

**TEORÍA DE CONTROL PARA SISTEMAS DINÁMICOS
MONOMIALES SOBRE CUERPOS FINITOS**

Por

Ernes Ch. Aragonés Geney

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS PURAS

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

Diciembre, 2010

Aprobada por:

Dorothy Bollman, Ph.D.
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Gabriele Castellini, Ph.D.
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Omar Colón Reyes, Ph.D.
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Christopher Papadopoulos, Ph.D.
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Silvestre Colón, M.S.
Director Interino del Departamento

Fecha

Abstract of Disertación Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Science

**A CONTROL THEORY FOR MONOMIAL DYNAMICAL SYSTEMS
OVER FINITE FIELDS**

By

Ernes Ch. Aragonés Geney

December 2010

Chair: Omar Colón Reyes

Major Department: Department of Mathematical Sciences

Abstract

Monomial dynamical systems over finite fields have been studied in several contexts, including engineering and mathematical biology. Criteria for determining when a system described by monomials over finite fields, is a fixed point have already been determined. In this paper develop criteria for stability in monomial control dynamical systems over finite fields, $f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, where q is a Carmichael prime. For this we introduce the concept weakly stabilizable using the triangular systems of fixed point.

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

**TEORÍA DE CONTROL PARA SISTEMAS DINÁMICOS
MONOMIALES SOBRE CUERPOS FINITOS**

Por

Ernes Ch. Aragonés Geney

Diciembre 2010

Consejero: Omar Colón Reyes

Departamento: Departamento de Ciencias Matemáticas

Resumen

Definiremos el concepto débilmente estabilizable en los sistemas dinámico de control monomial $f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n$. Haciendo uso de los sistemas dinámicos triangulares de punto fijo determinaremos condiciones suficientes y necesaria para que un sistema de control monomial sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q , donde q es un primo de Carmichael sea estabilizable

Copyright © 2010

por

Ernes Ch. Aragones Geney

A mi padre y a la memoria de mi madre,

A Eileen y Giancarlo.

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho este espacio para expresar mis más profundo agradecimiento a mi consejero, Omar Colón Reyes por su valiosa colaboración, paciencia, tiempo y dedicación, ya que sin él este trabajo no se hubiera realizado.

A mi padre y mis hermanos por su apoyo y ser mi fuerza en todo momento.

También quiero agradecer a todos los profesores del Departamento de Ciencias Matemáticas por enriquecer mis conocimientos.

A mis amigos Roberto, Fabian, Andrés, Einstein y Oscar por los buenos momentos que pasamos.

A todos ellos muchas Gracias.

Índice general

	<u>pagina</u>
ABSTRACT ENGLISH	II
RESUMEN EN ESPAÑOL	III
AGRADECIMIENTOS	VI
Índice de figuras	VIII
LISTA DE ABREVIATURAS	X
1. Introducción	1
2. Sistemas Dinámicos Monomiales sobre Cuerpos Finitos	8
2.1. Sistemas Dinámicos Booleano	8
2.2. Sistemas dinámicos lineales sobre anillos conmutativos finitos	15
2.3. Sistemas dinámicos monomiales sobre cuerpos finitos	19
2.3.1. La función Log $L(f)$	21
2.3.2. La función Soporte $T(f)$	23
3. Sistema de Control Monomial sobre Cuerpos Finitos	28
3.1. Teoría de Control	28
3.2. Sistema de Control Monomial	29
4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	42
4.1. Conclusiones	42
4.2. Trabajos Futuros	47

Índice de figuras

Figura	pagina
1-1. Estado fase de $f = (x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) : \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$. . .	2
1-2. Estado fase de $f(x, y, z) = (x^2y + z, x^2 + y^2z, x^2 + y^2) =: \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$. . .	3
1-3. Estado fase de $(\mathbb{Z}_3^3, f(x, y, z) = (2x + 2y + z, 2x + y + z, 2x + 2y + z))$	4
1-4. Estado fase de $f = (xyz, y^2z, xz^2) : \mathbb{F}_3^3 \rightarrow \mathbb{F}_3^3$	5
1-5. Estado fase de $T(f) = (xzy, yz, xz) : \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$	5
1-6. Estado fase de $L(f) = (x + y + z, z, x) : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$	6
2-1. grafo de dependencia de la función $f = (x_2x_3, x_1x_4, x_1x_2, x_3)$	10
2-2. Estado fase de $f = (x_2x_3, x_1x_4, x_1x_2, x_3) : \mathbb{F}_2^4 \rightarrow \mathbb{F}_2^4$	10
2-3. grafo fuertemente conexo con número de bucle 1	12
2-4. grafo de dependencia con número de bucle igual a 3	13
2-5. grafo de dependencia de $f = (x_2x_3, x_4, x_2, x_1x_3x_5, x_2)$ con “Loop Number” 1	14
2-6. Estado fase del sistema booleano $f = (x_2x_3, x_4, x_2, x_1x_3x_5, x_2)$	14
2-7. Estado fase del sistema dinámico lineal $f = 3x : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$	17
2-8. Estado fase del sistema dinámico lineal $f = (3x_1 + 2x_2, x_2) : \mathbb{Z}_4^2 \rightarrow \mathbb{Z}_4^2$	18
2-9. Estado fase del sistema dinámico lineal $g = (x_1, x_2) : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$	19
2-10. Estado fase del sistema dinámico lineal $f = (2x + y, x + 2y) : \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$	19
2-11. Estado fase del SDM $f = (xy^2, x) : \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$	22
2-12. Estado fase del SDL $L(f) = (x, x) : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$	22
2-13. Estado fase de $f = (x_1x_2, x_2^2) : \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$	24
2-14. Estado fase de $T(f) = (x_1x_2, x_2) : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$	24
2-15. Estado fase de $f = (x, x^2, xy^2) \in \mathcal{F}_3^3(\mathbb{F}_3)$	27
3-1. $h = f \circ g = (y^2z^2, yz^2, z)$	30

3-2.	$h = f \circ g = (x^2yz, x^2y^2z^2, x^2z^2)$	30
3-3.	Estado fase de $h := f \circ g = (x_2^3, x_2) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_5)$	31
3-4.	Estado fase de $L(f) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2, 2x_1)$	35
3-5.	Estado fase de $h = f \circ g = (x^2y, x^2y)$	41
4-1.	Estado fase de $f \circ \varphi = (xy, y^2) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_3)$	43
4-2.	Estado fase de $f \circ g = (y^3, y) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_5)$	45
4-3.	Estado fase de $f \circ g = (x^2yz, x^2y^2z^2, y^2z) \in \mathcal{F}_3^3(\mathbb{F}_5)$ un SDPF	46

LISTA DE ABREVIATURAS

SDF	Sistema Dinámico Finito.
SDM	Sistema Dinámico Monomial.
SDMB	Sistema Dinámico Monomial Booleano.
SDL	Sistema Dinámico Lineal.
SCM	Sistema de Control Monomial.
SPF	Sistema de Punto Fijo.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos finitos son sistemas de tiempo discreto sobre un conjunto finito. En [6, 8, 10, 12] se habla acerca de la importancia de estos sistemas y su aplicación en ingeniería, ciencias de cómputos y recientemente en biología computacional. En este último la importancia de este sistema permite modelar la dinámica de los genes y determinar el impacto eventual que tiene un gen sobre otro, ver [1]. Otras aplicaciones se mencionan en [7], donde se utilizan los sistemas dinámicos lineales en circuitos de control y sistemas de comunicación. Un problema en común de estas aplicaciones es como analizar la dinámica de estos modelos sin tener que enumerar todos los estados de transición. Algunos de estas aplicaciones buscan un punto en el tiempo donde no haya ningún tipo de cambio en los estados de transición. En los trabajos de Toledo y Colón ver [1, 4] se prueban métodos eficientes para calcular cuando algunos sistemas dinámicos alcanzan un estado de quietud, es decir cuando un sistema dinámico es de punto fijo.

En este trabajo consideraremos los sistemas dinámicos $f : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, donde \mathbb{F}_q es un cuerpo finito con q elementos. La dinámica del sistema es generada por iteración de f con ella misma, es decir, $f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^{l+1}(x) = f(f^l(x))$, para $l \geq 1$ y $x \in \mathbb{F}_q^n$. Este conjunto de sucesiones formado por todos los $f^m(x)$, $m \geq 0$, es llamado la órbita de x , en otras palabras, la dinámica de f consiste en la descripción de todas las posibles orbitas. La dinámica se representa por el estado fase de f denotado por $S(f)$, el cual consiste de un grafo dirigido, conformado por q^n elementos de \mathbb{F}_q^n que son los vértices de $S(f)$, y ejes dirigidos $a \rightarrow b$, si $f(a) = b$.

En particular un eje dirigido de un vértice a si mismo es permitido. Un ejemplo de esto se puede observar en la figura 1-1

Ejemplo 1.0.1. Sea $f = (x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) : \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$. El estado fase de f esta dado en la figura 1-1.

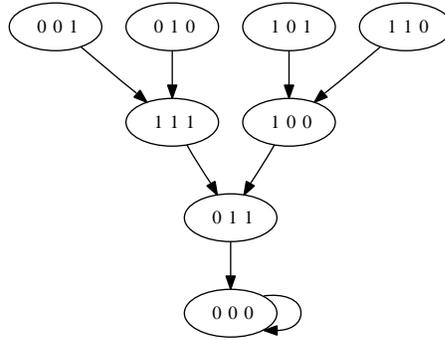


Figura 1-1: Estado fase de $f = (x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) : \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$

Decimos que en el **SDF** f se forma un ciclo de largo $l \geq 1$ si para $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^r(x) = f^{r+l}(x)$, para algún $x \in \mathbb{F}_q^n$, (asumimos que r y l son los mínimos valores que cumplen esta propiedad). Si $l = 1$, entonces decimos que x es un punto fijo para f . Cuando $r > 0$ decimos que el “transient” de la órbita de x es r . El “transient” de $S(f)$ es el máximo “transient” de todas las órbitas de $S(f)$. Ahora si todos los ciclos de f consisten de un punto fijo, decimos que f es un sistema dinámico de punto fijo **SDPF**. En el siguiente diagrama se puede apreciar los conceptos anteriores:

$$\underbrace{x \rightarrow f(x) \rightarrow f^2(x) \rightarrow \cdots \rightarrow f^r(x)}_{\text{transient de longitud } r} \rightarrow \underbrace{f^{r+1}(x) \rightarrow f^{r+2}(x) \rightarrow \cdots \rightarrow f^{r+l}(x) = f^r(x)}_{\text{ciclo de longitud } l}$$

Ejemplo 1.0.2. Sea el SDF (\mathbb{Z}_3^3, f) donde $f(x, y, z) = (x^2y + z, x^2 + y^2z, x^2 + y^2)$, el estado fase de f esta dado en la figura 1-2. Observe que $f^3(1, 0, 2) = (1, 0, 2)$, $f^2(2, 2, 1) = (2, 2, 1)$ y $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, luego f consta de un ciclo de largo 3, un ciclo de largo 2 y un solo punto fijo, además el “transient” de $S(f)$ es 6.

