TORSION THEORIES, RADICALS AND CLOSURE OPERATORS IN THE CATEGORY OF RINGS

by:

Angy Carelly Coronel Suárez

thesis presented in partial fulfillment of the requirements for the degree of

Master of Science

in

Pure Mathematics

University of Puerto Rico

Mayagüez Campus

Mathematical Sciences Department

2009

Approved by:

Gabriele Castellini, Ph.D. President, Graduate Committee	Date
Luis F. Cáceres, Ph.D. Member, Graduate Committee	Date
Uroyoán Walker, Ph.D. Member, Graduate Committee	Date
Rogelio Palomera, Ph.D. Representative of Graduate Studies	Date
Julio C. Quintana, Ph.D. Chairperson of the Mathematical Sciences Department	Date

TEORÍAS DE TORSIÓN, RADICALES Y OPERADORES DE CLAUSURA EN LA CATEGORÍA DE ANILLOS

por:

Angy Carelly Coronel Suárez

tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

Maestría en Ciencias

en

Matemática Pura

Universidad de Puerto Rico

Recinto Universitario de Mayagüez

Departamento de Ciencias Matemáticas

2009

Aprobado por:

Gabriele Castellini, Ph.D. Presidente, Comité Graduado	Fecha
Luis F. Cáceres, Ph.D. Miembro, Comité Graduado	Fecha
Uroyoán Walker, Ph.D. Miembro, Comité Graduado	Fecha
Rogelio Palomera, Ph.D. Representante Escuela Graduada	Fecha
Julio C. Quintana, Ph.D. Director Departamento de Ciencias Matemáticas	Fecha

Abstract of thesis presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science.

TORSION THEORIES, RADICALS AND CLOSURE OPERATORS IN THE CATEGORY OF RINGS

by:

Angy Carelly Coronel Suárez

2009

Advisor: Dr. Gabriele Castellini
Mathematical Sciences Department

In 1971, Joachim Lambek published a result which gives an equivalence between torsion theories $(\underline{B}, \underline{C})$ and idempotent radicals T in the category **Mod R**, establishing some properties of the classes of R-modules $\underline{B}$ and $\underline{C}$ and performing a characterization of these classes using the radical T. Recently, D. Dikranjan, W. Tholen and G. Castellini have defined, in this category, new closure operators based on pre-radicals and reciprocally, they have defined radicals based on closure operators.

In this thesis we have made some modifications to these results, defining new concepts and finding some conditions to be satisfied by the classes $\underline{B}$ and $\underline{C}$ in order to establish some connection between torsion theories and radicals in the category **Rng**. We have also defined closure operators using pre-radicals and vice versa, establishing a non bijective correspondence between these two concepts in this category.

Resumen de tesis presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias.

TEORÍAS DE TORSIÓN, RADICALES Y OPERADORES DE CLAUSURA EN LA CATEGORÍA DE ANILLOS

por:

Angy Carelly Coronel Suárez

2009

Consejero: Dr. Gabriele Castellini
Departamento de Ciencias Matemáticas

En 1971, Joachim Lambek publicó un resultado que da una equivalencia entre las teorías de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$ y los radicales idempotentes T en la categoría **Mod R**, estableciendo algunas propiedades que cumplen las clases de R-módulos $\underline{B}$ y $\underline{C}$ y realizando una caracterización de éstas clases usando el radical T. Recientemente, D. Dikranjan, W. Tholen y G. Castellini han definido, en esta misma categoría, nuevos operadores de clausura basados en pre-radicales y recíprocamente, han definido radicales basados en operadores de clausura.

En esta tesis hemos realizado algunas modificaciones a estos resultados, definiendo nuevos conceptos y encontrando algunas condiciones que deben cumplir las clases $\underline{B}$ y $\underline{C}$ para así poder establecer alguna relacionan entre las teorías de torsión y los radicales en la categoría **Rng**. Igualmente, hemos construido operadores de clausura usando pre-radicales y viceversa, estableciendo una correspondencia no biyectiva entre estos dos conceptos en esta categoría.

A Edwin, Juanes y especialmente a mi segundo bebé JJ,

quienes me impulsan a seguir.

A mis padres y familia, quienes siempre han creído en mi

Agradecimientos

A la fuerza superior que nos guía y protege en nuestros pasos.

Al profesor Castellini por su infinita paciencia, su conocimiento, tiempo y colaboración.

A Edwin por saber esperar pacientemente y a Juanes por el tiempo que le he robado.

A mis compañeros Gabriel, Lucho, Rafa y Jonathan, por su apoyo durante las clases que tomamos juntos y a July, mi “parcerito” en la realización de esta tesis.

A los profesores Cáceres, Portnoy y al personal de AFAMaC-Matemáticas, por tenderme la mano cuando más la necesitaba.

A los profesores y el personal del Departamento de Ciencias Matemáticas por las oportunidades brindadas y a todas las personas que durante estos años han enriquecido mi vida académica y social.

A todos, MIL GRACIAS!

Índice general

Lista de símbolos

Mod R : Categoría de módulos sobre un anillo R

$[B, C]$: Conjunto de todos los homomorfismos de B en C

Grp : Categoría de grupos

Ab : Categoría de grupos abelianos

Rng : Categoría de anillos

Top : Categoría de espacios topológicos

$S(X)$: Conjunto de todos los subconjuntos de X

$S(X)^{op}$: Conjunto de todos los subconjuntos de X, con orden inverso

$\sup X$: Elemento supremo de un conjunto X

$\mathcal{M}$: Clase de morfismo de una categoría

$[\,]^C$: Operador de clausura categórico

Introducción

Las teorías de torsión han sido bastante estudiadas bajo diferentes nombres y por diferentes autores de forma independiente. Fueron estudiadas bajo este nombre, con o sin el sufijo "hereditarias" por Lambek [8] y Dickson [4]. Sin embargo, conceptos equivalentes son filtros idempotentes de ideales derechos por Bourbaki [1] y Gabriel [5], radicales de torsión o núcleos idempotentes por Maranda [10] y Goldman [6], operaciones de clausuras modulares sobre retículos de ideales derechos por Chew [3]. Además, las teorías de torsiones especiales que contienen las semillas de la teoría general, fueron desarrolladas en la construcción de los anillos cocientes generalizados por Findlay y Lambek [7]. En [9] Lambek presenta el siguiente resultado sobre teorías de torsión en la categoría **Mod R**, donde R es un anillo asociativo con identidad:

Definición 1. Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ clases de R-módulos. Se define

$$\underline{B}^r = \{C \in \mathbf{Mod\ R} | \forall B \in \underline{B}, [B, C] = 0\}$$

$$\underline{C}^l = \{B \in \mathbf{Mod\ R} | \forall C \in \underline{C}, [B, C] = 0\}$$

Definición 2. $(\underline{B}, \underline{C})$ es una **teoría de torsión** si y sólo si $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$

Definición 3. Una función T : **Mod R** $\longrightarrow$ **Mod R** es un **radical** si $T(M) \subseteq M$, f :

$M \longrightarrow N \Longrightarrow f(T(M)) \subseteq T(N)$, $T(M/T(M)) = 0$, para todo M y N módulos y para todo homomorfismo f.

Teorema 1. *Si $\underline{B}$ y $\underline{C}$ son clases de R-módulos, los siguientes resultados son equivalentes:*

1. $\underline{B} = \underline{C}^l$ *y* $\underline{C} = \underline{B}^r$*;*

2. $\underline{B}$ *es cerrado bajo imágenes isomórficas, cocientes de módulos, extensiones de grupo y sumas directas, más aún,* $\underline{C} = \underline{B}^r$*;*

3. $\underline{C}$ *es cerrado bajo imágenes isomórficas, submódulos, extensiones de grupo y productos directos, más aún,* $\underline{B} = \underline{C}^l$*;*

4. *Hay un radical T sobre **Mod R** tal que $T(T(M)) = T(M)$ para todo módulo M, más aún,* $\underline{B} = \{M | T(M) = M\}$ *y* $\underline{C} = \{M | T(M) = 0\}$.

La importancia de este teorema en la categoría **Mod R** es que establece una relación biyectiva entre dos conceptos diferentes los cuales son las teorías de torsión y los radicales idempotentes.

Recientemente con el desarrollo de operadores de clausura categóricos ([2],[11]), se ha encontrado una relación entre pre-radicales y ciertos tipos de operadores de clausura, principalmente en categorías de grupos abelianos y más en general en la categoría **Mod R**.

Nuestro trabajo consiste en encontrar, si es posible, condiciones que deben tener las clases de anillos $\underline{B}$ y $\underline{C}$ para que el teorema 1 sea válido en la categoría **Rng**, es decir, tratar de establecer una correspondencia entre las teorías de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$ y los radicales idempotentes T en esta categoría. Además queremos ver si estos radicales pueden o no definir operadores de clausura en **Rng**.

En los preliminares de esta tesis se encuentran algunas definiciones y resultados ya establecidos en una categoría arbitraria y en la categoría de anillos, los cuales son importantes para el desarrollo de nuestros objetivos. En el capítulo 2 reescribiremos el teorema 1 en la categoría **Rng** con las modificaciones realizadas, la construcción de los radicales y algunos ejemplos. En el capítulo 3 trabajaremos en las relaciones entre los radicales del capítulo anterior y los operadores de clausura en la categoría de anillos. Finalmente, en el capítulo 4 presentaremos conclusiones y posibles trabajos futuros en este tema.

Capítulo 1

Preliminares

Las definiciones y propiedades presentadas en este capítulo son las necesarias para el entendimiento de nuestro trabajo. Inicialmente presentaremos la definición y ejemplos de una categoría, seguido de esto, hablaremos sobre la definición de conexión de Galois, luego trataremos los operadores de clausura y por último, algunos de los resultados que están establecidos en una categoría arbitraria, los reescribiremos en la categoría de anillos.

1.1. Categorías

Definición 4. Una **categoría** $\mathcal{X}$ consiste de una clase de *objetos*, $X, Y, Z, \ldots$ y un conjunto de *morfismos* entre estos objetos $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z, \ldots$, que satisfacen las siguientes condiciones:

i. Por cada $X, Y \in \mathcal{X}$, todos los homomorfismos entre X y Y deben formar un conjunto;

II. Cada objeto de $\mathcal{X}$ tiene un morfismo identidad, es decir, $\forall X \in \mathcal{X}, \exists\, 1_X : X \longrightarrow X$ tal que $f \circ 1_X = f, \forall f : X \longrightarrow Y$ y también $1_X \circ k = k, \forall k : Z \longrightarrow X$;

III. La composición de morfismos es asociativa, es decir, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, para todo $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}$ y $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z, h : Z \longrightarrow W$ morfismos en $\mathcal{X}$.

Podemos incluir la noción natural de **subcategoría** si restringimos los objetos o los morfismos de $\mathcal{X}$.

Ejemplo 1. Set, es la categoría de *conjuntos* $A, B, C, \ldots$ y los morfismos son las funciones entre conjuntos $f : A \longrightarrow B$ con su composición usual. Una subcategoría es la categoría de todos los conjuntos finitos.

Ejemplo 2. Grp, es la categoría de *grupos* $G, H, M, \ldots$ y los morfismos son los homomorfismos de grupos con su composición usual. Una subcategoría es **Ab**, la categoría de todos los grupos abelianos.

