -M . \quad \mathbf{3.3.18}$$

Ahora ya estamos listos para demostrar que I se cumple para $n+1$.

Como $Q_i^n \leq 0$ y de (3.3.17) $0 \leq R_i^{n+1} \leq M$, entonces de la desigualdad triangular tenemos

$$\left| R_i^{n+1} + Q_i^{n+1} \right| \leq \left| R_i^{n+1} \right| + \left| Q_i^{n+1} \right| = R_i^{n+1} - Q_i^{n+1} \quad \text{por tanto} \quad \left| \frac{R_i^{n+1} + Q_i^{n+1}}{2} \right| \leq \frac{R_i^{n+1} - Q_i^{n+1}}{2} , \quad \text{que es}$$

equivalente por la definición de R_i^{n+1} y Q_i^{n+1} a:

$$\left| \sigma_i^{n+1} \right| \leq u_i^{n+1} . \quad \mathbf{3.3.19}$$

Entonces I se cumple para $n+1$, y por el principio de inducción matemática concluimos que

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \left| \sigma_i^n \right| \leq u_i^n .$$

Ahora veamos que II se cumple para $n+1$. Notemos que de (3.3.17)

$u_i^{n+1} + \sigma_i^{n+1} = R_i^{n+1} \leq M$, es decir $u_i^{n+1} + \sigma_i^{n+1} \leq M$, y tomando el máximo sobre todos los $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que $\text{Max}_{i \in \mathbb{Z}} \{u_i^{n+1} + \sigma_i^{n+1}\} \leq M$. Así *II* se cumple para $n+1$. Luego por inducción

concluimos que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\text{Max}_{i \in \mathbb{Z}} \{u_i^n + \sigma_i^n\} \leq M$.

Similarmente se demuestra *III*.

Ahora veamos que *IV* se cumple para $n+1$. Usando (3.3.9) tenemos que

$\sum_i |R_{i+1}^{n+1} - R_i^{n+1}| \leq \sum_i |\rho_{i+1}^n - \rho_i^n| (1-r) + r \sum_i |\rho_{i+1}^n - \rho_i^n|$ y porque $1-rk > 0$ concluimos

$$\sum_i |R_{i+1}^{n+1} - R_i^{n+1}| \leq \sum_i |\rho_{i+1}^n - \rho_i^n|. \quad 3.3.20$$

Similarmente de (3.3.8) obtenemos

$$\sum_i |\rho_{i+1}^n - \rho_i^n| \leq \sum_i |R_{i+1}^n - R_i^n| \leq K. \quad 3.3.21$$

Luego por transitividad entre (3.3.20) y (3.3.21) se sigue $\sum_i |R_{i+1}^{n+1} - R_i^{n+1}| \leq K$, de donde *IV* se

cumple para $n+1$, y así por inducción concluimos que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\sum_i |R_{i+1}^n - R_i^n| \leq K$.

Ahora veamos que *V* se cumple para $n+1$. De (3.3.10) se sigue

$$\sum_i |Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}| \leq \sum_i |\xi_{i+1}^n - \xi_i^n|. \quad 3.3.22$$

De otro lado por (3.3.7) tenemos

$$\sum_i |\xi_{i+1}^n - \xi_i^n| \leq \sum_i |Q_{i+1}^n - Q_i^n| \leq K. \quad 3.3.23$$

Luego por transitividad entre (3.3.22) y (3.3.23) concluimos que

$$\sum_i |Q_{i+1}^n - Q_i^n| \leq K. \quad 3.3.24$$

Ahora sumando y restando (3.3.3) y (3.3.4) tenemos $\sigma_i^n = \frac{R_i^n + Q_i^n}{2}$, entonces utilizando (3.3.11)

y (3.3.12) llegamos a la desigualdad

$$|\sigma_i^n| \leq \frac{M}{2}. \quad 3.3.25$$

Luego (3.3.13) y (3.3.25) garantizan la estabilidad para la norma L^∞ , donde $A = M$.

Ahora veamos la estabilidad para la variación total en el espacio. Recordando que $u_i^n = \frac{R_i^n - Q_i^n}{2}$,

y usando IV y V tenemos

$$\sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq K. \quad 3.3.26$$

De manera similar, recordando que $\sigma_i^n = \frac{R_i^n + Q_i^n}{2}$, obtenemos

$$\sum_i |\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n| \leq K. \quad 3.3.27$$

Luego (3.3.26) y (3.3.27) garantizan la estabilidad para la variación total en el espacio; $B = K$.

Por último estudiemos la variación total en el tiempo. Pero primero notemos dos relaciones importantes. Estas son obtenidas de (3.3.9), (3.3.10) y (3.3.7):

$$R_i^{n+1} - R_i^n = r(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) - r w_i^n (R_i^n - R_{i-1}^n) \quad 3.3.28$$

$$Q_i^{n+1} - Q_i^n = r(\xi_{i-1}^n - \xi_i^n) - r w_i^n (Q_i^n - Q_{i-1}^n). \quad 3.3.29$$

Luego aplicando (2.33), (2.34) y $u_i^n = \frac{R_i^n - Q_i^n}{2}$, tenemos

$$\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq \frac{1}{2} \sum_i \left\{ r |\rho_{i+1}^n - \rho_i^n| + r w_i^n |R_i^n - R_{i-1}^n| + r |\xi_{i-1}^n - \xi_i^n| + r w_i^n |Q_i^n - Q_{i-1}^n| \right\}$$

Luego (3.3.14), (IV), (V), (3.3.21), (3.3.23) y (3.3.2) nos conducen a

$$\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq 2K. \quad 3.3.30$$

De manera similar se prueba que

$$\sum_i |\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n| \leq K. \quad 3.3.31$$

Así de (3.3.30) y (3.3.31) se concluye que el esquema es estable para la variación total en el tiempo; $C = 2K$. \square

Observación

Si $h_m \rightarrow 0^+$ cuando $m \rightarrow \infty$ y $u_m = u_{h_m}$, $\sigma_m = \sigma_{h_m}$, entonces de la condición de estabilidad para la norma L^∞ las sucesiones (u_m) y (σ_m) son acotadas en $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Usando el siguiente resultado [7] sobre la topología débil:

“Si E es un espacio de Banach separable, entonces la bola unitaria en E' es metrizable y compacta para la topología $\sigma(E', E)$ ”, se obtiene para $E = L^1$ y $E' = L^\infty$ que las secuencias u_m y

σ_m en $L^\infty = (L^1)'$ admiten, subsecuencias convergentes respectivamente a u y σ . Esto es

$$\int u_{m_s} f \rightarrow \int u f \text{ y } \int \sigma_{m_s} f \rightarrow \int \sigma f \text{ cuando } s \rightarrow \infty \text{ para toda } f \in L^1(\mathbb{R} \times (0, \infty)).$$

Ahora en [4] se explica como las funciones u y σ son relacionadas a una solución del sistema (3.1.3-3.1.4), mostrando como construir una solución (U, Σ) de (3.1.3-3.1.4), donde $U, \Sigma \in G_\zeta$, la cual tiene a u y σ como los aspectos macroscópicos respectivos de U y Σ .

3.4 Soluciones Numéricas del problema de Riemann

La implementación del algoritmo para $u_0(x) \geq 0$ la podemos encontrar en el apéndice A.

Las siguientes gráficas se obtienen para $u_0(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ u_0 & x \leq 0 \end{cases}$, donde u_0 es una constante positiva

y $\sigma_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Figura 3.4.1 Esquema C.C.R

