

CONTROL DE LAS OSCILACIONES DE UN PÉNDULO
VARIANDO LA LONGITUD DE SU CUERDA

by

MOISES R. DELGADO OLORTEGUI

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el
grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

en

MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

MAYAGÜEZ CAMPUS

2005

Aprobada por:

Arturo Portnoy, Ph.D
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Haedeh Gooransarab, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Krzysztof Rozga, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Pedro Vásquez, D.Sc.
Director de Departamento

Fecha

Uroyoán Walker Ramos, Ph.D
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Abstract

In this work we find an efficient method for stopping the pendulum's oscillations, which is moving on a plane, by variations in the pendulum's length. This strategy was found casting the problem as an optimal control problem. We deduce the pendulum's governing equations and using the *Pontryagin's Principle* [3] we find optimal solutions to this problem.

Using a similar analysis we find strategies to stop the pendulum's oscillations which is moving in the space. We show graphically the effectiveness of our strategies and make analytical and numerical comparisons.

Resumen

En este trabajo encontramos un eficiente método para disminuir las oscilaciones de un péndulo, que se mueve en un plano, variando la longitud de su cuerda. Esta estrategia fue encontrada encarando el problema como un problema de control óptimo. Deducimos las ecuaciones que gobiernan dicho péndulo y usando el *principio de Pontryagin* [3] encontramos soluciones óptimas a nuestro problema.

Usando un análisis similar buscamos estrategias para disminuir las oscilaciones de un péndulo en el espacio. Mostramos gráficamente la efectividad de tales estrategias y hacemos comparaciones analíticas y numéricas.

© Moisés Delgado O. 2005

A mis padres y hermanos

Agradecimiento

Quiero expresar mi gratitud a:

Pedro Vásquez, César Acuña y al Departamento de Matemáticas, por darme la oportunidad de estudiar en la Universidad de Puerto Rico.

El Comité Graduado por sus sugerencias en este trabajo, en especial a mi asesor Arturo Portnoy por sus sabios consejos.

Todos los compañeros y amigos, en especial a Humberto Pérez.

Mi familia en Perú, a la cual se lo debo todo.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Justificación	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Preliminares teóricos	3
1.3.1. Multiplicadores de Lagrange	3
1.3.2. Variación de un funcional	8
1.3.3. La ecuación de Euler	12
2. El péndulo en el plano	18
2.1. Análisis del problema	18
2.2. Un funcional de energía para el péndulo en el plano	21
2.3. Controles discontinuos acotados	24
2.4. Control óptimo y principio de Pontryagin	29
2.5. Análisis numérico para el péndulo en el plano	41
3. El péndulo en el espacio	45

3.1. Análisis del problema	45
3.2. Funcional de energía para el péndulo en el espacio	48
3.3. Principio de Pontryagin para el péndulo en el espacio	51
3.4. Análisis numérico para el péndulo en el espacio	54
4. Conclusiones	60
5. Trabajos futuros	61
A. Programas Runge Kutta de orden 4 para el Péndulo en el Plano	64
A.1. Programa para el péndulo de cuerda fija	64
A.2. Programas para el péndulo usando la estrategia heurística y la es- trategia óptima	65
B. Programas Runge Kutta de orden 4 para el Péndulo en el Espacio	68
B.1. Programa para el péndulo de cuerda fija	68
B.2. Programa para el péndulo usando la estrategia heurística, la estrate- gia óptima en el plano y la estrategia óptima en el espacio	69

Índice de figuras

2.1. Péndulo en el plano	18
2.2. Parábola con $A \geq 0$ y $B \geq 0$	38
2.3. Parábola con $B < 0$ y $-B/2A \leq \alpha$	38
2.4. Parábola con $B < 0$ y $-B/2A > \alpha$	38
2.5. Parábola con $A < 0$ y $B \leq 0$	39
2.6. Parábola con $B > 0$ y $-B/2A \leq \alpha$	39
2.7. Parábola con $B > 0$ y $-B/2A > \beta$	40
2.8. Parábola co $B > 0$ y $-B/2A \leq \beta$	40
2.9. Energía y Angulo $theta$ para un péndulo en el plano con cuerda de longitud 1	42
2.10. Comparación entre la estrategia heurística (izquierda) y la óptima (derecha) para un paso $h=0.1$	42
2.11. Comparación entre la estrategia heurística(izquierda) y la óptima(derecha) para un paso $h=0.05$	43
2.12. Comparación entre la estrategia heurística(izquierda) y la óptima(derecha) para un paso $h=0.01$	43

2.13. Comparación entre los controles de la estrategia heurística(izquierda)	
y la óptima(derecha) para un paso $h=0.01$	44
3.1. Péndulo en el espacio	45
3.2. Energía y Angulo ϕ del péndulo en el espacio con cuerda $l = 1$	55
3.3. Estrategia óptima aplicada al péndulo en el espacio	55
3.4. Función control para el péndulo en el espacio	56
3.5. Estrategia heurística en el plano aplicada al péndulo en el espacio	57
3.6. Comparacion entre el control heurístico (izquierda) y el óptimo (derecha)	57
3.7. Comparación de los angulos ϕ	58
3.8. Comparación de las curvas que describe el péndulo sobre el plano xy .	58
3.9. Estrategia óptima del plano aplicada al espacio	59

Capítulo 1

Introducción

Experimentos y simulaciones anteriores han demostrado que existen formas de parar o reducir las oscilaciones de un péndulo variando la longitud de su cuerda. Estas estrategias consisten en alargar rápidamente la longitud de la cuerda del péndulo cuando éste alcanza su máxima rapidez y acortarla rápidamente cuando su rapidez sea mínima.

Esta estrategia heurística se basa de la ecuación:

$$l\theta'' + 2l'\theta' + g\text{sen}\theta = 0$$

la cual es la ecuación gobernante del péndulo con cuerda de longitud variable que se mueve en un plano. Observe que la presencia del factor l' en la ecuación gobernante actúa como un coeficiente de amortiguamiento o fricción siempre que $l' > 0$.

Aunque en la literatura no se ha encontrado mucho acerca de procedimientos para controlar oscilaciones en péndulos, casi universalmente se procede moviendo el punto

de apoyo de dicha cuerda.

Nosotros empezaremos estudiando las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un péndulo en el plano, luego usando la teoría de control óptimo y el principio de Pontryagin para controles acotados, buscaremos estrategias óptimas que nos permitan a partir de estas ecuaciones minimizar la energía de oscilación de dicho péndulo variando la longitud de su cuerda. Posteriormente mostraremos numéricamente y gráficamente que tales estrategias son eficientes. Veremos como la energía del péndulo va disminuyendo mientras se aplica tal estrategia.

Posteriormente usando el mismo análisis haremos lo mismo para un péndulo que oscila en el espacio.

Finalmente haremos comparaciones de la estrategia heurística y la estrategia óptima encontrada, tanto para el péndulo plano como para el péndulo en el espacio, además veremos que sucede si las estrategias del péndulo en el plano son aplicadas para el espacio.

1.1. Justificación

Existen máquinas que usan el sistema de un péndulo para operar, como lo son por ejemplo las gruas. Muchas veces es necesario parar o reducir las oscilaciones en una grua al momento de operar.

Estudios anteriores de control de oscilaciones en péndulos sugieren ciertas formas para controlar oscilaciones. Estas formas consisten en mover la grua o mover el punto de apoyo de su cuerda. Mover la grua para controlar las oscilaciones puede ser ineficiente y otras veces imposible de hacer; por lo tanto surge la inquietud de

buscar nuevas formas para controlar tales oscilaciones.

1.2. Objetivos

- Modelar una grua como un péndulo con cuerda de longitud variable y buscar formas para reducir las oscilaciones del péndulo variando la longitud de su cuerda.
- Encarar el problema como un problema de control óptimo y buscar una estrategia óptima para reducir sus oscilaciones.
- Comparar la estrategia óptima con otras estrategias encontradas.
- Analizar tanto un péndulo que se mueve en el plano como también un péndulo en el espacio, y comparar sus estrategias.
- Ilustrar numéricamente y gráficamente con el uso de *Matlab*, la efectividad de tales estrategias.

1.3. Preliminares teóricos

1.3.1. Multiplicadores de Lagrange

Supongamos que tenemos el problema de minimizar la función $F = F(x_1, x_2)$, donde x_1 y x_2 no son independientes, sino que están restringidos por la ecuación

$$\psi(x_1, x_2) = 0 \tag{1.1}$$

En caso de tener un mínimo (x_1^*, x_2^*) , una condición necesaria es:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (1.2)$$

donde dF es la diferencial de F y $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ son las derivadas parciales de F evaluadas en (x_1^*, x_2^*) . Sin embargo, como las diferenciales dx_1 y dx_2 no son valores arbitrarios, sino que están relacionados por la ecuación:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (1.3)$$

luego no podemos concluir que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

ya que si esto fuese así, tendríamos 2 ecuaciones para determinar los valores x_1^*, x_2^* ; estos valores que obviamente satisfecerían la ecuación (1.2), no tendrían por que satisfacer la ecuación (1.1).

Para encontrar valores que satisfagan ambas ecuaciones a la vez, elegimos en forma arbitraria a uno de ellos como el valor independiente. Luego usando la ecuación (1.3), dF queda expresada en términos de la diferencial independiente. Supongamos que dx_2 es la diferencial independiente. Asumiendo que $\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \neq 0$, de la ecuación (1.3) tenemos:

$$dx_1 = -\frac{\partial \psi / \partial x_2}{\partial \psi / \partial x_1} dx_2$$

luego

$$dF = \left[-\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \psi / \partial x_2}{\partial \psi / \partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \right] dx_2$$

Donde dx_2 puede ser considerado arbitrario. Para que esta última ecuación sea satisfecha para cualquier valor de dx_2 debemos tener que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0$$

Esta ecuación junto con la ecuación

$$\psi(x_1, x_2) = 0$$

son las ecuaciones simultaneas que deben satisfacer necesariamente (x_1^*, x_2^*) para ser un mínimo local.

Por otro lado, sin justificación a priori consideremos la siguiente función:

$$f = F(x_1, x_2) + \lambda_1 \psi(x_1, x_2) \tag{1.4}$$

donde λ_1 es un parámetro por determinar. Observe que por la ecuación (1.1), $\psi = 0$.

Luego lo que realmente tenemos es:

$$f(x_1, x_2) = F(x_1, x_2)$$

La condición necesaria para un mínimo local es que:

$$df(x_1, x_2) = dF(x_1, x_2) = 0 \quad (1.5)$$

es decir:

$$df = dF + \lambda_1 d\psi = 0$$

o también

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) dx_2 = 0 \quad (1.6)$$

Donde las derivadas parciales están evaluadas en el mínimo local (x_1^*, x_2^*) .

Al igual que antes dx_1 , dx_2 no son independientes, significa que no podemos concluir que cada coeficiente en la ecuación (1.6) debe ser cero. Escogamos dx_1 como la diferencial dependiente y a dx_2 como la diferencial independiente. Además escogamos a λ_1 , el cual esta a nuestra disposición, como el valor que anule a un coeficiente. Por ejemplo, supongamos que λ_1 anula al coeficiente de dx_1 ; es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0,$$

luego de la ecuación (1.6) nos queda:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) dx_2 = 0,$$

como dx_2 es arbitrario tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0.$$

Combinando estos resultados tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \quad (1.8)$$

$$\psi(x_1, x_2) = 0. \quad (1.9)$$

Estas 3 ecuaciones son las que simultaneamente deben satisfacer los valores x_1^* , x_2^* y λ_1 para que (x_1^*, x_2^*) sea un mínimo local. Es importante observar que eliminando λ_1 de las dos primeras obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0$$

$$\psi(x_1, x_2) = 0$$

el cual es el sistema de dos ecuaciones para determinar (x_1^*, x_2^*) .

Note que las ecuaciones (1.7) y (1.8) son las ecuaciones que resultarían de considerar dx_1 y dx_2 como si fuesen independientes en la ecuación (1.6); es decir en la introducción del multiplicador λ_1 nos permite tratar las variables x_1 , x_2 como si fuesen independientes.

1.3.2. Variación de un funcional

Comenzamos dando algunos resultados importantes del análisis real, cuyas demostraciones se encuentran en [5] y nos servirán para demostrar teoremas posteriores.

Lema 1 : Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, y si

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0 \quad (1.10)$$

para toda función continua h sobre (a, b) tal que $h(a) = h(b) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Lema 2 : Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y si

$$\int_a^b f(x)h'(x)dx = 0 \quad (1.11)$$

para toda función diferenciable h sobre (a, b) tal que $h(a) = h(b) = 0$, entonces $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, donde c es una constante.

Lema 3 : Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y si

$$\int_a^b f(x)h''(x)dx = 0 \quad (1.12)$$

para toda función 2 veces diferenciable h sobre (a, b) tal que $h(a) = h(b) = 0$ y $h'(a) = h'(b) = 0$, entonces $f(x) = c + dx$ para todo x sobre $[a, b]$, donde c y d son constantes.