Ejemplo 3. Rng, es la categoría de *anillos* y los morfismos son los homomorfismos de anillos con la composición usual. Subcategorías de ésta son **Ring**, la categoría de todos los anillos con 1 cuyos morfismos son los homomorfismos de anillos que envían el 1 al 1 y **CRing**, la categoría de todos los anillos conmutativos con 1.

Ejemplo 4. Mod R, es la categoría de todos los *módulos sobre un anillo R* y los morfismos son los homomorfismos de R-módulos.

Ejemplo 5. Top, es la categoría cuyos objetos son los *espacios topológicos* y los morfismos son las funciones continuas entre espacios topológicos con su composición usual.

1.2. Conexión de Galois

Definición 5. Sean A y B conjuntos con sus respectivas relaciones de orden, $\leq_A$ y $\leq_B$. Una función $f : A \longrightarrow B$ **preserva el orden** si para todo $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \leq_A a_2$, tenemos que $f(a_1) \leq_B f(a_2)$.

Un conjunto X es **pre-ordenado** si su relación de orden es reflexiva y transitiva y es **parcialmente ordenado** si su relación de orden es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 6. Para dos clases pre-ordenadas, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, una **conexión de Galois** consiste de un par de funciones

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, shift left, "f"] & \mathcal{Y} \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

tales que:

1. f y g preservan el orden;
2. Para todo $X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}$, tenemos que $X \leq g(f(X))$ y $f(g(Y)) \leq Y$.

Si $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$ son tales que $f(X) = Y$ y $g(Y) = X$, entonces, X y Y son llamados los **puntos fijos** de la conexión de Galois.

Para una clase $\mathcal{X}$, denotamos como $S(\mathcal{X})$ al conjunto de todas las subclases de $\mathcal{X}$, parcialmente ordenadas por inclusión y $S(\mathcal{X})^{op}$ al conjunto de las mismas subclases pero con **orden inverso** $\leq_{op}$, es decir, $A \leq_{op} B$ si y sólo si $A \geq B$, para todo $A, B \in S(\mathcal{X})$.

Ejemplo 6. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función entre subconjuntos de $\mathcal{X}$, con el orden usual ($A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$). Es fácil ver, por la teoría de conjuntos conocida, que lo siguiente define una conexión de Galois:

$$S(\mathcal{X}) \underset{\gamma}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S(\mathcal{X}), \qquad \text{donde } \lambda(A) = f(A) \text{ y } \gamma(B) = f^{-1}(B).$$

Ejemplo 7. Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases parcialmente ordenadas y supongamos que existe $\alpha = \sup\{X_i\}_{i\in I}$, donde $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{X}$. Sea $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una función que preserva el sup, es decir, $f(\alpha) = \sup\{f(X_i)\}_{i\in I}$ y definamos, para cada $Y \in \mathcal{Y}$, $g(Y) = \sup\{X \in \mathcal{X} : f(X) \leq Y\}$. Verifiquemos que

$$\mathcal{X} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}$$

es una conexión de Galois.

1. f preserva el orden: sea $X_1 \leq X_2$, entonces, $X_2 = \sup\{X_1, X_2\}$ y como f preserva el sup, $f(X_2) = \sup\{f(X_1), f(X_2)\}$, luego $f(X_1) \leq f(X_2)$.

   g preserva el orden: sea $Y_1 \leq Y_2$, entonces, $g(Y_1) = \sup\{X \in \mathcal{X} : f(X) \leq Y_1\} = \sup A$ y $g(Y_2) = \sup\{X \in \mathcal{X} : f(X) \leq Y_2\} = \sup B$. Si $X \in A, f(X) \leq Y_1$ y como $Y_1 \leq Y_2$, $f(X) \leq Y_2$, luego $X \in B$ y así $A \subseteq B$, por lo tanto, $g(Y_1) = \sup A \leq \sup B = g(Y_2)$.

2. $X_1 \leq g(f(X_1))$: $g(f(X_1)) = \sup\{X \in \mathcal{X} : f(X) \leq f(X_1)\} = \sup C$. Como $f(X_1) \leq f(X_1)$, entonces, $X_1 \in C$, luego $X_1 \leq \sup C = g(f(X_1))$.

   $f(g(Y_1)) \leq Y_1$: $g(Y_1) = \sup\{X \in \mathcal{X} : f(X) \leq Y_1\} \Rightarrow f(g(Y_1)) = f(\sup\{X \in \mathcal{X} : f(X) \leq Y_1\})$ y como f preserva sup, $f(g(Y_1)) = \sup\{f(X) \in \mathcal{Y} : f(X) \leq Y_1\})$, luego $f(g(Y_1)) \leq Y_1$, por ser el sup de todos los elementos menores que Y_1.

1.3. Operadores de clausura categóricos

Definición 7. Sean $\mathcal{X}$ una categoría cualquiera y $X, Y, M \in \mathcal{X}$. Un morfismo $m : M \longrightarrow X$ es un **monomorfismo** si para cualquier morfismos $f, g : Y \longrightarrow M$ tal que $m \circ f = m \circ g$, entonces, $f = g$. Lo anterior lo podemos representar con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & M \arrow[r, "m"] & X \end{tikzcd}$$

Decimos que $\mathcal{M}$ es la clase de monomorfismos de $\mathcal{X}$ y así, m es un **$\mathcal{M}$-subobjeto**.

Proposición 1. *El primer factor de un monomorfismo es un monomorfismo.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X \arrow[r, "m_1"] & Y \arrow[r, "m_2"] & Z \end{tikzcd}$$

Supongamos que $m_2 \circ m_1$ es un monomorfismo y sean $f, g : W \longrightarrow X$ tales que $m_1 \circ f = m_1 \circ g$, entonces, $m_2 \circ m_1 \circ f = m_2 \circ m_1 \circ g$ y como $m_2 \circ m_1$ es monomorfismo, $f = g$, por lo tanto, m_1 es un monomorfismo. $\square$

Definición 8. Sean P, W, Y, Z objetos de una categoría $\mathcal{X}$. Un cuadrado de la forma

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & W
\end{tikzcd}$$

es un **pullback** si conmuta, es decir, $f \circ p = g \circ q$ y cumple la propiedad universal que para cualquier objeto $X \in \mathcal{X}$ y morfismos $r : X \longrightarrow Y$ y $s : X \longrightarrow Z$ tales que $f \circ r = g \circ s$, entonces, existe un único morfismo $t : X \longrightarrow P$ tal que $p \circ t = r$ y $q \circ t = s$. Su diagrama representativo sería:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "!t"] \arrow[drr, bend left, "r"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Z \arrow[r, "g"'] & W
\end{tikzcd}$$

Si g es un monomorfismo, entonces $p = f^{-1}(g)$ es la **imagen inversa** de g bajo f.

Definición 9. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo, $m : M \longrightarrow X$ es un $\mathcal{M}$-subobjeto y

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "e_{f \circ m}"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& f(M) \arrow[ur, "f(m)"'] &
\end{tikzcd}$$

es la $(\mathbf{E}, \mathcal{M})$**-factorización** de $f \circ m$, entonces, $f(m)$ es la **imagen directa** de m bajo f.

Para mayor información sobre la teoría de $(\mathbf{E},\mathcal{M})$-**factorizaciones** podemos consultar [2]. Igualmente allí podemos ver que lo siguiente define una conexión de Galois:

$$\begin{tikzcd} S(\mathcal{X}) \arrow[r, shift left, "f"] & S(\mathcal{X})^{op} \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Observe que los conceptos de imagen inversa e imagen directa de las definiciones 8 y 9, coinciden en la mayoría de las categorías concretas con los conceptos clásicos de imagen inversa e imagen directa de funciones.

1.4. Algunos resultados en Rng

Definición 10. Sea $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos con sus respectivas operaciones $+_i, \star_i$, para cada $i \in I$. El **producto directo** de anillos, $\prod_{i\in I} R_i = R_1 \times R_2 \times \ldots$, es el conjunto de sucesiones $(r_i)_{i\in I}, r_i \in R_i, \forall i \in I$, con las operaciones $+, \star$ definidas componente a componente, es decir, para cada $(r_i)_{i\in I}, (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} R_i$,

$$(r_i)_{i\in I} + (s_i)_{i\in I} = (r_i +_i s_i)_{i\in I} \qquad\qquad (r_i)_{i\in I} \star (s_i)_{i\in I} = (r_i \star_i s_i)_{i\in I}$$

Definición 11. Sean $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos y $\prod_{i\in I} R_i$ su producto directo. Para cualquier $k \in I$, definimos $\Pi_k : \prod_{i\in I} R_i \longrightarrow R_k$ como $\Pi_k((r_i)_{i\in I}) = r_k$ la **proyección canónica** del producto directo sobre el anillo.

Proposición 2. *[Propiedad universal del producto directo] Sean $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos, $\prod_{i\in I} R_i$ su producto directo y $\{\Pi_k : \prod_{i\in I} R_i \longrightarrow R_k\}_{k\in I}$ las proyecciones canónicas.*

Entonces, para cada anillo H con homomorfismos $\{\varphi_k : H \longrightarrow R_k\}_{k\in I}$ existe un único homomorfismo $\varphi : H \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$ tal que $\Pi_k \circ \varphi = \varphi_k, \forall k \in I$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[dr, dashed, "!\varphi"'] & R_k \\ & \prod\limits_{i\in I} R_i \arrow[u, "\Pi_k"'] \end{tikzcd}$$

Sea $\varphi : H \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$ definida por $\varphi(h) = \langle\varphi_i\rangle(h) = \{\varphi_i(h)\}_{i\in I}, \forall h \in H$. Como φ_i es homomorfismo para todo $i \in I$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(h_1 + h_2) &= \{\varphi_i(h_1 + h_2)\}_{i\in I} = \{\varphi_i(h_1) + \varphi_i(h_2)\}_{i\in I} \\ &= \{\varphi_i(h_1)\}_{i\in I} + \{\varphi_i(h_2)\}_{i\in I} = \varphi(h_1) + \varphi(h_2) \\ \varphi(h_1 h_2) &= \{\varphi_i(h_1 h_2)\}_{i\in I} = \{\varphi_i(h_1)\varphi_i(h_2)\}_{i\in I} \\ &= \{\varphi_i(h_1)\}_{i\in I}\{\varphi_i(h_2)\}_{i\in I} = \varphi(h_1)\varphi(h_2), \end{aligned}$$

por lo tanto, φ es homomorfismo. Además $(\Pi_k \circ \varphi)(h) = \Pi_k(\varphi(h)) = \Pi_k\{\varphi_i(h)\}_{i\in I} = \varphi_k(h), \forall h \in H$, luego $\Pi_k \circ \varphi = \varphi_k$.

Supongamos que existe otro homomorfismo Φ que cumple con las mismas condiciones, entonces, $\Pi_k(\Phi(h)) = (\Pi_k \circ \Phi)(h) = \varphi_k(h) = (\Pi_k \circ \varphi)(h) = \Pi_k(\varphi(h)), \forall k \in I$. Es decir, $\forall h \in H, \Pi_k(\Phi(h)) = \Pi_k(\varphi(h))$, entonces, $\Phi = \varphi$, luego φ es único. $\square$

Definición 12. Sean R un anillo y L un subanillo de R. L es un **ideal** de R si es cerrado bajo la multiplicación por elementos de R, es decir, para todo $r \in R$, tenemos que

$$rL = \{rl | l \in L\} \subseteq L \qquad\qquad Lr = \{lr | l \in L\} \subseteq L$$

Proposición 3. *Sea $f : R \longrightarrow S$ homomorfismo entre los anillos R y S. Entonces,*

a. Si K ideal de S, $f^{-1}(K)$ es ideal de R;

b. Si L ideal de R y f es sobreyectivo, $f(L)$ es ideal de S.