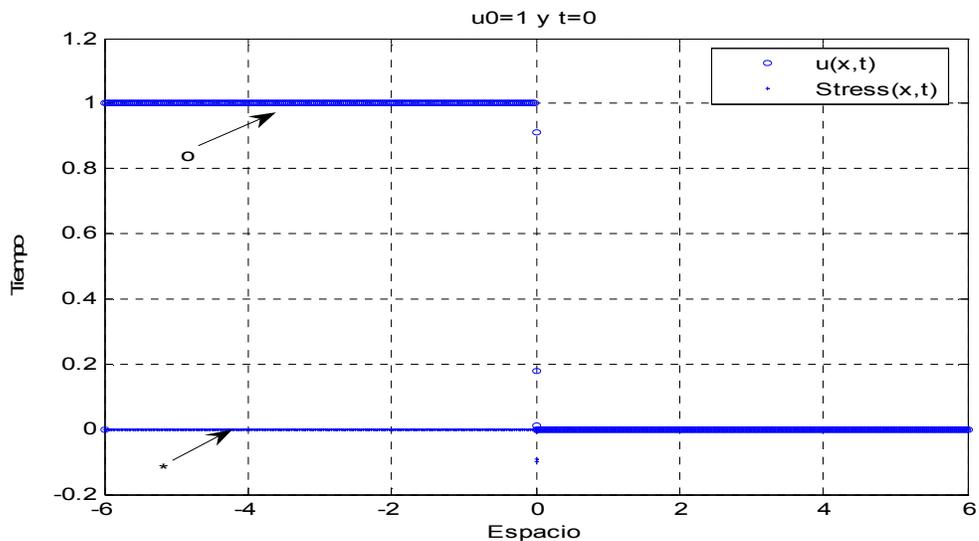


Figura 3.4.2 Esquema C.C.R

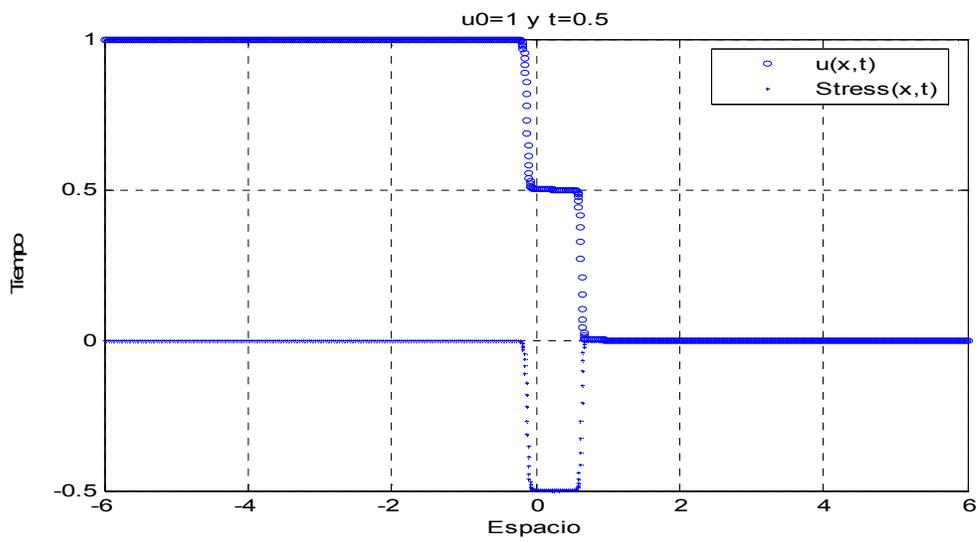


Figura 3.4.3 Esquema C.C.R

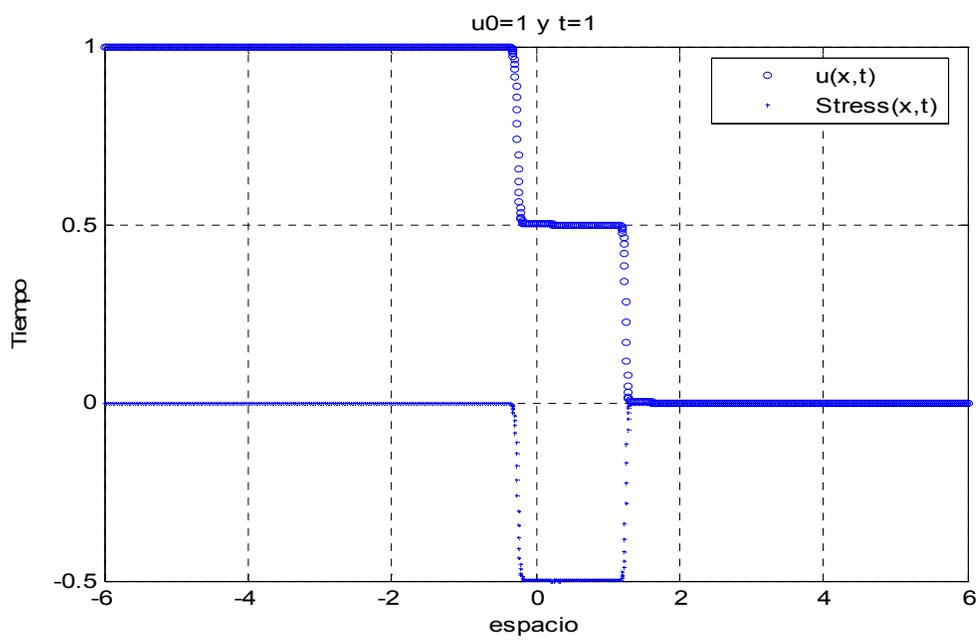


Figura 3.4.4 Esquema C.C.R

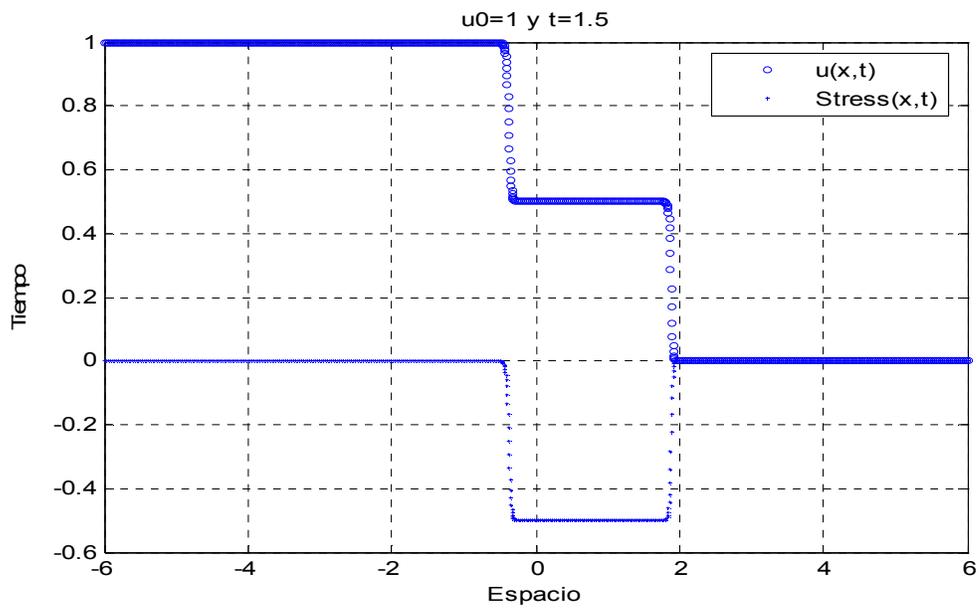


Figura 3.4.5 Esquema C.C.R

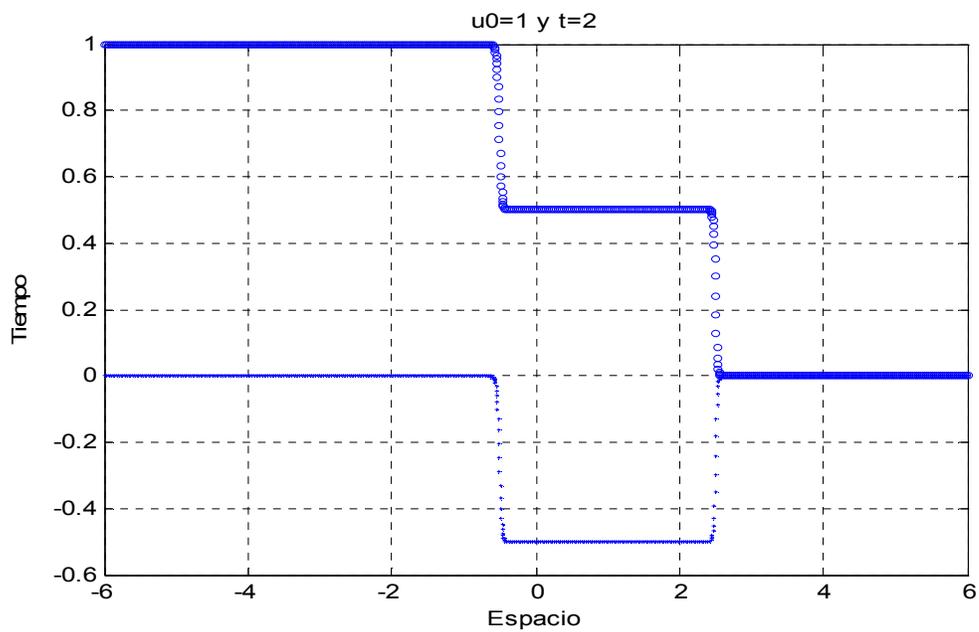


Figura 3.4.6 Esquema C.C.R

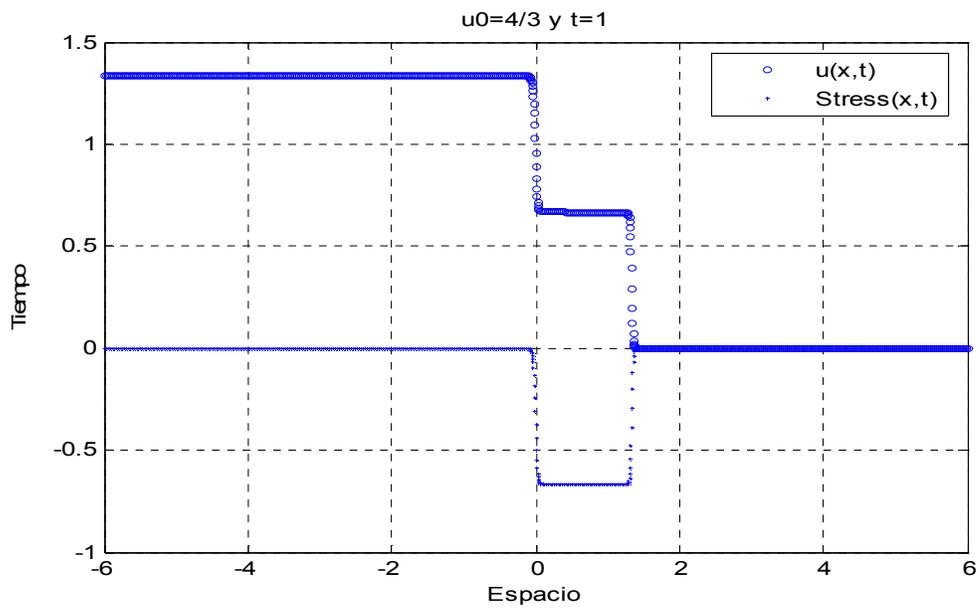


Figura 3.4.7 Esquema C.C.R

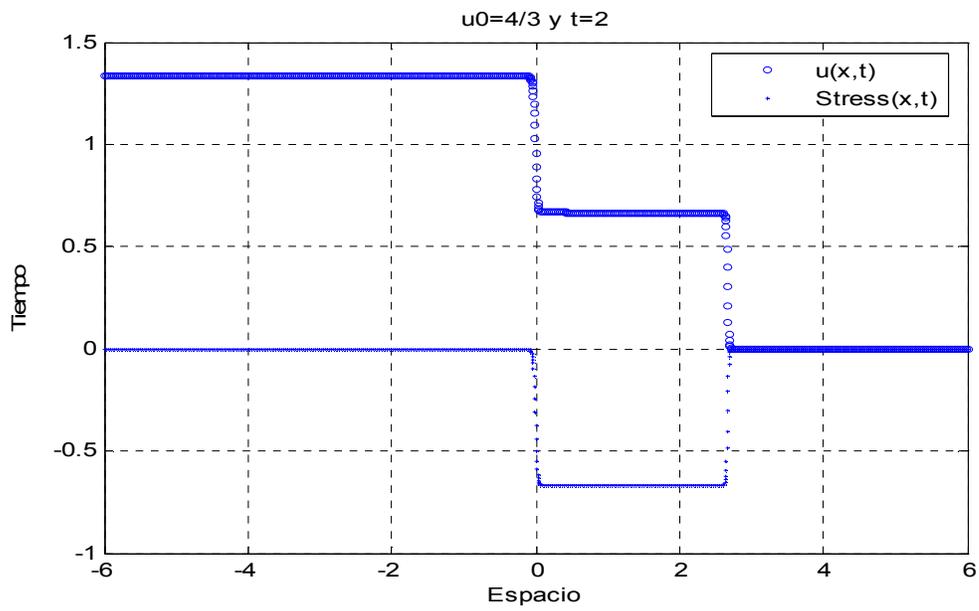


Figura 3.4.8 Esquema C.C.R

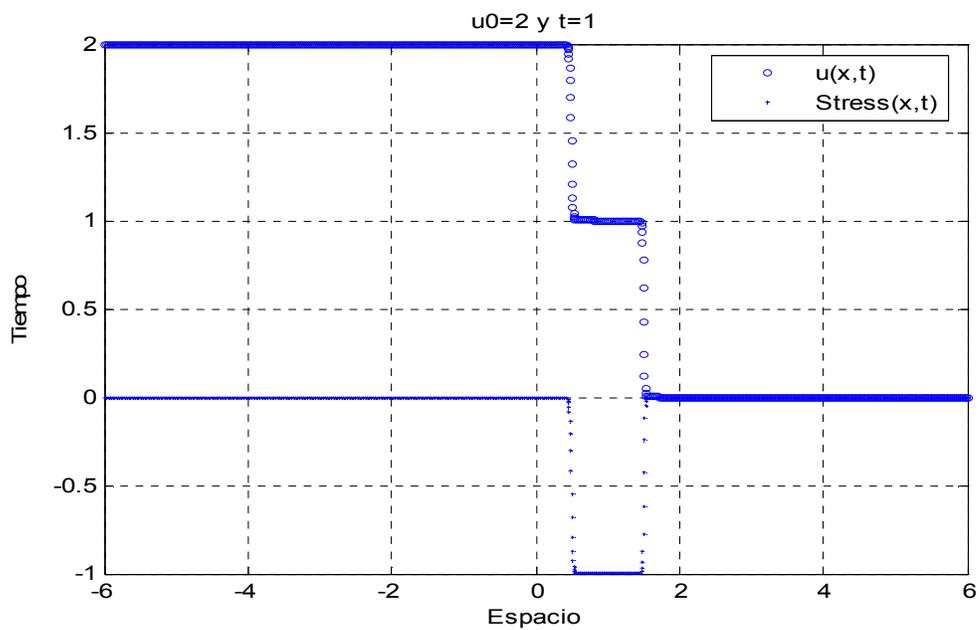
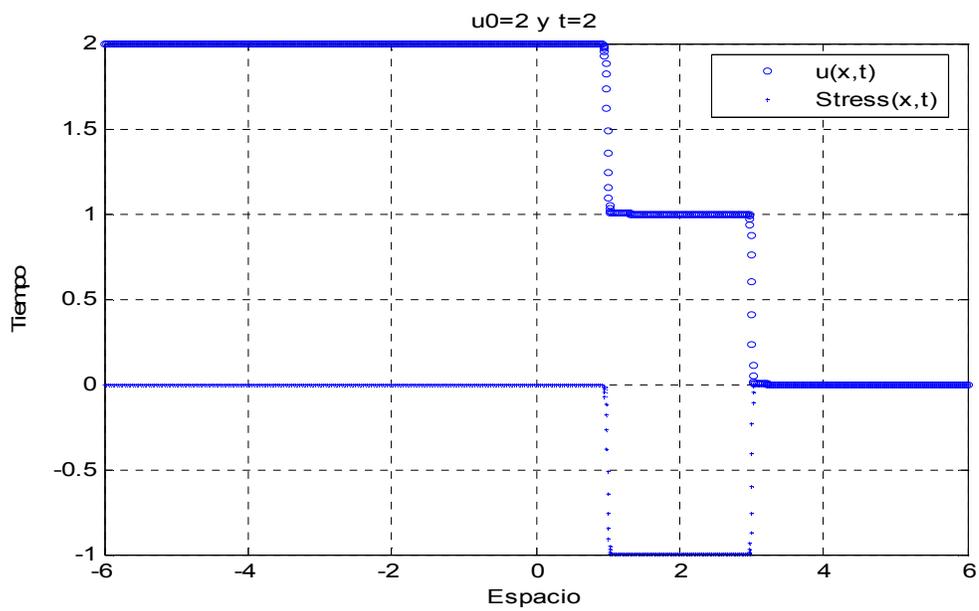


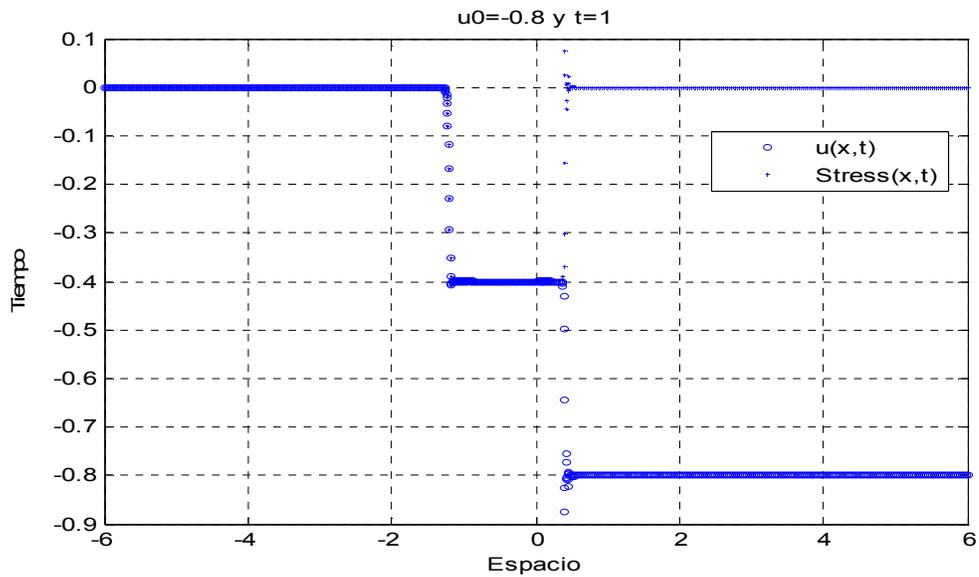
Figura 3.4.9 Esquema C.C.R



Este esquema se comporta muy bien para $u_0(x) \geq 0$. Pero para $u_0(x) \leq 0$, notamos la ausencia de estabilidad, la siguiente gráfica muestra este comportamiento. Esta se realizó para

$$u_0(x) = \begin{cases} -0.8 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \sigma_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Figura 3.4.10 Esquema C.C.R



3.5 Esquema Numérico Modificado

De lo anterior tenemos que si $u_0(x) \geq 0$ el esquema numérico es convergente y estable. Ahora surge la pregunta que ocurre en el caso de $u_0(x) \leq 0$?