Lema 4 : si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$, y si

$$\int_a^b [f(x)h(x) + g(x)h'(x)]dx = 0 \quad (1.13)$$

para toda función diferenciable $h(x)$ sobre (a, b) tal que $h(a) = h(b) = 0$, entonces $g(x)$ es diferenciable, y $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Se llama *funcional* a una correspondencia que asigna a cada función (o curva) de un conjunto de funciones, un cierto número real. En otras palabras un funcional es un cierto tipo de operador que actúa sobre un conjunto de funciones y asigna a cada función un número real.

Los funcionales juegan un papel importante en muchos problemas del análisis, geometría, mecánica, etc.

Dado un espacio vectorial normado V ; sea J un funcional definido sobre V . Se dice que J es un *funcional lineal continuo* si:

1. $J(\alpha y) = \alpha J(y)$ para cualquier $y \in V$ y para cualquier número real α .
2. $J(y_1 + y_2) = J(y_1) + J(y_2)$ para cualquier y_1, y_2 en V .
3. J es una función continua de V en R .

Introduciremos el concepto de *variación de un funcional* [10], análogo al concepto de la diferencial de una función. Este concepto será usado para calcular extremos de funcionales.

Sea $J(y)$ un funcional definido sobre un espacio vectorial normado, y sea :

$$\Delta J(h) = J(y + h) - J(y)$$

el incremento de J , correspondiente al incremento $h = h(x)$ de la variable independiente $y = y(x)$. Si y es fijo, $\Delta J(h)$ es un funcional de h , en general un funcional no lineal.

Suponga que:

$$\Delta J(h) = d(h) + \varepsilon|h|,$$

donde $d(h)$ es un funcional lineal y además, $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $|h| \rightarrow 0$ ($|h|$ significa la norma de h). Luego el funcional $J(y)$ se dice ser diferenciable y la parte lineal del incremento $\Delta J(h)$, es decir, el funcional lineal $d(h)$ el cual difiere de $\Delta J(h)$ por un infinitesimal de orden mayor que 1 respecto a $|h|$, es llamado la *variación* (o diferencial) de $J(h)$ y es denotado por $\delta J(h)$.

Los siguientes teoremas son importantes para el desarrollo del trabajo.

Teorema 1 : El diferencial de un funcional diferenciable es único.

Prueba

Primero mostremos que si $\alpha(h)$ es un funcional lineal y si:

$$\frac{\alpha(h)}{|h|} \rightarrow 0$$

cuando $|h| \rightarrow 0$, entonces $\alpha(h) \equiv 0$.

En efecto, suponga que $\alpha(h) \neq 0$ para algún $h_0 \neq 0$. Luego, sea

$$h_n = \frac{h_0}{n}, \quad \lambda = \frac{\alpha(h_0)}{|h_0|}$$

Vemos que $|h_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(h_n)}{|h_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\alpha(h_0)}{n|h_0|} = \lambda \neq 0$$

contradiendo la hipótesis.

Ahora supongamos que el diferencial del funcional $J(y)$ no es único, es decir

$$\Delta J(h) = \alpha_1(h) + \epsilon_1|h|$$

$$\Delta J(h) = \alpha_2(h) + \epsilon_2|h|$$

donde α_1, α_2 son funcionales lineales, y $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $|h| \rightarrow 0$. Esto implica que

$$\alpha_1(h) - \alpha_2(h) = \epsilon_2|h| - \epsilon_1|h|$$

es decir $\alpha_1(h) - \alpha_2(h)$ es un infinitesimal de orden mayor que 1 respecto a $|h|$. Como $\alpha_1(h) - \alpha_2(h)$ es un funcional lineal, de la primera parte de la demostración se sigue que $\alpha_1(h) - \alpha_2(h)$ es idénticamente nulo.

Teorema 2 : Una condición necesaria para que un funcional diferenciable $J(y)$ tenga un extremo en $y = \hat{y}$ es que su variación sea cero para $y = \hat{y}$, es decir que:

$$\delta J(h) = 0 \tag{1.14}$$

para $y = \hat{y}$ y para todo h admisible.

Prueba

Suponga que $J(y)$ tiene un mínimo para $y = \hat{y}$. Por la definición de variación $\delta J(h)$, tenemos que

$$\Delta J(h) = \delta J(h) + \epsilon|h|, \quad (1.15)$$

donde $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $|h| \rightarrow 0$. Es decir para $|h|$ suficientemente pequeño, el signo de $\Delta J(h)$ será el mismo de $\delta J(h)$. Supongamos ahora que $\delta J(h_0) \neq 0$ para algún h_0 admisible. Entonces para cualquier $c > 0$, no importa cuan pequeño, tenemos

$$\delta J(-ch_0) = -\delta J(ch_0)$$

Luego, de (1.15), $\Delta J(h)$ puede tener ambos signos para $|h|$ arbitrariamente pequeño. Pero esto es imposible, ya que por hipótesis $J(y)$ tiene un mínimo para $y = \hat{y}$, es decir;

$$\Delta J(h) = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) \geq 0$$

para todo $|h|$ suficiente pequeño.

1.3.3. La ecuación de Euler

Un problema variacional simple puede ser el formulado de la siguiente manera.

Sea $F(x, y, z)$ una función con primeras y segundas derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Luego entre todas las funciones $y(x)$, continuamente diferenciables en $a \leq x \leq b$ que satisfagan:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

encontrar la función para la cual el funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.16)$$

tenga un extremo. En otras palabras, este problema variacional consiste en encontrar un extremo de un funcional de la forma (1.16), donde las funciones admisibles consisten en todas las curvas suaves que unen dos puntos fijos.

Para aplicar la condición necesaria de extremo a este problema, dado en el Teorema 2, veamos como es la variación del funcional J .

Supongamos que incrementamos a $y(x)$ con $h(x)$, donde a fin que la función $y(x) + h(x)$ satisfaga las condiciones de frontera debemos tener que:

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Luego para este incremento en y , el correspondiente incremento en J será:

$$\Delta J = J(y + h) - J(y) = \int_a^b F[x, y + h, (y + h)'] dx - \int_a^b F(x, y, y') dx$$

$$\Delta J = J(y + h) - J(y) = \int_a^b [F(x, y + h, y' + h') dx - F(x, y, y')] dx$$

Usando la fórmula de Taylor, tenemos:

$$\Delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'] dx + \dots \quad (1.17)$$

donde F_y , $F_{y'}$ denotan derivadas parciales y los puntos suspensivos denotan términos de orden mayor que 1 con respecto a h y h' . Luego la integral en (1.17) representa la parte lineal de ΔJ , y por lo tanto la variación de $J(y)$. De acuerdo con el Teorema 2, una condición necesaria para que $y = y(x)$ sea un extremo de J es que:

$$\delta J = \int [F_y h + F_{y'} h'] dx = 0 \quad (1.18)$$

para toda función h admisible. Pero de acuerdo con el lema 4, (1.18) implica que:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (1.19)$$

Este resultado es conocido como la ecuación de *Euler*; es decir

Teorema 3 : Sea $J(y)$ un funcional de la forma:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

definido sobre un conjunto de funciones $y(x)$, las cuales tienen primeras derivadas continuas en $[a, b]$ y satisfacen las condiciones de frontera $y(a) = A$, $y(b) = B$. Entonces una condición necesaria para que $J(y)$ tenga un extremo para una función dada $y(x)$, es que $y(x)$ satisfaga la ecuación de Euler (1.19).

Las curvas integrales de la ecuación de Euler son llamadas *extremales*. Como la ecuación de Euler es una ecuación diferencial de segundo orden, su solución en general depende de 2 constantes arbitrarias las cuales son determinadas de las condiciones de frontera $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Hasta ahora hemos considerado funcionales que dependen de una sola función $y = y(x)$ y de su primera derivada y' . Esto se puede generalizar para funcionales que dependan de varias funciones y de sus derivadas de orden mayor que uno, para funcionales que dependan de funciones sujetas a restricciones que no sean las condiciones de frontera o para funcionales donde las condiciones de frontera sean libres; tal como se muestran en los siguientes teoremas cuyas demostraciones se encuentran en [6].

Teorema 4 : Sea $F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$ una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Una condición necesaria para que la curva

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

sea un extremal del funcional

$$\int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (1.20)$$

es que las funciones $y_i(x)$ satisfagan las ecuaciones de Euler:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.21)$$

Teorema 5 : Sea $F(x, y, z_1, \dots, z_n)$ una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Dado un funcional de la forma

$$\int_a^b F(x, y, y', \dots, y^n) dx \quad (1.22)$$

definido sobre funciones con derivadas continuas hasta de orden n que satisfacen:

$$y(a) = A_0, y'(a) = A_1, \dots, y^{n-1}(a) = A_{n-1}$$

$$y(b) = B_0, y'(b) = B_1, \dots, y^{n-1}(b) = B_{n-1}$$

Una condición necesaria para que la curva $y = y(x)$ sea un extremal del funcional es que satisfaga la ecuación de Euler:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} = 0 \quad (1.23)$$

Teorema 6 : Dado el funcional

$$J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$$

donde $y = t(x)$, $z = z(x)$ satisfacen la restricción:

$$g(x, y, z, y', z') = 0 \quad (1.24)$$

y las condiciones de frontera:

$$y(a) = A_1, y(b) = B_1$$

$$z(a) = A_2, z(b) = B_2$$

y además, sea:

$$y = y^*(x), \quad z = z^*(x)$$

un extremo para J , entonces, si g_y y g_z no se anulan simultáneamente en algún punto de la superficie g , existe una función $\lambda(x)$ tal que $y^*(x), z^*(x)$ es un extremal del funcional:

$$\int_a^b [F + \lambda(x)g] dx$$

es decir satisface las ecuaciones

$$F_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (1.25)$$

$$F_z + \lambda g_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \quad (1.26)$$

Este último teorema, por simplicidad, ha sido enunciado para sólo 2 funciones y, z ; mas puede ser generalizado para n funciones $f_i, (i = 1, \dots, n)$ con k restricciones $g_i, (i = 1, \dots, k)$.

En el siguiente capítulo empezaremos a estudiar un péndulo con cuerda de longitud variable que oscila sobre un plano, deducir las ecuaciones que lo gobiernan y analizarlas; empezando así la parte más importante de este trabajo.

Capítulo 2

El péndulo en el plano

2.1. Análisis del problema

Sea un sistema de péndulo con cuerda de longitud variable que se mueve sobre un plano, tal como se muestra en la Figura 2.1. Busquemos las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de dicho péndulo.

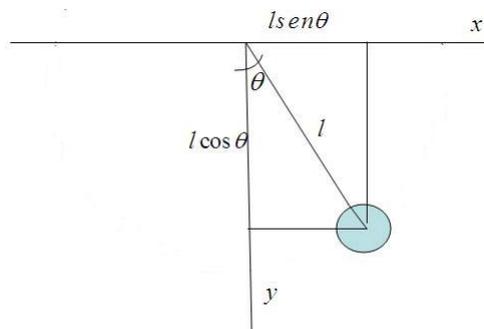


Figura 2.1: Péndulo en el plano

Usando la segunda ley de Newton

$$F = m \times a$$

donde m es la masa del péndulo y a es su aceleración; en forma vectorial tenemos que:

$$m(0, g) - (T \operatorname{sen}(\theta), T \operatorname{cos}(\theta)) = m(l \operatorname{sen}(\theta), l \operatorname{cos}(\theta))''$$

Donde l, θ son funciones del tiempo t y T es la tensión de la cuerda.

Efectuando las derivadas en el segundo miembro obtenemos:

$$(0, g) - (T \operatorname{sen}(\theta), T \operatorname{cos}(\theta)) = (l' \operatorname{sen}(\theta) + l \operatorname{cos}(\theta) \theta', l' \operatorname{cos}(\theta) - l \operatorname{sen}(\theta) \theta')'$$

$$(0, g) - (T \operatorname{sen}(\theta), T \operatorname{cos}(\theta)) = (l'' \operatorname{sen}(\theta) + 2l' \operatorname{cos}(\theta) \theta' + l \operatorname{cos}(\theta) \theta'' - l \operatorname{sen}(\theta) \theta'^2,$$

$$l'' \operatorname{cos}(\theta) - 2l' \operatorname{sen}(\theta) \theta' - l \operatorname{cos}(\theta) \theta'^2 - l \operatorname{sen}(\theta) \theta'')$$

es decir tenemos el sistema:

$$l'' \operatorname{sen}(\theta) + 2l' \operatorname{cos}(\theta) \theta' + l \operatorname{cos}(\theta) \theta'' - l \operatorname{sen}(\theta) \theta'^2 = -T \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.1)$$

$$l'' \operatorname{cos}(\theta) - 2l' \operatorname{sen}(\theta) \theta' - l \operatorname{cos}(\theta) \theta'^2 - l \operatorname{sen}(\theta) \theta'' = g - T \operatorname{cos}(\theta) \quad (2.2)$$

Estas son las ecuaciones gobernantes de un péndulo con cuerda de longitud variable sobre un plano. Algo muy importante es que si podemos controlar la cuerda l , podemos eliminar una de estas ecuaciones; es decir:

multiplicando (2.1) por $\operatorname{cos}(\theta)$, (2.2) por $\operatorname{sen}(\theta)$ y restando (1.1)-(1.2), tenemos:

$$2l' \theta' (\operatorname{cos}^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) + l (\operatorname{cos}^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) \theta'' = -g \operatorname{sen}(\theta)$$

simplificando nos queda:

$$l\theta'' + 2l'\theta' + g\text{sen}(\theta) = 0 \quad (2.3)$$

La cual representa la ecuación gobernante de un péndulo con cuerda de longitud variable. Observe que si la longitud de la cuerda fuera constante, l' sería igual a cero, luego obtendríamos la ecuación de un péndulo común.