Demostración. a. f es homomorfismo, luego $f(0_R) = 0_S \in K$, entonces, $0_R \in f^{-1}(K)$, por lo tanto, $f^{-1}(K) \neq \emptyset$.

Sean $k_1, k_2 \in f^{-1}(K)$, entonces, $f(k_1), f(k_2) \in K$. Como K es ideal de S y f es homomorfismo, $f(k_1) - f(k_2) = f(k_1 - k_2) \in K$, por lo tanto, $k_1 - k_2 \in f^{-1}(K)$.

Sean $r \in R$ y $k \in f^{-1}(K)$, entonces, $f(r) \in S$ y $f(k) \in K$. Como K es ideal de S y f es homomorfismo, $f(r)f(k) = f(rk) \in K$, por lo tanto, $rk \in f^{-1}(K)$.

Similarmente, $kr \in f^{-1}(K)$. Por lo tanto, $f^{-1}(K)$ es ideal de R.

b. $0_R \in L$ y f es homomorfismo, luego $f(0_R) = 0_S$, entonces, $0_S \in F(L)$, por lo tanto, $f(L) \neq \emptyset$.

Sean $l_1, l_2 \in f(L)$, entonces, existen $r_1, r_2 \in L$ tal que $f(r_1) = l_1$ y $f(r_2) = l_2$. Como f es homomorfismo, $l_1 - l_2 = f(r_1) - f(r_2) = f(r_1 - r_2)$. Como L es ideal de R, $r_1 - r_2 \in L$, luego $l_1 - l_2 \in f(L)$.

Sean $s \in S$ y $l \in f(L)$, entonces, existe $r \in L$ tal que $f(r) = l$. Como f es homomorfismo sobreyectivo, existe $r' \in R$ tal que $f(r') = s$, luego $sl = f(r')f(r) = f(r'r)$. Como

L es ideal de R, $r'r \in L$, luego $sl \in f(L)$.

Similarmente, $ls \in f(L)$. Por lo tanto, $f(L)$ es ideal de S.

$\square$

Definición 13. Sea $\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de ideales de un anillo R. La **suma de ideales** del anillo R, $\sum_{\alpha \in I} L_\alpha$, es el conjunto de sumas finitas de sus elementos, es decir,

$$\sum_{\alpha \in I} L_\alpha = \{l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}} | l_{\alpha_{i_k}} \in L_{\alpha_{i_k}}, \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}\} \subseteq I\}.$$

Proposición 4. *La suma de ideales del anillo R es un ideal.*

Demostración. $\sum_{\alpha \in I} L_\alpha \neq \emptyset$ pues $0 \in L_\alpha, \forall \alpha \in I$, luego $0 \in \sum_{\alpha \in I} L_\alpha$.

Sean $a, b \in \sum_{\alpha \in I} L_\alpha$, entonces, $a = l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}}$ y $b = l_{\alpha_{j_1}} + \cdots + l_{\alpha_{j_m}}$, donde $l_{\alpha_{i_k}} \in L_{\alpha_{i_k}}$, $l_{\alpha_{j_h}} \in L_{\alpha_{j_h}}, \forall k \in \{1, \ldots, n\}, h \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} a + b &= (l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}}) + (l_{\alpha_{j_1}} + \cdots + l_{\alpha_{j_m}}) \\ &= l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}} + l_{\alpha_{j_1}} + \cdots + l_{\alpha_{j_m}}, \end{aligned}$$

lo cual sigue siendo una suma finita de elementos de L_α, por lo tanto, $a + b \in \sum_{\alpha \in I} L_\alpha$ y así tenemos que $\sum_{\alpha \in I} L_\alpha$ es cerrado bajo suma. Ahora,

$$-a = -(l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}}) = -l_{\alpha_{i_1}} - \cdots - l_{\alpha_{i_n}} = (-l_{\alpha_{i_1}}) + \cdots + (-l_{\alpha_{i_n}})$$

Como L_α es ideal de $R, \forall \alpha \in I$, $-l_{\alpha_{i_k}} \in L_{\alpha_{i_k}}, \forall k \in \{1, \ldots, n\}$, luego $-a \in \sum_{\alpha \in I} L_\alpha$ y así,

$\sum_{\alpha\in I} L_\alpha$ es cerrado bajo inverso aditivo. Entonces, $\sum_{\alpha\in I} L_\alpha$ es un subanillo de R. Ahora, sea $r \in R$, entonces,

$$ra = r(l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}}) = rl_{\alpha_{i_1}} + \cdots + rl_{\alpha_{i_n}}$$

$$ar = (l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}})r = l_{\alpha_{i_1}}r + \cdots + l_{\alpha_{i_n}}r$$

Como L_α es ideal de $R, \forall\alpha \in I$, $rl_{\alpha_{i_k}}, l_{\alpha_{i_k}}r \in L_{\alpha_{i_k}}, \forall k \in \{1,\ldots,n\}$, luego $ra, ar \in \sum_{\alpha\in I} L_\alpha$ y así, $\sum_{\alpha\in I} L_\alpha$ es cerrado bajo la multiplicación por elementos de R. Entonces, $\sum_{\alpha\in I} L_\alpha$ es ideal de R. $\square$

Proposición 5. *La intersección de ideales del anillo R es un ideal.*

Demostración. Sea $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de ideales de R, entonces $0 \in L_\alpha, \forall\alpha \in I$, luego $0 \in \cap_{\alpha\in I} L_\alpha$ y por lo tanto, $\cap_{\alpha\in I} L_\alpha \neq \emptyset$.

Sean $a, b \in \cap_{\alpha\in I} L_\alpha$, entonces, $a, b \in L_\alpha, \forall\alpha \in I$. Como cada L_α es ideal, $a - b \in L_\alpha, \forall\alpha \in I$, luego $a - b \in \cap_{\alpha\in I} L_\alpha$. Por lo tanto, $\cap_{\alpha\in I} L_\alpha$ es subanillo de R.

Sea $r \in R$. Como cada L_α es ideal de R, $ra, ar \in L_\alpha, \forall\alpha \in I$, luego $ra, ar \in \cap_{\alpha\in I} L_\alpha$ y así, $\cap_{\alpha\in I} L_\alpha$ es un ideal de R. $\square$

Proposición 6. *Sean I, J ideales de un anillo R tales que $I \leq J$, entonces, existe un homomorfismo $\phi : R/I \longrightarrow R/J$ definido por $\phi([r]_I) = [r]_J$, tal que $\phi \circ q_I = q_J$, donde $q_I : R \longrightarrow R/I$ y $q_J : R \longrightarrow R/J$ son los homomorfismos cocientes.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "q_I"'] \arrow[dr, "q_J"] & \\ R/I \arrow[r, dashed, "\phi"'] & R/J \end{tikzcd}$$

Sean $[a]_I, [b]_I \in R/I$ tales que $[a]_I = [b]_I$, entonces, $r + I = r' + I$, luego $r - r' \in I$. Como $I \leq J$, $r - r' \in J$, entonces, $r + J = r' + J$ y así $\phi([a]_I) = [a]_J = [b]_J = \phi([b]_I)$, por lo tanto, ϕ está bien definido.

$$\phi([a]_I + [b]_I) = \phi([a+b]_I) = [a+b]_J = [a]_J + [b]_J = \phi([a]_I) + \phi([b]_I)$$

$$\phi([a]_I[b]_I) = \phi([ab]_I) = [ab]_J = [a]_J[b]_J = \phi([a]_I)\phi([b]_I),$$

por lo tanto, ϕ es un homomorfismo.

Además, sea $r \in R$, $(\phi \circ q_I)(r) = \phi(q_I(r)) = \phi([r]_I) = [r]_J = q_J(r)$, luego $\phi \circ q_I = q_J$. $\square$

Lema 1. *Sea $f : R \longrightarrow R'$ homomorfismo de anillos. Si M es subanillo de R y satisface que $M \leq \ker f$, entonces, existe un homomorfismo $h : R/M \longrightarrow R'$ tal que $h \circ q = f$, donde $q : R \longrightarrow R/M$ está definido como $q(r) = r + M, r \in R$.*

Demostración. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & R' \\ R/M \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $h : R/M \longrightarrow R'$ definida por $h(r+M) = f(r), \forall r \in R$. h está bien definida pues si $r_1 + M = r_2 + M$, con $r_1, r_2 \in R$, entonces, $r_1 - r_2 \in M$, luego $f(r_1 - r_2) = f(r_1) - f(r_2) = 0$ pues $M \leq \ker f$, entonces, $f(r_1) = f(r_2)$ y así $h(r_1 + M) = h(r_2 + M)$.

$$\begin{aligned} h((r_1 + M) + (r_2 + M)) &= h((r_1 + r_2) + M) = f(r_1 + r_2) \\ &= f(r_1) + f(r_2) = h(r_1 + M) + h(r_2 + M) \\ h((r_1 + M)(r_2 + M)) &= h((r_1 r_2) + M) = f(r_1 r_2) \\ &= f(r_1) f(r_2) = h(r_1 + M) h(r_2 + M), \end{aligned}$$

luego h es homomorfismo y por último, $(h \circ q)(r) = h(q(r)) = h(r + M) = f(r)$ para todo $r \in R$, luego $h \circ q = f$. $\square$

Capítulo 2

Teorías de torsión en anillos

En este capítulo presentaremos las definiciones y las modificaciones realizadas al teorema 1 correspondientes en la categoría **Rng**.

Veamos la definición 1 en la categoría de anillos y algunas propiedades que tenemos:

Definición 14. Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ clases de anillos, definimos

$$\underline{B}^r = \{C \in \mathbf{Rng} | \forall B \in \underline{B}, [B, C] = 0\}$$

$$\underline{C}^l = \{B \in \mathbf{Rng} | \forall C \in \underline{C}, [B, C] = 0\}$$

Proposición 7. *Sea $S(\boldsymbol{Rng})$ la colección de todas las subclases de anillos ordenadas por inclusión. Lo siguiente define una conexión de Galois:*

$$S(\boldsymbol{Rng}) \underset{l}{\overset{r}{\rightleftarrows}} S(\boldsymbol{Rng})^{op}$$

Demostración. 1. r preserva el orden: debemos ver que si $\underline{B_1} \leq \underline{B_2}$, entonces, $\underline{B_1}^r \leq_{op} \underline{B_2}^r$, es decir, que si $\underline{B_1} \subseteq \underline{B_2}$, entonces, $\underline{B_2}^r \subseteq \underline{B_1}^r$. Sean $C \in \underline{B_2}^r$ y $B \in \underline{B_1}$. Como $\underline{B_1} \subseteq \underline{B_2}$,

$B \in \underline{B_2}$, luego $[B,C]=0$ y por lo tanto, $C \in \underline{B_1}^r$.

l preserva el orden: debemos ver que si $\underline{C_1} \leq_{op} \underline{C_2}$, entonces, $\underline{C_1}^l \leq \underline{C_2}^l$, es decir, que si $\underline{C_2} \subseteq \underline{C_1}$, entonces, $\underline{C_1}^l \subseteq \underline{C_2}^l$. Sean $B \in \underline{C_1}^l$ y $C \in \underline{C_2}$. Como $\underline{C_2} \subseteq \underline{C_1}$, $C \in \underline{C_1}$, luego $[B,C]=0$ y por lo tanto, $B \in \underline{C_2}^l$.