Para obtener el esquema adecuado podemos utilizar las simetrías del sistema **(3.1.3)-(3.1.4)**.

Por supuesto, notificando que $u(x,t), \sigma(x,t)$ con $u(x,0) = u_0(x)$, $\sigma(x,0) = \sigma_0(x)$ cumplen **(3.1.3)-(3.1.4)** sí y sólo sí $U(x,t) = -u(-x,t)$ y $\Sigma(x,t) = \sigma(-x,t)$ con $U(x,0) = U_0(x)$, $\Sigma(x,0) = \Sigma_0(x)$, donde $U_0(x) = -u_0(-x)$ y $\Sigma_0(x) = \sigma_0(-x)$, cumplen el sistema

$$U_t + UU_x = \Sigma_x$$

$$\Sigma_t + U\Sigma_x = U_x.$$

Notemos que si $u_0 < 0$ entonces $U_0 > 0$. Por tal razón podemos conseguir las soluciones numéricas U, Σ por medio del esquema anterior, **(3.2.2)-(3.2.6)**.

Así $U_i^n = U_i^n(x,t) = U(x_i, t_n) = -u(-x_i, t_n) = -u_{-i}^n$ de donde

$$U_i^n = -u_{-i}^n. \quad 3.5.1$$

También tenemos que $\Sigma_i^n = \Sigma(x_i, t_n) = \sigma(-x_i, t_n) = \sigma_{-i}^n$ por tanto

$$\Sigma_i^n = \sigma_{-i}^n. \quad 3.5.2$$

De acuerdo al esquema numérico **(3.2.2)-(3.2.6)**, definimos:

$$W_i^n = \frac{U_i^n + U_{i-1}^n}{2} \quad 3.5.3$$

$$V_i^n = U_i^n - rW_i^n (U_i^n - U_{i-1}^n) \quad 3.5.4$$

$$T_i^n = \Gamma_i^n - rW_i^n (\Gamma_i^n - \Gamma_{i-1}^n) \quad 3.5.5$$

$$U_i^{n+1} = V_i^n + \frac{r}{2}(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n) + \frac{r}{2}(V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n) \quad 3.5.6$$

$$\Gamma_i^{n+1} = T_i^n + \frac{r}{2}(V_{i+1}^n - V_{i-1}^n) + \frac{r}{2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad 3.5.7$$

Ahora reemplazando (3.5.5),(3.5.6) en (3.5.7) obtenemos

$$W_i^n = -w_{-i+1}^n \quad 3.5.8$$

donde $w_{-i+1}^n = \frac{u_{-i+1}^n + u_{-i}^n}{2}$ y cambiando $-i \mapsto i$ tenemos

$$w_{i+1}^n = \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} . \quad 3.5.9$$

De forma análoga usando (3.5.5),(3.5.6), (3.5.8) en (3.5.4) obtenemos

$$V_i^n = -v_{-i}^n \quad 3.5.10$$

donde $v_{-i}^n = u_{-i}^n - rw_{-i+1}^n (u_{-i+1}^n - u_{-i}^n)$ y luego cambiando $-i \mapsto i$ obtenemos

$$v_i^n = u_i^n - rw_{i+1}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) . \quad 3.5.11$$

Ahora de (3.5.6), (3.5.8) y (3.5.5) obtenemos

$$T_i^n = \tau_{-i}^n \quad 3.5.12$$

donde $\tau_{-i}^n = \sigma_{-i}^n - rw_{-i+1}^n (\sigma_{-i+1}^n - \sigma_{-i}^n)$ y si $-i \mapsto i$, se tiene

$$\tau_i^n = \sigma_i^n - rw_{i+1}^n (\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n) . \quad 3.5.13$$

Luego reemplazando de (3.5.10),(3.5.12) en (3.5.6) y luego cambiando $-i \mapsto i$, obtenemos

$$u_i^{n+1} = v_i^n + \frac{r}{2}(\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n) + \frac{r}{2}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) . \quad 3.5.14$$

Finalmente de (3.5.6),(3.5.12) y (3.5.7), luego de cambiar $-i \mapsto i$ se tiene que

$$\sigma_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{r}{2}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{r}{2}(\tau_{i+1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i-1}^n). \quad 3.5.15$$

Así (3.5.9), (3.5.11), (3.5.13), (3.5.14) y (3.5.15) constituyen el esquema numérico apropiado para $u_0 < 0$.

$$w_{i+1}^n = \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} \quad 3.5.9$$

$$v_i^n = u_i^n - rw_{i+1}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad 3.5.11$$

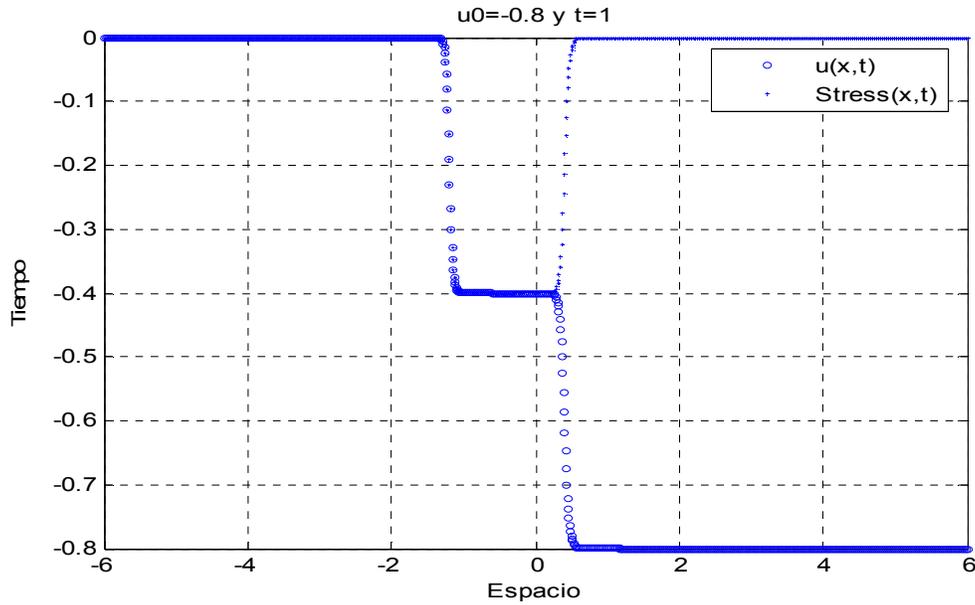
$$\tau_i^n = \sigma_i^n - rw_{i+1}^n (\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n) \quad 3.5.13$$

$$u_i^{n+1} = v_i^n + \frac{r}{2}(\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n) + \frac{r}{2}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) \quad 3.5.14$$

$$\sigma_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{r}{2}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{r}{2}(\tau_{i+1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i-1}^n) \quad 3.5.15$$

Con este nuevo esquema numérico resolvemos el problema de inestabilidad presente en la **Figura 3.4.10**, este esquema lo denotaremos por **C.C.R.M**, la siguiente gráfica nos indica que hay una mejor estabilidad con el nuevo esquema que con el anterior. Esta se realizó con las mismas condiciones iniciales $u_0(x)$ y $\sigma_0(x)$ utilizadas en la **Figura 3.4.10**.

Figura 3.5.11 Esquema C.C.R.M



La demostración del siguiente teorema se sigue del **Teorema 3.3.1** aplicada a U y Σ .

Teorema 3.5.17

Supongamos que las condiciones iniciales (u_0, σ_0) satisfacen que $u_0(x) \leq 0$ y $|\sigma_0(x)| \leq -u_0(x)$.

Además si $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} (-u_0(x) + |\sigma_0(x)|)$ y además sea $r > 0$ tal que $r \text{Max}\{M, 1\} \leq 1$.

Entonces de **(3.5.9)**, **(3.5.11)**, **(3.5.13)**, **(3.5.14)** y **(3.5.15)** obtenemos un esquema numérico estable para la norma L^∞ , para la variación total en el espacio y para la variación total en el tiempo.

La implementación del esquema numérico (3.5.9), (3.5.11), (3.5.13), (3.5.14) y (3.5.15), la podemos encontrar en el **Apéndice B**. Las siguientes gráficas se obtienen para

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \text{ donde } u_0 \text{ es una constante negativa y } \sigma_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Figura 3.5.12 Esquema C.C.R.M