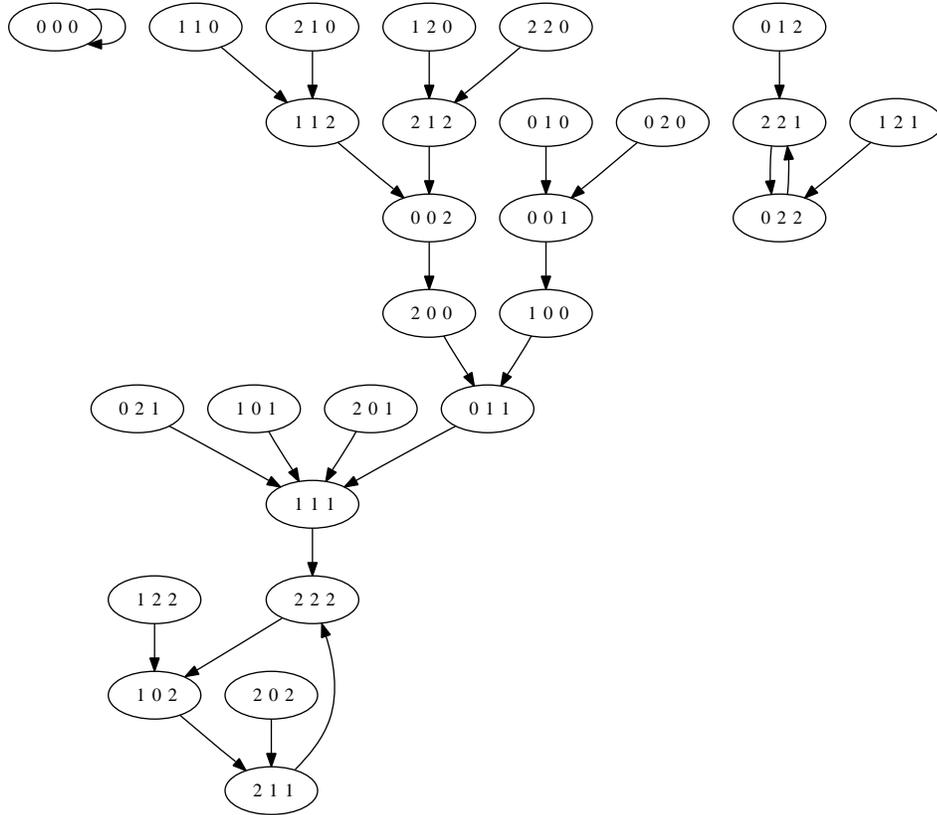


Figura 1-2: Estado fase de $f(x, y, z) = (x^2y + z, x^2 + y^2z, x^2 + y^2) =: \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$

Los SDF se pueden clasificar en lineales y no lineales ver [1, 4]. En [4] Hernández Toledo caracterizó completamente los sistemas dinámicos lineales usando el hecho que un espacio vectorial V se puede descomponer como suma directa del núcleo y la imagen de una transformación lineal $\psi^i : V \rightarrow V$. Esto le permitió establecer que

todo estado fase de un sistema dinámico lineal finito está compuesto por la unión disyunta de ciclos y un árbol.

Ejemplo 1.0.3. Sea el SDLF (\mathbb{Z}_3^3, f) , donde

$$f(x, y, z) = (2x + 2y + z, 2x + y + z, 2x + 2y + z)$$

Su representación matricial viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y su polinomio minimal es $x^2(1 - x)$. El sistema f es un sistema de punto fijo como se aprecia en la figura 1-3

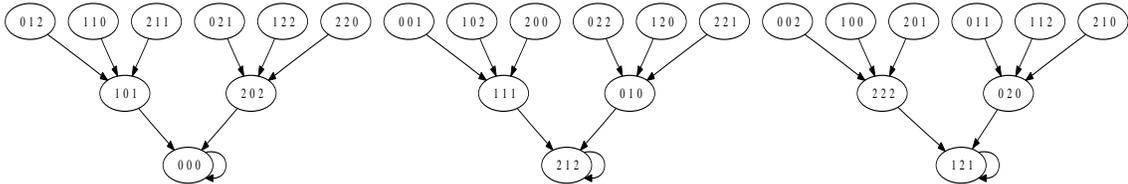


Figura 1-3: Estado fase de $(\mathbb{Z}_3^3, f(x, y, z) = (2x + 2y + z, 2x + y + z, 2x + 2y + z))$

En [1] se describen los sistemas no lineales sobre \mathbb{F}_q con monomios. Es decir, se consideran los sistemas (\mathbb{F}_q^n, f) , donde $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ y cada f_i es un polinomio de la forma $f_i(x) = x_1^{\epsilon_{i1}} \dots x_n^{\epsilon_{in}}$ con ϵ_{ij} enteros no negativos. En este artículo Colón et. al. demuestra condiciones suficientes y necesarias para que un **SDM** sea un sistema de punto fijo. Para lograr tal fin asocia a f un sistema monomial booleano $T(f)$ y un sistema lineal $L(f)$ sobre el anillo \mathbb{Z}_{q-1} , y se demuestra que f es un sistema de punto fijo si y sólo si $T(f)$ y $L(f)$ son sistemas de punto fijo.

Ejemplo 1.0.4. Sea $f = (xyz, y^2z, xz^2) : \mathbb{F}_3^3 \rightarrow \mathbb{F}_3^3$, un sistema dinámico monomial. El estado fase de f esta dado en la figura 1-4 . El estado fase de su booleanización $T(f) = (xzy, yz, xz) : \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$ es un subgrafo del estado fase de f como se aprecia en 1-5 y de igual forma su linealización $L(f) = (x + y + z, z, x) : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ como se ve en 1-6. Claramente se ve que f no es un sistema de punto fijo, pues tiene dos ciclos de longitud 2 y 4.

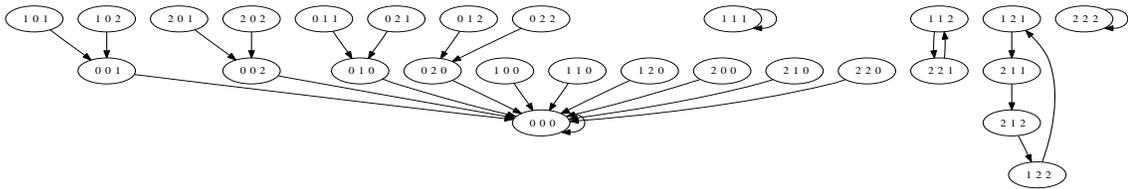


Figura 1-4: Estado fase de $f = (xyz, y^2z, xz^2) : \mathbb{F}_3^3 \rightarrow \mathbb{F}_3^3$

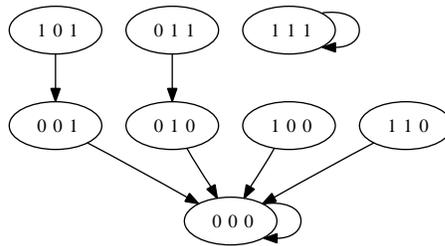


Figura 1-5: Estado fase de $T(f) = (xzy, yz, xz) : \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$

Uno de los problemas principales de los **SDF** es como obtener su dinámica sin enumerar todos sus estados de transición, ya hemos mencionado que en [1, 3, 4], han aportado solución a este problema. El objetivo de este trabajo es responder la siguiente pregunta ¿será posible manipular la dinámica de estos sistemas para que

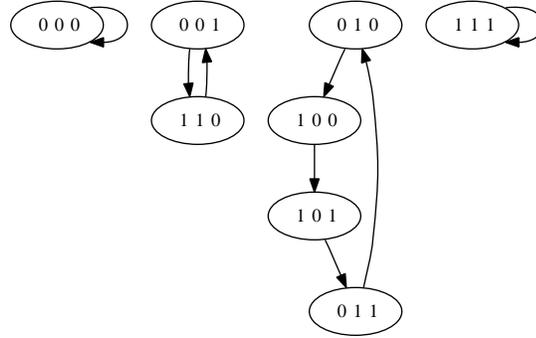


Figura 1-6: Estado fase de $L(f) = (x + y + z, z, x) : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$

alcancen un estado deseado?, en otras palabras, ¿Podemos controlar la dinámica de algunos sistemas?. Aquí intentaremos determinar cuando un sistema dinámico puede ser controlado de tal forma que alcance un estado de quietud. Cuando esto ocurra decimos que el sistema es estabilizable. Con el propósito de garantizar la estabilidad de tales sistemas es natural preguntarse por los criterios acerca de la existencia de un control de retroalimentación adecuado y como este control puede ser elegido. Estamos interesado en buscar condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de control alcance un estado de quietud, es decir, poder estabilizarlo. Particularmente nos interesa los sistemas de control monomiales sobre \mathbb{F}_q , que definimos como una función que consiste de variables de estado, dado por los eventos a modelar y variables de control, dado por una función retroalimentadora, todo en forma monomial.

En [2] se desarrolla una teoría de control para sistema de control monomial booleano. Allí se establecen criterios para determinar cuando un sistema de control monomial booleano es “estabilizable”, haciendo uso de un “controlador de retroalimentación”, que es una función monomial que depende de las variables de control. También desarrollan un algoritmo eficiente para determinar el número de bucle, el cual juega un papel importante para establecer si un sistema de control monomial booleano es de punto fijo. Este trabajo recolecta información necesaria para determinar cuando un sistema dinámico monomial es de punto fijo, todo esto con el

propósito de implementar una teoría de control en los sistemas dinámicos monomiales. Estamos interesados particularmente en los sistemas dinámicos monomiales sobre cuerpos finitos \mathbb{F}_q donde q es un primo de Carmichael, es decir, en buscar condiciones que nos permitan establecer cuando un sistema de control monomial con estas características se puede estabilizar. Pretendemos forzar la estabilidad de estos sistemas haciendo uso de los sistemas dinámicos triángulares de punto fijo, que desarrollaremos a lo largo del capítulo 2. Los sistemas de control que puedan estabilizarse a un sistema triangular de punto fijo, diremos que son sistemas de control débilmente estabilizable. Con esto damos una solución parcial a la controlabilidad de la dinámica de un sistema monomial.

En el capítulo 2, se describirán los sistemas dinámicos monomiales, booleanos y lineales n -dimensionales sobre cuerpos finitos y se establecerán criterios para determinar cuando son de punto fijo. En el capítulo 3 definiremos los sistemas de control para sistemas dinámicos discretos al igual que una breve importancia de dichas aplicaciones sobre la teoría de control. En el capítulo 4 estableceremos criterios para determinar cuando un sistema de control monomial es débilmente estabilizable, usando algunos resultados de álgebra lineal, para representar la función de control y la función retroalimentadora por matrices y reducir el problema a partir de ecuaciones matriciales.

Capítulo 2

SISTEMAS DINÁMICOS MONOMIALES SOBRE CUERPOS FINITOS

En este capítulo se describirán los sistemas dinámicos monomiales n -dimensional sobre cuerpos finitos \mathbb{F}_q . Se caracterizarán algunos sistemas de punto fijo, usando resultados ya estudiados sobre sistemas monomiales que aparecen principalmente en [1]. En particular aquellos que contienen condiciones suficientes y necesarias para que un sistema monomial sea de punto fijo. Puesto que en [1] un *SDMF* le podemos asociar una matriz $L(f)$ y asociar un *SDMB* $T(f)$, daremos una breve caracterización de los sistemas dinámicos booleanos que han sido estudiados en [3] y algunos resultados en los sistemas dinámicos lineales desarrollados en [4]. Estos dos criterios nos permitirán determinar cuando un sistema dinámico triangular es de punto fijo. Algunos de estos resultados en este capítulo se deben a conversaciones e ideas con la Dra. D. Bollman.

2.1. Sistemas Dinámicos Booleano

En esta sección estableceremos condiciones suficientes para que un sistema dinámico monomial sobre un cuerpo finito con dos elementos \mathbb{F}_2 , sea de punto fijo. Asociaremos un grafo dirigido llamado grafo de dependencia de f , y nos enfocaremos en los componentes fuertemente conectados del grafo de dependencia, que son subgrafos en el cual podemos encontrar un camino dirigido entre cualquiera dos

vértices. Además con el concepto de número de bucle aplicado a los componentes fuertemente conectados, nos ayudará a establecer cuando f es un sistema de punto fijo.