2. $\underline{B} \leq \underline{B}^{rl}$: debemos ver que $\underline{B} \subseteq \underline{B}^{rl}$. Sean $B \in \underline{B}$ y $C \in \underline{B}^r$, entonces, $[B,C]=0$, luego $B \in \underline{B}^{rl}$.

   $\underline{C}^{lr} \leq_{op} \underline{C}$: debemos ver que $\underline{C} \subseteq \underline{C}^{lr}$. Sean $C \in \underline{C}$ y $B \in \underline{C}^l$, entonces, $[B,C]=0$, luego $C \in \underline{C}^{lr}$.

□

Proposición 8.

$$\underline{C} \subseteq \underline{B}^r \Longleftrightarrow \underline{B} \subseteq \underline{C}^l$$

Demostración. $[\Rightarrow]$ Sean $B \in \underline{B}$ y $C \in \underline{C}$. Como $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$, $C \in \underline{B}^r$, entonces, $[B,C]=0$ y así $B \in \underline{C}^l$, por lo tanto, $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$

$[\Leftarrow]$ Sean $C \in \underline{C}$ y $B \in \underline{B}$. Como $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$, $B \in \underline{C}^l$, entonces, $[B,C]=0$ y así $C \in \underline{B}^r$, por lo tanto, $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$ □

Recordemos la definición 2, $(\underline{B},\underline{C})$ es una **teoría de torsión** si y sólo si $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $\underline{C} = \underline{B}^r$. En otras palabras, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ son puntos fijos de la conexión de Galois, en donde $\underline{B}^r$ y $\underline{C}^l$ son como en la definición 14.

Definición 15. $\underline{B}$ es **cerrado bajo extensiones de anillo** si para cada $B \in \underline{B}$ ideal de M y $M/B \in \underline{B}$ tenemos que $M \in \underline{B}$.

Definición 16. $\underline{B}$ es **cerrado bajo suma de ideales** si por cada anillo M y cada familia $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de ideales de M con $L_\alpha \in \underline{B}, \forall \alpha \in I$, entonces, $\sum_{\alpha\in I} L_\alpha \in \underline{B}$.

Definición 17. Una función de objetos T : **Rng** $\longrightarrow$ **Rng** es un **pre-radical** si para todo anillo M y N y para todo homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ tenemos que $T(M)$ es ideal de M y $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

Definición 18. Una función de objetos T : **Rng** $\longrightarrow$ **Rng** es un **casi-radical** si para todo anillo M y N y para todo homomorfismo sobreyectivo $f : M \longrightarrow N$ tenemos que $T(M)$ es ideal de M, $f(T(M)) \subseteq T(N)$ y $T(M/T(M)) = 0$.

Definición 19. Una función de objetos T : **Rng** $\longrightarrow$ **Rng** es un **radical** si para todo anillo M y N y para todo homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ tenemos que $T(M)$ es ideal de M, $f(T(M)) \subseteq T(N)$ y $T(M/T(M)) = 0$.

Definición 20. Un radical T es **idempotente** si para todo anillo M, tenemos que $T(T(M)) = T(M)$.

Las definiciones 16 y 18 de *cerrado bajo suma de ideales* y *casi-radical* son de nuestra autoría y las hemos incluido aquí para lograr una mejor escritura del teorema.

Teorema 2. *Sean $\underline{B}$ y $\underline{C}$ clases de anillos. Consideremos los siguientes resultados:*

1. $\underline{B} = \underline{C}^l$ *y* $\underline{C} = \underline{B}^r$*;*

2. $\underline{B}$ *es cerrado bajo imágenes isomórficas, anillos cocientes, extensiones de anillo y suma de ideales, más aún,* $\underline{C} = \underline{B}^r$*;*

3. *$\underline{C}$ es cerrado bajo imágenes isomórficas, subanillos, extensiones de anillo y productos directos, más aún, $\underline{B} = \underline{C}^l$;*

4. *Existe un radical idempotente T sobre **Rng** tal que para todo anillo M, $\underline{B} = \{M|T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M|T(M) = 0\}$.*

Podemos probar que $1 \Rightarrow 2$, $1 \Rightarrow 3$ y $4 \Rightarrow 1$. Además, veremos que $2 \Rightarrow 4$ y $3 \Rightarrow 4$ sólo las tenemos parcialmente.

Demostración. Probemos que $1 \Rightarrow 2$, $1 \Rightarrow 3$ y $4 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h \circ f = 0"'] & B' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

[**1 ⇒ 2**] Sean $B \in \underline{B}$ y $f : B \longrightarrow B'$ homomorfismo sobreyectivo. Debemos ver que $B' \in \underline{B}$. Sean $C \in \underline{C}$ y $h : B' \longrightarrow C$ homomorfismo. Como $B \in \underline{B} = \underline{C}^l$, $h \circ f : B \longrightarrow C$ es constante, luego $h \circ f = 0$. Sea $b \in B'$. Como f es sobreyectivo, existe $x \in B$ tal que $f(x) = b$, luego $0 = h(f(x)) = h(b)$, por lo tanto, h es constante y así $B' \in \underline{C}^l = \underline{B}$. Si además f es inyectiva no altera la demostración, luego $\underline{B}$ es cerrado bajo imágenes isomórficas.

Ahora, como cada homomorfismo cociente $q : B \longrightarrow B'$ es sobreyectivo y $B \in \underline{B}$, tenemos que $B' \in \underline{B}$, luego $\underline{B}$ es cerrado bajo anillos cocientes.

Sean $B \in \underline{B}$ ideal de M y $M/B \in \underline{B}$. Debemos ver que $M \in \underline{B}$. Sea $f : M \longrightarrow C$ homomorfismo con $C \in \underline{C}$. Como B es subanillo de M y $B \in \underline{B} = \underline{C}^l$, $f|_B : B \longrightarrow C$ es constante, luego $B \leq \ker f$. Aplicando el lema 1 tenemos que existe un homomorfismo $h : M/B \longrightarrow C$ tal que $f = h \circ q$ con $q : M \longrightarrow M/B$ el homomorfismo cociente. Como $M/B \in \underline{B}$, h es constante y así f sería constante, por lo tanto, $M \in \underline{C}^l = \underline{B}$ y así $\underline{B}$ es cerrado bajo extensiones de anillo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & C \\ M/B \arrow[ur, "h=0"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de ideales de un anillo R tal que $L_\alpha \in \underline{B}$, para cada $\alpha \in I$. Debemos probar que $\sum_{\alpha \in I} L_\alpha \in \underline{B}$. Sean $f : \sum_{\alpha \in I} L_\alpha \longrightarrow C$ con $C \in \underline{C}$ homomorfismo de anillos y $\iota_{\alpha_{i_k}} : L_{\alpha_{i_k}} \longrightarrow \sum_{\alpha \in I} L_\alpha$ las inclusiones naturales de cada ideal en su suma. Como $L_{\alpha_{i_k}} \in \underline{B} = \underline{C}^l$, tenemos que $f \circ \iota_{\alpha_{i_k}} = 0$, luego

$$\begin{tikzcd} L_{\alpha_{i_k}} \arrow[r, "\iota_{\alpha_{i_k}}"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \iota_{\alpha_{i_k}} = 0"'] & \sum\limits_{\alpha \in I} L_\alpha \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} f(l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}}) &= f(l_{\alpha_{i_1}}) + \cdots + f(l_{\alpha_{i_n}}) \\ &= f(\iota_{\alpha_{i_1}}(l_{\alpha_{i_1}})) + \cdots + f(\iota_{\alpha_{i_n}}(l_{\alpha_{i_n}})) \\ &= (f \circ \iota_{\alpha_{i_1}})(l_{\alpha_{i_1}}) + \cdots + (f \circ \iota_{\alpha_{i_n}})(l_{\alpha_{i_n}}) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $f = 0$ y como $\underline{B} = \underline{C}^l$, tenemos que $\sum_{\alpha \in I} L_\alpha \in \underline{B}$ y así $\underline{B}$ es cerrado bajo suma de ideales.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "h = f \circ k = 0"'] & C' \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

[**1** $\Rightarrow$ **3**] Sean $C \in \underline{C}$ y $f : C' \longrightarrow C$ homomorfismo inyectivo. Debemos ver que $C' \in \underline{C}$. Sea $k : B \longrightarrow C'$ homomorfismo con $B \in \underline{B}$. Como $C \in \underline{C} = \underline{B}^r$ el homomorfismo $h = f \circ k : B \longrightarrow C$ es constante. Sea $x \in B$, entonces, $k(x) \in C'$ y $f(k(x)) = 0$. Como f es inyectiva, $k(x) = 0$, luego k es constante y así $C' \in \underline{B}^r = \underline{C}$. Si además f es sobreyectiva no altera la demostración, luego $\underline{C}$ es cerrado bajo imágenes isomórficas.

Sean $C' \leq C$ y $f : C' \longrightarrow C$ el homomorfismo inclusión el cual es inyectivo. Por lo anterior, $C' \in \underline{C}$ y así $\underline{C}$ es cerrado bajo subanillos.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & M \arrow[d, "q"] \\ & M/C \end{tikzcd}$$

Sean $C \in \underline{C}$ ideal de M y $M/C \in \underline{C}$. Debemos ver que $M \in \underline{C}$. Sean los homomorfismos $f : B \longrightarrow M$, $q : M \longrightarrow M/C$ el homomorfismo cociente y $h : B \longrightarrow M/C$ con $B \in \underline{B}$, definida por $h = q \circ f$. Como $M/C \in \underline{C} = \underline{B}^r$, h es constante, luego $0 = (q \circ f)(b) = q(f(b)), \forall b \in B$, entonces, $f(b) \in \ker q = C$ y así $f(B) \subseteq C$. Podemos decir entonces que $f = \overline{f} : B \longrightarrow C$. Como $C \in \underline{C}$ tenemos que f es constante, luego $M \in \underline{B}^r = \underline{C}$, por lo tanto, $\underline{C}$ es cerrado bajo extensiones de anillo.

Sean $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos en $\underline{C}$ y $\{\Pi_k : \prod_{i\in I} R_i \longrightarrow R_k\}_{k\in I}$ las proyecciones canónicas. Sean $\{h_k : B \longrightarrow R_k\}_{k\in I}$ homomorfismos con $B \in \underline{B}$. Por la proposición 2 existe un único homomorfismo $h : B \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$ tal que $\Pi_k \circ h = h_k, \forall k \in I$.

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} R_i \arrow[r, "\Pi_k"] & R_k \\ B \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "h_k"'] & \end{tikzcd}$$

Como $R_k \in \underline{C} = \underline{B}^r$, tenemos que $h_k = 0, \forall k \in I$, entonces, h es constante, por lo tanto, $\prod_{i\in I} R_i \in \underline{B}^r = \underline{C}$ y así $\underline{C}$ es cerrado bajo productos directos.