Además podemos ver que l' actúa como un factor de *fricción* [2] cuando tiene signo positivo, es decir cuando l crece, evidentemente la longitud de la cuerda l no puede ser completamente creciente en nuestro problema.

Es importante notar que no es práctico acortar completamente la cuerda ($l = 0$), las razones son pérdida de tiempo y fenómenos curiosos como el llamado péndulo de Ehrenfest (este fenómeno produce oscilaciones crecientes cuando se le acorta lentamente la cuerda del péndulo); por lo tanto la estrategia no debe cambiar mucho la longitud de la cuerda.

Una estrategia heurística para disminuir las oscilaciones del péndulo sería alargar rápidamente la cuerda del péndulo ($l' > 0$) cuando éste tenga su máxima velocidad (θ' sea máximo), de esta forma tendremos el término positivo deseado para el amortiguamiento; y acortarla ($l' < 0$) cuando su velocidad sea cero ($\theta' = 0$), anulando así este término negativo. De esta forma reduciremos las oscilaciones del péndulo. Al final de este capítulo mostraremos numéricamente y gráficamente la efectividad de esta estrategia heurística.

2.2. Un funcional de energía para el péndulo en el plano

Una ecuación equivalente a la ecuación (2.3) es la siguiente:

$$\frac{1}{2}(l(s)\theta'(s))^2 + gl(s)(1 - \cos(\theta(s)))\Big|_0^T =$$

$$gl(s)\Big|_0^T - \int_0^T g\cos(\theta(s))l'(s) + (\theta'(s))^2l(s)l'(s)ds \quad (2.4)$$

En la parte izquierda de esta ecuación se muestra la suma de parte de la energía cinética (ya que falta el componente radial) y energía potencial del sistema. Llamemos a esto la *energía de oscilación*.

Para verificar la equivalencia de ecuaciones derivamos (2.4) con respecto a T , así:

$$l\theta'(l'\theta' + l\theta'') + gl'(1 - \cos(\theta)) + gl(\text{sen}(\theta)\theta') = gl' - g\cos(\theta)l' - ll'(\theta')^2$$

$$ll'\theta'^2 + l^2\theta'\theta'' + gl' - gl'\cos(\theta) + gl\theta'\text{sen}(\theta) = gl' - g\cos(\theta)l' - ll'(\theta')^2$$

finalmente tenemos:

$$2l'\theta' + l\theta'' + g\text{sen}(\theta) = 0$$

Observando la ecuación (2.4), vemos que el término $gl(s)\Big|_0^T$ se anulará en caso de que $l(0) = l(T)$, es decir si el péndulo tiene la misma longitud al inicio y al final del movimiento, es decir en los tiempos $t = 0$, $t = T$. Considerando esto último

tenemos que:

$$\frac{1}{2}(l(s)\theta'(s))^2 + gl(s)(1 - \cos(\theta(s))) \Big|_0^T = - \int_0^T g \cos(\theta(s))l'(s) + (\theta'(s))^2 l(s)l'(s)$$

representa la energía de oscilación del péndulo. Podemos ver que para quitarle dicha energía al péndulo, debemos minimizar el valor de la integral en esta ecuación; es decir:

Dado el funcional de energía:

$$J(\theta, l) = - \int_0^T g \cos(\theta(s))l'(s) + (\theta'(s))^2 ll' ds$$

sujeto a la restricción (2.3), deseamos encontrar $\theta(t), l(t)$ que minimisen J .

Por el teorema 6, tenemos que para un funcional de la forma

$$J(x, y, z) = \int_a^b F(x, y, z, y', z', y'', z'')$$

sujeto a la restricción:

$$G(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0$$

donde $y = y(x), z = z(x)$. Las ecuaciones para y, z que minimizan dicho funcional están dadas por las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\phi_y - \frac{d}{dx}\phi_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}\phi_{y''} = 0$$

$$\phi_z - \frac{d}{dx}\phi_{z'} + \frac{d^2}{dx^2}\phi_{z''} = 0$$

donde $\phi = F + \lambda G$

Para nuestro caso:

$$F = F(t, \theta, l, \theta', l', \theta'', l'') = -g \cos(\theta(s)) l'(s) - (\theta'(s))^2 l l'$$

$$G = G(t, \theta, l, \theta', l', \theta'', l'') = l(t) \theta''(t) + 2l'(t) \theta'(t) + g \operatorname{sen}(\theta(t))$$

Luego las ecuaciones de Euler son:

$$F_l + \lambda G_l - \frac{d}{dt}(F_{l'} + \lambda G_{l'}) + \frac{d^2}{dt^2}(F_{l''} + \lambda G_{l''}) = 0 \quad (2.5)$$

$$F_\theta + \lambda G_\theta - \frac{d}{dt}(F_{\theta'} + \lambda G_{\theta'}) + \frac{d^2}{dt^2}(F_{\theta''} + \lambda G_{\theta''}) = 0 \quad (2.6)$$

Resolviendo las derivadas para la ecuación (2.5) y simplificando tenemos la ecuación final:

$$2l\theta'\theta'' - \lambda\theta'' - g \operatorname{sen}(\theta)\theta' - 2\lambda'\theta' = 0 \quad (2.7)$$

Haciendo lo mismo para la ecuación (2.6) tenemos

$$2ll'\theta'' + gl' \operatorname{sen}(\theta)\theta' + \lambda g \cos(\theta)\theta' + 2l^2\theta' + 2ll''\theta' + \lambda l'' + l\lambda'' = 0 \quad (2.8)$$

Por lo tanto, las ecuaciones para $\theta(t), l(t)$ que minimizan el funcional

$$J(\theta, l) = - \int_0^T g \cos(\theta(s)) l'(s) + (\theta'(s))^2 l l' ds$$

sujeto a :

$$l(t)\theta''(t) + 2l'(t)\theta'(t) + g\text{sen}(\theta(t)) = 0$$

están dadas por las ecuaciones (2.7) y (2.8).

Además tenemos que decir que la función $\theta(t)$ satisface las condiciones:

$$\theta(0) = a$$

$$\theta'(0) = b$$

$$\alpha \leq l(t) \leq \beta$$

Estas condiciones deben ser tomadas en cuenta para resolver el sistema de ecuaciones.

Claramente podemos ver que tenemos un sistema de ecuaciones para las incógnitas (θ, l, λ) , un sistema no lineal de segundo orden. Además no conocemos las condiciones iniciales para λ .

Además las ecuaciones de Euler requiere que las funciones extremales tengan por lo menos derivadas continuas. Es decir, para este sistema θ y l deberán ser diferenciables, mostremos que este podría no ser nuestro caso.

2.3. Controles discontinuos acotados

Para muchas aplicaciones prácticas, la función control además de ser acotada, permite discontinuidades en algunos puntos. Ilustremos esto último planteando el

siguiente ejemplo.

Supongamos que deseamos conducir un carro de un punto fijo hacia otro, los puntos están sobre una recta a una distancia d el uno del otro. Supongamos que el único control que tenemos son los frenos y el acelerador (por simplicidad asumimos que el carro no tiene cambios).

Luego la ecuación de movimiento del carro es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = l$$

donde l representa la aceleración o desaceleración (freno) y x la distancia viajada en un tiempo t . El control l está sujeto a una cota inferior (freno máximo) y a una cota superior (aceleración), es decir:

$$-\alpha \leq l \leq \beta$$

donde α y β son constantes positivas.

El problema puede ser planteado de la siguiente manera. Minimizar el tiempo tomado para ir de un punto hacia el otro, es decir minimizar el funcional:

$$T = \int_0^T 1 dt \tag{2.9}$$

sujeto a :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = l \tag{2.10}$$

y condiciones de frontera:

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, x(T) = d, x'(T) = 0 \quad (2.11)$$

$$-\alpha \leq l \leq \beta \quad (2.12)$$

Antes de tratar de encontrar las ecuaciones de Euler para el funcional (2.9), cambiemos la inecuación (2.12), introduciendo una nueva variable de control v , por la ecuación:

$$v^2 = (l + \alpha)(\beta - l)$$

Observe que dado que v es real, l satisface (2.12). Además hagamos el cambio de variable $x_1 = x$, tal que

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = l$$

reemplaza la ecuación (2.10) con las nuevas condiciones de frontera

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(T) = d, x_2(T) = 0$$

Formemos el nuevo funcional

$$T^* = \int_0^T [1 + \lambda_1(x_2 - x'_1) + \lambda_2(l - x'_2) + \lambda_3(v^2 - (l + \alpha)(\beta - l))] dt$$

donde λ_i son los multiplicadores de Lagrange. Llamemos F al integrando en esta última ecuación. Las ecuaciones de Euler para x_1, x_2, l, v son:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{l}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \right) = 0$$

desarrollando las derivadas tenemos:

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \tag{2.13}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \tag{2.14}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3(\beta - \alpha - 2l) \tag{2.15}$$

$$2v\lambda_3 = 0 \tag{2.16}$$

Resolvamos el sistema.

De la ecuación (2.16), tenemos que $v = 0$ o $\lambda_3 = 0$.

Si $\lambda_3 = 0$, por (2.15) y (2.14) tenemos que $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 = 0$. Así (2.13) es satisfecho y no se ha encontrado ninguna solución al problema, entonces descartemos esta posibilidad.

Si $v = 0$, tenemos que $l = \beta$ o $l = -\alpha$, es decir la aceleración l toma sólo el valor

máximo o el mínimo. Físicamente parece claro que debemos empezar con $l = \beta$ y luego con $u = -\alpha$, es decir

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} \beta & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\alpha & t_0 < t \leq T \end{cases}$$

El cambio en la velocidad ocurre en el tiempo t_0 . Integrando y usando las condiciones de frontera tenemos

$$x_2 = \dot{x}_1 = \begin{cases} \beta t & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\alpha(t - T) & t_0 < t \leq T \end{cases}$$

Integrando otra vez

$$x_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta t^2 & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{1}{2}\alpha(t - T)^2 + d & t_0 < t \leq T \end{cases}$$

Además como x_1 (distancia) y x_2 (velocidad) son continuos en $t = t_0$, debemos tener

$$\beta t_0 = \alpha(T - t_0)$$

$$\frac{1}{2}\beta t_0^2 = d - \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Resolviendo este sistema tenemos

$$t_0 = [2d\alpha/\beta(\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}}$$

$$T = [2d(\alpha + \beta)/\alpha\beta]^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente el control es

$$u = \begin{cases} \beta & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\alpha & t_0 < t \leq T \end{cases}$$

Como podemos ver el control es una función discontinua en $t = t_0$, el cual toma sólo sus valores máximo y mínimo. A este tipo de controles se los conoce como controles *bang-bang* [10].

2.4. Control óptimo y principio de Pontryagin

Supongamos que el estado de un sistema dinámico en un tiempo t , descrito por un vector $Y \in R^d$, está dado por la ecuación diferencial:

$$Y'(t) = G(t, Y(t), U(t))$$

donde la función vectorial $U(t) \in R^k$ es una función asignada llamada *control*. G es dado y se asume C^1 , Y es C^1 por partes, pero U puede ser solo continua por partes en cada intervalo de tiempo. Un problema de control consiste en escoger U_0 tal que la variable de estado Y sea transferida de un punto inicial Y_0 , de un tiempo t_0 , hacia un punto final de un tiempo T ; tal que optimizen un funcional de la forma:

$$F(Y, U) = \int_{t_0}^T f(t, Y, U) dt$$

donde f es una función C^1 de valor real, t_1 y T pueden variar de acuerdo a las condiciones iniciales y finales para Y . Además los vectores control y estado pueden estar sujeto a restricciones.

El principio de Pontryagin es una teoría para tratar problemas de control óptimo donde el control puede ser una función acotada y discontinua. Este principio permite buscar extremales para un funcional de la forma:

$$J = \int_0^T F_0(x, u, t) dt \quad (2.17)$$

con restricciones:

$$x'_i = F_i(x, u, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.18)$$

donde:

$$x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

y t es la variable tiempo; con condiciones iniciales $x(0) = a$, condiciones finales $x_1(T) = b_1, x_2(T) = b_2, \dots, x_q(T) = b_q$ ($q \leq n$) y sujeto a $u \in U$ (región de control admisible). Observemos que tanto F_0 como F_i no dependen de las derivadas de x , u .

Bajo esta situación empecemos haciendo un análisis igual que para funcionales definidos sobre un espacio de funciones continuas como en el capítulo anterior. Por el teorema 6, introducimos los multiplicadores de Lagrange λ_i y formamos el nuevo

funcional:

$$J^* = \int_0^T F_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (F_i - x_i') dt$$

Luego un extremal para (2.17) sujeto a las restricciones (2.18) es un extremal de J^* ; es decir son las funciones $x(t)$, $u(t)$ que satisfagan las ecuaciones de Euler para J^* .

