El Problema de Paulsen en Teoría de Operadores

Por

William Fernando Rueda Prada

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS (PURA)

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGUEZ

2018

Aprobada por:

Juan Romero Oliveras, Ph.D Presidente, Comité Graduado	Fecha
Arturo Portnoy, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Wilfredo Quiñones, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Carlos Marín, Ph.D Representante de Estudios Graduados	Fecha
Olgamary Rivera Marrero, Ph.D Director del Departamento	Fecha

ABSTRACT

Hilbert space frame theory has a great impact in some of the deepest problems in pure and applied mathematics. Equal norm Parseval frames turn out to be significantly important to applications; nevertheless, their class is one of the least understood classes of frames. Because of the difficulty of finding equal norm Parseval frames the Paulsen problem was of great interest.

In this investigation we study the fundamental aspects of Hilbert space finite frame theory. We analized the relationship between the chordal distance of two subspaces to the distance between their orthogonal projections, as well as the connection between the distance of proyections and the distance between the corresponding ranges of the analysis operators for Parseval frames. Finally, we analized the equivalence beetwen the Paulsen problem and a fundamental problem in operator theory known as the projection problem, besides, we present a proof of the equivalence between two generalizations of these problems.

RESUMEN

La teoría de marcos en espacios de Hilbert tiene un gran impacto en algunos de los problemas más profundos en matemáticas puras y aplicadas. los marcos Parseval de igual norma son significativamente importantes en cuanto a sus aplicaciones; sin embargo, son una de las clases menos comprendidas hasta el momento. Debido a la dificultad para encontrar marcos Parseval de igual norma el problema de Paulsen presentaba gran interés .

En esta investigación, estudiamos los aspectos fundamentales de la teoría de marcos en espacios de Hilbert de dimensión finita. Analizamos la relación entre la distancia cordal de dos subespacios y la distancia entre sus proyecciones ortogonales, así como la conexión entre la distancia de dos proyecciones y la distancia entre los correspondientes rangos de los operadores de análisis para marcos Parseval. Finalmente, analizamos la equivalencia entre el problema de Paulsen y un problema fundamental en teoría de operadores conocido como el problema de la proyección, además presentamos una prueba de la equivalencia entre dos generalizaciones de estos problemas.

Dedicado a mis padres y mi hermana.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero a Dios por permitirme la oportunidad de vivir esta experiencia y crecer como persona en muchos aspectos. Al recinto universitario de Mayagüez por concederme la posibilidad de realizar estudios de posgrado y por la ayuda brindada. Al Dr. Juan Romero por su paciencia y apoyo a lo largo de este trayecto. A mi familia por siempre estar en los momentos difíciles y ser un apoyo constante. A mis amigos, a Ysamart por su apoyo incondicional y a todas aquellas personas que hicieron de esta una enriquecedora experiencia.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN **1**

2. PUBLICACIONES PREVIAS **3**

3. PRELIMINARES **5**
3.1. Espacios de Hilbert 5
3.2. Operadores en Espacios de Hilbert 9
3.3. Proyecciones 17

4. MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT **20**
4.1. Definiciones y propiedades basicas 20
4.2. Operadores asociados a un marco 25
4.2.1. Operador de análisis y Operador de síntesis 25
4.2.2. Operador Marco 28
4.2.3. Operador Grammian 37
4.3. Reconstrucción a partir de los coeficientes del Marco 38
4.4. Construcción de Marcos 44
4.5. Equivalencia entre marcos 46

5. El PROBLEMA DE PAULSEN EN TEORÍA DE OPERADORES **50**
5.1. Planteamiento de los problemas 50
5.2. Resultados preliminares 53
5.3. Equivalencia entre los problemas 59
5.4. Problema de Paulsen generalizado 62

6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS **65**
6.1. Conclusiones 65
6.2. Trabajos futuros 66

Bibliografía **66**

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El concepto de base es uno de los conceptos más importantes en el estudio de los espacios de Hilbert. Las bases permiten representar cada vector del espacio de manera única. Los marcos son sistemas generadores que proveen representaciones las cuales no son necesariamente únicas. Esta propiedad proporciona una mayor flexibilidad al momento de escoger la representación adecuada.
Formalmente una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos en un espacio de Hilbert H es un marco, si existen constantes positivas A y B tales que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H$$

A pesar de que la transformada de Fourier ha sido una herramienta muy utilizada durante años, esta presenta una falla en el análisis de señales debido a que oculta información respecto al momento de emisión y la duración de una señal. Los marcos, sin embargo, son estructuras que presentan mayor robustez respecto al ruido por lo que proporcionan mayor estabilidad al momento de reproducir una señal, por otra parte, una de las ventajas que se tienen al trabajar con marcos en lugar de bases ortonormales es la escasa rigidez estructural que presenta un marco a diferencia de una base ortonormal.