[$\mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{1}$] Sean $\underline{B} = \{M|T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M|T(M) = 0\}$.

Veamos que $\underline{B} = \underline{C}^l$:

Sea $f : B \longrightarrow C$ homomorfismo con $B \in \underline{B}$ y $C \in \underline{C}$, entonces, $T(B) = B$ y $T(C) = 0$. T es radical, luego $f(B) = f(T(B)) \subseteq T(C) = 0$, por lo tanto, f es constante y así $B \in \underline{C}^l$, entonces, $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$.

Ahora, sea $B \in \underline{C}^l$. Como T es radical, $T(B) \subseteq B$ y $T(B/T(B)) = 0$, entonces, $B/T(B) \in \underline{C}$. Sea $q : B \longrightarrow B/T(B)$ el homomorfismo cociente. Como q es sobreyectivo, $q(B) = B/T(B)$ y como $B \in \underline{C}^l$ y $B/T(B) \in \underline{C}$, q es constante, luego $q(B) = 0$, entonces, $B/T(B) = 0$ y así $T(B) = B$, por lo tanto, $B \in \underline{B}$ y entonces, $\underline{C}^l \subseteq \underline{B}$ y así, $\underline{B} = \underline{C}^l$.

Veamos que $\underline{C} = \underline{B}^r$:

Probamos que $\underline{B} \subseteq \underline{C}^l$, luego por la proposición 8, $\underline{C} \subseteq \underline{B}^r$.

Ahora, sea $C \in \underline{B}^r$. Como T es idempotente, $T(T(C)) = T(C)$, luego $T(C) \in \underline{B}$. Sea $f : T(C) \longrightarrow C$ el homomorfismo inclusión, entonces, $f(T(C)) = T(C)$. Como $T(C) \in \underline{B}$ y

$C \in \underline{B}^r$, f es constante, luego $f(T(C)) = 0$, de donde $T(C) = 0$ y así $C \in \underline{C}$, por lo tanto, $\underline{B}^r \subseteq \underline{C}$ y así, $\underline{C} = \underline{B}^r$.

Ahora vamos a trabajar con la prueba parcial de:

[**2** $\Rightarrow$ **4**] Debemos ver que T_B : **Rng** $\longrightarrow$ **Rng** definido como sigue es un casi-radical idempotente: por cada anillo M, sea $\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la familia no vacía de todos los ideales del anillo M que pertenecen a $\underline{B}$:

$$\begin{cases} T_B : \mathbf{Rng} & \longrightarrow & \mathbf{Rng} \\ \qquad M & \longmapsto & T_B(M) = \sum_{\alpha \in I} L_\alpha = \{l_{\alpha_{i_1}} + \cdots + l_{\alpha_{i_n}} | l_{\alpha_{i_k}} \in L_{\alpha_{i_k}}, \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}\} \subseteq I\} \end{cases}$$

Por la proposición 4, $T_B(M)$ es ideal de M.

Sea $f : M \longrightarrow N$ homomorfismo sobreyectivo. Debemos ver que $f(T_B(M)) \subseteq T_B(N)$. Sea $y \in f(T_B(M))$, entonces, existe $x \in T_B(M)$ tal que $f(x) = y$, luego $x = \sum_{k=1}^n l_{\alpha_{i_k}}, l_{\alpha_{i_k}} \in L_{\alpha_{i_k}}$. Entonces, $f(x) = f(\sum_{k=1}^n l_{\alpha_{i_k}}) = \sum_{k=1}^n f(l_{\alpha_{i_k}})$ y así $y = \sum_{k=1}^n f(l_{\alpha_{i_k}})$. Como $L_{\alpha_{i_k}} \leq M, f(L_{\alpha_{i_k}}) \leq N$ y entonces, $\overline{f} : L_{\alpha_{i_k}} \longrightarrow f(L_{\alpha_{i_k}})$ es un homomorfismo sobreyectivo. Como $L_{\alpha_{i_k}} \in \underline{B}$ y $\underline{B}$ es cerrado bajo homomorfismos sobreyectivos, $f(L_{\alpha_{i_k}}) \in \underline{B}$ y además, como $L_{\alpha_{i_k}}$ es ideal de M, por la proposición 3b tenemos que $f(L_{\alpha_{i_k}})$ es ideal de N, por lo tanto, $y = \sum_{k=1}^n f(l_{\alpha_{i_k}})$, donde $f(l_{\alpha_{i_k}}) \in f(L_{\alpha_{i_k}}) \in \underline{B}$ y así $y \in T_B(N)$, luego, $f(T_B(M)) \subseteq T_B(N)$.

Probemos que $T_B(M/T_B(M)) = 0$: sean L_α ideales de $M/T_B(M)$ tal que $L_\alpha \in \underline{B}$ y el homomorfismo cociente $q : M \longrightarrow M/T_B(M)$. Como L_α es ideal de $M/T_B(M)$, por la proposición 3a tendríamos que $q^{-1}(L_\alpha)$ es ideal de M. Además, como $L_\alpha \leq M/T_B(M)$, $q^{-1}(L_\alpha) \leq M$ y por teorema de homomorfismos tendríamos que $q^{-1}(L_\alpha)/T_B(M) \cong L_\alpha$. Como $L_\alpha \in \underline{B}$ y $\underline{B}$ es cerrado bajo isomorfismos, $q^{-1}(L_\alpha)/T_B(M) \in \underline{B}$. Además, por hipótesis tenemos que $\underline{B}$ es cerrado bajo suma de ideales, luego $T_B(M) = \sum_{\alpha \in I} L_\alpha \in \underline{B}$ y como $\underline{B}$ es cerrado bajo extensiones de anillo, tendríamos que $q^{-1}(L_\alpha) \in \underline{B}$. Entonces, $q^{-1}(L_\alpha) \leq T_B(M)$ y así $q(q^{-1}(L_\alpha)) \leq q(T_B(M))$. Como $T_B(M) = \ker q, q(T_B(M)) = 0$, luego $L_\alpha = q(q^{-1}(L_\alpha)) \leq q(T_B(M)) = 0$, por lo tanto, $T_B(M/T_B(M)) = \sum_{\alpha \in I} L_\alpha = \sum 0 = 0$.

Hasta acá tenemos que T_B es un casi-radical.

Probemos que T_B es idempotente, es decir, $T_B(T_B(M)) = T_B(M)$:

Por definición tenemos que $T_B(T_B(M)) \subseteq T_B(M)$.

Ahora, como por hipótesis $\underline{B}$ es cerrado bajo suma de ideales, $T_B(M)$ es un ideal de $T_B(M)$ que pertenece a $\underline{B}$, luego $T_B(M) \subseteq T_B(T_B(M))$.

Probemos que $\underline{B} = \{M : T_B(M) = M\}$:

Sea $M \in \underline{B}$, entonces, $M \subseteq T_B(M)$, por lo tanto, $T_B(M) = M$ y $\underline{B} \subseteq \{M : T_B(M) = M\}$.

Ahora, sea M tal que $M = T_B(M)$. Como $T_B(M) \in \underline{B}$, tenemos que $M \in \underline{B}$ y $\{M : T_B(M) = M\} \subseteq \underline{B}$.

Veamos que $\underline{C} \subseteq \{M : T_B(M) = 0\}$:

Sean $M \in \underline{C} = \underline{B}^r$ e $\iota : T_B(M) \longrightarrow M$ el homomorfismo inclusión. Como $T_B(M) \in \underline{B}$, $\iota(T_B(M)) = 0$, luego $T_B(M) = 0$ y $\underline{C} \subseteq \{M : T_B(M) = 0\}$.

Ahora, sean M tal que $T_B(M) = 0$ y $f : B \longrightarrow M$ homomorfismo sobreyectivo con $B \in \underline{B}$. Por el párrafo anterior, $T_B(B) = B$ y por la proposición 3b, $f(B) = f(T_B(B)) \subseteq T_B(M) = 0$, luego $f = 0$. Desafortunadamente esto no es suficiente para probar que $M \in \underline{C}$, pues esto se debe cumplir para cualquier homomorfismo f.

En otras palabras, el casi-radical nos permite reconstruir $\underline{B}$, pero no $\underline{C}$.

Con excepción de la idempotencia del radical, vamos ahora a demostrar:

[**3** $\Rightarrow$ **4**] Debemos ver que T_C definido como sigue es un radical:

$$\begin{cases} T_C : \mathbf{Rng} \longrightarrow \mathbf{Rng} \\ \qquad M \longmapsto T_C(M) = \cap \Upsilon_M \end{cases}, \Upsilon_M = \{K \text{ ideal de } M | M/K \in \underline{C}\}.$$

Por la proposición 5, $T_C(M)$ es ideal de M.

Sea $f : M \longrightarrow N$ homomorfismo. Debemos ver que $f(T_C(M)) \subseteq T_C(N)$, es decir, que $f(T_C(M)) = f(\cap \Upsilon_M) \subseteq \cap f(\Upsilon_M) \subseteq \cap \Upsilon_N = T_C(N)$. Para esto es suficiente probar que $\Upsilon_N \subseteq f(\Upsilon_M)$. Sea $K \in \Upsilon_N$, entonces, K es ideal de N y $N/K \in \underline{C}$, luego, por la proposición 3a, $f^{-1}(K)$ es ideal de M. Si probamos que $M/f^{-1}(K) \in \underline{C}$, tendríamos que $f^{-1}(K) \in \Upsilon_M$, luego $K \in f(\Upsilon_M)$ y así tendríamos que $\Upsilon_N \subseteq f(\Upsilon_M)$, es decir, que $f(T_C(M)) \subseteq T_C(N)$.

Probemos que $M/f^{-1}(K) \in \underline{C}$: sea $\Phi : M/f^{-1}(K) \longrightarrow N/K$ definido por $\Phi(m+f^{-1}(K)) = f(m)+K, \forall m \in M$. Veamos que Φ es homomorfismo inyectivo. Sean $m_1, m_2 \in M$ tales que

$$\begin{aligned}
m_1 + f^{-1}(K) = m_2 + f^{-1}(K) &\Longrightarrow (m_1 - m_2) \in f^{-1}(K)\\
&\Longrightarrow f(m_1 - m_2) = f(m_1) - f(m_2) \in K\\
&\Longrightarrow f(m_1) + K = f(m_2) + K\\
&\Longrightarrow \Phi(m_1 + f^{-1}(K)) = \Phi(m_2 + f^{-1}(K)),\\
\Phi[(m_1 + f^{-1}(K)) + (m_2 + f^{-1}(K))] &= \Phi[(m_1 + m_2) + f^{-1}(K)]\\
&= f(m_1 + m_2) + K = [f(m_1) + f(m_2)] + K\\
&= [f(m_1) + K] + [f(m_2) + K]\\
&= \Phi(m_1 + f^{-1}(K)) + \Phi(m_2 + f^{-1}(K)),\\
\Phi[(m_1 + f^{-1}(K))(m_2 + f^{-1}(K))] &= \Phi[(m_1 m_2) + f^{-1}(K)]\\
&= f(m_1 m_2) + K = [f(m_1) f(m_2)] + K\\
&= [f(m_1) + K][f(m_2) + K]\\
&= \Phi(m_1 + f^{-1}(K))\Phi(m_2 + f^{-1}(K)),\\
\ker \Phi &= \{m + f^{-1}(K) | \Phi(m + f^{-1}(K)) = 0 + K\}\\
&= \{m + f^{-1}(K) | f(m) + K = 0 + K\}\\
&= \{m + f^{-1}(K) | f(m) \in K\} = \{m + f^{-1}(K) | m \in f^{-1}(K)\}\\
&= f^{-1}(K) = 0 + f^{-1}(K),
\end{aligned}$$

luego Φ es un homomorfismo inyectivo, entonces, $M/f^{-1}(K) \cong \Phi(M/f^{-1}(K)) \leq N/K \in \underline{C}$.