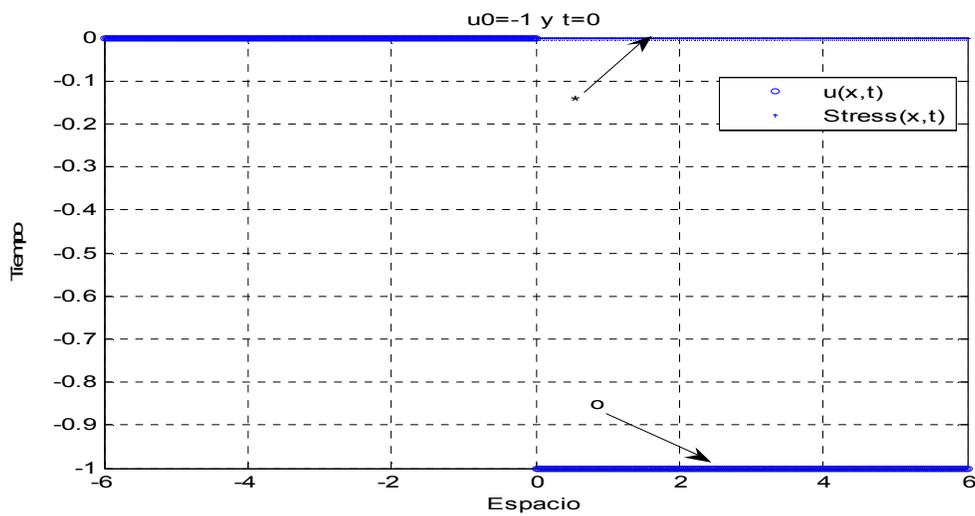


Figura 3.5.13 Esquema C.C.R.M

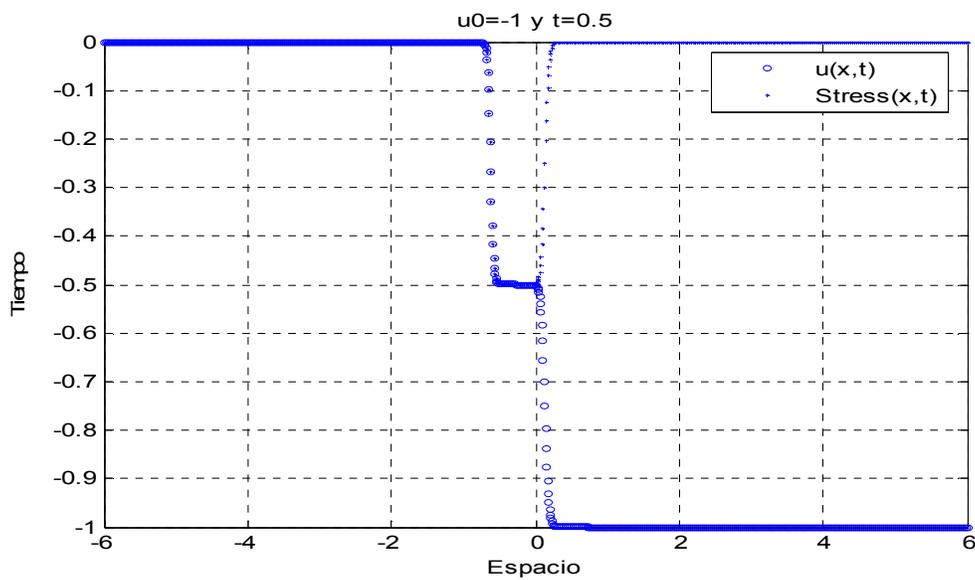


Figura 3.5.14 Esquema C.C.R.M

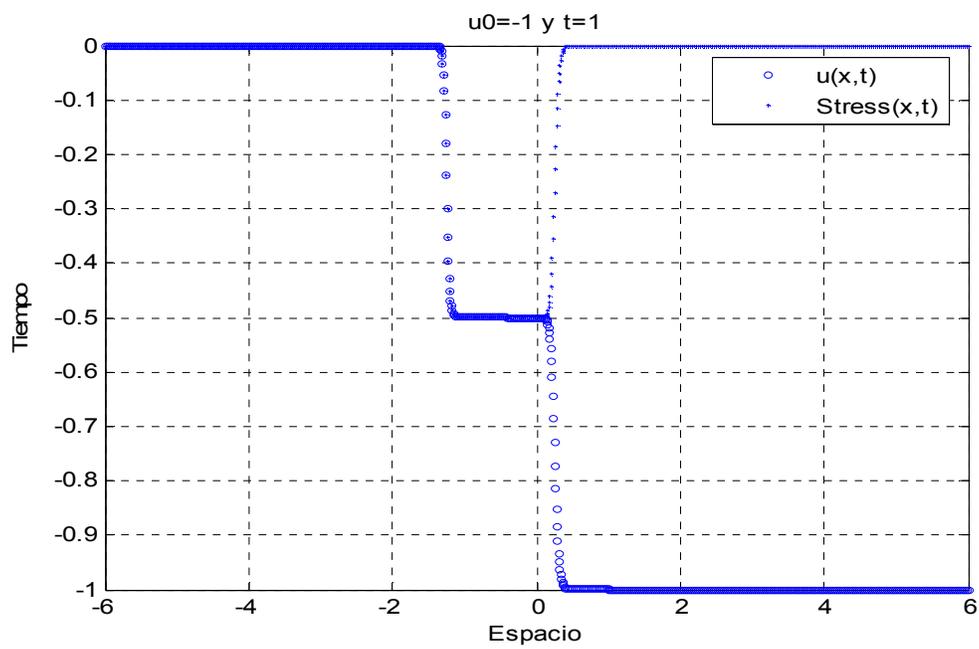
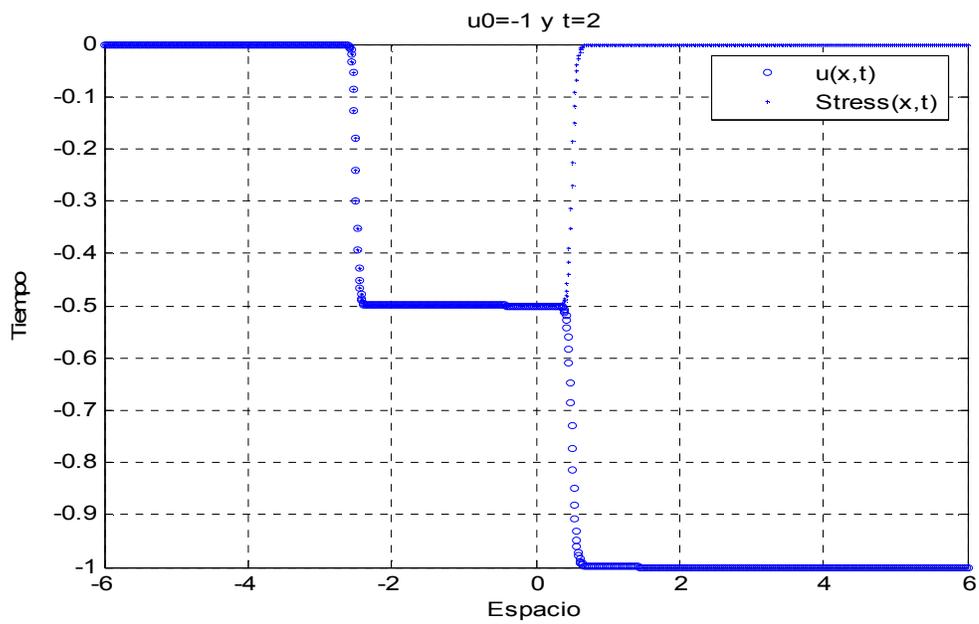


Figura 3.5.15 Esquema C.C.R.M



3.6 Esquema Numérico Alternativo

También tenemos un esquema numérico que es estable [3],[4] para $u_0(x) \geq 0$ y $u_0(x) \leq 0$.

Definamos:

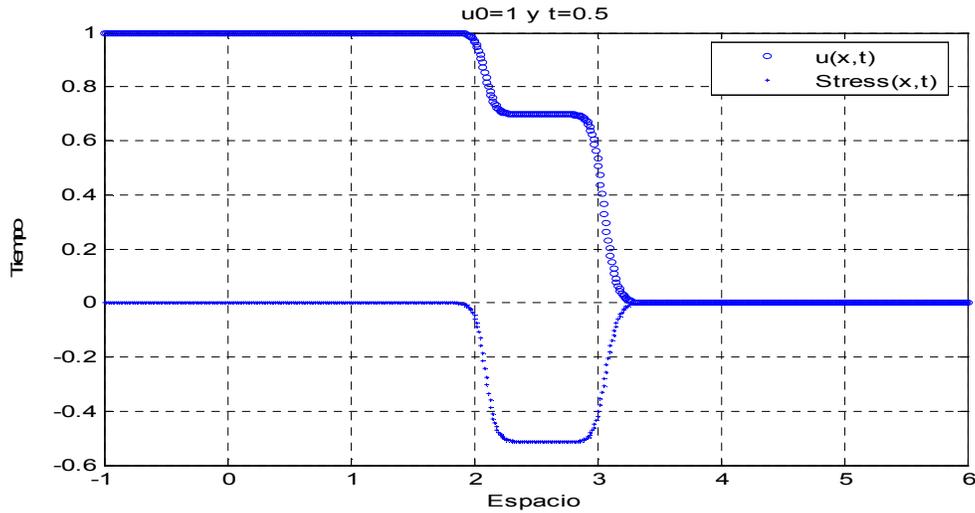
$$u_i^{n+1} = m_i^n + \frac{rm_i^n}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{r}{2}(\sigma_{i+1}^n - \sigma_{i-1}^n)$$

$$\sigma_i^{n+1} = \frac{1}{4}(\sigma_{i+1}^n + 2\sigma_i^n + \sigma_{i-1}^n) - \frac{rm_i^n}{2}(\sigma_{i+1}^n - \sigma_{i-1}^n) + \frac{rk^2}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n),$$

donde $m_i^n = \frac{1}{4}(u_{i+1}^n + 2u_i^n + u_{i-1}^n)$. Pues luego uno puede ver que al cambiar $U_i^n = -u_{-i}^n$ y $\Gamma_i^n = \sigma_{-i}^n$

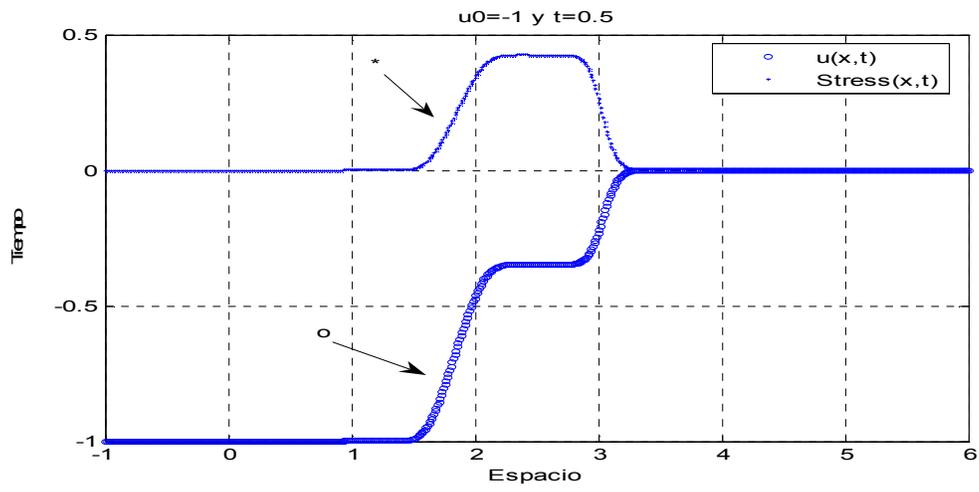
el esquema no sufre ningún cambio. Al esquema lo denotaremos por **C.R.N.P**, la implementación de este esquema la podemos encontrar en el **Apéndice C**. Los resultados son los siguientes.

Figura 3.6.16 Esquema C.R.N.P



Esta gráfica se realizó con $u_0(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ y $\sigma_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Figura 3.6.17 Esquema C.R.N.P



Esta gráfica se realizó con $u_0(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$ y $\sigma_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

4 EL SISTEMA EN LA FORMA CONSERVATIVA Y SOLUCION DEBIL DEL PROBLEMA DE RIEMANN

4.1 Transformación del sistema en la forma conservativa

Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales es llamado a ser conservativo, si cada ecuación en el sistema es una suma finita de derivadas parciales. De lo contrario el sistema es llamado a ser en forma no conservativa.

Consideremos el sistema (3.1.3)-(3.1.4) el cual no es conservativo, sujeto a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$\sigma(x, 0) = \sigma_0(x)$$

Este sistema (3.1.3)-(3.1.4) se puede escribir en forma conservativa. Note que reemplazando (3.1.3) en (3.1.4) podemos llevar (3.1.4) a:

$$\left(\sigma + \frac{u^2}{2} \right)_t + \left(\frac{u^3}{3} - u \right)_x = 0. \quad 4.1.1$$

Definamos $u_2 = \sigma + \frac{u^2}{2}$ y $u_1 = u$ de donde $\sigma = u_2 - \frac{u_1^2}{2}$. Ahora de (3.1.3) tenemos que

$$(u_1)_t + (u_1^2 - u_2)_x = 0. \quad 4.1.2$$

Luego de (4.1.1),(4.1.2) obtenemos el siguiente sistema, el cual es conservativo:

$$(u_1)_t + (u_1^2 - u_2)_x = 0 \quad 4.1.3$$

$$(u_2)_t + \left(\frac{u_1^3}{3} - u_1 \right)_x = 0 \quad 4.1.4$$

4.2 Construcción de la solución débil del problema de Riemann

Sabemos que las ondas de choque pueden ser representadas por funciones discontinuas, cuyas derivadas son distribuciones, pero el sistema (3.1.3)-(3.1.4) involucra multiplicación de distribuciones, la cual no está justificada en teoría de distribuciones. Por tanto uno reemplaza el sistema (3.1.3)-(3.1.4) por el sistema (4.1.3)-(4.1.4). Ahora plantearemos un sistema de ecuaciones para soluciones débiles u_1, u_2 del sistema (4.1.3)-(4.1.4) en los cuales las derivadas de u_1 y u_2 son transferidas a las funciones de prueba. Esto se hace de la siguiente manera [11].

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Luego multiplicando (3.1.3) por φ e integrando sobre $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, en el plano xt , tenemos que:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[(u_1)_t + (u_1^2 - u_2)_x \right] \varphi dx dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty (u_1)_t \varphi dt dx + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_1^2 - u_2)_x \varphi dx dt = 0$$

Ahora integrando por partes y usando el hecho que φ es de soporte compacto en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \varphi(x, 0) dx + \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \left[u_1 \varphi_t + (u_1^2 - u_2) \varphi_x \right] dt dx = 0 \quad 4.2.1$$

donde

$$f(x) = u_1(x, 0) = u_0(x). \quad 4.2.2$$

Similarmente, sea $\psi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Luego multiplicando (4.1.4) por ψ e integrando por partes tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\psi(x,0)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[u_2 \psi_t + \left(\frac{u_1^3}{3} u - u_2 \right) \psi_x \right] dt dx = 0 \quad 4.2.3$$

donde

$$g(x) = u_2(x,0) = \sigma_0(x) + \frac{u_0^2(x)}{2}. \quad 4.2.4$$

Entonces u_1, u_2 son soluciones débiles del sistema (4.1.3)-(4.1.4) Con las condiciones iniciales (4.2.2) y (4.2.4) si cumplen (4.2.1) y (4.2.3), para todas las funciones $\varphi, \psi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Usualmente se asume que $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Consistentemente con la **Sección 3.4** asumimos que:

$$u(x,t) = a_1 Y(x - c_1 t) + a_2 Y(x - c_2 t) + u_0 \quad 4.2.5$$

$$\sigma(x,t) = b_1 Y(x - c_1 t) + b_2 Y(x - c_2 t), \quad 4.2.6$$

donde c_1, c_2, b_1, b_2, a_1 y a_2 son constantes, $c_1 > c_2$ y $Y(x)$ es la función de Heaviside.

Entonces buscamos u_1 y u_2 en la forma

$$u_1 = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + u_0 \quad 4.2.7$$

$$u_2 = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + a_1^2 Y_1^2 / 2 + a_2^2 Y_2^2 / 2 + a_1 a_2 Y_1 Y_2 + (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) u_0 + u_0^2 / 2, \quad 4.2.8$$

donde $Y_1 = Y(x - c_1 t)$ y $Y_2 = Y(x - c_2 t)$.