Definición 2.1. Decimos que $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ es un sistema dinámico monomial booleano n -dimensional si $f = (f_1, \dots, f_n)$, donde

$$f_i = \alpha_i x_1^{\epsilon_{1i}} x_2^{\epsilon_{2i}} \dots x_n^{\epsilon_{ni}}$$

con $\alpha_i \in \{0, 1\}$ y $\epsilon_{ij} \in \{0, 1\}$.

La composición m -veces de la función f con ella misma, la denotamos por $f^m = (f_1^m, \dots, f_n^m)$. Por consiguiente $f_i^m = \alpha_i (f_1^{m-1})^{\epsilon_{i1}} \dots (f_n^{m-1})^{\epsilon_{in}}$

En la siguiente definición asociaremos a f un grafo dirigido llamado grafo de dependencia donde los vértices corresponden a las variables de f .

Definición 2.2. Sea (\mathbb{Z}_2^n, f) un sistema dinámico booleano y $G = (V, E)$ un digrafo asociado a f , llamado grafo de dependencia con $V = \{a_1, \dots, a_n, \varepsilon\}$ el conjunto de vértices y E el conjunto de ejes dirigido de a_i a a_j . Decimos que $a_i \rightarrow a_j$ ($i = j$ esta permitido) si $\alpha_i = 1$ y x_j es un factor de f_i . Si $\alpha_i = 0$, existe un eje dirigido de a_i a ε , esto es, $f_i = 0$

Ejemplo 2.1.1. El sistema (\mathbb{Z}_2^3, f) dada por la función $f = (x_2x_3, x_1x_4, x_1x_2, x_3)$ tiene el grafo de dependencia dado por la figura 2-1

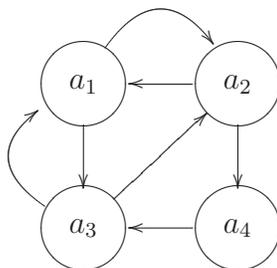


Figura 2-1: grafo de dependencia de la función $f = (x_2x_3, x_1x_4, x_1x_2, x_3)$

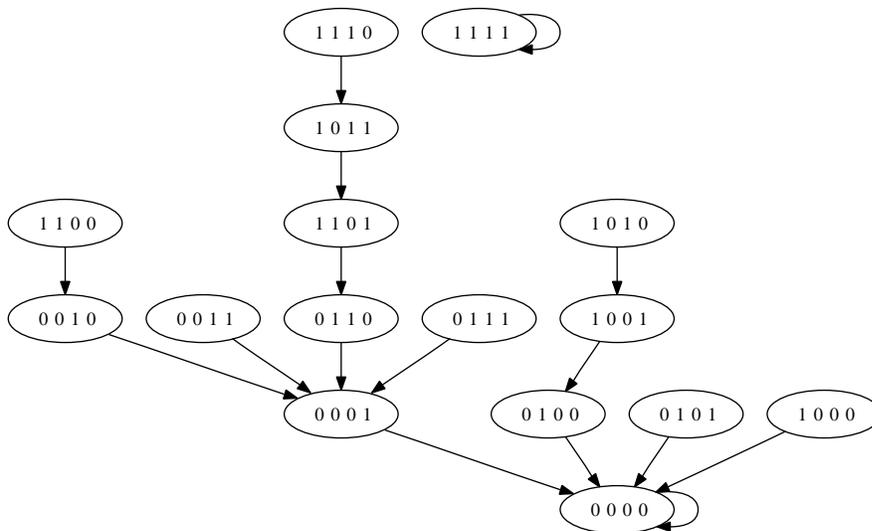


Figura 2-2: Estado fase de $f = (x_2x_3, x_1x_4, x_1x_2, x_3) : \mathbb{F}_2^4 \rightarrow \mathbb{F}_2^4$

Definición 2.3. Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Dos vértices $a, b \in V$ están conectados si existe una sucesión $a = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_n = b$ de vértices $v_i \in V$ y ejes $e_i \in E$ donde v_i y e_i son adyacentes, tal que

$$a = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n = b$$

.

Decimos que a y b están conectados por un camino p de largo n , es decir, $p : a \rightarrow b$ y $n = |p|$.

Sean $a, b \in V$, dos vértices. Si existen caminos $p : a \rightarrow b$ y $q : b \rightarrow a$, decimos que a y b están fuertemente conectados. Si $G = (V, E)$ es un grafo de dependencia y cualquiera dos vértices están fuertemente conectados, $G = (V, E)$ es un grafo **fuertemente conexo**. La relación fuertemente conexo establece una relación de equivalencia en G . Las clases de equivalencia de cualquier vértice $a \in V$ es llamada una componente fuertemente conexo y es denotada por \overleftrightarrow{a} . Una componente fuertemente conexo \overleftrightarrow{a} es trivial si $\overleftrightarrow{a} = \{a\}$.

A continuación definimos el número invariante llamado número de bucle, asociados a grafos fuertemente conexos, el cual nos brindará condiciones suficientes y necesarias para que un sistema monomial booleano sea de punto fijo.

Definición 2.4. Sea $G=(V,E)$ un grafo de dependencia de un sistema booleano (\mathbb{Z}_2^n, f) , $a \in V$ un vértice. Definimos el número de bucle de a como el mínimo de todos los números $t \geq 1$ con $t = |p| - |q|$, para todo camino cerrado $p, q : a \rightarrow a$. Si no existe un camino cerrado de a a a , entonces el número de bucle de a es cero.

El siguiente corolario nos demuestra que el número de bucle es invariante en un grafo fuertemente conexo. Denotamos el número de bucle de una componente fuertemente conexa por $\mathcal{L}(\overleftrightarrow{a})$.

Corolario 2.1. El número de bucle de un grafo fuertemente conexo $G = (V, E)$ es constante, es decir el número de bucle está bien definido.

Demostración: Sean $a, b \in V$ dos vértices y supongamos que $\mathcal{L}(\overleftrightarrow{a}) = t$, luego existen caminos $p, q : a \rightarrow a$ tal que $t = |p| - |q|$. Queremos probar que el número de bucle está bien definido, para esto suponga que existen caminos $p' : a \rightarrow b$ y $q' : b \rightarrow a$. Luego $p'p'q', p'q'q' : b \rightarrow b$ son caminos cerrados tal que $|p'p'q'| - |p'q'q'| = t$.

Así que $\mathcal{L}(\overleftrightarrow{b}) \leq t$. Por tanto por simetría tenemos que el Loop Number es constante en $G=(V,E)$. \square

Ejemplo 2.1.2. Considere el grafo fuertemente conexo de la figura 2-8, el número de bucle de este grafo es 1. Para esto considere los caminos $p : a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$ y $q : a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$, se obtiene que $|p| - |q| = 3 - 2 = 1$.

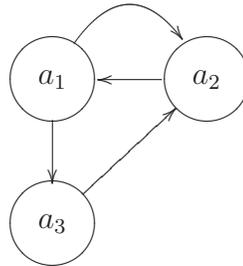


Figura 2-3: grafo fuertemente conexo con número de bucle 1

Definición 2.5. Para cada $t \in \mathbb{N}$ definimos el generador $\langle t \rangle$ como el conjunto $\{kt/k \in \mathbb{Z}\}$.

Corolario 2.2. Sea $\mathcal{L}(G) = t$. Sean $p' : a \rightarrow b$ y $q' : a \rightarrow b$ dos caminos. Entonces $|p'| - |q'| \in \langle t \rangle$.

Demostración: Supongamos que $|p'| > |q'|$ y sea $|p'| - |q'| = rt + s$ con $0 \leq s < t$. Veamos que $s = 0$. Para esto sean $p, q : a \rightarrow a$ caminos en G tal que $|q| - |p| = t$. Tenemos que $r \geq 0$. Luego

$$|p'p| - |q'q| = |p'| + |p| - |q'| - |q| = rt + s - t = t(r - 1) + s$$

Por tanto existen caminos $p'', q'' : a \rightarrow b$ en G con $|p''| - |q''| = s$. Sea $p^* : b \rightarrow a$

un camino en G , entonces $|p^*p''| - |p^*q''| = s = 0$ puesto que el Loop Number es el mínimo. \square

Ejemplo 2.1.3. Considere el grafo fuertemente conexo de la figura 2-7, su número de bucle es 3. Dado los caminos $p : a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3$ y $q : a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3$ se cumple que $|p| - |q| = 3 \in \langle 3 \rangle$

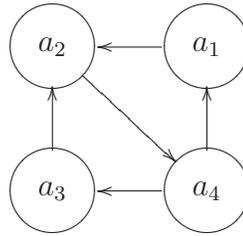


Figura 2-4: grafo de dependencia con número de bucle igual a 3

Corolario 2.3. Sea $\mathcal{L}(G) = t$ y sea $p : a \rightarrow a$ un camino cerrado. Entonces $|p| \in \langle t \rangle$.

Demostración: Basta considerar p y pp en el corolario 2.2. \square

El siguiente es un resultado importante para mas detalle ver [3]

Teorema 2.1. Sea (\mathbb{Z}_2^n, f) un sistema dinámico booleano y $G = (V, E)$ su grafo de dependencia. f es un sistema de punto fijo si y sólo si para todo $a \in V$ $\mathcal{L}(\overleftarrow{a}) = 1$

Ejemplo 2.1.4. Sea $f = (x_2x_3, x_4, x_2, x_1x_3x_5, x_2) : \mathbb{F}_2^5 \rightarrow \mathbb{F}_2^5$ un SDMB. Su grafo de dependencia G esta dado por la figura 2-5, observe que es un grafo fuertemente conexo y tiene $\mathcal{L}(G) = 1$, considere los caminos $p : a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_1$ y $q : a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_1$, luego $|p| - |q| = 1$. De acuerdo al teorema anterior f es un sistema de punto fijo ver figura 2-6.

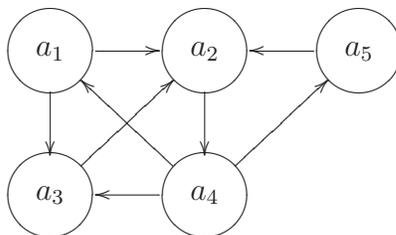


Figura 2-5: grafo de dependencia de $f = (x_2x_3, x_4, x_2, x_1x_3x_5, x_2)$ con “Loop Number” 1

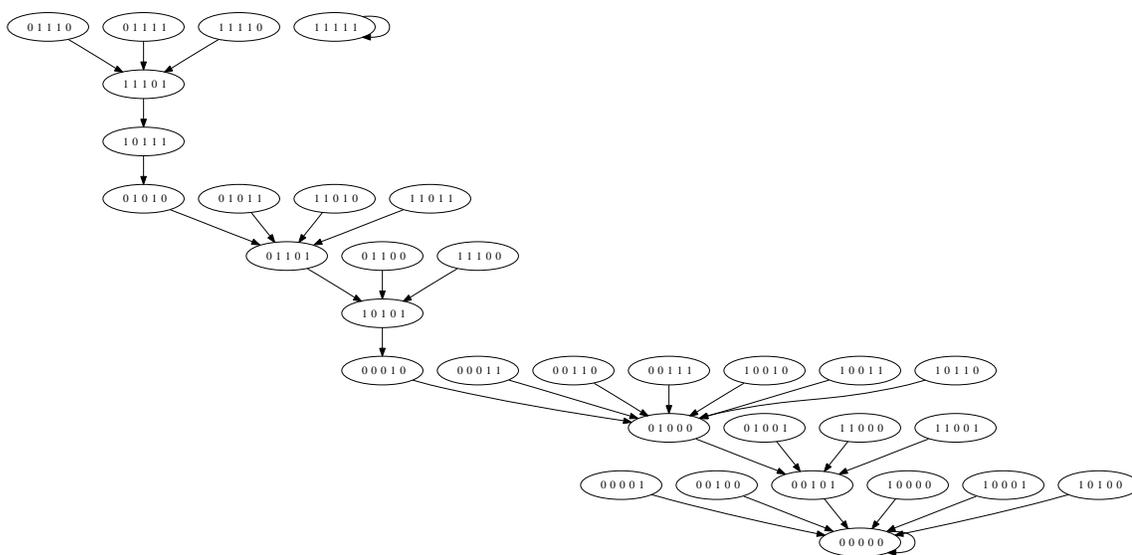


Figura 2-6: Estado fase del sistema booleano $f = (x_2x_3, x_4, x_2, x_1x_3x_5, x_2)$

Para finalizar esta sección definimos una clase particular de sistemas dinámicos booleanos que son sistemas de punto fijo, el cual utilizaremos en la sección 2.3 para caracterizar los sistemas triangulares monomiales sobre cuerpos finitos.