Como $\underline{C}$ es cerrado bajo isomorfismos y subanillos, $M/f^{-1}(K) \in \underline{C}$.

Probemos que $T_C(M/T_C(M)) = 0$: sean $q_i : M \longrightarrow M/K_i$ homomorfismos cocientes con $M/K_i \in \underline{C}$ y $K_i = \ker q_i, \forall i \in I$. Por la proposición 2, existe $\langle q_i \rangle : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M/K_i$ homomorfismo tal que $\pi_i \circ \langle q_i \rangle = q_i, \forall i \in I$. Ahora,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "\langle q_i \rangle"'] & M/K_i \\
& \prod_{i\in I} M/K_i \arrow[u, "\pi_i"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\ker\langle q_i \rangle &= \{m \in M | \langle q_i \rangle(m) = 0\} = \{m \in M | \{q_i(m)\}_{i\in I} = 0\} \\
&= \{m \in M | q_i(m) = 0, \forall i \in I\} = \{m \in M | m \in K_i, \forall i \in I\} \\
&= \cap\{K_i | M/K_i \in \underline{C}\} = \cap\Upsilon_M = T_C(M).
\end{aligned}$$

Entonces, $M/T_C(M) \cong M/\ker\langle q_i \rangle \cong N \leq \prod_{i\in I} M/K_i$. Como $\underline{C}$ es cerrado bajo productos, isomorfismos y subanillos, $\prod_{i\in I} M/K_i \in \underline{C}$ y por lo tanto, $(M/T_C(M))/0 \cong M/T_C(M) \in \underline{C}$, luego $0 \in \Upsilon_{M/T_C(M)}$ y así $T_C(M/T_C(M)) = \cap\Upsilon_{M/T_C(M)} = 0$.

Hasta aquí hemos probado que T_C es un radical.

Veamos que $\underline{C} = \{M | T_C(M) = 0\}$:

Sea $M \in \underline{C}$. Como $M \cong M/0 \Longrightarrow 0 \in \Upsilon_M$, por lo tanto, $T_C(M) = 0$ y $\underline{C} \subseteq \{M | T_C(M) = 0\}$.

Ahora, sea M tal que $T_C(M) = 0$. $M \cong M/0 \cong M/T_C(M)$. En el párrafo anterior probamos que $M/T_C(M) \in \underline{C}$ y como $\underline{C}$ es cerrado bajo isomorfismos, $M \in \underline{C}$, luego $\{M | T_C(M) = 0\} \subseteq \underline{C}$.

Probemos que $\underline{B} = \{M | T_C(M) = M\}$:

Sean $M \in \underline{B}$ y $q : M \longrightarrow M/T_C(M)$ el homomorfismo cociente. Como $\underline{B} = \underline{C}^l$ y $M/T_C(M) \in \underline{C}, q(M) = 0$ y como q es sobreyectivo, $0 = q(M) \cong M/T_C(M)$, entonces, $M = T_C(M)$ y $\underline{B} \subseteq \{M | T_C(M) = M\}$.

Ahora, sea M tal que $T_C(M) = M$. Sea $f : M \longrightarrow C$ con $C \in \underline{C}$, entonces, $f(M) = f(T_C(M)) \subseteq T_C(C)$. Como $C \in \underline{C}, T_C(C) = 0$, luego $f(M) = 0$, por lo tanto, $M \in \underline{C}^l = \underline{B}$ y $\{M | T_C(M) = M\} \subseteq \underline{B}$. $\square$

Observación 1. *Si $\underline{B}$ satisface que para todo $L \leq R \in$ **Rng**, $L \in \underline{B}$, entonces, L es ideal de R, podemos decir que T_B es un radical.*

Esto lo tenemos porque si en la demostración de la segunda parte de [**2** $\Rightarrow$ **4**], tomamos a $R = N$ y $L = f(L_{\alpha_{i_k}}) \in \underline{B}$, entonces, $f(L_{\alpha_{i_k}})$ sería un ideal de N y así completaríamos la prueba de que T_B es radical e igualmente podríamos reconstruir completamente a $\underline{C}$.

Lema 2. *Sean $(\underline{B}, \underline{C})$ una teoría de torsión, $M \in$ **Rng**, $T_C(M) = \cap\{K$ ideal de $M | M/K \in \underline{C}\}$ y $T_B(M) = \sum_{\alpha \in I}\{L_\alpha$ ideal de $M | L_\alpha \in \underline{B}\}$, definidos anteriormente. Entonces, tenemos que $T_B(M) \subseteq T_C(M)$.*

Demostración. Sea L_α un ideal de M tal que $L_\alpha \in \underline{B}$.

Sean $\iota : L_\alpha \longrightarrow M$ el homomorfismo inclusión y $q : M \longrightarrow M/K$ el homomorfismo cociente, donde K es un ideal de M tal que $M/K \in \underline{C}$. Como $L_\alpha \in \underline{B}$, $q \circ \iota = 0$, luego $L_\alpha \subseteq K$. Esto es cierto para cada K tal que $M/K \in \underline{C}$,

$$\begin{tikzcd} L_\alpha \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "q \circ \iota = 0"'] & M \arrow[r, "q"] & M/K \end{tikzcd}$$

luego $L_\alpha \subseteq \cap\{K$ ideal de $M | M/K \in \underline{C}\} = T_C(M)$, por lo tanto, $\sum_{\alpha \in I} L_\alpha \subseteq T_C(M)$ y por consecuencia, $T_B(M) \subseteq T_C(M)$.

$\square$

Proposición 9. *Sea* $M \in$ ***Rng***. *Si* T_C *es radical idempotente, entonces,* $T_C(M) = T_B(M)$.

Demostración. Por el lema 2 tenemos que $T_B(M) \subseteq T_C(M)$.

Ahora, como T_C es idempotente, $T_C(T_C(M)) = T_C(M)$ y por el teorema 2.4, $T_C(M) \in \underline{B}$, luego por la definición de T_B, tenemos que $T_C(M) \subseteq T_B(M)$. $\square$

Conclusión: en los casos que tenemos una teoría de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$ con radical T_C idempotente, entonces, el casi-radical T_B también define un radical idempotente.

Ahora presentaremos ejemplos de teorías de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$, donde el radical T_C es un radical idempotente, al igual que el casi-radical T_B es un radical por cumplir la observación 1.

Ejemplo 8. Sean $\underline{B}$ ={Todos los anillos conmutativos cuya parte grupal es de torsión}, es decir, que todos sus elementos son de orden finito y $\underline{C}$ ={Todos los anillos conmutativos cuya parte grupal es libre de torsión}, entonces, $(\underline{B}, \underline{C})$ es una teoría de torsión en **Rng**.

En este caso, T_C es radical idempotente, luego T_B definiría también un radical idempotente y para todo anillo M, $T_B(M) = T_C(M) = t(M) = \{m \in M : km = 0, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$. Aquí asumimos que $0 \notin \mathbb{N}$.

Demostración. Por su definición, $t(M) \subseteq M$ y sabemos que $t(M)$ es un subgrupo aditivo de M. Sean $r \in M$ y $m \in t(M)$, entonces, $km = 0$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

$$k(rm) = r(km) = r0 = 0 \qquad \text{y} \qquad k(mr) = (km)r = 0r = 0,$$

luego $rm, mr \in t(M)$, por lo tanto, $t(M)$ es ideal de M.

Sean $f : M \longrightarrow N$ homomorfismo y $n \in f(t(M))$, luego $n = f(m)$ para algún $m \in t(M)$, entonces, $km = 0$, para algún $k \in \mathbb{N}$ y $kn = k(f(m)) = f(km) = f(0) = 0$, por lo tanto, $n \in t(N)$.

$$
\begin{aligned}
t(M/t(M)) &= \{m + t(M) \in M/t(M) : k(m + t(M)) = 0 + t(M), \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\} \\
&= \{m + t(M) \in M/t(M) : km + t(M) = 0 + t(M), \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\} \\
&= \{m + t(M) \in M/t(M) : km \in t(M), \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\} \\
&= \{m \in M : k'(km) = 0, \text{ para algunos } k, k' \in \mathbb{N}\} \\
&= \{m \in M : (k'k)m = 0, \text{ para algún } k'k \in \mathbb{N}\} \\
&= t(M) = 0 + t(M).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $t(M)$ es un radical. Además, $t(t(M)) = \{m \in t(M) : km = 0, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\} = t(M)$, luego $t(M)$ es idempotente. □

Ejemplo 9. Sean $\underline{B}$ ={Todos los anillos cuya parte grupal es p-primaria, para algún primo fijo p}, es decir, que el orden de todos sus elementos es una potencia del primo p y $\underline{C}$ ={Todos los anillos cuya parte grupal no tiene elementos de orden potencia de p}, entonces, $(\underline{B}, \underline{C})$ es una teoría de torsión en **Rng** y para todo anillo M, $T_B(M) = T_C(M) = T(M)$ es el ideal generado por todos los elementos de M cuyo orden es potencia del primo p.

Capítulo 3

Operadores de clausura

Aquí presentaremos relaciones entre los radicales definidos en el capítulo anterior y los operadores de clausura.

Veamos primero la definición de un operador de clausura categórico como en [2] y algunos ejemplos.

Definición 21. Un **operador de clausura categórico** C sobre una categoría $\mathcal{X}$ (con respecto a $\mathcal{M}$) es una familia $\{[\ ]_X^C : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}\}_{X \in \mathcal{X}}$ de funciones sobre los $\mathcal{M}$-subobjetos de $\mathcal{X}$ que satisface las siguientes condiciones para cada $X \in \mathcal{X}$:

a. $m \leq [m]_X^C$, para todo $\mathcal{M}$-subobjeto $m : M \longrightarrow X$;

b. $m \leq n \Rightarrow [m]_X^C \leq [n]_X^C$, para todo $\mathcal{M}$-subobjetos m, n de $\mathcal{X}$;

c. Para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ sobre $\mathcal{X}$ y todo $\mathcal{M}$-subobjeto $n : N \longrightarrow Y$, tenemos que $[f^{-1}(n)]_X^C \leq f^{-1}([n]_Y^C)$.

Por notación, mientras no haya confusión, escribiremos $[\ ]^C$ en lugar de $[\ ]^C_X$.

Proposición 10. *Bajo la condición b, la condición c es equivalente a:*

d. Para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ sobre $\mathcal{X}$ y todo $\mathcal{M}$-subobjeto $m : M \longrightarrow X$, tenemos que $f([m]^C) \leq [f(m)]^C$.