Definamos:

$$H = F_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i \quad (\text{Hamiltoniano}) \quad (2.19)$$

Además supongamos que F_0 y F_i no dependen explícitamente de t , es decir $H = H(x, u, \lambda)$.

O sea tenemos que:

$$J^* = \int_0^T (H - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i') dt \quad (2.20)$$

Luego las ecuaciones de Euler de (2.20) para las variables x_i son

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(-\lambda_i) = 0$$

es decir

$$\lambda_i' = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.21)$$

Las ecuaciones de (2.20) para el control u_j no las consideraremos (u_j puede no ser continuo). En lugar de esto consideraremos el efecto que tienen sobre el funcional, pequeños cambios en el control. En este caso se puede probar que considerando:

$$\Delta J^* = J^*(x, u + \delta u, \lambda) - J^*(x, u, \lambda)$$

obtenemos que:

$$\Delta J^* = \int_0^T \sum_{j=1}^m [H(x; u_1, u_2, \dots, u_j + \delta u_j, \dots, u_m; \lambda) - H(x, u, \lambda)] dt \quad (2.22)$$

Luego para que u sea óptimo (mínimo) debemos tener en (2.22) que $\Delta J^* \geq 0$ para todo control admisible $u + \delta u$. Esto implica que

$$H(x; u_1, u_2, \dots, u_j + \delta u_j, \dots, u_m; \lambda) \geq H(x, u, \lambda) \quad (2.23)$$

para todo δu_j admisible y para $j = 1, 2, \dots, m$. Esto quiere decir que para un control óptimo, H se minimiza con respecto a las variables de control u_1, u_2, \dots, u_m . Es decir:

TEOREMA(Principio de Pontryagin).

Dado el siguiente funcional

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F_0(x, u, t) dt$$

donde:

F_0 es una función continua por partes en u , y

$$x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

Una condición suficiente para que una función control $u^*(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con su correspondiente trayectoria $x^*(t)$ sujeto a las restricciones

$$x'_i = F_i(x, u, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde F_i es también continua por partes respecto a u , minimizen dicho funcional, es que exista una función continua no nula $\lambda(t)$, tal que para cualquier tiempo t , el Hamiltoniano se minimice en el control óptimo con respecto a cualquier otro control. Es decir

$$H(x, u^*, t, \lambda) \leq H(x, u, t, \lambda)$$

Debemos decir también, aunque no hagamos uso de esto, que este principio nos dice que para cualquier tiempo t , el vector $\lambda(t)$ satisface

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H(x, u, t, \lambda)}{\partial x}$$

□

Como ejemplo sencillo, consideremos el ejemplo de la sección anterior. Minimizar

$$T = \int_0^T 1 dt \quad (2.24)$$

sujeto a :

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = l$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, x(T) = d, x'(T) = 0 \quad (2.25)$$

$$-\alpha \leq l \leq \beta \quad (2.26)$$

Introduciendo los multiplicadores λ_1 , λ_2 tenemos

$$T^* = \int_0^T 1 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(l - \dot{x}_2) dt$$

el Hamiltoniano está dado por

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 l$$

es decir una función lineal en l . Luego para encontrar un control óptimo, tenemos que minimizar H con respecto a l , donde $l \in U = [-\alpha, \beta]$. Como H es lineal, claramente alcanza su mínimo en la frontera de U , es decir en $l = -\alpha$ o $l = \beta$

Finalmente el control óptimo está dado por

$$l = \begin{cases} -\alpha & \text{si } \lambda_2 > 0 \\ \beta & \text{si } \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

tal como en la sección anterior.

Aplicando esta teoría a nuestro problema del péndulo, tenemos el funcional

$$J(\theta, l) = - \int_0^T g \cos(\theta(s)) l'(s) + (\theta'(s))^2 l(s) l'(s) ds \quad (2.27)$$

sujeto a

$$l(t)\theta''(t) + 2l'(t)\theta'(t) + g\text{sen}(\theta(t)) = 0 \quad (2.28)$$

$$\alpha \leq l \leq \beta \quad (2.29)$$

Vemos que es posible despejar l' de la restricción (2.28), es decir

$$l' = \frac{-l\theta'' - g\text{sen}(\theta)}{2\theta'}$$

y reemplazarla en el funcional (2.27), obteniendo

$$\begin{aligned} J &= - \int_0^T g\cos(\theta) \left(\frac{-l\theta'' - g\text{sen}(\theta)}{2\theta'} \right) + (\theta')^2 l \left(\frac{-l\theta'' - g\text{sen}(\theta)}{2\theta'} \right) ds \\ J &= \int_0^T \frac{g\cos(\theta)\theta''l}{2\theta'} + \frac{g\sin(\theta)\theta'l}{2} + \frac{\theta'\theta''l^2}{2} + \frac{g^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\theta'} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Tratando de adecuar nuestro problema de tal forma que podamos aplicar el principio de Pontryagin, y observando cuidadosamente que para ello el integrando del funcional (2.17) y las funciones F_i de las restricciones (2.18), en el principio de Pontryagin, no deben contener derivadas en las variables x , u ; hacemos los cambios de variables:

$$\theta = \theta_1, \quad \theta'_1 = \theta_2, \quad \theta'_2 = \theta_3. \quad (2.31)$$

Finalmente de (2.30) y (2.31) tenemos el funcional:

$$J = \int_0^T \frac{g\cos(\theta_1)\theta_3l}{2\theta_2} + \frac{g\sin(\theta_1)\theta_2l}{2} + \frac{\theta_2\theta_3l^2}{2} + \frac{g^2\cos(\theta_1)\sin(\theta_1)}{2\theta_2}$$

sujeto a

$$\theta'_1 = \theta_2$$

$$\theta'_2 = \theta_3$$

Luego el nuevo funcional es

$$J = \int_0^T \frac{g \cos(\theta_1) \theta_3 l}{2\theta_2} + \frac{g \sin(\theta_1) \theta_2 l}{2} + \frac{\theta_2 \theta_3 l^2}{2} + \frac{g^2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)}{2\theta_2} + \lambda_1(\theta_2 - \theta'_1) + \lambda_2(\theta_3 - \theta'_2) dt$$

con hamiltoniano

$$H = \frac{g \cos(\theta_1) \theta_3 l}{2\theta_2} + \frac{g \sin(\theta_1) \theta_2 l}{2} + \frac{\theta_2 \theta_3 l^2}{2} + \frac{g^2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1)}{2\theta_2} + \lambda_1 \theta_2 + \lambda_2 \theta_3 \quad (2.32)$$

Las soluciones para $\theta_1, \theta_2, \theta_3, l, \lambda_1, \lambda_2$ están dadas por las soluciones de (2.21) y de minimizar (2.32) con respecto a l .

Reemplazando los valores de θ_1, θ_2 y θ_3 por sus equivalentes valores, vemos que (2.32) se convierte en

$$H = \frac{g \cos(\theta) \theta'' l}{2\theta'} + \frac{g \sin(\theta) \theta' l}{2} + \frac{\theta' \theta'' l^2}{2} + \frac{g^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{2\theta'} + \lambda_1 \theta' + \lambda_2 \theta'' \quad (2.33)$$

Además vemos que l solamente aparece en los tres primeros sumandos, luego lo que finalmente debemos minimizar con respecto a l es

$$H^* = \frac{g \cos(\theta) \theta'' l}{2\theta'} + \frac{g \sin(\theta) \theta' l}{2} + \frac{\theta' \theta'' l^2}{2}$$

lo cual podemos escribirlo como

$$H^* = l\left(\frac{\theta'\theta''}{2}l + \frac{g\cos(\theta)\theta''}{2\theta'} + \frac{g\sin(\theta)\theta'}{2}\right)$$

Podemos observar que H^* es cuadrático con respecto a l y dado que $\alpha \leq l \leq \beta$ para α, β positivos, podemos minimizarlo de acuerdo a los valores de los coeficientes

$$\frac{\theta'\theta''}{2} \quad y \quad \left(\frac{g\cos(\theta)\theta''}{2\theta'} + \frac{g\sin(\theta)\theta'}{2}\right)$$

Llamemos

$$A = \frac{\theta'\theta''}{2} \quad y \quad B = \left(\frac{g\cos(\theta)\theta''}{2\theta'} + \frac{g\sin(\theta)\theta'}{2}\right)$$

Luego tenemos la función cuadrática en l

$$H^* = l(Al + B)$$

La estrategia para minimizar H^* con respecto a l estaría dada por 2 casos.

Primer caso

Para $A \geq 0$, lo cual sería una parábola que pasa por el origen abriéndose hacia arriba, y dependerá de B para ver los valores que debe tomar l y minimizar H^* .

Si $B \geq 0$ (los interceptos serían 0 y el valor negativo $-B/A$), luego debemos tener que $l = \alpha$ minimiza H^* ; vease la Figura 2.2.

Si $B < 0$ (los interceptos serían 0 y el valor positivo $-B/A$), luego tendríamos que considerar la posición de $-B/2A$ (que es donde se alcanza el vértice y la función cambia el crecimiento) con respecto a α y β .

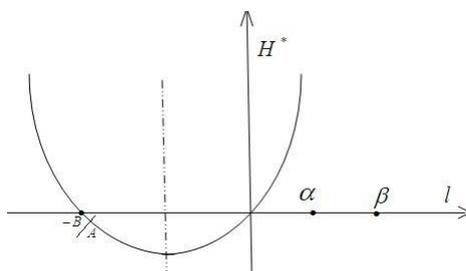


Figura 2.2: Parábola con $A \geq 0$ y $B \geq 0$

Si $-B/2A \leq \alpha$, tenemos que $l = \alpha$ minimiza H^* , tal como lo muestra la Figura 2.3

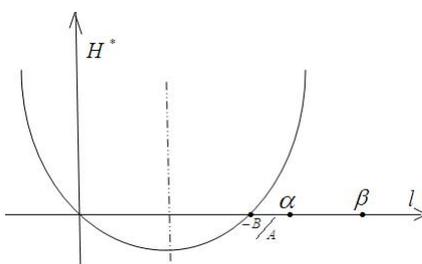


Figura 2.3: Parábola con $B < 0$ y $-B/2A \leq \alpha$

Si $-B/2A > \alpha$, dependerá de la posición de β para minimizar H^* . Observemos la Figura 2.4

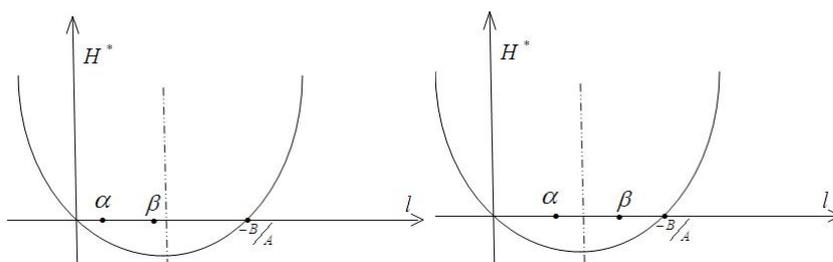


Figura 2.4: Parábola con $B < 0$ y $-B/2A > \alpha$

Si $-B/2A > \beta$, tenemos que $l = \beta$ minimiza H^* ; de lo contrario $l = -B/2A$. Por otro lado, analizando de la misma forma el otro caso:

Segundo caso

Para $A < 0$, Lo cual sería una parábola que pasa por el origen abriéndose hacia abajo, y otra vez dependerá de B para ver que valores debe tomar l para minimizar

H^* .

Si $B \leq 0$, debemos tener que $l = \beta$ para minimizar H^* , tal como lo muestra la Figura 2.5

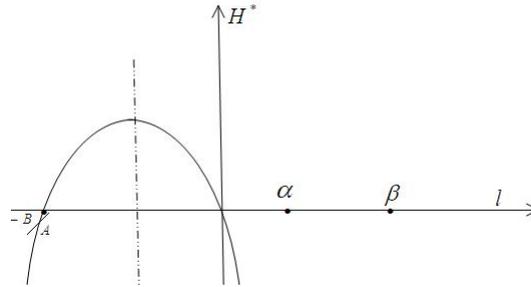


Figura 2.5: Parábola con $A < 0$ y $B \leq 0$

Si $B > 0$, debemos de conciderar la posición de $-B/2A$ con respecto a α y β .

Si $-B/2A \leq \alpha$, debemos tener $l = \beta$, véase la Figura 2.6

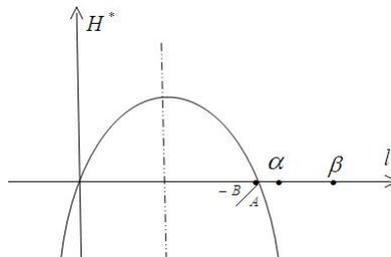


Figura 2.6: Parábola con $B > 0$ y $-B/2A \leq \alpha$

Si $-B/2A > \alpha$, dependerá de la posición del valor de β .