Ahora de (4.2.5) y (4.2.6) se sigue:

$$f(x) = u_0(x) = \begin{cases} a_1 + a_2 + u_0 & x > 0 \\ u_0 & x < 0 \end{cases} \quad 4.2.9$$

$$\sigma_0(x) = \sigma(x, 0) = \begin{cases} b_1 + b_2 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad 4.2.10$$

Luego usando las siguientes propiedades de funciones de Heaviside, esto es $Y_i^2 = Y_i$ para $i = 1, 2$

y $Y_1 Y_2 = Y_1$ si $c_1 > c_2$ obtenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} (b_1 + b_2) + \frac{1}{2}(a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) + (a_1 + a_2)u_0 & x > 0 \\ b_0 + \frac{1}{2}u_0^2 & x < 0 \end{cases} \quad 4.2.11$$

Pero nosotros estamos interesados en resolver el sistema (4.1.3)-(4.1.4), bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$\sigma(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ u_0 & x < 0 \end{cases} .$$

Reemplazando las condiciones iniciales en (4.2.9) y (4.2.10), tenemos las siguientes ecuaciones

$$a_1 + a_2 = -u_0 \quad 4.2.12$$

$$b_1 + b_2 = 0 . \quad 4.2.13$$

Ahora reemplazando (4.2.7) y (4.2.8) en (4.2.1) y (4.2.4), luego usando $Y_i^2 = Y_i$ para $i = 1, 2$ y

$Y_1 Y_2 = Y_1$ siempre que $c_1 > c_2$, luego de hacer ciertos cálculos, en los cuales los términos con

$\int_0^{\infty} \varphi(x, 0) dx$ y $\int_0^{\infty} \psi(x, 0) dx$ se anulan en el proceso, y usando el hecho que

$\varphi(c_1, t, t)$, $\varphi(c_2, t, t)$, $\psi(c_1, t, t)$, $\psi(c_2, t, t)$ son independientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2b_1 + 2a_1c_1 - \alpha = 0 \quad 4.2.14$$

$$2a_2c_2 + 2b_2 - \beta = 0 \quad 4.2.15$$

$$\alpha(3c_1 - 2(u_0 + a_1 + a_2)) + 6b_1c_1 + 6a_1 - 2a_1a_2^2 - 4u_0a_1a_2 - 2u_0^2a_1 = 0 \quad 4.2.16$$

$$\beta(3c_2 - 2a_2 - 2u_0) + 6b_2c_2 + 6a_2 - 2a_2u_0^2 = 0, \quad 4.2.17$$

donde $\alpha = a_1^2 + 2u_0a_1 + 2a_1a_2$ y $\beta = a_2^2 + 2u_0a_2$.

Estamos interesados en caracterizar las soluciones para $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, $c_1 > c_2$ y $u_0 > 0$.

Ahora resolviendo las primeras dos ecuaciones para b_1 y b_2 , y sustituyendo el resultado en las próximas dos ecuaciones, obtenemos ecuaciones cuadráticas sobre c_1 y c_2 respectivamente. Hay cuatro soluciones para (c_1, c_2) las cuales dependen de u_0, a_1 y a_2 .

Tres de estas ecuaciones nos llevan a una contradicción. Entonces hay solamente un caso en el cual la solución está acorde con las restricciones del problema. En este caso encontramos:

$$a_2 = a_1 = -\frac{u_0}{2}$$

$$c_1 = \frac{u_0}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{48 - u_0^2}$$

$$c_2 = \frac{3u_0}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{48 - u_0^2}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{3}}{24} \sqrt{48 - u_0^2}$$

$$b_2 = -\frac{\sqrt{3}}{24} \sqrt{48 - u_0^2}$$

Además $c_1 > c_2$ equivale a $0 < u_0 < 2\sqrt{3}$. Reemplazando las expresiones b_1, b_2, a_1 y a_2 en (4.2.5) y (4.2.6) tenemos que

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{2} Y(x - c_1 t) - \frac{u_0}{2} Y(x - c_2 t) + u_0$$

$$\sigma(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{24} \sqrt{48 - u_0^2} Y(x - c_1 t) - \frac{\sqrt{3}}{24} \sqrt{48 - u_0^2} Y(x - c_2 t)$$

A continuación mostraremos la gráfica de u y σ para algunos tiempos.

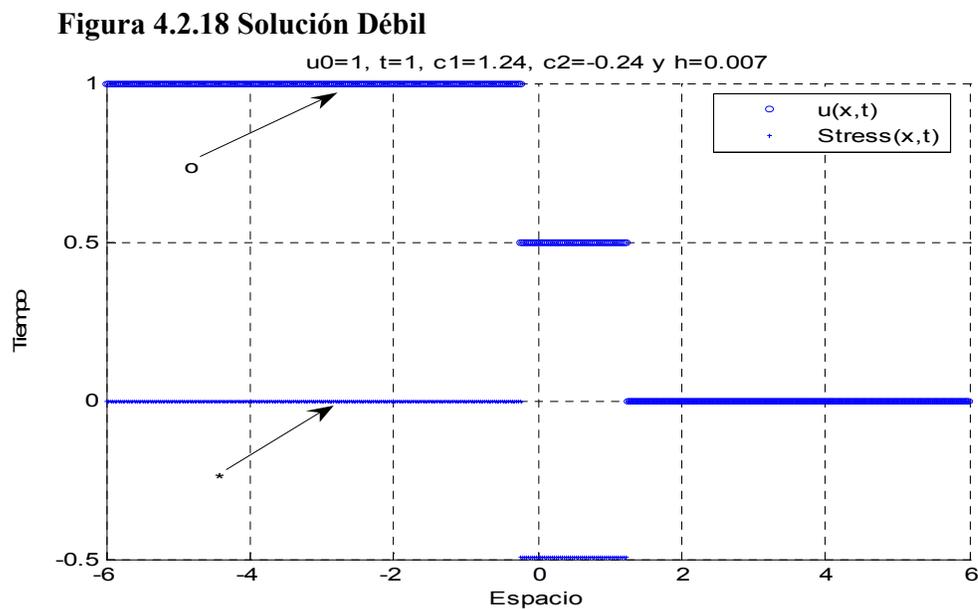


Figura 4.2.19 Solución Débil

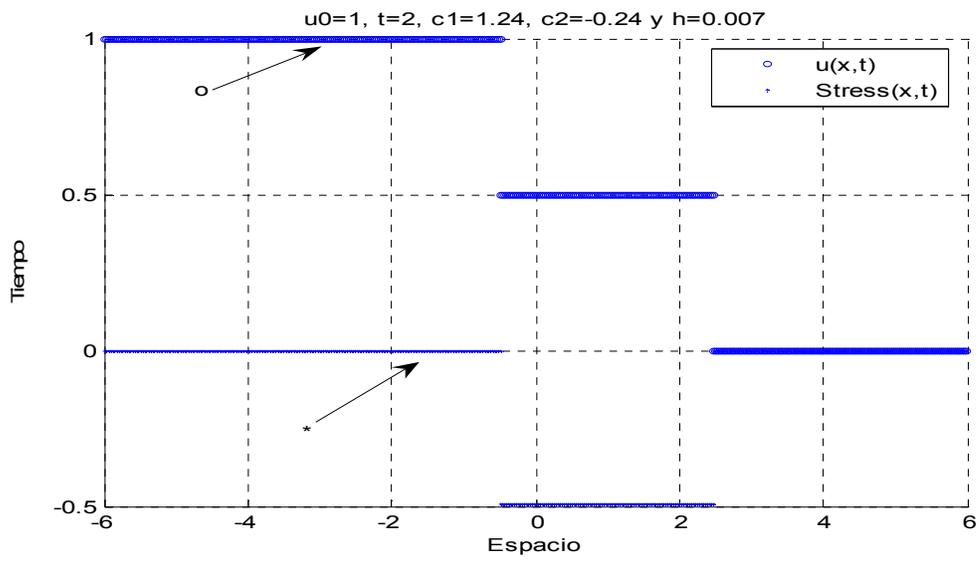


Figura 4.2.20 Solución Débil

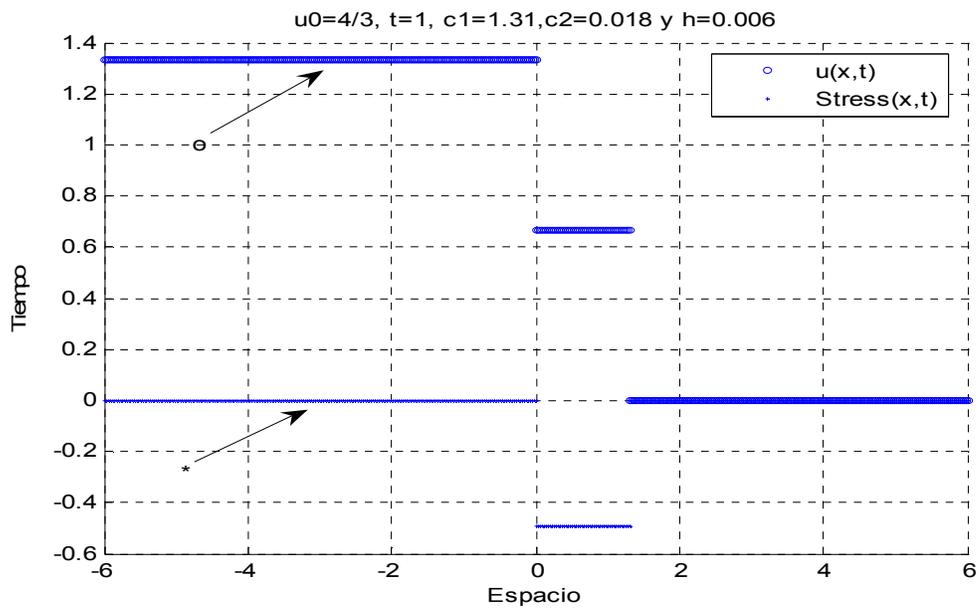


Figura 4.221 Solución Débil

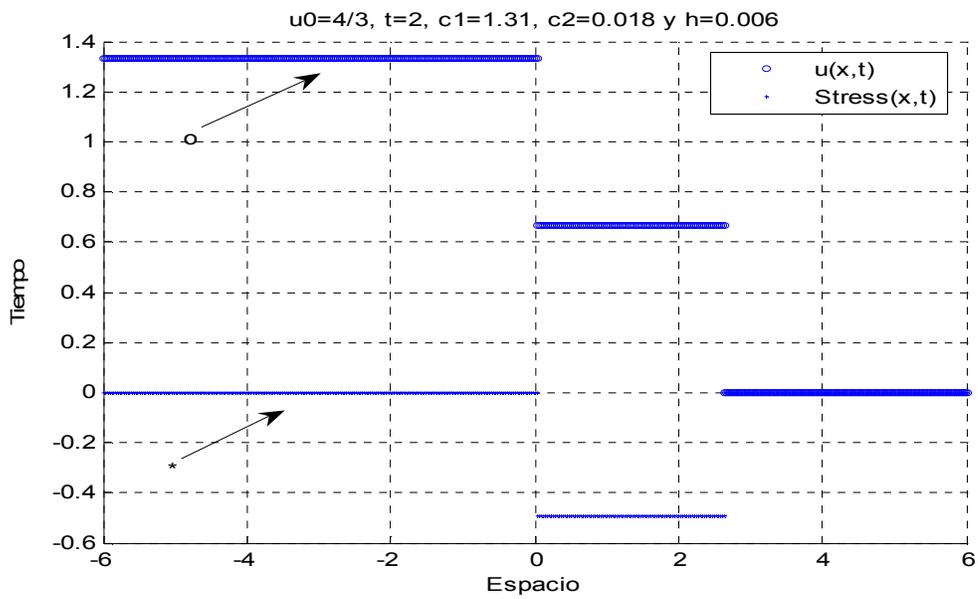


Figura 4.222 Solución Débil

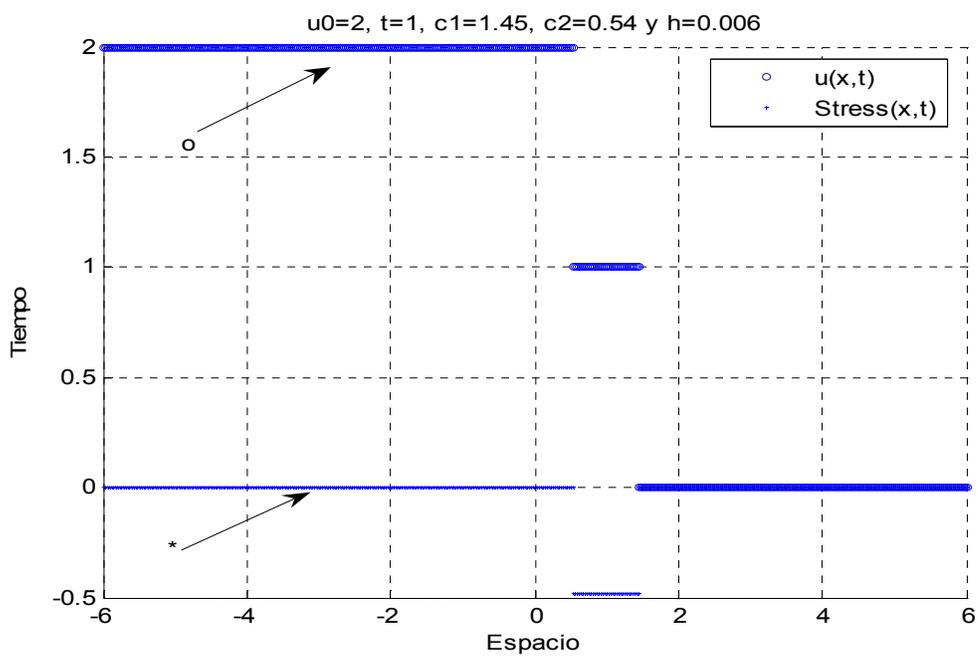
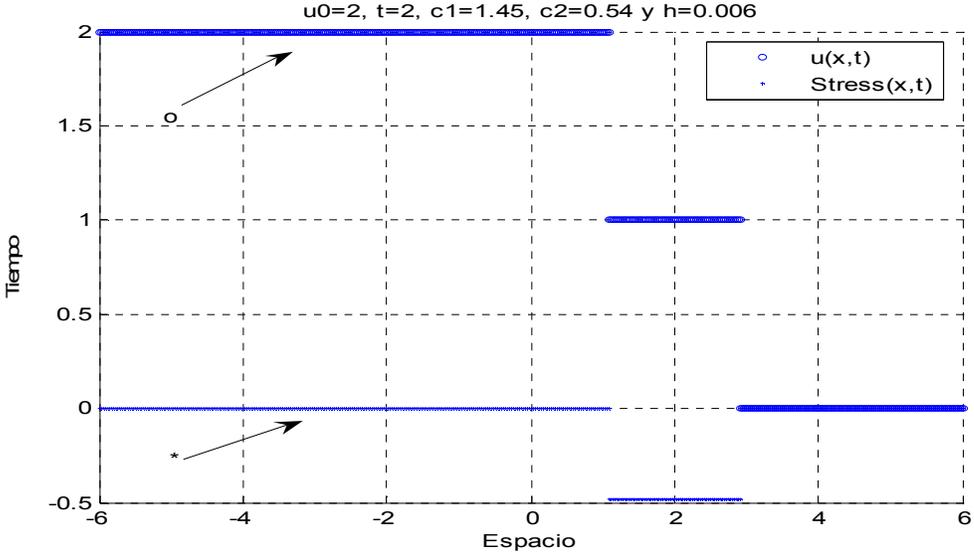