Definición 2.6. *Un sistema dinámico booleano $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ es triangular, si cada f_i es de la forma*

$$f_i = \alpha_i x_1^{\varepsilon_{i1}} x_2^{\varepsilon_{i2}} \dots x_i^{\varepsilon_{ii}}$$

donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Teorema 2.2. *Cada sistema triangular booleano es de punto fijo.*

Demostración: De la estructura de f se puede verificar fácilmente que cada componente fuertemente conexo de su grafo de dependencia es trivial o tiene loop number 1. \square

En la anterior sección se presentaron criterios para determinar cuando un sistema dinámico monomial booleano es de punto fijo, que serán usados en la sección 2.3 para determinar si un sistema dinámico monomial sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q es de punto fijo. Para el caso lineal $L(f)$ no ocurre lo mismo, ya que se desconocen resultados para probar cuando un sistema dinámico lineal sobre un anillo conmutativo \mathbb{Z}_{q-1} es de punto fijo, excepto para los casos que veremos aquí. A continuación estudiaremos algunos casos especiales que nos permitan identificar cuando un sistema lineal sobre un anillo conmutativo \mathbb{Z}_{q-1} es de punto fijo.

2.2. Sistemas dinámicos lineales sobre anillos conmutativos finitos

En esta sección describiremos ciertos criterios para determinar cuando un sistema lineal sobre un anillo finito conmutativo es un sistema de punto fijo. Recordemos que un Sistema Dinámico Finito **SDF** es un par (X, f) , donde X es un conjunto finito y f es una función de X en si misma. Decimos que dos **SDF** (X, f) y (Y, g) son isomorficos si existe una biyección ϕ que permuta con las funciones f y g , es decir, $\phi \circ f = g \circ \phi$. Si f es una función lineal y $X = \mathbb{Z}_m^n$, decimos que el par (\mathbb{Z}_m^n, f) es un sistema dinámico lineal finito sobre un anillo conmutativo.

Para $m \in \mathbb{N}$ consideremos el anillo \mathbb{Z}_m , si $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_s^{e_s}$, donde p_j es primo y $e_j > 0$, entonces $\mathbb{Z}_m = \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{q_j} = R$, y $q_j = p_j^{e_j}$.

En efecto sea $\psi([x]_m) = ([x]_{q_1}, [x]_{q_2}, \dots, [x]_{q_s})$, donde $[x]_m = ([x_1]_m, [x_2]_m, \dots, [x_n]_m)$ es un elemento de \mathbb{Z}_m^n , $[x_i]_m$ es la clase de equivalencia x_i módulo m en \mathbb{Z}_m^n . Sea $g : R^n \rightarrow R^n$, tal que $g([y_1]_{q_1}, [y_2]_{q_2}, \dots, [y_s]_{q_s}) = ([f([y_1]_m)]_{q_1}, \dots, [f([y_s]_m)]_{q_s})$, se puede verificar fácilmente que el siguiente diagrama conmuta, esto es, $g\psi = \psi f$. Sea $[x]_m = ([x_1]_m, [x_2]_m, \dots, [x_n]_m) \in \mathbb{Z}_m^n$, tenemos que $(g \circ \psi)([x]_m) = g([x]_{q_1}, [x]_{q_2}, \dots, [x]_{q_s}) = ([f([x])]_{q_1}, \dots, [f([x])]_{q_s}) = \psi([f(x)]) = (\psi \circ f)([x]_m)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_m^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}_m^n \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ R^n & \xrightarrow{g} & R^n \end{array} \quad (2.1)$$

Corolario 2.4. Sea $f : \mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{Z}_m^n$ un SDF y $\mathbb{Z}_m^n = \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{q_j}^n$, entonces para g definida como antes, $S(f)$ es isomorfo a $S(g)$.

Demostración: Sea ψ como se describió anteriormente. ψ es un mapeo que va del conjunto de vértices de $S(f)$ al conjunto de vértices de $S(g)$, por consiguiente $\psi : S(f) \rightarrow S(g)$ está bien definido. Puesto que ψ es un isomorfismo tenemos que $|V_f| = |V_g|$. Veamos que preserva los ejes. Sea (a_1, a_2) un eje en $S(f)$, queremos probar que $(\psi(a_1), \psi(a_2))$ es un eje en $S(g)$, en efecto puesto que $g\psi = \psi f$, tenemos que $g(\psi(a_1)) = \psi(f(a_1)) = \psi(a_2)$. \square

Ejemplo 2.2.1. Consideremos el sistema dinámico unidimensional $f = 3x : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, cuyo grafo de estado se puede observar en la figura 2-7. Entonces la aplicación lineal $g : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ viene dada por $g(x_1, x_2) = ([3x_1]_2, [3x_2]_3) = (x_1, 0)$.

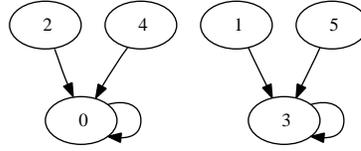


Figura 2-7: Estado fase del sistema dinámico lineal $f = 3x : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$

Definición 2.7. Sea $\mathbb{Z}_r^n = \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{q_j}^n$, para $q_j = p_j^{e_j}$ y $f : \mathbb{Z}_r^n \rightarrow \mathbb{Z}_r^n$. Llamamos la j -ésima proyección π_j a la aplicación $\pi_j : \mathbb{Z}_{q_j}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{q_j}^n$, tal que $\pi_j(y) = [f(y)]_{q_j}$.

Teorema 2.3. Sea $g : R^n \rightarrow R^n$, con $R = \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{q_j}$ tal que:

$$g([y_1]_{q_1}, [y_2]_{q_2}, \dots, [y_s]_{q_s}) = ([f([y_1]_m)]_{q_1}, \dots, [f([y_s]_m)]_{q_s})$$

y π_j la j -ésima proyección. Entonces $S(g) = S(\pi_1) \times S(\pi_2) \times \dots \times S(\pi_s)$.

Demostración: Sea $\mathcal{G} = S(\pi_1) \times S(\pi_2) \times \dots \times S(\pi_s)$, es claro que ambos grafos tienen el mismo conjunto de vértices: $\bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{q_j}^n$, para $q_j = p_j^{e_j}$. Es suficiente probar que el conjunto de vértices de \mathcal{G} y $S(g)$ son los mismos. Sea (a, b) un eje de $S(g)$, ahora $a = (a_1, \dots, a_s)$ donde cada a_i pertenece a $\mathbb{Z}_{q_i}^n$. Para probar que (a, b) es un eje de \mathcal{G} tenemos que demostrar que (a_i, b_i) es un eje de $S(\pi_i)$ para todo i . $g(a) = ([fa_1]_{q_1}, \dots, [fa_s]_{q_s}) = b = (b_1, \dots, b_s)$, puesto que $g(a) = b$, lo cual significa que $fa_i = b_i$ para cada i . Además esto implica que $\pi_i(a_i) = b_i$, para cada i , luego (a_i, b_i) es un eje de $S(\pi_i)$ para cada i , esto prueba que el conjunto de ejes de \mathcal{G} está contenido en el conjunto de ejes de $S(g)$, de forma análoga se demuestra lo contrario. \square

Aplicando el corolario 2.4 y el teorema 2.3, obtenemos el siguiente resultado, el cuál es una herramienta poderosa para determinar el espacio fase de aplicaciones lineales sobre anillos conmutativos.

Corolario 2.5. $S(f) = S(\pi_1) \times S(\pi_2) \times \cdots \times S(\pi_s)$.

El siguiente teorema reduce el problema para sistema lineales sobre anillos de la forma \mathbb{Z}_{p^r} , donde p es un número primo.

Teorema 2.4. Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{Z}_{p^r}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{p^r}^n$ un aplicación lineal y sea $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) : \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Z}_p^n$ la proyección lineal de f sobre \mathbb{Z}_p , donde $g_i = f_i \pmod{p}$. Entonces el estado fase de g es isomorfo a un subgrafo del estado fase de f .

Demostración: Sea $\sigma : \mathbb{Z}_{p^r}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{p^r}^n$, tal que $\sigma(\mathbf{a}) = \sigma(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 p^{r-1}, a_2 p^{r-1}, \dots, a_n p^{r-1}) = \mathbf{a} p^{r-1}$. Se puede verificar que $\sigma \circ g = f \circ \sigma$ puesto que los f_i son aplicaciones lineales. Por consiguiente se tiene que $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ si y sólo si $f(\mathbf{a} p^{r-1}) = \mathbf{b} p^{r-1}$, y por tanto el estado fase de g es isomorfo al subgrafo del estado fase de f . \square

Corolario 2.6. Sea f y g como en el teorema anterior. Si g no es un sistema de punto fijo, entonces f no es un sistema de punto fijo.

Ejemplo 2.2.2. Sea $f = (3x_1 + 2x_2, x_2) : \mathbb{Z}_4^2 \rightarrow \mathbb{Z}_4^2$ un **SDLF**. Entonces $g = (x_1, x_2) : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$. El estado fase de f y g se observa en las figuras 2-8 y 2-9 respectivamente.

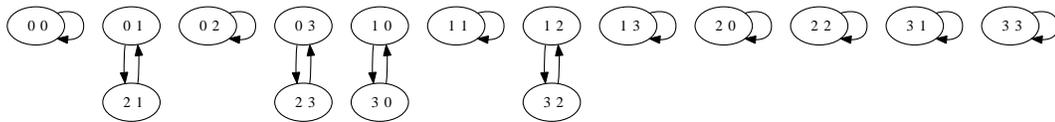


Figura 2-8: Estado fase del sistema dinámico lineal $f = (3x_1 + 2x_2, x_2) : \mathbb{Z}_4^2 \rightarrow \mathbb{Z}_4^2$

El siguiente es un resultado que caracteriza los sistemas dinámicos lineales sobre cuerpos finitos \mathbb{F}_q , donde q es primo para mas detalle ver [4].



Figura 2-9: Estado fase del sistema dinámico lineal $g = (x_1, x_2) : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$

Teorema 2.5. *Un sistema dinámico lineal finito (\mathbb{F}_q^n, f) sobre \mathbb{F}_q (q primo) es un sistema de punto fijo si y sólo si el polinomio mínimo de f es de la forma $x^{n_0}(x-1)^{n_1}$ con $n_1 \in \{0, 1\}$*

Ejemplo 2.2.3. Consideremos el **SDLF** $f = (2x+y, x+2y) : \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$. Su polinomio minimal es $x(x-1)$, por tanto aplicando el teorema anterior f es un sistema de punto fijo como se ve en la figura 2-10.

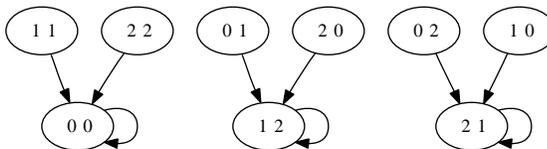


Figura 2-10: Estado fase del sistema dinámico lineal $f = (2x + y, x + 2y) : \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2$

2.3. Sistemas dinámicos monomiales sobre cuerpos finitos

En esta sección estudiaremos los sistemas dinámicos monomiales sobre cuerpos finitos. Daremos condiciones suficientes para que un sistema monomial sea de punto fijo. Estas condiciones se derivan del estudio de los sistemas booleanos y los sistemas lineales sobre anillos conmutativos, que vimos en las secciones anteriores. Veremos que un sistema dinámico monomial f es un sistema de punto fijo si y sólo si $T(f)$ y $L(f)$ son sistemas de punto fijo.