Un conjunto $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos en un espacio de Hilbert H es llamado un *Marco Parseval* para H si para cada $f \in H$:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2$$

Además, si existe una constante c tal que $\|f_k\| = c$, para todo $k \in \mathbb{N}$ se dice que el conjunto $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un marco de igual norma.

Los marcos Parseval de igual norma son de gran importancia, sin embargo, son una de las clases menos comprendidas, la razón es que dado un marco $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ con operador S, el marco Parseval más cercano es el marco Parseval canónico $\{S^{-1/2} f_k\}_{k=1}^{\infty}$, el cual no es a menudo de igual norma. Por otra parte, el marco Parseval y el marco de igual norma más cercanos a un marco dado son conocidos, no obstante, a pesar del gran esfuerzo hecho hasta ahora es muy poco lo que se conoce acerca del marco Parseval de igual norma más cercano a un marco dado. Este interrogante es conocido en teoría de Marcos como el Problema de Paulsen.

El problema de Paulsen demostró ser uno de los problemas más intratables en teoría de marcos. En este trabajo se estudia la equivalencia entre el problema de Paulsen y un problema fundamental en teoría de operadores conocido como problema de la proyección, ademas, se estudia la equivalencia entre dos generalizaciones de estos problemas.

Capítulo 2

PUBLICACIONES PREVIAS

El concepto de marco para un espacio de Hilbert fue introducido por Duffin y Schaeffer [11] en el año 1952 con el fin de estudiar ciertos problemas sobre series de Fourier no armónicas. Este tranajo no generó mayor interés en otro campo que no fuesen las series de Fourier no armónicas. En 1986, Daubechies, Grossmann y Meyer [10] aplicaron el concepto de marco con el objetivo de estudiar ciertas herramientas conocidas actualmente como wavelets, trabajo en el cual los autores observaron que los marcos podían ser utilizados para encontrar expansiones en series de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ muy similares a las que proveen las bases ortonormales.

El problema de Paulsen ha resultado ser uno de los más difíciles en teoría de marcos. A pesar de ser profundamente estudiado por más de una década, no se obtuvo ningún avance que condujera a su solución. En el año 2003 Holmes y Paulsen [13] introducen un algoritmo que permite transformar un marco Parseval en un marco Parseval de igual norma, sin embargo este no probaba la existencia de un marco Parseval de igual norma que se encontrase en las proximidades de un marco casi-de igual norma y casi-Parseval. Siete años después, Bodmann y Casazza [2] presentan un método para la construcción de marcos Parseval de igual norma basado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el cual generan un flujo en el conjunto de marcos Parseval que termina convergiendo a marcos Parseval de igual norma, no obstante, Bodmann y Casazza asumían que la dimensión del espacio y la cantidad de vectores en el marco eran primos relativos. Dos años más tarde, en 2010 Casazza, Fickus y Mixon [5] construyen un algoritmo iterativo basado en el potencial del marco el cual preserva ciertas estructuras de grupo presentes en el marco inicial, con esto plantearon una solución completamente diferente a la propuesta por Bodmann y Casazza.

En 2011, J. Cahill y P.G. Casazza [4] demostraron que el problema de Paulsen y el problema de la proyección son equivalentes. los primeros en notar que debería haber una conexión entre estos dos problemas fueron Bodmann y Casazza [2].

Los avances mas recientes sobre el problema de Paulsen se deben a Kwok, Lap, Lee y Ramachandran [14], quienes presentaron una solución para el problema de Paulsen y calcularon una cota para la función distancia en el orden de $O(\epsilon M^{13/2})$. Recientemente, L. Hamilton y A. Moitra [12] presentaron una prueba mas simple de el problema de Paulsen, basados en la noción de posición isotrópica radial, y ademas mejoraron la cota para la función distancia dentro de un orden de $O(\epsilon M^2)$.