Si $-B/2A > \beta$, debemos tener que $l = \alpha$, véase la Figura 2.7

Si $-B/2A \leq \beta$, debemos conciderar las distancias de $-B/2A$ a α y β , tal como se observa en la Figura 2.8

Si $(-B/2A - \alpha) > (\beta + B/2A)$ debemos tener $l = \alpha$; de lo contrario tendremos $l = \beta$.

Como podemos observar hemos obtenido una estrategia de control l que depende

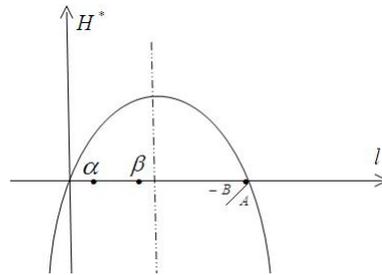


Figura 2.7: Parábola con $B > 0$ y $-B/2A > \beta$

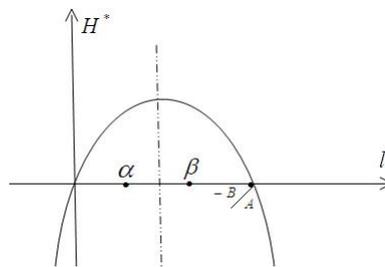


Figura 2.8: Parábola co $B > 0$ y $-B/2A \leq \beta$

únicamente de A y de B ; éstos a la vez dependen únicamente de θ , θ' y θ'' ; es decir un control *feedback* [6] y no un control que dependa directamente de la variable independiente t .

Si quisiéramos un control óptimo que dependa del tiempo tendríamos que reemplazar l en las ecuaciones de Euler para θ_i y resolverlas. Sin embargo, el control con *feedback* es mucho mas robusto, ya que se va ajustando a las desviaciones o diferencias entre la realidad y el modelo matemático. Este control recibe *updates* continuamente del estado real del sistema. La única desventaja de esto es la necesidad de instalar sensores que hagan mediciones en tiempo real de θ , θ' y θ'' .

2.5. Análisis numérico para el péndulo en el plano

Para finalizar este capítulo mostraremos gráficamente, usando *matlab*, el efecto de las estrategias encontradas. Usaremos el programa *Runge Kutta* de orden 4 [9] para resolver la ecuación gobernante del péndulo en el plano usando el ya conocido control óptimo como función $l(t)$; es decir, no usaremos las ecuaciones de Euler para resolver la función $\theta(t)$. Graficaremos el control y la energía y veremos como estas estrategias van disminuyendo la energía del péndulo. También graficaremos el ángulo θ que hace la cuerda del péndulo con el eje y y veremos como las oscilaciones van disminuyendo su amplitud haciendo parar al péndulo. Además haremos comparaciones de la estrategia heurística y la estrategia óptima encontrada usando el principio de *Pontryagin*.

La Figura 2.9 muestra la energía del péndulo y el ángulo θ en función del tiempo, cuando la longitud de la cuerda es fija. Como condiciones iniciales tendremos: $h = 0.01$, $\theta = 1$, $\theta' = 0$, $l = 1$ (consideraremos una cuerda de longitud 1). En este caso obviamente la energía es constante.

Los gráficos de la figura 2.10 muestran el efecto de la estrategia heurística (cuadro izquierdo) y la estrategia óptima de *Pontryagin* (cuadro derecho) aplicadas al péndulo de la Figura 2.9. Consideraremos que podemos variar la longitud de la cuerda en un 20 por ciento, es decir $1 \leq l \leq 1.2$. Veremos como la energía y la amplitud de las oscilaciones van disminuyendo (El programa está implementado para un paso $h = 0.1$).

Como se puede ver la estrategia heurística parece ser mas eficiente que la estrategia

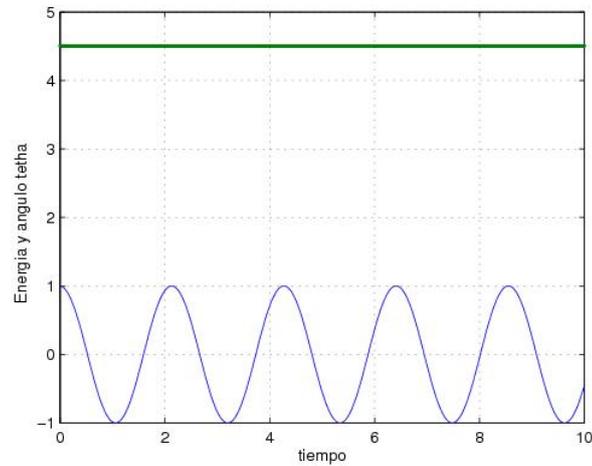


Figura 2.9: Energía y Angulo θ para un péndulo en el plano con cuerda de longitud 1

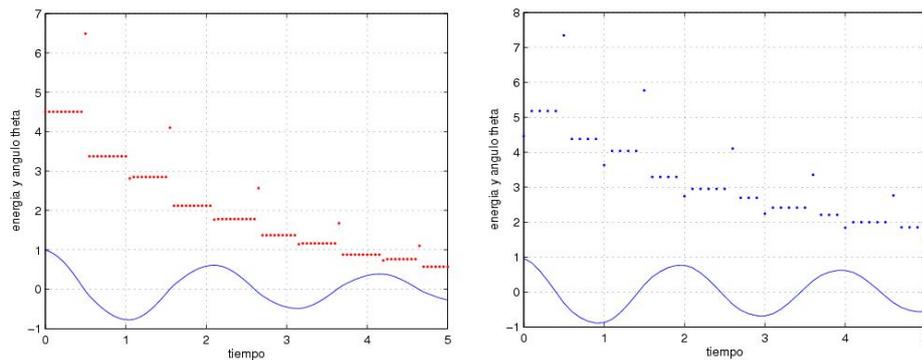


Figura 2.10: Comparación entre la estrategia heurística (izquierda) y la óptima (derecha) para un paso $h=0.1$

óptima, ya que la energía disminuye mas rápidamente. Hagamos los mismos cálculos usando un paso de longitud menor ($h=0.05$).

Podemos ver en la Figura 2.11 que usando $h=0.05$ la estrategia óptima se asemeja un poco mas a la estrategia heurística. Veamos que pasa si seguimos acortando el paso ($h=0.01$).

En la Figura 2.12 vemos mas aproximación entre las estrategias; efectivamente si seguimos acortando el paso la estrategia óptima converge a la estrategia heurística, es decir el control óptimo parece ser el mismo que el control heurístico.

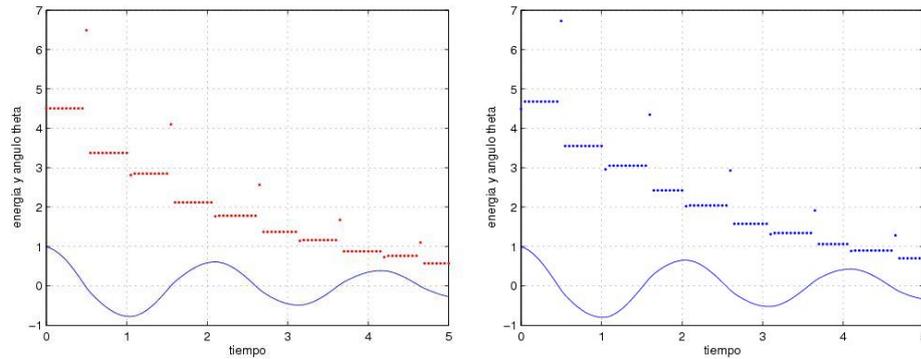


Figura 2.11: Comparación entre la estrategia heurística(izquierda) y la óptima(derecha) para un paso $h=0.05$

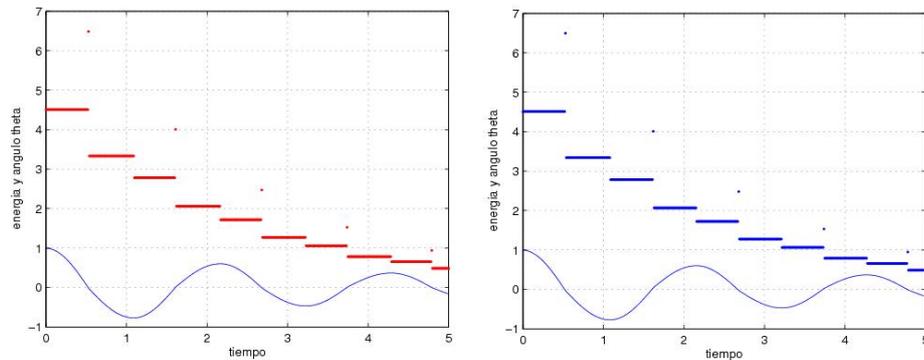


Figura 2.12: Comparación entre la estrategia heurística(izquierda) y la óptima(derecha) para un paso $h=0.01$

Finalmente grafiquemos ambos controles con respecto al tiempo.

La Figura 2.13 muestra ambos controles con respecto al tiempo. Como se puede apreciar en ambos cuadros, los controles l de ambas estrategias son prácticamente los mismos. Estos toman sus mínimos ($l = 1$) y máximos valores ($l=1.2$) prácticamente para los mismos intervalos de tiempo.

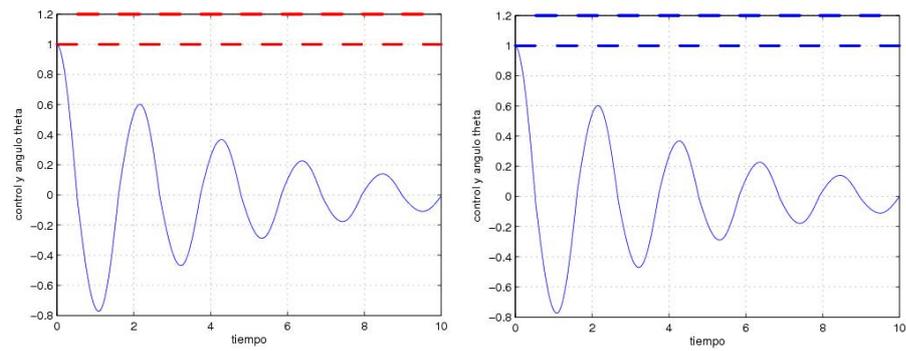


Figura 2.13: Comparación entre los controles de la estrategia heurística(izquierda) y la óptima(derecha) para un paso $h=0.01$

Capítulo 3

El péndulo en el espacio

3.1. Análisis del problema

Todo el análisis hecho anteriormente ha sido para un péndulo con cuerda de longitud variable que se mueve sobre un plano (2 dimensiones). En este capítulo veremos si es posible hacer lo mismo cuando el péndulo se está moviendo en el espacio (3 dimensiones) como en la figura 3.1.

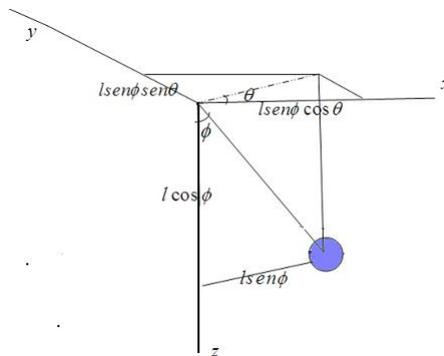


Figura 3.1: Péndulo en el espacio

Nuevamente empecemos deduciendo las ecuaciones que gobiernan un péndulo con

cuerda de longitud variable que oscila en el espacio.

Tenemos que:

$$F = m \times a$$

es decir, tenemos en forma vectorial que:

$$m(0, 0, g) - T(\text{sen}(\phi)\cos(\theta), \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), \cos(\phi)) = m(l\text{sen}(\phi)\cos(\theta), l\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), l\cos(\phi))''$$

Calculando las derivadas e igualando componente a componente se tiene:

$$-T\text{sen}(\phi)\cos(\theta) = (l'\text{sen}(\phi)\cos(\theta) + l\cos(\phi)\phi'\cos(\theta) - l\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\theta')'$$

$$-T\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) = (l'\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) + l\cos(\phi)\phi'\text{sen}(\theta) + l\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\theta')'$$

$$g - T\cos(\phi) = (l'\cos(\phi) - l\text{sen}(\phi)\phi')'$$

Calculando la otra derivada obtenemos las 3 ecuaciones:

$$-T\text{sen}(\phi)\cos(\theta) = l''\text{sen}(\phi)\cos(\theta) + 2l'(\cos(\phi)\phi'\cos(\theta) - \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\theta') + l(\cos(\phi)\cos(\theta)\phi''$$

$$- \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\theta'' - l(\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\phi'^2 + \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\phi'\theta') - l(\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\phi'\theta' + \text{sen}(\phi)\cos(\theta)\theta'^2)$$

$$-T\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) = l''\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) + 2l'(\cos(\phi)\phi'\text{sen}(\theta) + \text{sen}(\phi)\cos(\theta)\theta') + l(\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\phi''$$

$$+ \text{sen}(\phi)\cos(\theta)\theta'') + l(-\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\phi'^2 + \cos(\phi)\cos(\theta)\phi'\theta') + l(\cos(\phi)\cos(\theta)\phi'\theta' - \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\theta'^2)$$

$$g - T\cos(\phi) = l''\cos(\phi) - l'\sin(\phi)\phi' - (l'\sin(\phi)\phi' + l(\cos(\phi)\phi'^2 + \sin(\phi)\phi''))$$

simplificando esta última ecuación tenemos:

$$g - T\cos(\phi) = l''\cos(\phi) - 2l'\sin(\phi)\phi' - l\cos(\phi)\phi'^2 - l\sin(\phi)\phi''$$

Hemos obtenido de esta forma las tres ecuaciones que gobiernan el sistema.