Definición 2.8. Sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito. El conjunto

$$\mathbb{E}_q := \{0, \dots, q-1\} \subset \mathbb{N}_0$$

es llamado el conjunto de exponentes del cuerpo \mathbb{F}_q , donde \mathbb{N}_0 representa el conjunto de los números naturales junto con el cero.

Definición 2.9. Sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito. Un sistema dinámico monomial sobre \mathbb{F}_q es una función $f : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, donde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una tupla $(\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{in}) \in \mathbb{E}_q^n$ tal que $f_i(x) = x_1^{\epsilon_{i1}} \dots x_n^{\epsilon_{in}} \quad \forall x \in \mathbb{F}_q^n$

Si $q = 2$ decimos que f es un sistema dinámico booleano.

Para cada función f , le asociamos una matriz $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} \in \mathbb{E}_q$, el conjunto de estas matrices de orden $n \times n$ con entradas en \mathbb{E}_q es denotado por $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{E}_q)$, es decir, para cada f existe $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{E}_q)$ tal que $f_i(x) = x_1^{a_{i1}} \dots x_n^{a_{in}}$. Sin perdida de generalidad podemos asumir que ninguna coordenada de la función es constante, ya que el caso general se puede reducir a este.

La siguiente definición es una notación que usaremos para definir cuando una función f es un sistema dinámico monomial sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q .

Definición 2.10. Sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito y $m, n \in \mathbb{N}$. El conjunto

$$\mathcal{F}_m^n(\mathbb{F}_q) := \{f : \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n \text{ tal que existe } A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{E}_q) : f_i(x) = x_1^{a_{i1}} \dots x_m^{a_{im}}\}$$

es llamado el conjunto de funciones n -dimensional en m variables.

Si $m=n$ tenemos el conjunto de todos los sistemas dinámicos monomiales sobre \mathbb{F}_q .

Note: Considerando el mapeo $\psi : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{E}_q) \rightarrow \mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$, tal que $\psi(A)_i(x) := x_1^{a_{i1}} \dots x_n^{a_{in}}$ para $i = 1, \dots, n$ vemos que ψ es una biyección y por tanto $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{E}_q)$ y $\mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$ tienen la misma cardinalidad.

A continuación vamos a asociar a f dos funciones, llamadas el soporte de f denotado por $T(f)$ y el log de f denotado por $L(f)$, el comportamiento de esas funciones nos brindará criterios necesarios para determinar si f es un sistema de punto fijo.

2.3.1. La función Log $L(f)$

Vamos a considerar los elementos $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_q^n$, cuyas entradas no son nulas, es decir, $a_i \neq 0$. Puesto que \mathbb{F}_q es un cuerpo, tales entradas las podemos escribir como una potencia de un elemento no nulo de \mathbb{F}_q .

Consideremos que $|\mathbb{F}_q| > 2$. Entonces existe un generador $\lambda \neq 1$ en \mathbb{F}_q tal que $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q - \{0\} = \langle \lambda \rangle = \{\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{q-2}\}$. Ahora para $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_q^n$, con $a_i \in \mathbb{F}_q^*$ escribimos $a_i = \lambda^{\alpha_i}$ para $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{q-1}$, donde \mathbb{Z}_{q-1} es el anillo de enteros modulo $q-1$.

Por tanto $f(a) = f(a_1, \dots, a_n) = f(\lambda^{\alpha_1}, \dots, \lambda^{\alpha_n}) = (\lambda^{\beta_1}, \dots, \lambda^{\beta_n})$.

A continuación definimos la transformación lineal $L(f)$ llamada el **Log** de f , que dependerá de las componentes f_i .

Definición 2.11. Sea $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, donde $f_i = x_1^{\epsilon_{i1}} x_2^{\epsilon_{i2}} \dots x_n^{\epsilon_{in}}$. Definimos el log de f como la transformación lineal $L(f) = [\epsilon_{ij}] : \mathbb{Z}_{q-1}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{q-1}^n$

Ejemplo 2.3.1. Sea $f = (xy^2, x) : \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$, su estado fase se puede observar en la figura 2-11. El log de f viene dada por $L(f) = (x, x) : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ el cual es un sistema de punto fijo como se ve en 2-12

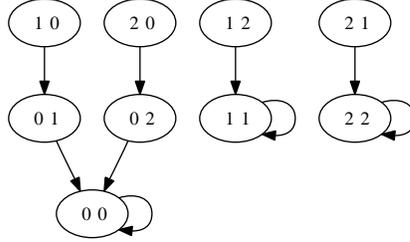


Figura 2-11: Estado fase del SDM $f = (xy^2, x) : \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$

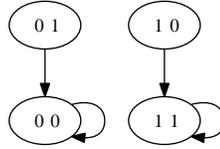


Figura 2-12: Estado fase del SDL $L(f) = (x, x) : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$

Observación: Consideremos $L = [\epsilon_{ij}]$ como la matriz de la transformación lineal $L(f)$, entonces para $p > 1$, la matriz L^p será la matriz cuya (i, j) -entrada corresponde al exponente de x_j , donde x_j divide a f_i^p , con $f^p = (f_1^p, \dots, f_n^p)$.

Ejemplo 2.3.2. Sea $f = (xy^2, x)$ como en el ejemplo anterior, tenemos que

$$f^2 = (x^3y^2, xy^2) \text{ y}$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto la entrada $(1, 2)$ en L^2 es 2 y es el exponente de la variable y , donde $f_1 = x^3y^2$.

Corolario 2.7. *Si f es un sistema de punto fijo, entonces $L(f)$ es un sistema de punto fijo.*

Demostración: Sea $\alpha \in \mathbb{Z}_{q-1}^n$, suponga que $L^t(f)(\alpha) = \alpha$, entonces $L^t(\alpha) = \alpha$. Sea λ un generador para \mathbb{F}_q^* , ($q > 2$) entonces para $a \in \mathbb{F}_q^n$ tenemos que $a = (\lambda^{\alpha_1}, \dots, \lambda^{\alpha_n})$ y $f^t(a) = (\lambda^{\beta_1}, \dots, \lambda^{\beta_n})$. Concluimos que $L^t(\alpha) = \beta$. Puesto que $L^t(\alpha) = \alpha$, $f^t(a) = a$ ya que f es un SPF, tenemos entonces que $t = 1$. \square

2.3.2. La función Soporte $T(f)$

Vamos a definir una relación de equivalencia en \mathbb{F}_q^n . Esta relación de equivalencia particiona \mathbb{F}_q^n en clases de equivalencia las cuales dos elementos son equivalentes si tienen los mismos índices con entradas no nulas respectivamente.

Definición 2.12. *Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_q^n$, definimos el soporte de a como $v_a = (v_{a_1}, \dots, v_{a_n})$, donde $v_{a_i} = 0$ si $a_i = 0$ y $v_{a_i} = 1$ si $a_i > 0$.*

Para a y b en \mathbb{F}_q^n , decimos que a es equivalente a b , si $v_a = v_b$. Es fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia. El soporte de los elementos de \mathbb{F}_q^n juegan un papel importante para determinar si f es un sistema de punto fijo.

Definición 2.13. *Sea $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ un SDM. $f_i = x_1^{\epsilon_{i1}} x_2^{\epsilon_{i2}} \dots x_n^{\epsilon_{in}}$, definimos el soporte de f como:*

$T(f) = (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ con

$$g_i = x_1^{\delta_{i1}} x_2^{\delta_{i2}} \dots x_n^{\delta_{in}}$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $\epsilon_{ij} > 0$ y $\delta_{ij} = 0$ si $\epsilon_{ij} = 0$.

Ejemplo 2.3.3. Sea $f = (x_1x_2, x_2^2) : \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$. El soporte de f viene dado por $T(f) = (x_1x_2, x_2) : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$, su estado fase se muestra en la figura 2-14.

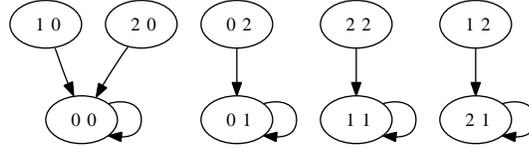


Figura 2-13: Estado fase de $f = (x_1x_2, x_2^2) : \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$

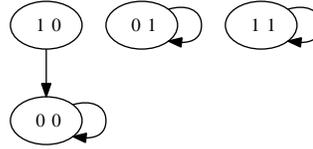


Figura 2-14: Estado fase de $T(f) = (x_1x_2, x_2) : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$

El próximo resultado establece que si f es un sistema de punto fijo entonces el soporte $T(f)$ también es un sistema de punto fijo.

Corolario 2.8. Si f es un SPF entonces $T(f)$ es un SPF.

Demostración: Observe que los soportes de $\mathbf{1}=(1, \dots, 1)$ y $\mathbf{0}=(0, \dots, 0)$ son puntos fijos. Probaremos que no hay ciclos entre los elementos de la forma v_a tal que $a \in \mathbb{F}_q^n - \{(1, \dots, 1), (0, \dots, 0)\}$.

Si $T^t(f)(v_a) = v_a$, entonces $T^t(f)(v_a)$ y v_a tienen los mismos índices con entradas no nulas, lo cual implicaría que $f^t(v_a) = v_a$. Como f es un sistema de punto fijo tenemos que $t = 1$, por consiguiente los únicos ciclos que aparecen en el estado fase de $T(f)$ tienen longitud 1. □

El siguiente resultado nos permitirá caracterizar los sistemas de punto fijo para $f \in \mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$ sobre cualquier cuerpo finito y cualquier dimensión. Para más información ver [1]

Teorema 2.6. *Sea $f \in \mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$. Entonces f es un sistema de punto fijo si y sólo si $T(f)$ y $L(f)$ son sistemas de punto fijo.*

Estamos interesados en caracterizar una clase especial de sistemas dinámicos monomiales que se usarán en el capítulo 3 para desarrollar la teoría de control.

Definición 2.14. *Sea $f \in \mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$. Decimos que f es un sistema dinámico triangular si tiene alguna de las siguientes dos formas:*

$$f_i = \prod_{j=1}^i x_j^{a_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

ó

$$f_i = \prod_{j=i}^n x_j^{a_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{F}_q$.

Definición 2.15. *Sea q un número primo. Decimos que q es un número de Carmichael si se puede expresar de la siguiente forma:*

$$q = p_1 p_2 \dots p_k + 1$$

donde p_i 's son primos distintos.

Ejemplo 2.3.4. Algunos ejemplos de primos de Carmichael son los siguientes:

$$7 = 2 \times 3 + 1$$

$$11 = 2 \times 5 + 1$$

$$31 = 2 \times 3 \times 5 + 1$$

$$43 = 2 \times 3 \times 7 + 1$$

El siguiente teorema nos brinda información para saber cuando un sistema triangular es de punto fijo si q es un primo de Carmichael.