Capítulo 3

PRELIMINARES

3.1. Espacios de Hilbert

Un espacio con producto interno o pre-Hilbert es un espacio vectorial V en el que se define una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. (*Aditiva*) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2. (Hermitica) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
3. (definida positiva) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

En cualquier espacio pre-Hilbert podemos definir la norma asociada como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, por lo cual, todo espacio pre-Hilbert es en particular un espacio normado, ademas podemos definir la metrica asociada como $d(x, y) = \|x - y\|$. los espacios pre-Hilbert que son completos (respecto a la metrica asociada) son llamados espacios de Hilbert.

Proposición 3.1.1 *Sean $x, y \in H_N$*

- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

la igualdad se cumple si y solo si x, y son linealmente dependientes.

- *Desigualdad triangular*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

la igualdad se cumple si y solo si $y = 0$ o $x = cy$, $c \geq 0$.

- *Identidad de polarización*

  1. *Si H_N es real, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$*
  2. *Si H_N es complejo,*

$$Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2],$$
$$Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2]$$

Dado un espacio de Hilbert H_N dos vectores x, y de H_N son ortogonales, y escribimos $x \perp y$, cuando $\langle x, y\rangle = 0$. si W es un subespacio de H_N, un vector $x \in H_N$ se dice que es ortogonal a W y se denota $x \perp W$ cuando $\langle x, y\rangle = 0$ *para todo* $y \in W$, dos subespacios W y V se dicen subespacios ortogonales y se denota $W \perp V$ si $W \subset V^{\perp}$.

El complemento ortogonal de W es el conjunto $W^{\perp} = \{x \in H_N : x \perp W\}$.

Definición. 3.1.2 *Un sistema* $\{e_i\}_{i=1}^k$ *de vectores en* H_N *es llamado ortogonal si para todo* $i \neq j$, *los vectores* e_i *y* e_j *son ortogonales*

Proposición 3.1.3 *(Teorema de pitagoras) Sea* $(x_i)_{x=1}^M \in H_N$ *un conjunto de vectores ortogonales dos a dos, entonces se cumple lo siguiente*

$$\left\|\sum_{i=1}^{M} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{M} \|x_i\|^2.$$

Proposición 3.1.4 *Sean* H_N *un espacio de Hilbert y* M *un subespacio cerrado de* H_N. *Entonces* $H_N = M \bigoplus M^\perp$.

Definición. 3.1.5 *Sea* $(W_i)_{i=1}^M$ *una familia de subespacios de* H. *Entonces la suma directa ortogonal está definida como el espacio*

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \oplus W_i\right)_{\ell^2} := W_1 \times \cdots \times W_M$$

con un producto interno definido por

$$\langle x, \tilde{x}\rangle = \sum_{i=1}^{M} \langle x_i, \tilde{x}_i\rangle \quad para \quad todo \quad x = (x_i)_{i=1}^M, \tilde{x} = (\tilde{x}_i)_{i=1}^M \in \left(\sum_{i=1}^{M} \oplus W_i\right)_{\ell^2}$$

Definición. 3.1.6 *Un sistema* $\{e_i\}_{i=1}^k$ *de vectores en* H_N *es llamado ortonormal si es ortogonal y cada* e_i *tiene norma 1.*

Teorema. 3.1.7 *(Desigualdad de Bessel) Sea* H_N *un espacio pre-Hilbert,* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *un sistema ortonormal en* H_N, $y \in H_N$ *arbitrario. Entonces,* $\forall\, x_1, ..., x_n \in A$ *se tiene que:*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle y, x_i\rangle|^2 \leq \|y\|^2.$$

Los elementos $\langle y, x_i \rangle$ se llaman coeficientes de Fourier de "y" respecto del conjunto ortonormal $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Demostración. Sea $\alpha_i = \langle y, x_i \rangle$. De este modo,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle y - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \, , \, y - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\rangle \\
&= \|y\|^2 \, - \, \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, y \rangle \, - \, \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \langle y, x_i \rangle \, + \, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle x_i, x_j \rangle \\
&= \|y\|^2 \, - \, \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2
\end{aligned}
$$

Esto implica que $\|y\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\langle y, x_i \rangle|^2$. □

Un sistema $\{e_i\}_{i=1}^k$ de vectores en H_N se dice completo (o un conjunto generador) si $\mathrm{span}\{e_i\}_{i=1}^k = H_N$. Un sistema ortonormal que ademas es completo se le llama una *base ortonormal*.