Simplifiquemos un poco estas ecuaciones. Multipliquemos la primera ecuación por $\sin\theta$ y la segunda por $\cos\theta$. Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$0 = 2l'\sin(\phi)\theta' + l\sin(\phi)\theta'' + 2l\cos(\phi)\phi'\theta' \quad (3.1)$$

Repitamos el proceso multiplicando ahora la primera por $\cos(\theta)$ y la segunda por $\sin(\theta)$. Sumando obtenemos

$$-T\sin(\phi) = l''\sin(\phi) + 2l'\cos(\phi)\phi' + l\cos(\phi)\phi'' - l\sin(\phi)\phi'^2 - l\sin(\phi)\theta'^2 \quad (3.2)$$

que junto a la ecuación

$$g - T\cos(\phi) = l''\cos(\phi) - 2l'\sin(\phi)\phi' - l\cos(\phi)\phi'^2 - l\sin(\phi)\phi'' \quad (3.3)$$

forman las 3 nuevas ecuaciones gobernantes del sistema.

Algo importante de observar es que si hacemos $\theta = 0$, es decir eliminamos el ángulo

de rotación sobre el plano xy , la primera ecuación se anula y nos quedan 2 ecuaciones que son las ecuaciones gobernantes del péndulo en el plano.

Además, al igual que para el caso del péndulo en el plano, si podemos controlar l podemos eliminar una ecuación y quedarnos solo con dos.

Multiplicando (3.2) por $\cos\phi$ y (3.3) por $\sen\phi$ y luego restando ambas obtenemos:

$$g\sen(\phi) = -2l'\phi' + l\sen(\phi)\cos(\phi)\theta'^2 - l\phi'' \quad (3.4)$$

Es decir las ecuaciones gobernantes del péndulo en el espacio, conociendo l , están dadas por (3.1) y (3.4)

3.2. Funcional de energía para el péndulo en el espacio

Al igual que para el caso del péndulo sobre un plano, tratemos de encontrar una ecuación alternativa del sistema que involucre la energía de dicho sistema y un funcional para minimizar. Empecemos hallando la energía del sistema.

Se puede ver que la energía potencial del sistema es la misma que la energía potencial del péndulo sobre el plano; es decir:

$$EP = gl(1 - \cos(\phi))$$

donde l y ϕ son funciones del tiempo t .

Para la energía cinética busquemos la velocidad del péndulo. El desplazamiento del péndulo está dado por la función vectorial:

$$f(t) = (l\text{sen}(\phi)\cos(\theta), l\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), l\cos(\phi))$$

Para hallar la velocidad del péndulo derivemos f :

$$f'(t) = (l\cos(\phi)\phi'\cos(\theta) - l\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\theta', l\cos(\phi)\phi'\text{sen}(\theta) + l\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\theta', -l\text{sen}(\phi)\phi')$$

Observe que al igual que para el péndulo en el plano no hemos considerado las derivadas de l . Calculemos ahora la energía cinética de oscilación del péndulo:

$$EC = 1/2 \langle f'(t) \cdot f'(t) \rangle$$

Calculando el producto interno tenemos:

$$\begin{aligned} \langle f'(t) \cdot f'(t) \rangle &= (l\cos(\phi)\phi'\cos(\theta) - l\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\theta')^2 + \\ & (l\cos(\phi)\phi'\text{sen}(\theta) + l\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\theta')^2 + (-l\text{sen}(\phi)\phi')^2 \end{aligned}$$

desarrollando los cuadrados y simplificando tenemos

$$\langle f'(t) \cdot f'(t) \rangle = l^2\phi'^2 + l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'^2$$

Luego

$$EC = \frac{1}{2}(l^2\phi'^2 + l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'^2)$$

Por lo tanto la *energía de oscilación* del sistema será:

$$ET = gl(1 - \cos(\phi)) + \frac{1}{2}l^2\phi'^2 + \frac{1}{2}l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'^2$$

El siguiente paso es tratar de encontrar a partir de las ecuaciones gobernantes del sistema (3.1), (3.2) y (3.3) una nueva ecuación que involucre la energía del péndulo y un funcional a minimizar.

Empecemos derivando la energía del sistema:

$$(ET)' = (gl(1 - \cos(\phi)) + \frac{1}{2}l^2\phi'^2 + l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'^2)'$$

$$(ET)' = gl'(1 - \cos(\phi)) + gl\text{sen}(\phi)\phi' + ll'\phi'^2 + l^2\phi'\phi'' +$$

$$ll'\text{sen}^2(\phi)\theta'^2 + l^2\text{sen}(\phi)\cos(\phi)\phi'\theta'^2 + l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'\theta''$$

Observando los últimos tres sumandos y comparándolos con la ecuación (3.1), la última ecuación se puede simplificar como:

$$(ET)' = gl'(1 - \cos(\phi)) + gl\text{sen}(\phi)\phi' + ll'\phi'^2 + l^2\phi'\phi'' + \frac{1}{2}l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'\theta''$$

es decir:

$$ET = \int_0^T gl'(1 - \cos(\phi)) + gl\text{sen}(\phi)\phi' + ll'\phi'^2 + l^2\phi'\phi'' + \frac{1}{2}l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'\theta'' dt$$

$$ET = gl \Big|_0^T + \int_0^T -gl' \cos(\phi) + gl \operatorname{sen}(\phi) \phi' + ll' \phi'^2 + l^2 \phi' \phi'' + \frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \theta' \theta'' dt$$

Si consideramos lo hecho para el péndulo en el plano, es decir que $l(0) = l(T)$ tenemos que:

$$ET = \int_0^T -gl' \cos(\phi) + gl \operatorname{sen}(\phi) \phi' + ll' \phi'^2 + l^2 \phi' \phi'' + \frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \theta' \theta'' dt \quad (3.5)$$

3.3. Principio de Pontryagin para el péndulo en el espacio

Una vez encontrada la ecuación (3.5), hallar una estrategia óptima para controlar las oscilaciones de un péndulo en el espacio variando la longitud de su cuerda, consiste en minimizar el funcional:

$$J = \int_0^T -gl' \cos(\phi) + gl \operatorname{sen}(\phi) \phi' + ll' \phi'^2 + l^2 \phi' \phi'' + \frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \theta' \theta'' dt \quad (3.6)$$

Además de la ecuación (3.4) tenemos que:

$$l' = \frac{1}{2\phi'} (l \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) \theta'^2 - l \phi'' - g \operatorname{sen}(\phi))$$

sustituyendo l' en el funcional (3.6) obtenemos:

$$J = \int_0^T -g \left(\frac{1}{2\phi'} (l \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) \theta'^2 - l \phi'' - g \operatorname{sen}(\phi)) \right) \cos(\phi) + gl \operatorname{sen}(\phi) \phi'$$

$$+l\left(\frac{1}{2\phi'}(l\text{sen}(\phi)\cos(\phi)\theta'^2 - l\phi'' - g\text{sen}(\phi))\right)\phi'^2 + l^2\phi'\phi'' + \frac{1}{2}l^2\text{sen}^2(\phi)\theta'\theta'' dt$$

Adecuando J de tal forma que podamos aplicar el principio de Pontryagin, tenemos:

$$J = \int_0^T -g\left(\frac{1}{2\phi_2}(l\text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_1)\theta_2^2 - l\phi_3 - g\text{sen}(\phi_1))\right)\cos(\phi_1) + gl\text{sen}(\phi_1)\phi_2$$

$$+l\left(\frac{1}{2\phi_2}(l\text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_1)\theta_2^2 - l\phi_3 - g\text{sen}(\phi_1))\right)\phi_2^2 + l^2\phi_2\phi_3 + \frac{1}{2}l^2\text{sen}^2(\phi_1)\theta_2\theta_3 dt$$

sujeto a las restricciones:

$$\phi = \phi_1$$

$$\phi_1' = \phi_2, \quad \theta_1' = \theta_2$$

$$\phi_2' = \phi_3, \quad \theta_2' = \theta_3$$

simplificando:

$$J = \int_0^T \frac{g\cos(\phi_1)}{2\phi_2}(\phi_3 - \text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_1)\theta_2^2)l + \frac{g^2\text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_1)}{2\phi_2}$$

$$+ \frac{\phi_2}{2}(\text{sen}(\phi_1)\cos(\phi_1)\theta_2^2 - \phi_3)l^2 + \frac{g\text{sen}(\phi_1)\phi_2}{2}l + \phi_2\phi_3l^2 + \frac{1}{2}\text{sen}^2(\phi_1)\theta_2\theta_3l^2 dt$$

Al igual que en el péndulo plano, formemos el nuevo funcional que involucre las restricciones (excepto la restricción (2.31)), para luego encontrar el control óptimo de feedback del problema irrestricto usando el principio de Pontryagin; después usando las ecuaciones gobernantes resolveremos numéricamente nuestro problema

asegurándonos así la presencia de todas las restricciones.

$$\begin{aligned}
 J^* = & \int_0^T \frac{g \cos(\phi_1)}{2\phi_2} (\phi_3 - \text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1) \theta_2^2) l + \frac{g^2 \text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1)}{2\phi_2} \\
 & + \frac{\phi_2}{2} (\text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1) \theta_2^2 - \phi_3) l^2 + \frac{g \text{sen}(\phi_1) \phi_2}{2} l + \phi_2 \phi_3 l^2 + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\phi_1) \theta_2 \theta_3 l^2 \\
 & + \lambda_1 (\phi_2 - \phi_1') + \lambda_2 (\phi_3 - \phi_2') + \lambda_3 (\theta_2 - \theta_1') + \lambda_4 (\theta_3 - \theta_2') dt
 \end{aligned}$$

Luego el hamiltoniano esta dado por:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{g \cos(\phi_1)}{2\phi_2} (\phi_3 - \text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1) \theta_2^2) l + \frac{g^2 \text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1)}{2\phi_2} + \frac{\phi_2}{2} (\text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1) \theta_2^2 - \phi_3) l^2 \\
 & + \frac{g \text{sen}(\phi_1) \phi_2}{2} l + \phi_2 \phi_3 l^2 + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\phi_1) \theta_2 \theta_3 l^2 + \lambda_1 \phi_2 + \lambda_2 \phi_3 + \lambda_3 \theta_2 + \lambda_4 \theta_3
 \end{aligned}$$

El control óptimo resulta de minimizar H con respecto a l .

De H solo 5 sumandos contienen a l , luego lo que debemos minimizar es:

$$\begin{aligned}
 H^* = & \frac{g \cos \phi_1}{2\phi_2} (\phi_3 - \text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1) \theta_2^2) l + \frac{\phi_2}{2} (\text{sen}(\phi_1) \cos(\phi_1) \theta_2^2 - \phi_3) l^2 \\
 & + \frac{g \text{sen}(\phi_1) \phi_2}{2} l + \phi_2 \phi_3 l^2 + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\phi_1) \theta_2 \theta_3 l^2
 \end{aligned}$$

o también:

$$\begin{aligned}
 H^* = & l \left(\left(\frac{\phi'}{2} (\text{sen}(\phi) \cos(\phi) \theta^2 - \phi'') + \phi' \phi'' + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\phi) \theta' \theta'' \right) l \right. \\
 & \left. + \frac{g \cos(\phi)}{2\phi'} (\phi'' - \text{sen}(\phi) \cos(\phi) \theta'^2) + \frac{g \text{sen}(\phi) \phi'}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Al igual que en el capítulo anterior llamemos:

$$C = \frac{\phi'}{2}(\text{sen}(\phi)\cos(\phi)\theta'^2 - \phi'') + \phi'\phi'' + \frac{1}{2}\text{sen}^2(\phi)\theta'\theta''$$

$$D = \frac{g\cos(\phi)}{2\phi'}(\phi'' - \text{sen}(\phi)\cos(\phi)\theta'^2) + \frac{g\text{sen}(\phi)\phi'}{2}$$

Nuevamente al igual que en el caso del péndulo plano tenemos la función cuadrática:

$$H^* = l(Cl + D)$$

Por lo tanto la estrategia óptima para minimizar las oscilaciones de un péndulo en el espacio con cuerda de longitud variable, usando el principio de Pontryagin, consiste en minimizar H^* con respecto a l . El procedimiento para minimizar H^* es el mismo que el hecho para el péndulo plano, usando los nuevos valores de C y D .

3.4. Análisis numérico para el péndulo en el espacio

Al igual que en el capítulo anterior aproximaremos nuestras soluciones usando programas *Runge Kutta de orden 4*. Resolveremos numéricamente las ecuaciones gobernantes del péndulo en el espacio usando el control óptimo l .