Demostración. $[c \Rightarrow d]$ Si aplicamos la condición c al morfismo $f(m) : f(M) \longrightarrow Y$, tenemos que $[f^{-1}(f(m))]^C \leq f^{-1}([f(m)]^C)$. También $m \leq f^{-1}(f(m))$, luego por la condición b.

$$\begin{aligned} [m]^C \leq [f^{-1}(f(m))]^C \quad \Rightarrow \quad f([m]^C) &\leq f([f^{-1}(f(m))]^C) \\ &\leq f(f^{-1}([f(m)]^C)) \\ &\leq [f(m)]^C \end{aligned}$$

$[d \Rightarrow c]$ Aplicando la condición d al morfismo $f^{-1}(n) : f^{-1}(N) \longrightarrow X$, tenemos que $f([f^{-1}(n)]^C) \leq [f(f^{-1}(n))]^C$ y como $f(f^{-1}(n)) \leq n$, por la condición b tenemos

$$\begin{aligned} [f(f^{-1}(n))]^C \leq [n]^C \quad \Rightarrow \quad f^{-1}([n]^C) &\geq f^{-1}([f(f^{-1}(n))]^C) \\ &\geq f^{-1}(f([f^{-1}(n)]^C)) \\ &\geq [f^{-1}(n)]^C \end{aligned}$$

□

Ejemplo 10. En la categoría **Top**: sean (X, τ) un espacio topológico y $M \subseteq X$:

- $M^K = \cap\{C \text{ cerrado en } X : M \subseteq C\}$. K es la clausura usual en topología llamada la clausura de Kuratowski.

- $M^Q = \cap\{C$ cerrado y abierto en $X : M \subseteq C\}$. Q es la "quasicomponent" clausura de M.

- $M^b = \{x \in X :$ para toda vecindad de $x, U_x, M \cap U_x \cap \{x\}^K \neq \emptyset\}$. Esta es la b-clausura de M.

Ejemplo 11. En la categoría **Grp**: sean $(G, \cdot)$ un grupo y $M \leq G$:

- $M^n = \cap\{K \trianglelefteq G : M \leq K\}$. n es la clausura normal de M.

- $M^{S_{\mathbf{Ab}}} = \cap\{K \trianglelefteq G : M \leq K, X/K \in \mathbf{Ab}\}$. Esta es la clausura normal de M inducida por **Ab**. Podemos expresarlo también como $M \cdot G'$, donde G' es el subgrupo de G generado por los conmutadores de G.

- $M^{TF} = \cap\{K \trianglelefteq G : M \leq K, X/K$ es libre de torsión$\}$. TF es la clausura normal libre de torsión de M.

Ejemplo 12. En la categoría **Ab**: sean $(G, +)$ un grupo abeliano y $M \leq G$:

- El operador de clausura definido por $M^C = M + t(G)$, donde $t(G)$ es el subgrupo de torsión de G.

- Sea $T : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un pre-radical. $M^{C_T} = M + T(G)$ es un operador de clausura de M.

- Para cualquier pre-radical $T : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, $M^{C^T} = q_M^{-1}(T(G/M))$ define un operador de clausura de M, donde $q_M : G \longrightarrow G/M$ es el homomorfismo cociente.

Ejemplo 13. En la categoría **Rng**: sean R anillo y $M \leq R$.

$M^C = \langle M \rangle = \cap\{I \text{ ideal de } R : M \leq I\}$ es el operador de clausura definido por el ideal generado por M.

Demostración. Por la proposición 5, $M^C = \langle M \rangle \leq R$. Sea $\lambda_M = \{I \text{ ideal de } R : M \leq I\}$.

a. Como $M \leq I, \forall I \in \lambda_M$, $M \subseteq \cap\lambda_M = \langle M \rangle = M^C$.

b. Sean $M \leq N$ e $I \in \lambda_N$, entonces, $N \leq I$ y como $M \leq N$, $M \leq I$, luego $I \in \lambda_M$, por lo tanto, $\lambda_N \subseteq \lambda_M$ y así $M^C = \langle M \rangle = \cap\lambda_M \leq \cap\lambda_N = \langle N \rangle = N^C$.

c. Sean $f : R \longrightarrow R'$ homomorfismo de anillos e I ideal de R' tal que $I \in \lambda_N$, entonces, $N \leq I$, luego $f^{-1}(N) \leq f^{-1}(I)$. Como $f^{-1}(I)$ es ideal de R, $\lambda_{f^{-1}(N)} \supseteq \{f^{-1}(I) : N \leq I\}$, luego $\cap\lambda_{f^{-1}(N)} \subseteq \cap\{f^{-1}(I) : N \leq I\} = f^{-1}(\cap\{I : N \leq I\}) = f^{-1}(\cap\lambda_N)$, luego $[f^{-1}(N)]^C = \langle f^{-1}(N) \rangle = \cap\lambda_{f^{-1}(N)} \leq f^{-1}(\cap\lambda_N) = f^{-1}(\langle N \rangle) = f^{-1}(N^C)$.

Por lo tanto, $M^C = \langle M \rangle$ es un operador de clausura en **Rng**. $\square$

Proposición 11. *Sean $f : R \longrightarrow R'$ homomorfismo de anillos y $M \leq R$. Entonces, existe un homomorfismo $\varphi : R/\langle M \rangle \longrightarrow R'/\langle f(M) \rangle$ definido por $\varphi([r]_{\langle M \rangle}) = [f(r)]_{\langle f(M) \rangle}$, tal que $q_{f(M)} \circ f = \varphi \circ q_M$, donde $q_M : R \longrightarrow R/\langle M \rangle$ y $q_{f(M)} : R' \longrightarrow R'/\langle f(M) \rangle$ son los homomorfismos cocientes.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_M"'] & R' \arrow[d, "q_{f(M)}"] \\ R/\langle M\rangle \arrow[r, "\varphi"'] & R'/\langle f(M)\rangle \end{tikzcd}$$

Por la proposición 5, $\langle M\rangle$ y $\langle f(M)\rangle$ son ideales de R y R', respectivamente.

Sean $[a]_{\langle M\rangle}, [b]_{\langle M\rangle} \in R/\langle M\rangle$ tales que $[a]_{\langle M\rangle} = [b]_{\langle M\rangle}$, entonces, $a = r + \langle M\rangle = r' + \langle M\rangle = b$, con $r, r' \in R$. Entonces, $r - r' \in \langle M\rangle$ y como f es homomorfismo y $\langle\ \rangle$ es un operador de clausura, $f(r) - f(r') = f(r - r') \in f(\langle M\rangle) \leq \langle f(M)\rangle$ y así $\varphi([a]_{\langle M\rangle}) = [f(a)]_{\langle f(M)\rangle} = f(r) + \langle f(M)\rangle = f(r') + \langle f(M)\rangle = [f(b)]_{\langle f(M)\rangle} = \varphi([b]_{\langle M\rangle})$, por lo tanto, φ está bien definido.

$$\begin{aligned}
\varphi([a]_{\langle M\rangle} + [b]_{\langle M\rangle}) &= \varphi([a+b]_{\langle M\rangle}) = [f(a+b)]_{\langle f(M)\rangle} = [f(a) + f(b)]_{\langle f(M)\rangle} \\
&= [f(a)]_{\langle f(M)\rangle} + [f(b)]_{\langle f(M)\rangle} = \varphi([a]_{\langle M\rangle}) + \varphi([b]_{\langle M\rangle}) \\
\varphi([a]_{\langle M\rangle}[b]_{\langle M\rangle}) &= \varphi([ab]_{\langle M\rangle}) = [f(ab)]_{\langle f(M)\rangle} = [f(a)f(b)]_{\langle f(M)\rangle} \\
&= [f(a)]_{\langle f(M)\rangle}[f(b)]_{\langle f(M)\rangle} = \varphi([a]_{\langle M\rangle})\varphi([b]_{\langle M\rangle}),
\end{aligned}$$

por lo tanto, φ es un homomorfismo.

Además, sea $r \in R$, $(q_{f(M)} \circ f)(r) = q_{f(M)}(f(r)) = [f(r)]_{\langle f(M)\rangle} = \varphi([r]_{\langle M\rangle}) = \varphi(q_M(r)) = (\varphi \circ q_M)(r)$, luego $q_{f(M)} \circ f = \varphi \circ q_M$. □

Proposición 12. *Sean R anillo y $M \leq R$, entonces, $M^{C_T} = M + T(R)$ define un operador de clausura, para cualquier pre-radical T en* ***Rng***.

Demostración. Veamos primero que $M^{C_T} = M + T(R) \leq R$: sean $m+t, m'+t' \in M+T(R)$, entonces, $(m+t)+(m'+t') = m+m'+t+t' \in M+T(R)$ y también, $(m+t)(m'+t') = mm'+mt'+tm'+tt' \in M+T(R)$, por ser $T(R)$ ideal de R.

a. $M = M+0$ y $0 \in T(R)$, luego $M \leq M+T(R) = M^{C_T}$.

b. Sean $M \leq N$ y $s \in M+T(R)$, entonces, $s = m+t, m \in M, t \in T(R)$. Como $M \leq N, m \in N$, entonces, $s \in N+T(R)$ y por lo tanto, $M^{C_T} \leq N^{C_T}$.

d. Sean $f : R \longrightarrow R'$ homomorfismo de anillos y $r \in f(M^{C_T}) = f(M+T(R))$, entonces, $r = f(s), s \in M+T(R)$, luego $s = m+t, m \in M, t \in T(R)$. Como f es homomorfismo, $r = f(s) = f(m+t) = f(m)+f(t), f(m) \in f(M), f(t) \in f(T(R))$. Como T es radical, $f(T(R)) \subseteq T(R')$, entonces, $f(t) \in T(R')$ y así, $r \in f(M)+T(R') = [f(M)]^{C_T}$, por lo tanto, $f(M^{C_T}) \leq [f(M)]^{C_T}$.

Por lo tanto, $M^{C_T} = M+T(R)$ es un operador de clausura en **Rng**. $\square$

Proposición 13. *Para cualquier pre-radical T : **Rng** $\longrightarrow$ **Rng**, $M^{C^T} = q_M^{-1}(T(R/\langle M \rangle))$ define un operador de clausura de M, donde $q_M : R \longrightarrow R/\langle M \rangle$ es el homomorfismo cociente.*

Demostración. a. $M \leq \langle M \rangle = \ker q_M$, luego $q_M(\langle M \rangle) = 0$ y $0 \in T(R/\langle M \rangle)$, por lo tanto, $M \leq q_M^{-1}(T(R/\langle M \rangle)) = M^{C^T}$.

b. Sea $M \leq N$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle)) \arrow[r, "\iota_{q_M}"] \arrow[d, "q'_M"'] \arrow[ddr, dashed, "t"] & R \arrow[d, "q_M"] \arrow[ddr, "id_R"] & \\
T(R/\langle M\rangle) \arrow[r, "\iota_{T_M}"] \arrow[ddr, "\phi'"'] & R/\langle M\rangle \arrow[ddr, "\phi"] & \\
& q_N^{-1}(T(R/\langle N\rangle)) \arrow[r, "\iota_{q_N}"] \arrow[d, "q'_N"'] & R \arrow[d, "q_N"] \\
& T(R/\langle N\rangle) \arrow[r, "\iota_{T_N}"'] & R/\langle N\rangle
\end{tikzcd}
$$

Sean q_M y q_N los homomorfismos cocientes de R entre $\langle M\rangle$ y $\langle N\rangle$, respectivamente. Entonces, por propiedad de imagen inversa, existen el homomorfismo inclusión ι_{q_M} y el homomorfismo q'_M, que es la restricción de q_M al subanillo $q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle))$, tales que $\iota_{T_M} \circ q'_M = q_M \circ \iota_{q_M}$. Por argumentos similares, existen ι_{q_N} y q'_N, tales que $\iota_{T_N} \circ q'_N = q_N \circ \iota_{q_N}$.