Teorema 2.7. *Sea $f \in \mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$ un sistema triangular $A = [a_{ij}]$ su matriz correspondiente, q un primo de Carmichael. Si $\sum a_{ii} = 1$, entonces f es un sistema triangular de punto fijo.*

Demostración: Consideremos el caso 2.1 ya que el otro se demuestra de forma análoga. Luego tenemos que $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ tiene la siguiente expresión:

$$f_1 = x_1 \quad y \quad f_i = \prod_{j=1}^{i-1} x_j^{a_{ij}}, \quad i = 2, \dots, n \quad (2.4)$$

La booleanización $T(f) = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ de f viene dada por:

$g_1 = x_1$ y $g_i = \prod_{j=1}^{i-1} x_j^{b_{ij}}$, para $i = 2, \dots, n$, donde $b_{ij} = 1$, si $a_{ij} \neq 0$ y $b_{ij} = 0$, si $a_{ij} = 0$. Puede ocurrir que $g_i \equiv 1$ para todo $i \neq 1$, en este caso $T(f) = (x_1, 1, 1, \dots, 1)$ y claramente es un sistema de punto fijo con dos componentes en su estado fase y dos puntos fijo $(0, 1, 1, \dots, 1)$ y $(1, 1, 1, \dots, 1)$. Si para algún i $g_i \neq 0$, de acuerdo a 2.4, $T(f)$ es sistema triangular booleano y por corolario 2.4 es un sistema de punto fijo.

Ahora consideremos la linealización $L(f) = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ de f , la cual viene dada por:

$$h_1 = x_1 \quad y \quad h_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n \quad (2.5)$$

donde $c_{ij} = a_{ij} \bmod (q-1)$. Como $q = p_1 p_2 \dots p_k + 1$ un producto de primos distintos, tenemos que $\mathbb{Z}_{q-1}^n = \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{Z}_{p_j}^n$, por el teorema 2.2 se tiene que $S(L(f)) = S(\pi_1) \times S(\pi_2) \times \dots \times S(\pi_k)$ donde π_i son las proyecciones lineales en cada $\mathbb{Z}_{p_i}^n$. Luego de acuerdo a 2.5 tenemos que cada polinomio minimal en las proyecciones lineales $\pi_i : \mathbb{Z}_{p_i}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{p_i}^n$ es de la forma $x_i^s(1-x)$, aplicando el corolario 2.6 cada π_i es un sistema de punto fijo, así que $L(f)$ es sistema dinámico lineal de punto fijo. Finalmente por el teorema 2.4 f es un sistema de punto fijo. \square

Ejemplo 2.3.5. Consideremos el siguiente sistema dinámico monomial con $q = 3 = 2+1$, un primo de Carmichael. Sea $f = (x, x^2, xy^2) \in \mathcal{F}_3^3(\mathbb{F}_3)$. Claramente f cumple con las condiciones del teorema anterior, por tanto es un sistema de punto fijo, como se ve en la figura 2-15

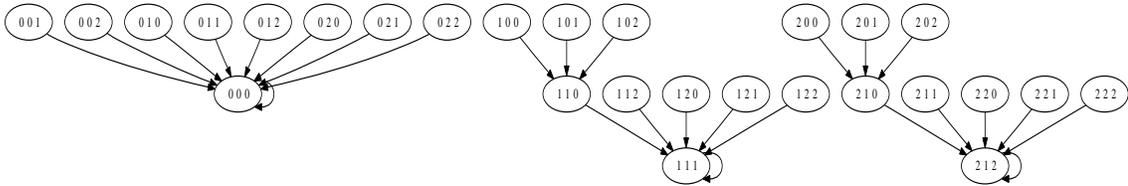


Figura 2-15: Estado fase de $f = (x, x^2, xy^2) \in \mathcal{F}_3^3(\mathbb{F}_3)$

Capítulo 3

SISTEMA DE CONTROL MONOMIAL SOBRE CUERPOS FINITOS

El aspecto más importante de un sistema de control es conocer su dinámica, es decir, como se comporta la señal de salida frente a una variación de la señal de entrada. Un conocimiento preciso de la relación entrada-salida permite predecir la respuesta del sistema y seleccionar la acción de control adecuada para mejorarla. Con el propósito de garantizar la estabilidad de tales sistemas es natural preguntarse por los criterios acerca de la existencia de un control de retroalimentación adecuado y como este control puede ser elegido. En este capítulo desarrollaremos una teoría de control para los sistemas dinámicos monomiales sobre cuerpos finitos. Esto es, una función que consiste de variables de estado dada por los eventos que estamos modelando y las variables de control dadas por la función retroalimentadora. De alguna forma queremos manipular el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos, más específicamente cuando pueden llegar a un sistema de punto fijo. Puesto que no sabemos si podemos manipular un sistema dinámico en general tal que sea de punto fijo, desarrollaremos criterios para determinar cuando esto es posible, es decir, cuando podemos .estabilizarün sistema de control monomial.

3.1. Teoría de Control

En esta sección definiremos los conceptos de *control* y de *estabilidad* en los sistemas dinámicos discretos.

Definición 3.1. Sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito. La función $f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ es un sistema de control, donde $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]$. El conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ son las variables de estado y el conjunto $\{u_1, \dots, u_m\}$ son las variables de control.

Cuando modelamos una red reguladora de genes, podemos asociar el i -ésimo gen con la i -ésima función coordenada f_i . Donde cada f_i puede ser expresado en términos de la variables de estado y además también podemos expresarlas en términos de las variables de control, que pueden ser sustituidas por cualquier variable de estado. Por consiguiente controlamos de alguna forma el comportamiento de f .

Definición 3.2. Sea $f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ un sistema de control. Decimos que f es estabilizable si existe una función $g : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m$, llamada retroalimentador de control, tal que $h := f \circ g : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, es un sistema de punto fijo.

3.2. Sistema de Control Monomial

Definición 3.3. Sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito. $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}_0$, la función

$$f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n$$

es llamado un **sistema de control monomial** sobre \mathbb{F}_q , si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

$$f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = x_1^{\varepsilon_{i1}} \dots x_n^{\varepsilon_{in}} u_1^{a_{i1}} \dots u_m^{a_{im}}$$

donde $\varepsilon_{ij}, a_{ik} \in \mathbb{E}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$ con $1 \leq i, j \leq n$ y $1 \leq k \leq m$.

Decimos que f es **estabilizable** si existe una función $g \in \mathcal{F}_n^m(\mathbb{F}_q)$, llamada **controlador de retroalimentación** tal que $h = f \circ g \in \mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$ es un sistema de punto fijo.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{F}_q^n \\
 \uparrow g & \nearrow h=f \circ g & \\
 \mathbb{F}_q^n & &
 \end{array}$$

Cuando un sistema de control es estabilizable, la función retroalimentadora no necesariamente es única, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1. Sea $f : \mathbb{F}_3^3 \times \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^3$, $f(x, y, z, u, v) = (xz^2u^2v, xy^2u, xyv^2)$. f es estabilizable ya que existe $g \in \mathcal{F}_3^2(\mathbb{F}_3)$, $g(x, y, z) = (x^2y^2z^2, xyz^2)$ tal que $h := f \circ g = (y^2z^2, yz^2, z)$, es un sistema de punto fijo como se puede ver en la figura 3-1. Pero de igual forma existe $g(x, y, z) = (xz^2, x^2yz)$ tal que $h = f \circ g = (x^2yz, x^2y^2z^2, x^2z^2)$ es de punto fijo como se aprecia en la figura 3-2

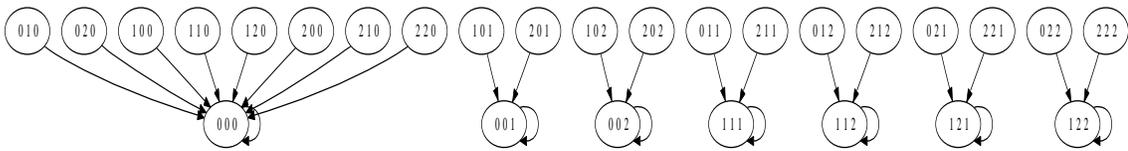


Figura 3-1: $h = f \circ g = (y^2z^2, yz^2, z)$

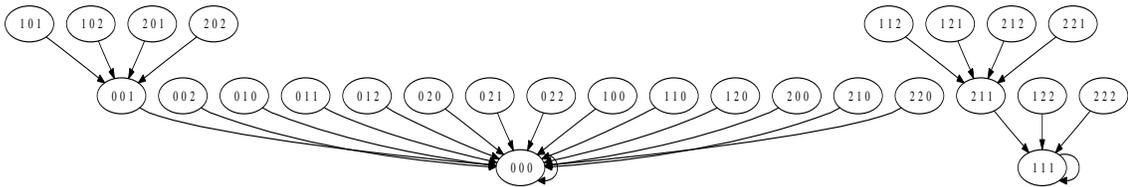


Figura 3-2: $h = f \circ g = (x^2yz, x^2y^2z^2, x^2z^2)$

Queremos que h sea un sistema dinámico monomial con el fin de poder aplicar la teoría del capítulo 2, para esto, consideraremos g como una función monomial. Una forma de buscar condiciones necesaria y suficientes para la estabilidad de f , es permitiendo que la función retroalimentadora g sea tal que $h = f \circ g$ sea un sistema monomial triangular de punto fijo. Esto nos permitirá verificar fácilmente cuando h es un sistema de punto fijo.

Definición 3.4. Sea $f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ un sistema de control. Decimos que f es “**débilmente estabilizable**” si existe una función $g : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m$, la función retroalimentadora, tal que $h = f \circ g : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, es un **sistema triangular de punto fijo**.

Ejemplo 3.2.2. Sea $f = (x_1 u_1^2 u_2, x_1^3 x_2^2 u_1^3 u_2^4 u_3^2) : \mathbb{F}_5^2 \times \mathbb{F}_5^3 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$ un SCMF. f es un sistema débilmente estabilizable ya que existe $g = (x_1, x_1^2 x_2^3, x_1^3 x_2) : \mathbb{F}_5^3 \rightarrow \mathbb{F}_5^3$ tal que $h := f \circ g = (x_2^3, x_2) : \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$ es un sistema triangular de punto fijo, que se puede verificar fácilmente usando el teorema 2.5.

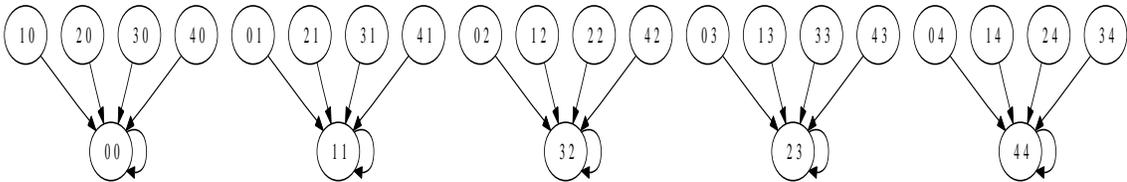


Figura 3–3: Estado fase de $h := f \circ g = (x_2^3, x_2) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_5)$

Para facilitar el problema de encontrar condiciones necesarias para la estabilidad de f , expresaremos los exponentes en forma matricial, esto nos permitirá identificar las variables de control y las variables de estado. Notaremos los exponentes de las variables de estado con ε y con A las variables de control. Dado

$f = (x_1^{\varepsilon_{11}} \dots x_n^{\varepsilon_{1n}} u_1^{a_{11}} \dots u_m^{a_{1m}}, \dots, x_1^{\varepsilon_{n1}} \dots x_n^{\varepsilon_{nn}} u_1^{a_{n1}} \dots u_m^{a_{nm}})$ un sistema de control monomial tenemos que:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \dots & \varepsilon_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

De igual forma a la función retroalimentadora $g = (x_1^{\delta_{11}} \dots x_n^{\delta_{1n}}, \dots, x_1^{\delta_{m1}} \dots x_n^{\delta_{mn}}) : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, denotamos como δ su matriz de exponentes.