El siguiente es un resultado fundamental en teoría de espacios de Hilbert.

Proposición 3.1.8 *(Identidad de Parseval) Si $\{e_i\}_{i=1}^N$ es una base ortonormal para H_N, entonces, para cada $x \in H_N$, tenemos*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Una consecuencia inmediata de la identidad de Parseval es que un vector x puede ser reconstruido a partir de los coeficientes $\{\langle x, e_i \rangle\}_{i=1}^N$ mediante un procedimiento simple. Este resultado puede ser interpretado como una formula de reconstrucción.

Corolario. 3.1.9 *Si* $\{e_i\}_{i=1}^N$ *es una base ortonormal para* H_N*, entonces, para cada* $x \in H_N$*, tenemos*

$$x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

3.2. Operadores en Espacios de Hilbert

Sean H_N y H_K espacios de Hilbert. Un operador lineal es una funcion $T : H_N \to H_K$ tal que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $x, y \in H_N$, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

El *núcleo* de un operador lineal T esta definido como

$$N(T) := \{x \in H_N : Tx = 0\}.$$

La *imagen* de T es el conjunto

$$Im(T) := \{Tx : x \in H_N\}.$$

El *rango* de T, denotado $R(T)$ es la dimensión de la imagen de T.

Un operador lineal T para el cual $N(T) = \{0\}$ se dice que es inyectivo, si $Im(T) = H_K$ el operador es sobreyectivo. Si T es inyectivo y sobreyectivo, entonces se dice que T es biyectivo (o invertible).

La *norma* de un operador T esta definida por

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

Definición. 3.2.1 *Sea* $T : H_N \to H_K$ *un operador lineal, sea* $\{e_i\}_{i=1}^N$ *una base ortonormal de* H_N*, y sea* $\{g_i\}_{i=1}^K$ *una base ortonormal de* H_K*. Entonces la matriz* *de respresentación de* T *(respecto a las bases ortonormales* $\{e_i\}_{i=1}^N$ *y* $\{g_i\}_{i=1}^K$*) es una matriz de tamaño* $K \times N$ *y esta dada por* $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{K,N}$*, donde*

$$a_{ij} = \langle Te_j, g_i \rangle.$$

Para todo $x \in H_N$ *con* $c = \{\langle x, e_i \rangle\}_{i=1}^N$ *tenemos*

$$Tx = Ac.$$

Definición. 3.2.2 *Sea* $T : H_N \to H_K$ *un operador lineal, el operador adjunto de* T^* *de* T *es el operador*

$$T^* : H_K \to H_N$$

tal que:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \text{ para todo } x \in H_N, \; y \in H_K.$$

Definición. 3.2.3 *Un operador lineal se dice auto-adjunto si* $T = T^\star$

En el conjunto de los operadores auto-adjuntos sobre un espacio de Hilbert, debido a que $\langle Tx, x \rangle$ es real, se puede introducir una relación de orden definida de la siguiente manera:

Definición. 3.2.4 *Sean* T_1 *y* T_2 *operadores auto-adjuntos.*

$$T_1 \leq T_2 \text{ si } \langle T_1 x, x \rangle \leq \langle T_2 x, x \rangle, \text{ para todo } x \in H_N$$

Proposición 3.2.5

(i) Sea $T : H_N \to H_K$ *un operador lineal. Entonces*

$$dim \; H_N = dim \; N(T) + \; R(T).$$

además, si T es inyectivo, entonces T^*T también es inyectivo.