En la figura 3.2 se muestra la energía del péndulo y el ángulo ϕ que hace la cuerda con el eje Z , como funciones del tiempo t . Usaremos como condiciones iniciales:

$h = 0.01, l = 1, \phi = 1, \phi' = 0, \theta = 0, \theta' = 0.5$.

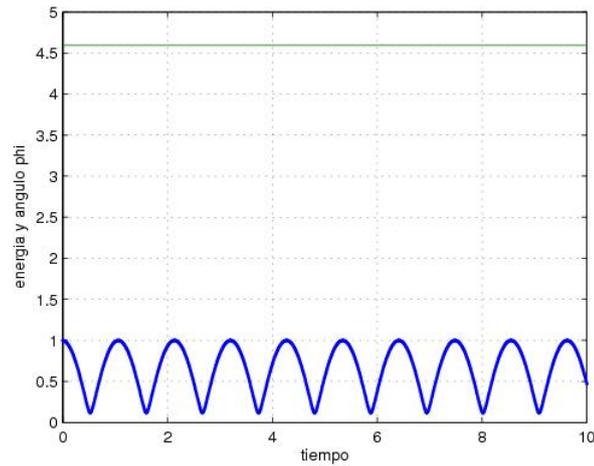


Figura 3.2: Energía y Ángulo ϕ del péndulo en el espacio con cuerda $l = 1$

Claramente la energía permanece constante. A diferencia del péndulo en el plano, observamos que el ángulo ϕ es siempre positivo con alejamientos y acercamientos del eje Z , lo cual hace que la cuerda describa curvas elípticas alrededor del eje Z . Si aplicamos nuestra estrategia óptima al péndulo de la Figura 3.2, obtenemos los resultados que se muestran en la Figura 3.3.

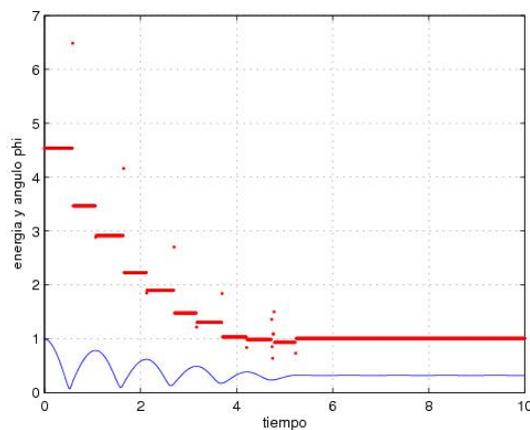


Figura 3.3: Estrategia óptima aplicada al péndulo en el espacio

De esta figura podemos ver como, a diferencia del péndulo plano, la energía del péndulo va disminuyendo hasta cierto tiempo; a partir del cual la energía se vuelve constante. Además, observando el ángulo ϕ vemos que podemos quitar energía solamente hasta que ϕ sea constante; es decir hasta que las curvas que describa la cuerda del péndulo con el eje Z sean circunferencias.

La Figura 3.4 muestra la función control l respecto al tiempo t .

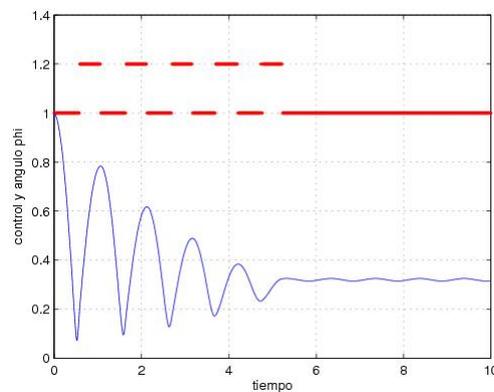


Figura 3.4: Función control para el péndulo en el espacio

Aunque al analizar el péndulo en el espacio no obtuvimos una estrategia heurística como para el péndulo en el plano, debido al número y a la complejidad de las ecuaciones gobernantes, veremos que pasa si aplicamos la estrategia heurística en el plano para el péndulo en el espacio. Este resultado se ilustra en la figura 3.5.

Como se puede observar, al igual que en la estrategia óptima la energía disminuye hasta un determinado tiempo. Aunque a diferencia del análisis en el plano, en este caso los controles son distintos.

La figura 3.6 muestra la diferencia entre los controles usando la estrategia óptima (derecha) dada por el principio de Pontryagin y la estrategia heurística (izquierda) del péndulo en el plano.

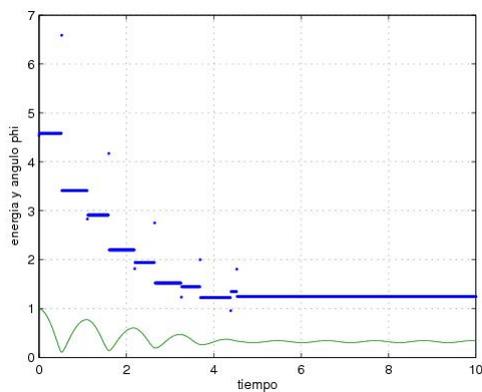


Figura 3.5: Estrategia heurística en el plano aplicada al péndulo en el espacio

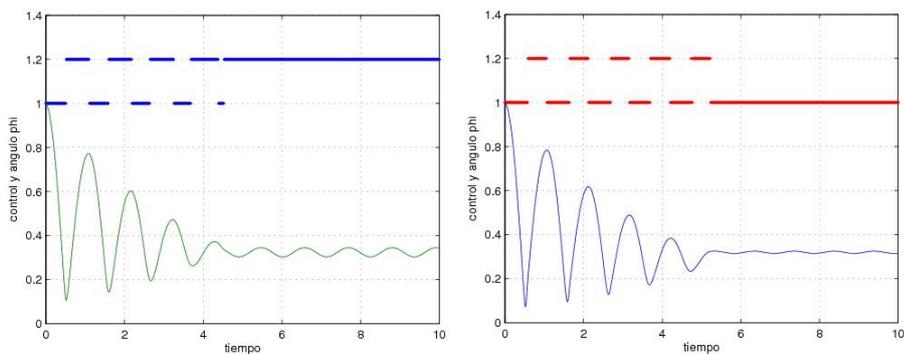


Figura 3.6: Comparación entre el control heurístico (izquierda) y el óptimo (derecha)

Si graficamos solamente los ángulos ϕ , veremos que cuando el control óptimo se vuelve constante, ϕ también se vuelve constante, es decir el péndulo describe círculos alrededor del eje z ; lo cual no pasa con el control heurístico. Véase la Figura 3.7.

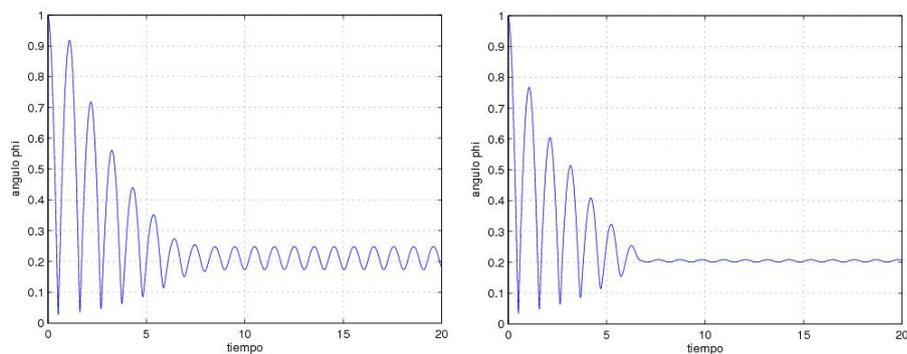


Figura 3.7: Comparación de los ángulos ϕ

Si observamos 3.7 como las curvas descritas por el péndulo sobre el plano xy , usando funciones paramétricas, veremos con más claridad lo que está pasando.

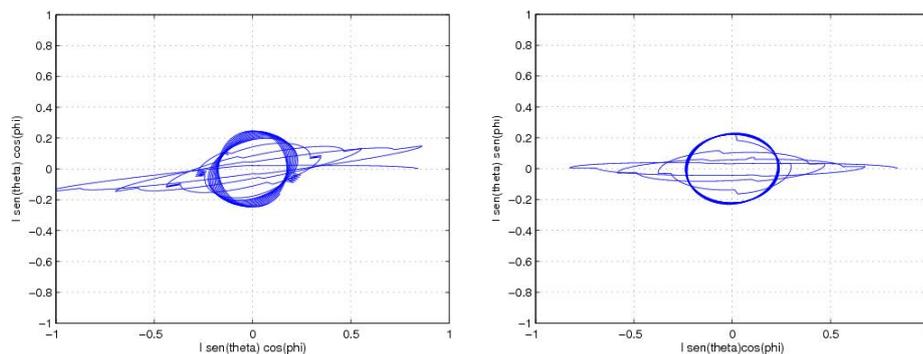


Figura 3.8: Comparación de las curvas que describe el péndulo sobre el plano xy .

Por último también podemos preguntarnos que efecto tiene el control óptimo para el plano, aplicado en el espacio, la figura 3.9 responde a la pregunta.

Como apreciamos la energía del péndulo disminuye muy poco y comienza a aumentar. El efecto es bastante raro si tomamos en cuenta que en el plano, el control óptimo era el mismo que el control heurístico.

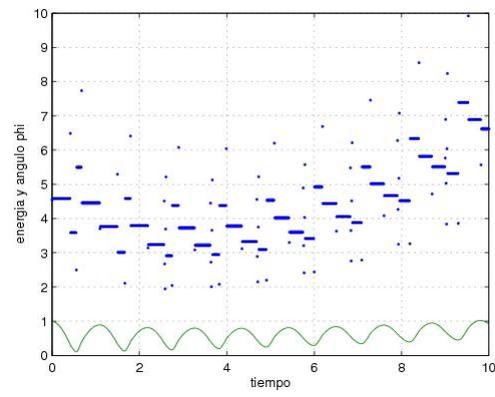


Figura 3.9: Estrategia óptima del plano aplicada al espacio

Capítulo 4

Conclusiones

- Los cálculos numéricos evidencian que las estrategias óptimas para controlar las oscilaciones de un péndulo, tanto en el plano como en el espacio, variando la longitud de su cuerda están dadas por controles *bang bang*, los casos no *bang bang* parecen imposibles físicamente.
- Las estrategias para el péndulo en el plano y en el espacio se obtienen usando el principio de Pontryagin que consiste en elegir una función control l de tal forma que minimice el *hamiltoniano* del sistema (capítulo 3).
- Numéricamente podemos decir que en el caso del péndulo en el plano es posible quitarle toda la energía que queramos al péndulo, y de esta forma hacerlo parar.
- En el espacio es posible quitarle energía al péndulo hasta cierto momento. A partir de este momento la energía será constante.

Capítulo 5

Trabajos futuros

- Realizar simulaciones en el espacio que ilustren la estrategia óptima usando el principio de Pontryagin.
- Encontrar nuevas estrategias para quitarle toda la energía al péndulo en el espacio hasta hacerlo parar.
- Combinar este método con los métodos usuales, como mover el punto de apoyo de la cuerda, para conseguir nuevas estrategias que controlen las oscilaciones de un péndulo.
- Aplicar el principio de Pontryagin para el doble péndulo (péndulo con dos masas).

Bibliografía

- [1] BARNETT, S. *Introductions to Mathematical Control Theory*. Clarendon Press, 1975.
- [2] BLANCHARD, PAUL; DEVANEY, R., AND HALL, G. *Differential Equations*. Brooks/Cole, 1998.
- [3] BURGESS, D., AND GRAHAN, A. *Introduccion to Control Theory including Optimal Control*. Halsted Press, 1980.
- [4] CITRON, S. *Elements of Optimal Control*. Holt Rinehart Winston, 1969.
- [5] GELFAND, I., AND FOMIN, S. *Calculus of Variations*. Dover, 1991.
- [6] HSU, J. C., AND MEYER, A. U. *Modern Control Principles and Applications*. Mc Graw-Hill book Company, 1968.
- [7] JACOBS, O. *Introduction to Control Theory*. Clarendon Press, 1974.
- [8] SMITH, D. R. *Variational Methods in Optimization*. Prentice-Hall, 1974.
- [9] SULI, E., AND MAYERS, D. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2003.

- [10] TROUTMAN, J. L. *Variational Calculus and Optimal Control*. Springer Verlag, Inc., 1996.
- [11] WEINSTOCK, R. *Calculus of Variations, With Applications to Physics and Engineering*. Dover publications, 1974.