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{m1} & \dots & \delta_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Cuando calculamos la función $h = f \circ g = (x_1^{b_{11}} \dots x_n^{b_{1n}}, x_1^{b_{21}} \dots x_n^{b_{2n}}, \dots, x_1^{b_{n1}} \dots x_n^{b_{nn}})$, donde $b_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \delta_{kj} + \varepsilon_{ij}$ su matriz de exponente queda expresada de la siguiente forma

$$B = A\delta + \varepsilon = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k}\delta_{k1} + \varepsilon_{11} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k}\delta_{kn} + \varepsilon_{1n} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k}\delta_{k1} + \varepsilon_{21} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{2k}\delta_{kn} + \varepsilon_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk}\delta_{k1} + \varepsilon_{n1} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{nk}\delta_{kn} + \varepsilon_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Esto nos facilitara encontrar un δ apropiado tal que la expresión 3.4 corresponda a un sistema dinámico de punto fijo.

El siguiente teorema nos brinda una condición necesaria para que f sea “**débilmente estabilizable**”, en el caso que $n = m$, y además nos provee una forma de encontrar la función retroalimentadora.

Teorema 3.1. *Sea $f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ un sistema de control monomial sobre \mathbb{F}_q . Si la matriz A correspondiente a la variable de control es tal que determinante de A es una unidad en \mathbb{Z}_{q-1} . Entonces f es débilmente estabilizable y existe $g : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^m$ con matriz correspondiente dada por $\delta = A^{-1}(\lambda - \varepsilon)$, donde λ es la matriz correspondiente a un sistema triángular de punto fijo como en 2.4 y ε la matriz correspondiente a la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, \dots, 1)$ tal que, $h := f \circ g$ es un sistema de punto fijo.*

Demostración: Consideremos la ecuación matricial:

$$A\delta + \varepsilon = \lambda \quad (3.5)$$

Donde λ es la matriz correspondiente a 2.4, luego $A\delta = \lambda - \varepsilon$, puesto que $\det A \in \mathbb{F}_q^*$, existe A^{-1} , con lo que obtenemos que $\delta = A^{-1}(\lambda - \varepsilon)$ la matriz correspondiente a la función retroalimentadora g , tal que $f \circ g$ es un sistema triángular de punto fijo.

□

Observación: En el teorema anterior cuando f es débilmente estabilizable, existe mas de una función retroalimentadora, puesto que esta depende de la matriz

λ que escojamos, correspondiente a un sistema triangular de punto fijo que tiene la forma que aparece en 2.3.

Ejemplo 3.2.3. Sea $f = (x_1x_2^2x_3^4u_1^2u_2^3u_3, x_2^5x_3^3u_1u_3^2, x_1^2x_2^3x_3^6u_1^3u_2u_3^4) : \mathbb{F}_7^3 \times \mathbb{F}_7^3 \rightarrow \mathbb{F}_7^3$ un **SCM**. Tenemos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

luego f es débilmente estabilizable, para encontrar la función retroalimentadora tomamos $h = (x_1, x_1^4, x_1^3x_2^3)$, (un sistema triangular de punto fijo) obtenemos que

$$\delta = A^{-1}(\lambda - \varepsilon) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde λ es la matriz correspondiente de h . Por tanto $g = (x_1^6x_2^5x_3^4, x_1x_3^3, x_1^6x_2^2)$. De acuerdo a la figura 3-4 podemos ver que $f(x_1, x_2, x_3, 1, 1, 1)$ no es un sistema de punto fijo. En efecto consideraremos la linealización $L(f) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2, 2x_1) : \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$, calculando su polinomio minimal obtenemos $(x+1)^3$, aplicando el teorema 2.5 $L(f)$ no es un sistema de punto fijo, luego por teorema 2.6 $f(x_1, x_2, x_3, 1, 1, 1) = (x_1x_2^2x_3^4, x_2^5x_3^3, x_1^2x_2^3x_3^6)$ no es un sistema de punto fijo, esto es un ejemplo claro de como se puede estabilizar f .

Puesto que estamos interesados en buscar una matriz δ de orden $m \times n$ que satisfaga la ecuación 3.5, este problema lo podemos llevar a encontrar soluciones de un sistemas de ecuaciones lineales; ya que obtenemos un sistema de n -ecuaciones lineales con m incognitas (variables de control).

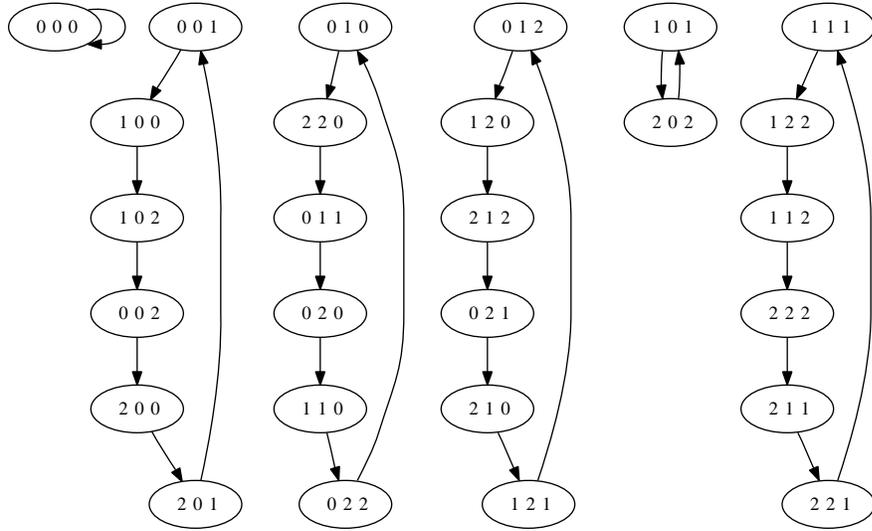


Figura 3-4: Estado fase de $L(f) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2, 2x_1)$

Queremos que la matriz 3.4 corresponda a un sistema triángular de punto fijo. Para esto analizaremos el siguiente caso $n < m$ (el caso $n = m$ lo vimos en el teorema 3.1).

Nuestro objetivo es que la aplicación lineal $A\delta + \varepsilon : \mathbb{Z}_{q-1}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{q-1}^n$, induzca la siguiente matriz:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A\delta = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{11} & \lambda_{12} - \varepsilon_{12} & \cdots & \lambda_{1n} - \varepsilon_{1n} \\ -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} & \cdots & \lambda_{2n} - \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon_{n1} & -\varepsilon_{n2} & \cdots & 1 - \varepsilon_{nn} \end{pmatrix}$$

De lo anterior obtenemos n sistemas de ecuaciones lineales que contienen mn incognitas que son las entradas de la matriz δ .

$$\begin{aligned}
 a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{21} + \cdots + a_{1m}\delta_{m1} &= -\varepsilon_{11} \\
 a_{11}\delta_{12} + a_{12}\delta_{22} + \cdots + a_{1m}\delta_{m2} &= \lambda_{12} - \varepsilon_{12} \\
 &\vdots \\
 a_{11}\delta_{1n} + a_{12}\delta_{2n} + \cdots + a_{1m}\delta_{mn} &= \lambda_{1n} - \varepsilon_{1n} \\
 \hline
 a_{21}\delta_{11} + a_{22}\delta_{21} + \cdots + a_{2m}\delta_{m1} &= -\varepsilon_{21} \\
 a_{21}\delta_{12} + a_{22}\delta_{22} + \cdots + a_{2m}\delta_{m2} &= -\varepsilon_{22} \\
 &\vdots \\
 a_{21}\delta_{1n} + a_{22}\delta_{2n} + \cdots + a_{2m}\delta_{mn} &= \lambda_{2n} - \varepsilon_{2n} \\
 \hline
 &\vdots \\
 \hline
 a_{n1}\delta_{11} + a_{n2}\delta_{21} + \cdots + a_{nm}\delta_{m1} &= -\varepsilon_{n1} \\
 a_{n1}\delta_{12} + a_{n2}\delta_{22} + \cdots + a_{nm}\delta_{m2} &= -\varepsilon_{n2} \\
 &\vdots \\
 a_{n1}\delta_{1n} + a_{n2}\delta_{2n} + \cdots + a_{nm}\delta_{mn} &= 1 - \varepsilon_{nn}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora 3.6 lo podemos representar por la siguiente ecuación:

$$\Lambda X = B \tag{3.7}$$

donde:

$$X = \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \\ \vdots \\ \delta_{m1} \\ \delta_{12} \\ \delta_{22} \\ \vdots \\ \delta_{m2} \\ \vdots \\ \delta_{1n} \\ \delta_{2n} \\ \vdots \\ \delta_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{11} \\ \lambda_{12} - \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1n} \varepsilon_{1n} \\ -\varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{2n} - \varepsilon_{2n} \\ \vdots \\ -\varepsilon_{n1} \\ -\varepsilon_{n2} \\ \vdots \\ 1 - \varepsilon_{nn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora el sistema 3.7 tiene una única solución si $\det(\Lambda) \in \mathbb{Z}_{q-1}^*$, donde \mathbb{Z}_{q-1}^* es el conjunto de los elementos invertibles en \mathbb{Z}_{q-1} . Como podemos ver en el siguiente teorema(ver [5]).

Teorema 3.2. (Regla de Cramer) Sea $\Lambda \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_{q-1})$, con $\det \Lambda \in \mathbb{Z}_{q-1}^*$. Entonces para cualquier $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t \in \mathbb{Z}_{q-1}^n$, la ecuación $\Lambda X = B$ tiene una única solución: $\eta = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ donde:

$$y_j = (\det(\Lambda))^{-1} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Demostración: Sea $\xi = (y_1, \dots, y_n)^t$, con y_j definido como arriba. Usando la expansión de Laplace, tenemos que:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda)y_j &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \operatorname{cof}_{ij}(\Lambda) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por consiguiente,

$$\det(\Lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \operatorname{cof}_{i1}(\Lambda) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_i \operatorname{cof}_{in}(\Lambda) \end{pmatrix} = \operatorname{adj}(\Lambda)B \quad (3.9)$$

Puesto que $\det(\Lambda)I_n = \operatorname{adj}(\Lambda)\Lambda$, la ecuación 3.9 implica que

$$\operatorname{adj}(\Lambda)\Lambda\xi = \operatorname{adj}(\Lambda)B \quad (3.10)$$

Ya que $\operatorname{adj}(\lambda)$ es una matriz invertible (con inversa $(\det(\Lambda))^{-1}\Lambda$), la ecuación 3.10 implica que $\Lambda\xi = B$.

Suponga que ξ' es otra solución para $\Lambda X = B$. Entonces $\Lambda\xi' = \Lambda\xi = B$ implica que $\Lambda(\xi' - \xi) = 0$. Como Λ es invertible, $\xi' = \xi$. Así que ξ es la única solución para $\Lambda X = B$.