(ii) Sea $T : H_N \to H_N$ un operador lineal. Entonces T es inyectivo si y solo si es sobreyectivo. Más aún, $N(T) = (Im(T^*))^\perp$, por lo tanto

$$H_N = N(T) \oplus Im(T^*).$$

Si $T : H_N \to H_N$ es un operador inyectivo, entonces T es invertible. Si un operador $T : H_N \to H_K$ no es inyectivo, podemos hacer que sea inyectivo si lo restringimos a $(N(T))^\perp$. Sin embargo, $T|_{N(T)^\perp}$ puede aún no ser invertible debido a que no necesariamente es sobreyectivo. Esto se puede asegurar considerando el operador $T : (N(T))^\perp \to Im(T)$ el cual es invertible.

Definición. 3.2.6 *Sea $T : H_N \to H_K$ un operador lineal inyectivo. El inverso Moore-Penrose de T, denotado $T^\dagger$, esta definido por*

$$T^\dagger = (T^*T)^{-1}T^*.$$

El operador Moore-Penrose $T^\dagger$ de un operador inyectivo T, proporciona un ïnverso a izquierda"para el operador T.

Proposición 3.2.7 *Si $T : H_N \to H_K$ es un operador lineal inyectivo. Entonces $T^\dagger T = I$.*

Teorema. 3.2.8 *Dada una matriz A de tamaño $M \times N$ existe una matriz U de tamaño $M \times M$ tal que $U^*U = I$, una matriz V de tamaño $N \times N$ tal que $V^*V = I$, y una matriz diagonal Σ de tamaño $M \times N$, con entradas reales decrecientes no* *negativas sobre la diagonal tales que*

$$A = U\Sigma V^*.$$

Definición. 3.2.9 *Sea A una matriz de tamaño $M \times N$, y sean U, Σ, y V como en el Teorema anterior. Entonces $A = U\Sigma V^*$ se conoce como la descomposición en valores singulares (SVD) de A. Los vectores columna de U son llamados vectores singulares de izquierda, y los vectores columna de V son llamados vectores singulares de derecha.*

La matriz pseudo-inversa de A, denotada A^+, puede escribirse a partir de su SVD, como se observa en el siguiente resultado.

Teorema. 3.2.10 *Sea A una matriz de tamaño $M \times N$, y sea $A = U\Sigma V^*$ su descomposición en valores singulares. Entonces*

$$A^+ = V\Sigma^+ U^*,$$

donde Σ^+ es la matriz diagonal $M \times N$ que se obtiene de Σ^* tomando el reciproco de cada entrada diferente de cero sobre la diagonal.

A continuación presentamos una lista de propiedades importantes de los operadores lineales que seran de utilidad en capitulos posteriores.

Definición. 3.2.11 *Un operador lineal $T : H_N \to H_K$ es:*

a) Normal, si $H_N = H_K$ y $T^*T = TT^*$.

b) Una isometría, si $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

c) Positivo, si $H_N = H_K$, T *es auto-adjunto, y* $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in H$.

d) Unitario, si es una isometría sobreyectiva.

En la siguiente proposición presentamos una serie de relaciones básicas y resultados referentes a la definición anterior los cuales serán utilizados posteriormente.

Proposición 3.2.12 *Sea* $T : H \to K$ *un operador lineal.*

i) $\|T^*T\| = \|T\|^2$, *y* T^*T *y* TT^* *son auto-adjuntos.*

ii) Si $H = K$, *las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. T *es auto-adjunto.*
2. $\langle Tx, \tilde{x}\rangle = \langle x, T\tilde{x}\rangle$ *para todo* $x, \tilde{x} \in H$.
3. *Si* H *es complejo,* $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ *para todo* $x \in H$.

iii) Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. T *es una isometría.*
2. $T^*T = I$.
3. $\langle Tx, T\tilde{x}\rangle = \langle x, \tilde{x}\rangle$ *para todo* $x, \tilde{x} \in H$.

iv) Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. T *es unitario.*
2. T *y* T^* *son isométricos.*
3. $TT^* = I$ *y* $T^*T = Id$.

v) Si U *es un operador unitario, entonces* $\|UT\| = \|T\| = \|TU\|$.

Una de las herramientas que se utiliza frecuentemente para entender la acción de un operador es la *diagonalización*.