Figura 4.2.23 Solución Débil



5 SOLUCIONES EN EL ALGEBRA DE COLOMBEAU

5.1 Planteamiento del problema

Consideremos el sistema (3.1.3)-(3.1.4). Para hacer frente a la debilidad de las soluciones (soluciones distribucionales) asumimos que $u, \sigma \in G(\mathbb{R}^2)$ y cambiamos el sistema original a

$$u_t + uu_x \approx \sigma_x \quad 5.1.1$$

$$\sigma_t + u\sigma_x \approx u_x \quad 5.1.2$$

Los autores de [2], [6], [4], estudiaron las soluciones numéricas de un problema de Riemann para tal sistema, y encontraron que sus resultados son coherentes con la expectativa de que las soluciones representan los aspectos macroscópicos de las respectivas soluciones en el álgebra de Colombeau.

La implementación del esquema numérico desarrollado en [4] para resolver (3.1.3)-(3.1.4) con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad 5.1.3$$

donde u_0 es una constante y

$$\sigma(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 5.1.4$$

proporciona la evidencia de que hay dos ondas de choque para u y σ moviéndose con velocidades constantes distintas en la misma dirección o en dirección opuesta, lo cual depende del valor de u_0 . (ver las gráficas en la sección 3.4 de las soluciones numéricas)

5.2 Construcción de soluciones

Nosotros discutiremos las soluciones en $G(\mathbb{R}^2)$ de tal problema de Riemann, las cuales son una superposición de dos ondas de choque viajeras y cuyos aspectos macroscópicos son de la forma

$$u \approx a_1 Y(x - c_1 t) + a_2 Y(x - c_2 t) + u_0 \quad 5.2.1$$

$$\sigma \approx b_1 Y(x - c_1 t) + b_2 Y(x - c_2 t), \quad 5.2.2$$

donde Y es la función de Heaviside estándar y c_1, c_2, b_1, b_2, a_1 y a_2 son constantes.

Ahora reemplazando (5.2.1), (5.2.2) en (5.1.3), (5.1.4) obtenemos las siguientes ecuaciones

$$a_1 + a_2 = -u_0 \quad 5.2.3$$

$$b_1 + b_2 = 0 \quad 5.2.4$$

Usamos la notación $Y_1 = Y(x - c_1 t)$ y $Y_2 = Y(x - c_2 t)$. También los mismos símbolos Y_1 y Y_2 son utilizados para denotar los correspondientes elementos de $G(\mathbb{R}^2)$, esto es $[A_0(\mathbb{R}^2) \ni \varphi \mapsto Y_1 * \varphi]$ y $[A_0(\mathbb{R}^2) \ni \varphi \mapsto Y_2 * \varphi]$ respectivamente.

Buscaremos soluciones de (3.1.3)-(3.1.4) de la forma

$$u = a_1 H_1 + a_2 H_2 + u_0 \quad 5.2.5$$

$$\sigma = b_1 L_1 + b_2 L_2, \quad 5.2.6$$

y para $i = 1, 2$, H_i y L_i son elementos escogidos apropiadamente de $G(\mathbb{R}^2)$ asociados a Y_i .

Asumimos que $c_1 \neq c_2$ que sin pérdida de generalidad podemos tomar $c_1 > c_2$.

El siguiente resultado se sigue de [10].

Proposición 5.2.7

Sean α y β números reales arbitrarios. Entonces para $i = 1, 2$ existen H_i y $L_i \in G(\mathbb{R}^2)$ que cumplen las siguientes propiedades

- $L_i \approx H_i \approx Y_i$.
- $H_i^2 \approx Y_i$ y $L_i^2 \approx Y_i$.
- $H_i L_i' \approx \alpha_i Y_i'$, donde $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha, \beta)$
- $H_i H_i' \approx \frac{1}{2} Y_i'$, $L_i L_i' \approx \frac{1}{2} Y_i'$

donde “'” denota la derivada parcial respecto a x .

También tenemos las siguientes propiedades si $c_1 > c_2$ y $t > 0$

- $H_2 H_1' \approx Y_1'$ y $H_1 H_2' \approx 0$.
- $H_2 L_1' \approx Y_1'$ y $H_1 L_2' \approx 0$.

Ahora llevando (5.2.5)-(5.2.6) al sistema (3.1.3)-(3.1.4), luego haciendo uso de la **Proposición**

5.2.7 y el hecho que Y_1' , Y_2' son independientes obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$2a_2 a_1 - 2c_1 a_1 + a_1^2 + 2u_0 a_1 - 2b_1 = 0 \quad 5.2.8$$

$$2u_0 a_2 - 2c_2 a_2 + a_2^2 - 2b_2 = 0 \quad 5.2.9$$

$$a_2 b_1 - a_1 - b_1 c_1 + \alpha a_1 b_1 + u_0 b_1 = 0 \quad 5.2.10$$

$$u_0 b_2 - c_2 b_2 + \beta a_2 b_2 - a_2 = 0 \quad 5.2.11$$

Nosotros estamos interesados en caracterizar las soluciones para $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ y $u_0 > 0$.

Al resolver las primeras dos ecuaciones para b_1, b_2 y sustituyendo la expresión resultante en las otras dos ecuaciones, obtenemos ecuaciones cuadráticas sobre c_1 y c_2 respectivamente. Existen cuatro soluciones (c_1, c_2) las cuales dependen de u_0, a_1, a_2, α y β . Estas son:

$$(i) \quad c_1 = \frac{1}{4} \left(a_1 + 4a_2 + 2a_1\alpha + \sqrt{16 + a_1^2 (2\alpha - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \left(a_2 + 2a_2\beta + \sqrt{16 + a_2^2 (2\beta - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

$$(ii) \quad c_1 = \frac{1}{4} \left(a_1 + 4a_2 + 2a_1\alpha + \sqrt{16 + a_1^2 (2\alpha - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \left(a_2 + 2a_2\beta - \sqrt{16 + a_2^2 (2\beta - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

$$(iii) \quad c_1 = \frac{1}{4} \left(a_1 + 4a_2 + 2a_1\alpha - \sqrt{16 + a_1^2 (2\alpha - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \left(a_2 + 2a_2\beta - \sqrt{16 + a_2^2 (2\beta - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

$$(iv) \quad c_1 = \frac{1}{4} \left(a_1 + 4a_2 + 2a_1\alpha - \sqrt{16 + a_1^2 (2\alpha - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \left(a_2 + 2a_2\beta + \sqrt{16 + a_2^2 (2\beta - 1)^2} + 4u_0 \right)$$

El caso (iv) no se puede dar ya que nos lleva a una contradicción con las restricciones del problema.

La estructura de las fórmulas **(i)-(iv)** puede ser simplificada, si uno emplea en vez de α y β , los nuevos parámetros μ, ν tales que

$$2\alpha - 1 = \frac{4 \sinh(\mu)}{a_1} \quad \mathbf{5.2.12}$$

$$2\beta - 1 = \frac{4 \sinh(\nu)}{a_2} \quad \mathbf{5.2.13}$$

Todavía hay que cumplir las condiciones **(5.2.5)**, **(5.2.6)**, $u_0 > 0$ y $c_1 > c_2$.

Esto nos permite obtener expresiones explícitas de c_1, c_2, b_1, b_2, a_1 y a_2 en términos de μ, ν y u_0 .

5.3 Forma explícita de las soluciones

Ahora presentaremos las formas de u y σ . Estas son agrupadas en tres clases.

Table 5.3.1 Forma Explícita de las Soluciones en "G"

| | |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Clase 1 | |
| Región de parámetros | $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ |
| Dominio para u_0 | $0 < u_0 < 2(e^\mu + e^{-\nu})$ |
| c_1 | $e^\mu + \frac{u_0 e^{-\nu}}{2(e^\mu + e^{-\nu})}$ |
| c_2 | $\frac{u_0 e^{-\nu}}{2(e^\mu + e^{-\nu})} - e^{-\nu} + \frac{u_0}{2}$ |
| a_1 | $-\frac{u_0 e^{-\nu}}{e^\mu + e^{-\nu}}$ |
| a_2 | $-\frac{u_0 e^\mu}{e^\mu + e^{-\nu}}$ |
| b_1 | $\frac{u_0 e^{\mu-\nu}}{e^\mu + e^{-\nu}}$ |
| b_2 | $-\frac{u_0 e^{\mu-\nu}}{e^\mu + e^{-\nu}}$ |

Table 5.3.2 Forma Explícita de las Soluciones en "G"

| | |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Clase 2 | |
| Región de parámetros | $\mu > \nu$ |
| Dominio para u_0 | $0 < u_0 < 2(e^\mu - e^\nu)$ |
| c_1 | $e^\mu - \frac{u_0 e^\nu}{2(e^\mu - e^\nu)}$ |
| c_2 | $e^\nu + \frac{u_0}{2} - \frac{u_0 e^\nu}{2(e^\mu - e^\nu)}$ |
| a_1 | $\frac{u_0 e^\nu}{e^\mu - e^\nu}$ |
| a_2 | $-\frac{u_0 e^\mu}{e^\mu + e^{-\nu}}$ |
| b_1 | $\frac{u_0 e^{\mu-\nu}}{e^\mu + e^{-\nu}}$ |
| b_2 | $-\frac{u_0 e^{\mu-\nu}}{e^\mu + e^{-\nu}}$ |

Table 5.3.3 Forma Explícita de las Soluciones en "G"

| | |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Clase 3 | |
| Región de parámetros | $\mu > \nu$ |
| Dominio para u_0 | $0 < u_0 < 2(e^{-\mu} - e^{-\nu})$ |
| c_1 | $\frac{u_0 e^{-\nu}}{2(e^{-\nu} - e^{-\mu})} - e^{-\mu}$ |
| c_2 | $\frac{u_0 e^{\mu}}{2(e^{-\nu} - e^{-\mu})} - e^{-\nu} + u_0$ |
| a_1 | $-\frac{u_0 e^{-\nu}}{e^{-\nu} - e^{-\mu}}$ |
| a_2 | $\frac{u_0 e^{-\mu}}{e^{-\nu} - e^{-\mu}}$ |
| b_1 | $-\frac{u_0 e^{-\mu-\nu}}{e^{-\nu} - e^{-\mu}}$ |
| b_2 | $\frac{u_0 e^{-\mu-\nu}}{e^{-\nu} - e^{-\mu}}$ |

5.4 Comparación de las soluciones en el álgebra de Colombeau con las soluciones numéricas

Ahora interpretaremos las soluciones numéricas discutidas en la **Sección 2**, como aspectos macroscópicos de las soluciones en el álgebra de Colombeau, con $\mu = \nu = 0$.

Notemos que según de la **Tabla 5.3.1**, para $\mu = \nu = 0$

$$0 < u_0 < 4$$

$$c_1 = 1 + \frac{u_0}{4}$$

$$c_2 = \frac{3u_0}{4} - 1.$$

Observamos también que

- i. Para $0 < u_0 < \frac{4}{3}$, se tiene $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$.
- ii. Para $u_0 = \frac{4}{3}$, se tiene $c_1 > 0$ y $c_2 = 0$.
- iii. Para $\frac{4}{3} < u_0 < 4$, se tiene $c_1 > c_2 > 0$.

Para ilustrar **(i)** tomamos $u_0 = 1$ y obtenemos los aspectos macroscópicos de u y σ , esto es

$$u \approx -\frac{1}{2}(Y(x - c_1 t) + Y(x - c_2 t)) + 1$$

$$\sigma \approx \frac{1}{2}(Y(x - c_1 t) - Y(x - c_2 t))$$

donde $c_1 = \frac{5}{4}$ y $c_2 = -\frac{1}{4}$.

Las siguientes gráficas ilustran la situación **(i)** en dos tiempos diferentes.