□

Como consecuencia de este teorema obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1. *Si existen las matrices F_1, F_2, \dots, F_n , tal que $\det(\Lambda) \in \mathbb{Z}_{q-1}^*$, entonces f es débilmente estabilizable.*

Ejemplo 3.2.4. Sea $f = (xu^2v, xy^2uv^2w^2) : \mathbb{F}_3^2 \times \mathbb{F}_3^3 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$, un **SCM** veamos que f es débilmente estabilizable. En efecto consideremos las matrices de control y de estado respectivamente sobre \mathbb{Z}_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eligiendo una matriz triángular superior de punto fijo de forma arbitraria:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a 3.7 obtenemos que:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\det\Lambda = 1$$

Resolviendo con:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ obtenemos que: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual la función retroalimentadora viene dada por

$$g = (xy, xy, x)$$

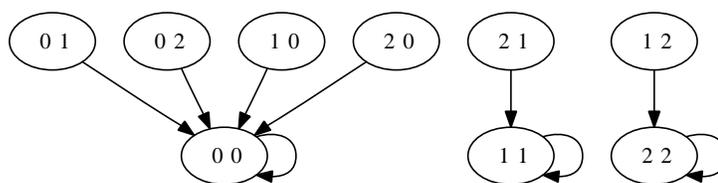


Figura 3-5: Estado fase de $h = f \circ g = (x^2y, x^2y)$

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

4.1. Conclusiones

En este trabajo se aporta una solución parcial al problema de como determinar si algún sistema de control monomial es estabilizable. Para esto decidimos trabajar en los cuerpos finitos \mathbb{F}_q , donde $q = p_1 p_2 \dots p_s + 1$, es un primo de Carmichael. Esto permitiría que al linealizar $f \in \mathcal{F}_n^n(\mathbb{F}_q)$, tendríamos que el SDL $L(f)$ sobre el anillo conmutativo \mathbb{Z}_{q-1}^n es isomorfo a la suma directa $\bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}_{p_j}$, y por resultados visto en la sección 2.2 $S(L(f)) = S(\pi_1) \times S(\pi_1) \times \dots \times S(\pi_s)$, donde cada π_j es una proyección lineal sobre el cuerpo finito $\mathbb{Z}_{p_j}^n$, de esta forma aplicando los resultados en [4] para sistemas dinámicos lineales sobre cuerpos finitos podíamos probar si las proyecciones lineales π_j son sistemas lineales de punto fijo y así determinar si $L(f)$ es un sistema de punto fijo. Esto facilitaría caracterizar una clase especial de sistemas dinámicos monomiales los cuales llamamos sistemas dinámicos triángulares. Que juegan un papel importante en el concepto de los sistemas de control “**débilmente estabilizable**”, que es el tema central de este trabajo.

Los criterios que se establecieron para determinar sin un sistema de control es débilmente estabilizable, no alcanzan a garantizar de todo su estabilidad, pues como veremos en el siguiente ejemplo existen sistema de control que no son débilmente estabilizable pero sin embargo son estables.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos el siguiente **SDCM** $f = (x^2 y u v, x y^2 u v) : \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$, este sistema de control no es “débilmente estabilizable”. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz correspondiente a la variables de control, el $\det(A) = 0$. Luego no existe una función retroalimentadora g tal que $f \circ g$ sea un sistema triángular de punto fijo. Esto no quiere decir que f no sea estabilizable. En efecto existe una función monomial $\varphi = (x y^2, x y) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_3)$, tal que $f \circ \varphi = (x y, y^2)$ es un sistema dinámico de punto fijo pero no es triángular. Su estado fase se puede observar en la figura 4-1.

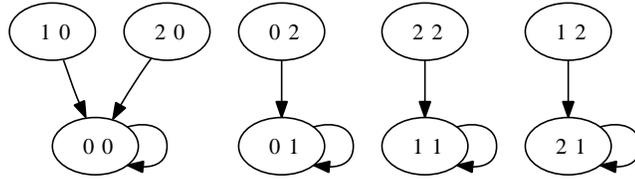


Figura 4-1: Estado fase de $f \circ \varphi = (x y, y^2) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_3)$

El aporte mas valioso lo encontramos en el teorema 3.2, el cual nos brinda condiciones suficientes y necesaria para que un sistema de control sea “débilmente estabilizable”. Ademas provee información de como hallar la función retroalimentadora. En el siguiente ejemplo vemos una aplicación útil de este teorema.

Ejemplo 4.1.2. Sea $f = (x u_1^2 u_2, x^3 y^2 u_1^3 u_2^4 u_3^2) : \mathbb{F}_5^2 \times \mathbb{F}_5^3 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$ un **SDCM**. Consideremos el **SDMPF** $h = (y^3, y) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_5)$ el cual es un sistema triángular. Utilizando las representaciones matriciales de las variables de control y de estado tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde A es la matriz de los exponentes de la variable de control, ε la matriz de variables de estado y B la matriz correspondiente al sistema triángular de punto

fijo h . Calculando el rango de la matriz aumentada A , obtenemos que $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^{(B-\varepsilon)_1}) = \text{rank}(A^{(B-\varepsilon)_2}) = 2$. Por teorema 3.2 tenemos que f es débilmente estabilizable. Ahora hallemos la función retroalimentadora $g \in \mathcal{F}_2^3(\mathbb{F}_5)$, para esto sea $\delta = (\delta_{ij})_{3 \times 2}$ la matriz correspondiente a g . Resolviendo el sistema, vemos que se puede expresar como 3 – 2 variables desconocidas, es decir, en términos de una sola variable. De la expresión 3.5 se tiene que:

$$A\delta_1 = (B - \varepsilon)_1 \quad (4.1)$$

$$A\delta_2 = (B - \varepsilon)_2 \quad (4.2)$$

donde δ_1 y δ_2 son las columnas de la matriz δ . Con lo cual obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \delta_{21} \\ \delta_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta_{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \delta_{22} \\ \delta_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta_{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haciendo $\delta_{11} = 1$ y $\delta_{12} = 0$, obtenemos:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $g = (x, x^2y^3, x^3y)$ y satisface que $f \circ g = (y^3, y)$ es un SDMPF, como se aprecia en la figura 4-2.

Un resultado un poco más general que podría ayudarnos a encontrar la función retroalimentadora, es una variante del teorema 3.1, cuando $m < n$, aunque esto es simplemente una conjetura. El siguiente ejemplo explica lo antes mencionado

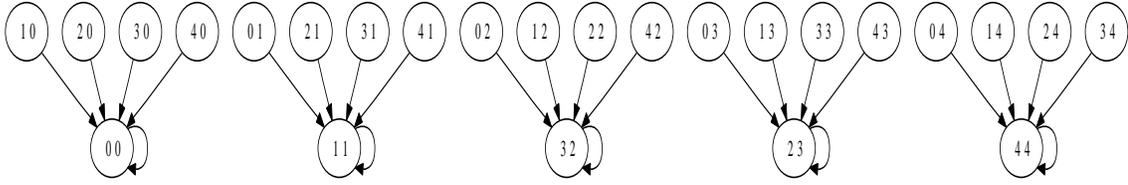


Figura 4-2: Estado fase de $f \circ g = (y^3, y) \in \mathcal{F}_2^2(\mathbb{F}_5)$

Ejemplo 4.1.3. Sea $f = (xz^2u^2v, xy^2u, xyv^2) : \mathbb{F}_3^3 \times \mathbb{F}_3^2 \rightarrow \mathbb{F}_3^3$. Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B es la matriz correspondiente a un sistema triangular de punto fijo. Ahora de la ecuación $A\delta + \varepsilon = B$, obtenemos una expresión análoga con matrices cuadradas, es decir $A^*\delta^* + \varepsilon = B$, donde A^* se obtiene de A agregando la columna $(0 \ 0 \ 1)^t$ y δ^* es la matriz cuadrada de orden $n \times n$, es decir tenemos la siguiente ecuación:

$$A^*\delta^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \delta^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora el $\det(A^*) = 2$, por tanto existe $(A^*)^{-1}$, resolviendo queda:

$$\delta^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ahora removiendo la última fila tenemos que

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que obtenemos la función retroalimentadora $g = (xz^2, x^2yz) \in \mathcal{F}_3^2(\mathbb{F}_3)$, que satisface que $f \circ g = (x^2yz, x^2y^2z^2, y^2z)$ es un sistema de punto fijo que se observa en la figura 4-3. Note que $f \circ g$ no es un sistema triangular.

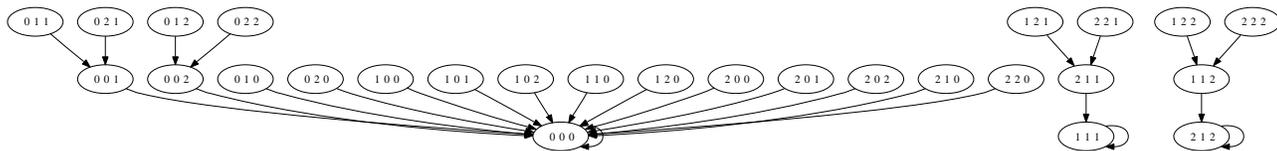


Figura 4-3: Estado fase de $f \circ g = (x^2yz, x^2y^2z^2, y^2z) \in \mathcal{F}_3^3(\mathbb{F}_5)$ un SDPF

Con la establecemos la siguiente conjetura

Conjetura: Sea $f : \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ un sistema de control monomial, con $n > m$. Si el $\det(A^*) \neq 0$, donde A^* es la matriz cuadrada obtenida de A agregando $n - m$ vectores $k_i = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0)$ para $i = 1, \dots, n - m$ y 1 se encuentra en la i -ésima posición. Entonces f es estabilizable y de la ecuación matricial $A^* \delta^* + \varepsilon = B$, obtenemos la función retroalimentadora removiendo de δ^* sus $n - m$ últimas columnas.

4.2. Trabajos Futuros

Los métodos y criterios establecidos en este trabajo se quedan corto para cualquier cuerpo finito arbitrario, por lo que es necesario desarrollar criterios mas generales que garanticen si algunos sistema de control monomial se pueden estabilizar o no. Algunos de los trabajos futuros que estamos considerando es:

1. Demostrar la anterior conjetura o verificar para que casos se cumple.
2. Generalizar los resultados a cualquier cuerpo finito.
3. Encontrar criterios para determinar cuando un sistema lineal sobre un anillo conmutativo es de punto fijo.
4. Establecer mas condiciones suficientes y necesarias que nos permitan verificar si un sistema dinámico monomial, es de punto fijo.

Bibliografía

- [1] Colón-Reyes Omar, Laubenbacher R., Jarrah A., Sturmfels B.. Monomial Dynamical Systems over Finite Fields. *Complex Systems*, 16(2006), pp. 333–342.
- [2] Bollman Dorothy, Colón-Reyes O., Ocasio V., Orozco E.. A Control Theory for Boolean Monomial Dynamical Systems. *University of Puerto Rico*
- [3] Colón-Reyes, Laubenbacher Reinahard, Pareigis Bodo. Boolean Monomial Dynamical Systems. *Annals of Combinatorics*, 8(2004), pp. 425–439.
- [4] Hernández Toledo R.. Linear Finite Dynamical Systems. *Communications in Algebra*, 33(2005), pp. 2977–2989.
- [5] Brown W. C.. Matrices over Commutative Rings. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 43(1993), Marcel Dekker, Inc., New York.
- [6] R. Laubenbacher and B. Stigler. A Computational Algebra Approach to the Reverse Engineering of Gene Regulatory Networks. *Journal of Theoretical Biology*, 229(2004), pp. 523–537.
- [7] Elspas Bernard. The Theory of Autonomus Linear Sequential Networks. *IRE Transactions on the Circuit Theory*, 5(1959), pp. 45–60.
- [8] R. Albert and H. Othmer. The Topology of the Regulatory Interactions Predicts the Expression Pattern of the Segment Polarity Genes in *Drosophila Melanogaster* *Journal of Theoretical Biology*, 223(2003), pp. 1–18
- [9] Germundsson Roger, Gunnarsson Johan, Plantin Jonas. Symbolic Algebraic Discrete Systems Applied to the JAS 39 Figther Aircraft *Linköping University, Sweden* (1994).
- [10] S. Kauffman. Metabolic Stability and Epigenesis in Randomly Constructed Genetic Nets *Journal of Theoretical Biology*, 22(1969), pp. 437–467.

- [11] Bollman Dorothy, Orozco Edusmildo, Colón-Reyes Omar. Fixed Point in Discret Models for Regulatory Genetic Networks *EURASIP Journal of Bioinformatics and Systems Biology*, 1(2007), pp. 8.
- [12] F. Celada and P. Seiden. A Computer Model of Cellular Interactions in the Immune System. *Immunology Today*, 13(1992), pp. 56–62.
- [13] M. Leborgne, A. Benveniste and P. Leguernie. Polynomial Dynamical Systems over Finite Fields. *in Algebraic Computing in Control*, G. Jacob and F. Lamnabhi-Lagarrigue, eds., vol 165 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, New York, 1991, Springer, pp. 212–222.