Definición. 3.2.13 *Sea $T : H_N \to H_N$ un operador lineal. Un vector distinto de cero $x \in H_N$ es un autovector de T con autovalor λ, si $Tx = \lambda x$. El operador T se dice diagonalizable ortogonalmente, si existe una base ortonormal $e_{i\,i=1}^{N}$ de H_N formada por autovectores de T.*

Proposición 3.2.14 *Para cualquier operador lineal $T : H_N \to H_K$, los autovalores distintos de cero de T^*T y TT^* son los mismos.*

El siguiente resultado, el cual es una consecuencia inmediata de la proposición 3.2.12. brinda informacion acerca de los autovalores de un operador en el caso que este sea unitario, autoadjunto o positivo.

Corolario. 3.2.15 *Sea $T : H_N \to H_N$ un operador lineal.*

1. *Si T es unitario, entonces sus autovalores tienen modulo uno.*
2. *Si T es auto-adjunto, entonces sus autovalores son reales.*
3. *Si T es positivo, entonces sus autovalores son no negativos.*

A continuación presntamos un resultado fundamental en teoría de operadores conocido como *teorema espectral*.

Teorema. 3.2.16 *Sea H_N un espacio de Hilbert complejo y sea $T : H_N \to H_N$ un operador lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *T es normal.*

(ii) *T es diagonalizable ortogonalmente.*

(iii) *Existe una matriz de representación de T que es diagonal.*

(iv) *Existe una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^N$ de H_N y escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ tal que*

$$Tx = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad x \in H_N.$$

En este caso

$$\|T\| = \max_{1 \le i \le N} |\lambda_i|.$$

Puesto que todo operador auto-adjunto es normal, una consecuencia inmediata det teorema 3.2.16. es que todo operador auto-adjunto es diagonizable ortogonalmente. Otra consecuencia del teorema 3.2.16 es el siguiente resultado, El cual permite definir la raiz *n-ésima* de un operador positivo.

Corolario. 3.2.17 *Sea $T : H_N \to H_N$ un operador invertible positivo con autovectores normalizados $\{e_i\}_{i=1}^N$ y respectivamente autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$, sea $a \in \mathbb{R}$, definamos un operador $T^a : H_N \to H_N$ por*

$$T^a x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^a \langle x, e_i \rangle e_i \qquad \textit{para todo } x \in H.$$

Entonces T^a es un operador positivo y $T^a T^b = T^{a+b}$ para $a, b \in \mathbb{R}$. En particular, T^{-1} y $T^{-1/2}$ son operadores positivos.

Definición. 3.2.18 *Sea $T : H_N \to H_N$ un operador. Entonces, la traza de T esta definida por*

$$Tr\, T = \sum_{i=1}^{N} \langle Te_i, e_i \rangle,$$

Donde $\{e_i\}_{i=1}^N$ es una base ortonormal arbitraria de H_N.

Corolario. 3.2.19 *Sea $T : H_N \to H_N$ un operador diagonalizable ortogonalmente, y sea $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ el conjunto de sus autovalores. Entonces*

$$Tr\,T = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i.$$

En la sección anterior recordamos la noción de base ortonormal. Sin embargo, en algunas ocasiones el requisito de ortonormalidad resulta ser demasiado fuerte, pero la unicidad en cuanto a la descomposición de los vectores sigue siendo una propiedad deseable, por lo cual se introduce a continuación la noción de base de Riesz, la cual, como se podrá observar en el capitulo siguiente resulta estar intimamente relacionada a la definición de marco.

Definición. 3.2.20 *Una familia de vectores $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ en un espacio de Hilbert H_N es una base de Riesz con cota inferior A y cota superior B, si, para cualquier conjunto de escalares $\{a_i\}_{i=1}^N$, se tiene*

$$A\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i \right\|^2 \leq B\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2.$$

Proposición 3.2.21 *Sea $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ una familia de vectores. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) *$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ es una base de Riesz para H_N con cota inferior A y cota superior B.*

ii) *Para cualquier base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^N$ de H_N, el operador $T : H_N \to H_N$ definido por $Te_i = \varphi_i$ para todo $i = 1, 2, ..., N$ es un operador invertible con $\|T\|^2 \leq B$ y $\|T^{-1}\|^{-2} \geq A$.*

3.3. Proyecciones

Un operador lineal $P : H_N \to H_N$, es llamado una proyección, si $P^2 = P$. Si P es además auto-adjunto, entonces se dice que P es una proyeccion ortogonal. Dado cualquier subespacio W de H_N, existe una ínica proyección ortogonal P de H_N tal que $Im(P) = W$. Esta proyección puede construirse de la siguiente manera:

Sea m la dimensión de W, y sea $\{e_i\}_{i=1}^m$ una base ortonormal de W. Entonces para cada $x \in H_N$ definimos

$$Px = \sum_{i=1}^{M} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Si P es una proyección ortogonal sobre H_N entonces $H_N = W \oplus (W^*)^\perp$.