Figura 5.4.24 Aspecto Macroscópico

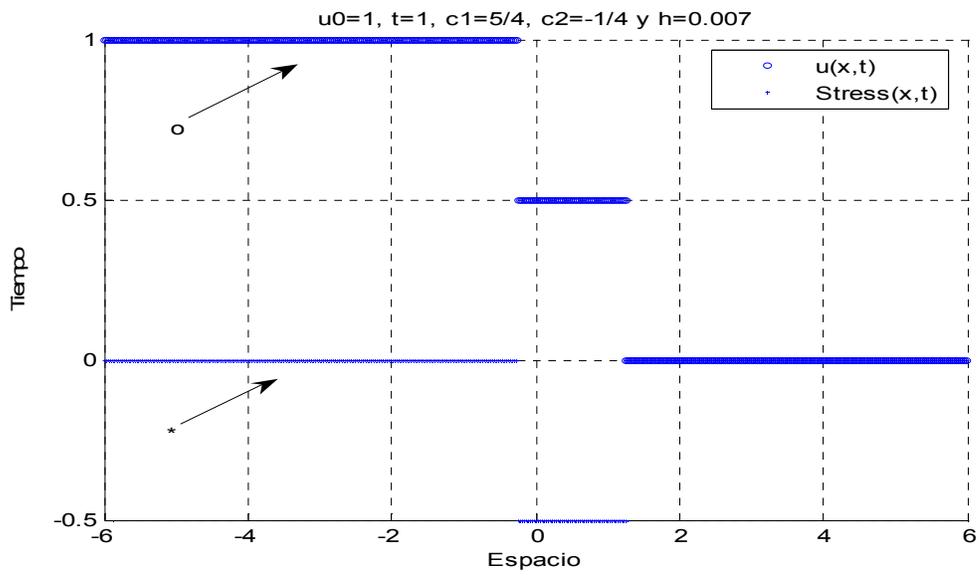
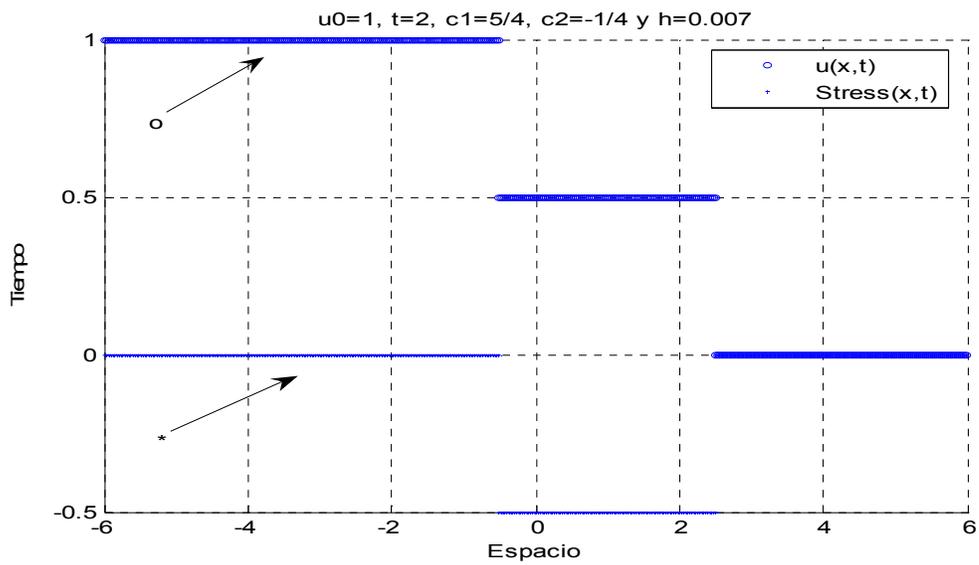


Figura 5.4.25 Aspecto Macroscópico



En estas dos gráficas vemos que las ondas se mueven en sentido opuesto, pero la onda a la derecha va con mayor velocidad que la izquierda.

Para ilustrar **(ii)**, tomemos $u_0 = \frac{4}{3}$, así los aspectos macroscópicos de u y σ son

$$u \approx -\frac{4}{3}(Y(x-c_1t) + Y(x-c_2t) - 1)$$

$$\sigma \approx \frac{4}{3}(Y(x-c_1t) - Y(x-c_2t))$$

donde $c_1 = \frac{4}{3}$ y $c_2 = 0$.

Las siguientes gráficas ilustran la situación **(ii)** en dos tiempos diferentes

Figura 5.4.26 Aspecto Macroscópico

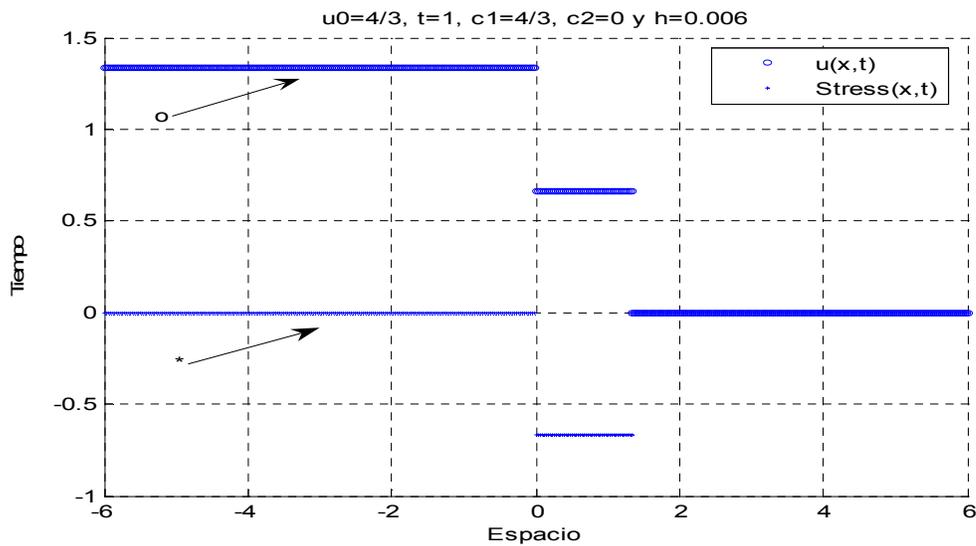
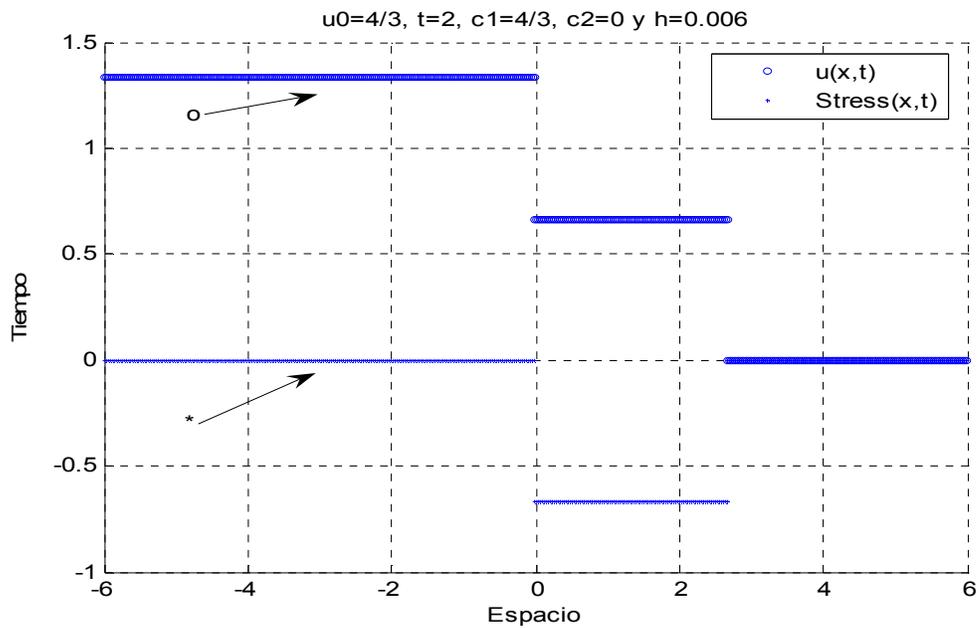


Figura 5.4.27 Aspecto Macroscópico



Notamos en estas dos gráficas, dos choques, en las cuales uno queda fijo, mientras el otro avanza rápidamente.

Para ilustrar **(iii)**, escojamos $u_0 = 2$ así los aspectos microscópicos de u y σ , son

$$u \approx -(Y(x - c_1 t) + Y(x - c_2 t)) + 2$$

$$\sigma \approx Y(x - c_1 t) - Y(x - c_2 t)$$

donde $c_1 = \frac{3}{2}$ y $c_2 = \frac{1}{2}$.

Las siguientes gráficas ilustran las situaciones **(iii)** en dos tiempos diferentes

Figura 5.4.28 Aspecto Macroscópico

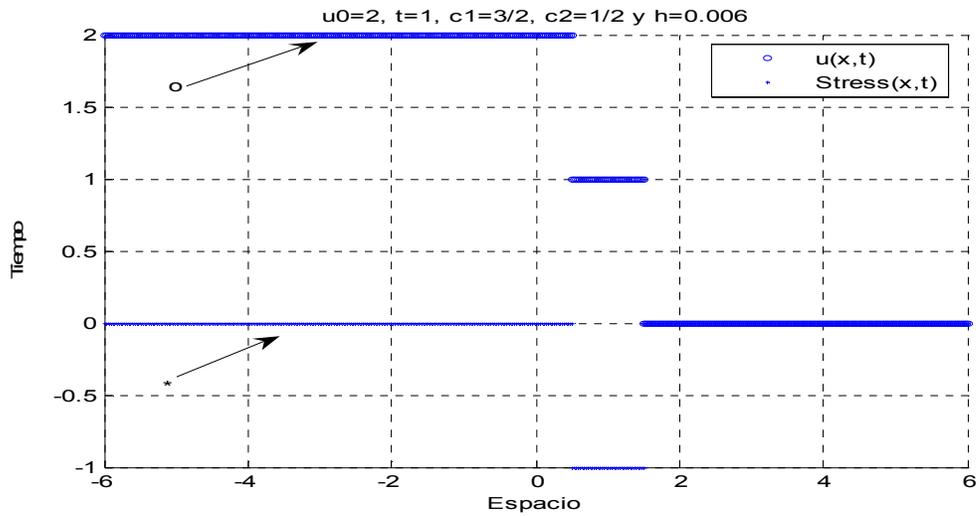
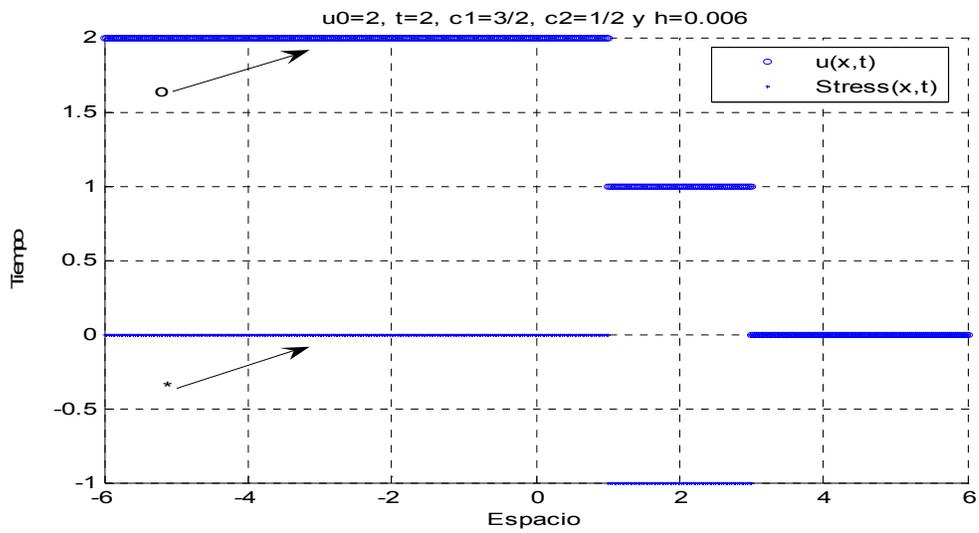


Figura 5.4.29 Aspecto Macroscópico



En estas gráficas observamos dos ondas viajeras moviéndose en la misma dirección, pero con velocidades diferentes.

5.5 Discusión

Comparando todas estas gráficas con las obtenidas por el esquema numérico (3.2.2)-(3.2.6), notamos que las soluciones numéricas son iguales a los aspectos macroscópicos de estas soluciones en el álgebra de Colombeau.

También es de notar que las gráficas de los aspectos macroscópicos difieren de las gráficas obtenidas de la solución débil, esto se debe a varias razones.