Apéndice A

Programas Runge Kutta de orden 4 para el Péndulo en el Plano

A.1. Programa para el péndulo de cuerda fija

```
h=.01; x=1; y=0; t=0; l=1;
for i=0:1000
    t=i*h;
    T(i+1)=t;
    k1=h*f1(y);
    j1=h*g1(x);
    k2=h*f1(y+j1/2);
    j2=h*g1(x+k1/2);
    k3=h*f1(y+j2/2);
    j3=h*g1(x+k2/2);
    k4=h*f1(y+j3);
    j4=h*g1(x+k3);
    x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    y=y+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
    X(i+1)=x;
    Y(i+1)=y;
    E(i+1)=(1/2)*l^2*y^2+9.8*l*(1-cos(x));
end

function s=f1(y)
s=y;
function u=g1(x)
u=-9.8*sin(x)/l;
```

A.2. Programas para el péndulo usando la estrategia heurística y la estrategia óptima

Usaremos la opción `derk=1` para la estrategia heurística y `derk=2` para la estrategia óptima.

```
function pen2(derk)
h=.01; x=1; y=0; dy=0; tx=0; ty=0; A=0; B=0;
der1=0; tA=0; tB=0; der2=0;
if (derk==1)
    for i=0:1000
        t=i*h;
        T(i+1)=t;
        k1=h*f(y);
        j1=h*g1(x,y,der1);
        k2=h*f(y+j1/2);
        j2=h*g1(x+k1/2,y+j1/2,der1);
        k3=h*f(y+j2/2);
        j3=h*g1(x+k2/2,y+j2/2,der1);
        k4=h*f(y+j3);
        j4=h*g1(x+k3,y+j3,der1);
        x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        y=y+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
        X(i+1)=x;
        Y(i+1)=y;
        l=ele1(x,y);
        der1=(ele1(x,y)-ele1(tx,ty))/h;
        tx=x;
        ty=y;
        L(i+1)=l;
        E(i+1)=(1/2)*l^2*y^2+9.8*l*(1-cos(x));
    end
else
    for i=0:1000
        t=i*h;
        T(i+1)=t;
        k1=h*f(y);
        j1=h*g2(x,y,der2,A,B);
        k2=h*f(y+j1/2);
        j2=h*g2(x+k1/2,y+j1/2,der2,A,B);
        k3=h*f(y+j2/2);
        j3=h*g2(x+k2/2,y+j2/2,der2,A,B);
```

```

k4=h*f(y+j3);
j4=h*g2(x+k3,y+j3,der2,A,B);
x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
y=y+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
X(i+1)=x;
Y(i+1)=y;
dy=(y-ty)/h;
ty=y;
A=y*dy/2;
B=(9.8/2)*(cos(x)*dy/y+sin(x)*y);
l=ele2(A,B);
der2=(ele2(A,B)-ele2(tA,tB))/h;
tA=A;
tB=B;
L(i+1)=l;
E(i+1)=(1/2)*l^2*y^2+9.8*l*(1-cos(x));
end
end

```

```

function u=f(y)
u=y
function u=g1(x,y,der1)
u=(-9.8*sin(x)-2*der1*y)/ele1(x,y);
function u=g2(x,y,der2,A,B)
u=(-9.8*sin(x)-2*der2*y)/ele2(A,B);
function j=ele1(x,y)
m=1;
M=1.2;
if (x*y >0)
j=M;
else
j=m;
end
function j=ele2(A,B)
m=1;
M=1.2;
if (A>0)
if (B>=0)
j=m;
end
if (B<0)
if (-B/(2*A)<=m)
j=m;
end
end

```

```
        if (-B/(2*A)>m)
            if (-B/(2*A)>=M)
                j=M;
            else
                j=-B/(2*A);
            end
        end
    end
end
if (A<=0)
    if (B<=0)
        j=M;
    end
    if (B>0)
        if (-B/(2*A)<=m)
            j=M;
        end
        if (-B/(2*A)>m)
            if (-B/(2*A)>=M)
                j=m;
            end
            if (-B/(2*A)<M)
                if (-B/(2*A)-m > M+B/(2*A))
                    j=m;
                else
                    j=M;
                end
            end
        end
    end
end
end
```

Apéndice B

Programas Runge Kutta de orden 4 para el Péndulo en el Espacio

B.1. Programa para el péndulo de cuerda fija

```
h=0.01; x=1; y=0; z=0; w=.5;
for i=0:1000
    t=i*h;
    T(i+1)=t;
    k1=h*f31(y);
    j1=h*f32(x,y,w);
    p1=h*g31(w);
    q1=h*g32(x,y,w);
    k2=h*f31(y+j1/2);
    j2=h*f32(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2);
    p2=h*g31(w+q1/2);
    q2=h*g32(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2);
    k3=h*f31(y+j2/2);
    j3=h*f32(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2);
    p3=h*g31(w+q2/2);
    q3=h*g32(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2);
    k4=h*f31(y+j3);
    j4=h*f32(x+k3,y+j3,w+q3);
    p4=h*g31(w+q3);
    q4=h*g32(x+k3,y+j3,w+q3);
    x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    y=y+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
    z=z+(p1+2*p2+2*p3+p4)/6;
    w=w+(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
    X(i+1)=x;
    Y(i+1)=y;
```

```

    Z(i+1)=z;
    W(i+1)=w;
    E(i+1)=9.8*1*(1-cos(x))+1/2*((sin(x))^2*w^2+y^2);
end

function s=f31(y)
s=y;
function r=f32(x,y,w)
r=-9.8*sin(x)/1-2*0*y/1+ sin(x)*cos(x)*w^2;
function d=g31(w)
d=w;
function e=g32(x,y,w)
e=-2*0*w/1-(2*cos(x)*y*w/sin(x));

```

B.2. Programa para el péndulo usando la estrategia heurística, la estrategia óptima en el plano y la estrategia óptima en el espacio

Para la estrategia heurística usaremos la opción `derk=1`; para la estrategia óptima en el plano usaremos `derk=2` y para la estrategia óptima en el espacio usaremos `derk=3`.

```

function pen4(derk)
h=0.01; x=1; y=0; z=0; w=.1; dy=0; tx=0; ty=0;
tw=0; der1=0; der2=0; der3=0; A=0; B=0; C=0; D=0; tA=0; tB=0; tC=0;
tD=0;
if (derk==1)
for i=0:1000
    t=i*h;
    T(i+1)=t;
    k1=h*f(y);
    j1=h*f1(x,y,w,der1);
    p1=h*g(w);
    q1=h*g1(x,y,w,der1);
    k2=h*f(y+j1/2);
    j2=h*f1(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2,der1);
    p2=h*g(w+q1/2);
    q2=h*g1(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2,der1);
    k3=h*f(y+j2/2);
    j3=h*f1(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2,der1);

```

```

p3=h*g(w+q2/2);
q3=h*g1(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2,der1);
k4=h*f(y+j3);
j4=h*f1(x+k3,y+j3,w+q3,der1);
p4=h*g(w+q3);
q4=h*g1(x+k3,y+j3,w+q3,der1);
x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
y=y+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
z=z+(p1+2*p2+2*p3+p4)/6;
w=w+(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
X(i+1)=x;
Y(i+1)=y;
Z(i+1)=z;
W(i+1)=w;
der1=(ele1(x,y)-ele1(tx,ty))/h;
D(i+1)=der1;
tx=x;
ty=y;
l=ele1(x,y);
L(i+1)=l;
E(i+1)=9.8*l*(1-cos(x))+(l^2)/2*((sin(x))^2*w^2+y^2);
X1=L.*sin(X).*cos(Z);
Y1=L.*sin(X).*sin(Z);
end
end
if (derk==2)
for i=0:1000
t=i*h;
T(i+1)=t;
k1=h*f(y);
j1=h*f2(x,y,w,der2,A,B);
p1=h*g(w);
q1=h*g2(x,y,w,der2,A,B);
k2=h*f(y+j1/2);
j2=h*f2(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2,der2,A,B);
p2=h*g(w+q1/2);
q2=h*g2(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2,der2,A,B);
k3=h*f(y+j2/2);
j3=h*f2(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2,der2,A,B);
p3=h*g(w+q2/2);
q3=h*g2(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2,der2,A,B);
k4=h*f(y+j3);
j4=h*f2(x+k3,y+j3,w+q3,der2,A,B);
p4=h*g(w+q3);

```

```

q4=h*g2(x+k3,y+j3,w+q3,der2,A,B);
x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
y=y+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
z=z+(p1+2*p2+2*p3+p4)/6;
w=w+(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
X(i+1)=x;
Y(i+1)=y;
Z(i+1)=z;
W(i+1)=w;
dy=(y-ty)/h;
A=y*dy/2;
B=(9.8/2)*(cos(x)*dy/y+sin(x)*y);
der2=(ele2(A,B)-ele2(tA,tB))/h;
ty=y;
tw=w;
tA=A;
tB=B;
l=ele2(A,B);
L(i+1)=l;
E(i+1)=9.8*l*(1-cos(x))+(l^2)/2*((sin(x))^2*w^2+y^2);
X1=L.*sin(X).*cos(Z);
Y1=L.*sin(X).*sin(Z);
end
end
if (derk==3)
for i=0:1000
t=i*h;
T(i+1)=t;
k1=h*f(y);
j1=h*f3(x,y,w,der3,C,D);
p1=h*g(w);
q1=h*g3(x,y,w,der3,C,D);
k2=h*f(y+j1/2);
j2=h*f3(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2,der3,C,D);
p2=h*g(w+q1/2);
q2=h*g3(x+k1/2,y+j1/2,w+q1/2,der3,C,D);
k3=h*f(y+j2/2);
j3=h*f3(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2,der3,C,D);
p3=h*g(w+q2/2);
q3=h*g3(x+k2/2,y+j2/2,w+q2/2,der3,C,D);
k4=h*f(y+j3);
j4=h*f3(x+k3,y+j3,w+q3,der3,C,D);
p4=h*g(w+q3);
q4=h*g3(x+k3,y+j3,w+q3,der3,C,D);

```

```

x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
y=y+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
z=z+(p1+2*p2+2*p3+p4)/6;
w=w+(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;
X(i+1)=x;
Y(i+1)=y;
Z(i+1)=z;
W(i+1)=w;
dy=(y-ty)/h;
dw=(w-tw)/h;
C=y/2*(sin(x)*cos(x)*w^2-dy)+y*dy+1/2*(sin(x))^2*w*dw;
D=9.8*cos(x)*(dy-sin(x)*cos(x)*w^2)/2*y+9.8*sin(x)*y/2;
der3=(ele3(C,D)-ele3(tC,tD))/h;
ty=y;
tw=w;
tC=C;
tD=D;
l=ele3(C,D);
L(i+1)=l;
E(i+1)=9.8*l*(1-cos(x))+(1/2)*l^2*((sin(x))^2*w^2+y^2);
X1=L.*sin(X).*cos(Z);
Y1=L.*sin(X).*sin(Z);
end
end
end

function s=f(y)
s=y;
function r=f1(x,y,w,der1)
r=(-9.8*sin(x)-2*der1*y)/ele1(x,y)+ sin(x)*cos(x)*w^2;
function r=f2(x,y,w,der2,A,B)
r=(-9.8*sin(x)-2*der2*y)/ele2(A,B)+sin(x)*cos(x)*w^2;
function u=f3(x,y,w,der3,C,D)
u=(-9.8*sin(x)-2*der3*y)/ele3(C,D)+sin(x)*cos(x)*w^2;
function d=g(w)
d=w; function e=g1(x,y,w,der1)
e=-2*der1*w/ele1(x,y)-2*cos(x)*y*w/sin(x);
function e=g2(x,y,w,der2,A,B)
e=-2*der2*w/ele2(A,B)-2*cos(x)*y*w/sin(x);
function r=g3(x,y,w,der3,C,D)
r=-2*der3*w/ele3(C,D)-2*cos(x)*y*w/sin(x);
function j=ele1(x,y)
m=1;
M=1.2;

```

```

tol=eps;
if (x*y <=tol)
    j=m;
else
    j=M;
end
function j=ele2(A,B)
m=1;
M=1.2;
tol=eps;
if (A>tol)
    if (B>=tol)
        j=m;
    end
    if (B<tol)
        if (-B/(2*A)<=m)
            j=m;
        end
        if (-B/(2*A)>m)
            if (-B/(2*A)>=M)
                j=M;
            else
                j=-B/(2*A);
            end
        end
    end
end
if (A<=tol)
    if (B<=tol)
        j=M;
    end
    if (B>tol)
        if (-B/(2*A)<=m)
            j=M;
        end
        if (-B/(2*A)>m)
            if (-B/(2*A)>=M)
                j=m;
            end
            if (-B/(2*A)<M)
                if (-B/(2*A)-m > M+B/(2*A))
                    j=m;
                else
                    j=M;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
end
end
function j=ele3(C,D)
m=1;
M=1.2;
tol=eps;
if (C>tol)
    if (D>=tol)
        j=m;
    end
    if (D<tol)
        if (-D/(2*C)<=m)
            j=m;
        end
        if (-D/(2*C)>m)
            if (-D/(2*C)>=M)
                j=M;
            else
                j=-D/(2*C);
            end
        end
    end
end
end
if (C<=tol)
    if (D<=tol)
        j=M;
    end
    if (D>tol)
        if (-D/(2*C)<=m)
            j=M;
        end
        if (-D/(2*C)>m)
            if (-D/(2*C)>=M)
                j=m;
            end
            if (-D/(2*C)<M)
                if (-D/(2*C)-m > M+D/(2*C))
                    j=m;
                else
                    j=M;
                end
            end
        end
    end
end
end

```

```
        end
    end
end
end
```