Como $M \leq N$, $\langle M\rangle \leq \langle N\rangle$ y por la proposición 6, existe el homomorfismo ϕ tal que $\phi \circ q_M = q_N = q_N \circ id_R$.

Como T es radical, $T(R/\langle M\rangle) \leq R/\langle M\rangle$ y $T(R/\langle N\rangle) \leq R/\langle N\rangle$, luego existen los homomorfismos inclusión ι_{T_M}, ι_{T_N} y el homomorfismo ϕ', que es la restricción de ϕ al subanillo $T(R/\langle M\rangle)$, tales que

$$\begin{aligned}
\iota_{T_N}\circ\phi' = \phi\circ\iota_{T_M} \Longrightarrow \iota_{T_N}\circ\phi'\circ q'_M &= \phi\circ\iota_{T_M}\circ q'_M \\
&= \phi\circ q_M\circ\iota_{q_M} \\
&= q_N\circ id_R\circ\iota_{q_M}
\end{aligned}$$

y el diagrama $q_N\circ\iota_{q_N} = \iota_{T_N}\circ q'_N$ es un pullback, luego por la propiedad universal de pullback, existe el homomorfismo t tal que, en particular, $\iota_{q_N}\circ t = id_r\circ\iota_{q_M} = \iota_{q_M}$. Como ι_{q_M} es el homomorfismo inclusión, es un monomorfismo y por la proposición 1, t es monomorfismo, luego $\ker t = 0$ y entonces, $M^{C^T} = q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle)) \leq q_N^{-1}(T(R/\langle N\rangle)) = N^{C^T}$.

d. Sean $f : R \longrightarrow R'$ homomorfismo de anillos y $M \leq R$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle)) \arrow[r, "\iota_{q_M}"] \arrow[d, "q'_M"'] \arrow[ddrr, dashed, "t"] & R \arrow[d, "q_M"] \arrow[ddrr, "f"] & & \\
T(R/\langle M\rangle) \arrow[r, "\iota_{T_M}"] \arrow[ddrr, "\varphi'"'] & R/\langle M\rangle \arrow[ddrr, "\varphi"] & & \\
 & & q_{f(M)}^{-1}(T(R'/\langle f(M)\rangle)) \arrow[r, "\iota_{q_{f(M)}}"] \arrow[d, "q'_{f(M)}"] & R' \arrow[d, "q_{f(M)}"] \\
 & & T(R'/\langle f(M)\rangle) \arrow[r, "\iota_{T_{f(M)}}"'] & R'/\langle f(M)\rangle
\end{tikzcd}$$

donde q_M y $q_{f(M)}$ son los homomorfismos cocientes de R entre $\langle M\rangle$ y R' entre $\langle f(M)\rangle$, respectivamente. Entonces, por la proposición 11, existe el homomorfismo φ tal que $q_{f(M)} \circ f = \varphi \circ q_M$.

Por argumentos similares al caso anterior, existen las inclusiones $\iota_{T_M}, \iota_{T_{f(M)}}$ y el homomorfismo φ' tales que $\varphi \circ \iota_{T_M} = \iota_{T_{f(M)}} \circ \varphi'$.

Igualmente existen las inclusiones $\iota_{q_M}, \iota_{q_{f(M)}}$ y los homomorfismos $q'_M, q'_{f(M)}$, tales que $q_{f(M)} \circ \iota_{q_{f(M)}} = \iota_{T_{f(M)}} \circ q'_{f(M)}$ y $q_M \circ \iota_{q_M} = \iota_{T_M} \circ q'_M$. Como,

$$\begin{aligned}
\iota_{T_{f(M)}} \circ \varphi' = \varphi \circ \iota_{T_M} \Rightarrow \iota_{T_{f(M)}} \circ \varphi' \circ q'_M &= \varphi \circ \iota_{T_M} \circ q'_M \\
&= \varphi \circ q_M \circ \iota_{q_M} \\
&= q_{f(M)} \circ f \circ \iota_{q_M}
\end{aligned}$$

y el diagrama $q_{f(M)} \circ \iota_{q_{f(M)}} = \iota_{T_{f(M)}} \circ q'_{f(M)}$ es un pullback, luego por la propiedad universal de pullback, existe el homomorfismo t tal que, en particular, $f \circ \iota_{q_M} = \iota_{q_{f(M)}} \circ t$. Entonces,

$$\begin{gathered}
(f \circ \iota_{q_M})(q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle))) = (\iota_{q_{f(M)}} \circ t)(q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle))) \Rightarrow \\
f(\iota_{q_M}(q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle)))) = \iota_{q_{f(M)}}(t(q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle)))) \Rightarrow \\
f(q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle))) = t(q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle))) \leq q_{f(M)}^{-1}(T(R'/\langle f(M)\rangle)) \Rightarrow \\
f(M^{C^T}) \leq [f(M)]^{C^T}.
\end{gathered}$$

Por lo tanto, $M^{C^T} = q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle))$ es un operador de clausura en **Rng**. □

Conclusión: por cada pre-radical T en **Rng**, existen por lo menos dos maneras de construir un operador de clausura en **Rng**: sean R anillo y $M \leq R$, entonces, $M^{C_T} = M + T(R)$ y $M^{C^T} = q_M^{-1}(T(R/\langle M \rangle))$ definen operadores de clausura, por la proposiciones 12 y 13.

Proposición 14. *Sean R un anillo y C un operador de clausura sobre **Rng**. $T(R) = \langle [0_R]^C \rangle$ define un pre-radical sobre **Rng**.*

Demostración. Por definición, $T(R)$ es un ideal de R.

Sea $f : R \longrightarrow R'$ homomorfismo de anillos. Por el ejemplo 13, $\langle\ \rangle$ es un operador de clausura y por hipótesis C también lo es, luego tenemos que $f(T(R)) = f(\langle [0_R]^C \rangle) \subseteq \langle f([0_R]^C) \rangle \subseteq \langle [f(0_R)]^C \rangle = \langle [0_{R'}]^C \rangle = T(R')$. Por lo tanto, $T(R)$ es un pre-radical sobre **Rng**. $\square$

Observamos que esta correspondencia entre radicales y operadores de clausura en **Rng** no es biyectiva en cuanto C^T y C_T corresponden al mismo radical T.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros

Recordemos la conexión de Galois

$$S(\mathbf{Rng}) \underset{l}{\overset{r}{\rightleftarrows}} S(\mathbf{Rng})^{op}, \qquad \text{definida por:}$$

$$\underline{B}^r = \{C \in \mathbf{Rng} | \forall B \in \underline{B}, [B, C] = 0\}$$

$$\underline{C}^l = \{B \in \mathbf{Rng} | \forall C \in \underline{C}, [B, C] = 0\}.$$

Una teoría de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$ es una pareja de clases de anillos tales que $\underline{C} = \underline{B}^r$ y $\underline{B} = \underline{C}^l$, es decir, una pareja de puntos fijos de la conexión de Galois.

De nuestro trabajo en la categoría **Rng** logramos conseguir los siguientes resultados:

1. En la categoría **Rng**, una teoría de torsión $(\underline{B}, \underline{C})$ cumple con las siguientes propiedades:

   - $\underline{B}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas, anillos cocientes, extensiones de anillos y suma de ideales. Además, podemos definir un casi-radical idempotente asociado a $\underline{B}$, T_B.

- $\underline{C}$ es cerrada bajo imágenes isomórficas, subanillos, extensiones de anillos y productos directos. Además, podemos definir un radical asociado a $\underline{C}$, T_C, el cual no es necesariamente idempotente.
- $T_B \subseteq T_C$.
- Si $\underline{B}$ cumple con la condición que todo subanillo de R que pertenezca a él es ideal, entonces, el casi-radical T_B es un radical.
- Si T_C es un radical idempotente, entonces, $T_C = T_B$ y por lo tanto, T_B también es un radical idempotente.

2. Para un radical idempotente T en **Rng** tenemos que, definiendo $\underline{B} = \{M|T(M) = M\}$ y $\underline{C} = \{M|T(M) = 0\}$, $(\underline{B}, \underline{C})$ es una teoría de torsión.

3. Por cada pre-radical T en **Rng**, existen por lo menos dos maneras de construir un operador de clausura, $M^{C_T} = M + T(R)$ y $M^{C^T} = q_M^{-1}(T(R/\langle M\rangle))$.

4. $T(R) = \langle [0_R]^C \rangle$ define un pre-radical sobre **Rng**.

5. Esta correspondencia entre radicales y operadores de clausura en **Rng** no es biyectiva ya que C^T y C_T corresponden al mismo radical T.

6. En general el concepto de radical idempotente en **Rng** es más fuerte que el concepto de teoría de torsión, debido a que cada radical idempotente genera una teoría de torsión, pero sólo logramos demostrar que con cada teoría de torsión se puede construir

un radical que no es necesariamente idempotente. Desafortunadamente no pudimos encontrar un ejemplo que demuestre que los dos conceptos no son equivalentes.

Para trabajos futuros quedaría la tarea de encontrar ejemplos concretos en la categoría **Rng** en los cuales se vea claramente que T_B es casi-radical, no radical y T_C es radical no idempotente. También se podría pensar en algunas propiedades, similares a la encontrada para $\underline{B}$, que deban tener las clases $\underline{B}$ y $\underline{C}$ para que el teorema 1 se cumpla completamente en la categoría **Rng**. Igualmente ver la posibilidad de plantear los mismos objetivos de este trabajo en otra categoría, por ejemplo en **Vec**, la categoría de los espacios vectoriales.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique, fasc. 27, Algèbre Commutative, Chapters 1, 2.* Paris, 1961.

[2] G. Castellini. *Categorical Closure Operators, Mathematics: Theory and Applications.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[3] K.L. Chew. *Closure Operations in the Study of Rings of Quotients, Bull. Math. Soc., Nanyang University.* 1965.

[4] S.C. Dickson. A torsion theory for abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 21:223–235, 1966.

[5] P. Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90:323–448, 1962.

[6] O. Goldman. Rings and modules of quotients. *J. Alg.*, 13:10–47, 1969.

[7] G.D. Findlay & J. Lambek. A generalized ring of quotients i, ii. *Can. Math. Bull*, 1:77–85, 155–167, 1958.

[8] J. Lambek. *Completions of Categories, Lecture Notes in Mathematics, 24.* Springer Verlag, Heidelberg, 1966.

[9] J. Lambek. *Torsion Theories, Additive Semantics and Rings of Quotients, Lecture Notes in Mathematics, 177.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[10] J.M. Maranda. Injective structures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110:98–135, 1964.

[11] D. Dikranjan & W. Tholen. *Categorical Structure of Closure Operators, with applications to Topology, Algebra and Discrete Mathematics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.