El sistema de ecuaciones (4.2.12)-(4.2.17) en la solución débil, no es equivalente al sistema (5.2.3), (5.2.4), (5.2.8)-(5.2.11) en el álgebra de Colombeau, en el caso que u y σ sean funciones discontinuas. Ya que para encontrar el sistema (4.2.12)-(4.2.17), fue necesario convertir el sistema (3.1.3)-(3.1.4) en el sistema conservativo (4.1.3)-(4.1.4), pero cuando reemplazamos (3.1.3) en (3.1.4) para obtener (4.1.4), en el caso que u y σ son funciones discontinuas, estamos haciendo uso injustificado de multiplicación de distribuciones, la cual no está definida en la teoría de distribuciones. También si analizamos este procedimiento desde el punto de vista en G , notamos que al llevar (3.1.3) en (3.1.4) para obtener (4.1.4), estamos haciendo un uso indebido de la asociación " \approx ", pues ella no se preserva bajo producto de elementos en G . Esto es:

Consideremos

$$u_t + uu_x \approx \sigma_x \quad 5.5.1$$

$$\sigma_t + u\sigma_x \approx u_x \quad 5.5.2$$

Este sistema en G , no es equivalente al sistema (4.1.3)-(4.1.4) ya que de (5.5.1) tenemos que $u_t + uu_x = \sigma_x + \Delta$, donde $\Delta \approx 0$; y sustituyendo en (5.5.2) obtenemos

$$\left(\sigma + \frac{u^2}{2} \right)_t + \left(\frac{u^3}{3} - u \right)_x \approx \Delta \cdot u \quad 5.5.3$$

La ecuación (5.5.3) es diferente a la ecuación (4.1.4), pues si $\Delta \approx 0$ y $u \in G$, entonces en general $\Delta \cdot u$ no está asociado a cero, pues la asociación no se preserva bajo elementos de G . De aquí estos sistemas no pueden ser equivalentes. Una condición suficiente para que estos sistemas sean equivalentes es que $u \in C^\infty$, pues en este caso $\Delta \cdot u \approx 0$.

6 CONCLUSIONES

- En el álgebra de Colombeau " G ", podemos dar sentido al producto de distribuciones, y así usando la asociación " \approx " podemos encontrar distribuciones asociadas a términos no lineales.
- La asociación nos permite encontrar una gran variedad de elementos en " G " asociados a una distribución.
- Las soluciones numéricas representan los aspectos macroscópicos de las soluciones en " G ", de la **Clase 1**.
- Las soluciones en " G " están de acuerdo con lo discutido en [1]-[4], para sistemas no conservativos.
- De acuerdo con [3] el sistema (3.1.3)-(3.1.4) puede escribirse en forma conservativa. Ahora, dependiendo de la situación física a considerar, las soluciones débiles son aceptables sólo cuando los saltos de discontinuidad de u , $[u] = u_r - u_l$, cumplan que $|[u]| < 2\sqrt{3}$, donde u_r, u_l son los valores constantes de u a la derecha e izquierda del choque respectivamente.

7 TRABAJO FUTURO

Sería interesante poder encontrar otros esquemas numéricos estables que generen aspectos macroscópicos de otras soluciones en " G ".

BIBLIOGRAFIA

1. M. Oberguggenberger, "Multiplications of Distributions and Applications to Partial Differential Equations", Pitman Research Notes in Mathematics, Vol.259, Longman, Essex (1992).
2. J.J. Cauret, J.F.Colombeau and A.Y. Le Roux, "Discontinuous Generalized Solutions of Nonlinear Nonconservative Hyperbolic Equations", Journal of Mathematical Analysis And Applications 139, 552-573 (1989).
3. J.F.Colombeau, A.Y. Le Roux, A. Noussair And B. Perrot, "Microscopic Profiles of Shock Waves and Ambiguities in Multiplications of Distributions", SIAM J. NUMER ANAL, Vol.26, No. 4, PP. 871-883, August 1989.
4. H.A.Biagioni, "A Nonlinear Theory of Generalized Functions", Lecture Notes Mathematics, Vol.1421, Springer-Verlag, New York/ Berlin 1990.
5. Evans, Lawrence C . "Partial Differential Equations", Graduate Studies in Mathematics Vol 19, American Mathematical Society, 1998.
6. J.F.Colombeau And A.Y. Le Roux, "Multiplications of Distributions in Elasticity and Hydrodynamics", J. Math. Phys, 29, No.2,(1988). PP 315-319.
7. Peter D Lax, "Functional Analysis ", Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Intercience Series of Texts, Monographs, and Tracts, 2002.

8. Randall J. Leveque, "Numerical Methods for Conservation Laws", Lectures in mathematics, second Edition, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.
9. Peter Lax, "Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves", Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1973.
10. Rózga, Krzysztof, "Colombeau Algebras And Shock-Waves", Seminario Interuniversitario de Investigacion en Ciencias Matemáticas, 29 de Febrero, 2008.
11. Shilov, George, "Generalized Functions and Partial Differential Equation", Gordon and Breach, New York . London, Paris, Science Publishers, 1968.
12. Ram P. Kanwal, "Generalized Function: Theory and Technique", Mathematic in Science and Ingeneering, Vol.71, 1983, Academic Press.
13. Dirac P.A.M, "Theory of Emission and Absorption of radiation", Proc. Roy. Soc, Serie A ,114,1927, PP. 243-162.
14. Francois Tréves, "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels", Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2006.

APENDICE A.

```
function u = ucero(x)
if x <= 0
    u = 1;
else
    u = 0;
end
```

```
function v = vcero(x)
if x <= 0
    v = 0;
else
    v = 0;
end
```

Esquema C.C.R

```
%function [x,y,j,k] = C.C.R(a,b,lambda,T,alfa)
%h = (b-a)/M; % s - st
alfa=1;
h=0.01;
lambda=0.2;
k = h*lambda;
T=1;
ns = ceil(T/k);
a=-1;
b=6;
M = ((b+ns*h)-(a-2*ns*h))/h;
x = (a-(2*ns)*h):h:(b+(ns)*h); % space variable discretized
time = 0;
t_now = 1;
t_new = 2;
for m=1:M+1
```

```

u(1,m) = ucero(x(m)); %f(x(m)); % f = u0
v(1,m) = vcero(x(m));
end
for n=1:ns + 1
    time = time + k;
    %u(t_new, 1) = ucerot(time); %g(time); % g(time,x(1))=
    for m=3:M
        ww(t_now,m) = (1/2)*(u(t_now,m) + u(t_now,m-1));
        ww(t_now,m-1) = (1/2)*(u(t_now,m-1) + u(t_now,m-2));
        ww(t_now,m+1) = (1/2)*(u(t_now,m+1) + u(t_now,m));
        s(t_now,m) = u(t_now,m) - lambda*ww(t_now,m)*(u(t_now,m) - u(t_now,m-1));
        s(t_now,m+1) = u(t_now,m+1) - lambda*ww(t_now,m+1)*(u(t_now,m+1) - u(t_now,m));
        s(t_now,m-1) = u(t_now,m-1) - lambda*ww(t_now,m-1)*(u(t_now,m-1) - u(t_now,m-2));
        q(t_now,m) = v(t_now,m) - lambda*ww(t_now,m)*(v(t_now,m)-v(t_now,m-1));
        q(t_now,m+1) = v(t_now,m+1) - lambda*ww(t_now,m+1)*(v(t_now,m+1)-v(t_now,m));
        q(t_now,m-1) = v(t_now,m-1) - lambda*ww(t_now,m-1)*(v(t_now,m-1)-v(t_now,m-2));
        u(t_new,m) = s(t_now,m) + (1/2)*lambda*(q(t_now,m+1) - q(t_now,m-1)) +
(1/2)*lambda*(s(t_now,m+1) - 2*s(t_now,m) + s(t_now,m-1));
        v(t_new,m) = q(t_now,m) + (1/2)*lambda*(s(t_now,m+1) - s(t_now,m-1)) +
(1/2)*lambda*(q(t_now,m+1) - 2*q(t_now,m) + q(t_now,m-1));
    end
    %u(t_new,M+1) = u(t_new,M);

    y = u(t_new,:);
    z = v(t_new,:);
    t_now = t_new;
    %t_new = t_new + 1;
    t_new = mod(n+1,2) + 1;
end
w = a:h:b;
plot(w,y(2*ns+1:2*ns+length(w)),'o')
%RRRR=length(z)
hold on
plot(w,z(2*ns+1:2*ns+length(w)),'*')
hold off

```

APENDICE B

```
function u = ucero(x)
```

```
if x<= 0
    u = -1;
else
    u = 0;
end
```

```
function v = vcero(x)
```

```
if x<= 0
    v = 0;
else
    v = 0;
end
```

Esquema C.C.R.M

```
%function [x,y,j,k] = R.O(a,b,lambda,T,alfa)
%h = (b-a)/M; % s - st
alfa=1;
h=0.01;
lambda=0.2;
k = h*lambda;
T=0.5;
ns = ceil(T/k);
a=-6;
b=6;
M = ((b+2*ns*h)-(a-ns*h))/h;
x = (a-ns*h):h:(b+2*ns*h); % space variable discretized
time = 0;
t_now = 1;
```

```

t_new = 2;
for m=1:M+1
    u(1,m) = ucero(x(m)); %f(x(m)); % f = u0
    v(1,m) = vcero(x(m));
end
for n=1:ns + 1
    time = time + k;
    %u(t_new, 1) = ucerot(time); %g(time); % g(time,x(1))=
    for m=2:M-1

        ww(t_now,m) = (1/2)*(u(t_now,m) + u(t_now,m-1));

        ww(t_now,m+1) = (1/2)*(u(t_now,m+1) + u(t_now,m));
        ww(t_now,m+2) = (1/2)*(u(t_now,m+2) + u(t_now,m+1));
        s(t_now,m) = u(t_now,m) - lambda*ww(t_now,m+1)*(u(t_now,m+1) - u(t_now,m));
        s(t_now,m+1) = u(t_now,m+1) - lambda*ww(t_now,m+2)*(u(t_now,m+2) -
u(t_now,m+1));
        s(t_now,m-1) = u(t_now,m-1) - lambda*ww(t_now,m)*(u(t_now,m) - u(t_now,m-1));
        q(t_now,m) = v(t_now,m) - lambda*ww(t_now,m+1)*(v(t_now,m+1)-v(t_now,m));
        q(t_now,m+1) = v(t_now,m+1) - lambda*ww(t_now,m+2)*(v(t_now,m+2)-v(t_now,m+1));
        q(t_now,m-1) = v(t_now,m-1) - lambda*ww(t_now,m)*(v(t_now,m)-v(t_now,m-1));
        u(t_new,m) = s(t_now,m) + (1/2)*lambda*(q(t_now,m+1) - q(t_now,m-1)) +
(1/2)*lambda*(s(t_now,m+1) - 2*s(t_now,m) + s(t_now,m-1));
        v(t_new,m) = q(t_now,m) + (1/2)*lambda*(s(t_now,m+1) - s(t_now,m-1)) +
(1/2)*lambda*(q(t_now,m+1) - 2*q(t_now,m) + q(t_now,m-1));
    end
    %u(t_new,M+1) = u(t_new,M);

    y = u(t_new,:);
    z = v(t_new,:);
    t_now = t_new;
    %t_new = t_new + 1;
    t_new = mod(n+1,2) + 1;
end
w = a:h:b;
plot(w,y(ns+1:ns+length(w)),'o')
hold on
plot(w,z(ns+1:ns+length(w)),'*')
hold off

```

APENDICE C

```
function u = ucero(x)
```

```
if x <= 0
    u = -1 % ó u = 1;
else
    u = 0;
end
```

```
function v = vcero(x)
```

```
if x <= 0
    v = 0;
else
    v = 0;
end
```

Esquema C.N.P.R

```
%function [x,y,j,k] = C.N.P.R(a,b,lambda,T,alfa)
%h = (b-a)/M; % s - st
alfa=1;
h=0.01;
lambda=0.2;
k = h*lambda;
T=0.5;
ns = ceil(T/k);
a=-1;
b=6;
M = (b-(a-(2*ns*h)))/h;
x = (a-2*ns*h:h:b); % space variable discretized
time = 0;
t_now = 1;
t_new = 2;
for m=1:M+1
    u(1,m) = ucero(x(m)); %f(x(m)); % f = u0
    v(1,m) = vcero(x(m));
end
for n=1:ns + 1
```

```

time = time + k;
%u(t_new, 1) = ucerot(time); %g(time); % g(time,x(1))=
for m=3:M+1
    u(t_new,m) = (1/4)*(u(t_now,m) + 2*u(t_now,m-1) + u(t_now,m-2)) -
    alfa*lambda*(1/2)*(1/4)*(u(t_now,m) + 2*u(t_now,m-1) + u(t_now,m-2))*(u(t_now,m)-
    u(t_now,m-2))+ lambda*(1/2)*(v(t_now,m)-v(t_now,m-2));
    v(t_new,m) = (1/4)*(v(t_now,m) + 2*v(t_now,m-1) + v(t_now,m-2)) -
    alfa*lambda*(1/2)*(1/4)*(v(t_now,m) + 2*v(t_now,m-1) + v(t_now,m-2))*(v(t_now,m)-
    v(t_now,m-2))+ lambda*(1/2)*(u(t_now,m)-u(t_now,m-2));
end
%u(t_new,M+1) = u(t_new,M);
y = u(t_new,:);
z = v(t_new,:);
t_now = t_new;
%t_new = t_new + 1;
t_new = mod(n+1,2) + 1;
end
w = a:h:b;
plot(w,y(2*ns+1:2*ns+length(w)),'o')
hold on
plot(w,z(2*ns+1:2*ns+length(w)),'*')
hold off

```