En la siguiente proposición enunciamos algunas de las propiedades básicas de las proyecciones.

Proposición 3.3.1 *Sea P una proyección y supongamos que $Im(P) = W$ y $N(P)^\perp = W^*$. Entonces P^*, $I - P$ y $I - P^*$ son proyecciones y se cumple lo siguiente:*

1. $Im(P^*) = W^*$ *y* $N(P^*) = W^\perp$,
2. $Im(I - P) = (W^*)^\perp$ *y* $N(I - P) = W$,
3. $Im(I - P^*) = W^\perp$ *y* $N(I - P^*) = W^*$.

Además, P es un operador invertible sobre W^* que mapea W^* sobre W.

Ahora, mostramos que la descomposición en valores sigulares de una proyección tiene una propiedad especial:

Proposición 3.3.2 *Supongase que P es una proyeccion de rango N, sean $\{a_j\}_{j=1}^N$ y $\{b_j\}_{j=1}^N$ los vectores singulares de izquierda y los vectores singulares de derecha respectivamente, correspondientes a los valores singulares $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$. Entonces*

$$\langle a_j, b_k\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_j} & j = k, \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

para todo $j, k \in \{1, \cdots, N\}$.

Definición. 3.3.3 *Sean W_1 y W_2 subespacios de dimensión finita N de un espacio de Hilbert, definimos la N-tupla $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N)$ de la siguiente manera:*

$$\gamma = max\{\langle a, b\rangle : a \in W_1, b \in W_2, \|a\| = \|b\| = 1\} = \langle a_1, b_1\rangle.$$

Para $2 \leq i \leq N$,

$$\gamma_j = max\{\langle a, b\rangle : \|a\| = \|b\| = 1, \langle a_k, a\rangle = 0 = \langle b_k, b\rangle,\ para\ 1 \leq k \leq j-1\},$$

donde

$$\gamma_j = \langle a_j, b_j\rangle.$$

La N-tupla $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)$ con $\theta_j = cos^{-1}(\gamma_j)$ es llamada los angulos principales entre W_1, W_2.

El siguiente lema muestra que una proyeccion ortogonal P tiene la propiedad de que mapea cada vector de H_N en el vector mas cercano en la imagen de P.

Lema. 3.3.4 *Sea W un subespacio de H_N, sea P la proyección ortogonal sobre*

W, y sea $x \in H_N$. Entonces

$$\|x - Px\| \leq \|x - \tilde{x}\| \quad para\ todo\ \tilde{x} \in W.$$

Además, si $\|x - Px\| = \|x - \tilde{x}\|$ para algun $\tilde{x} \in W$, entonces $\tilde{x} = Px$.

El siguiente resultado da una relacion entre la traza y el rango de una proyección.

Proposición 3.3.5 *Sea P la proyección ortogonal sobre un subespacio W de H_N, y sea $m = dim\, W$. Entonces P es diagonalizable ortogonalmente con autovalor 1 de multiplicidad m y autovalor 0 de multiplicidad $N - m$. En particular, tenemos que $TrP = m$.*

Capítulo 4

MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT

4.1. Definiciones y propiedades basicas

Definición. 4.1.1 *Una familia de vectores* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ *en un espacio de Hilbert* N*-dimensional* H_N *es un marco si existen constantes* $A, B > 0$ *tales que*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H_N. \tag{4.1}$$

Los números A, B son llamados *cotas del marco*, estos no son únicos. La *cota inferior óptima del marco* es el supremo sobre todas las cotas inferiores y la *cota superior óptima* es el ínfimo sobre todas las cotas superiores. Diremos que un marco Φ es *ajustado* si podemos escoger $A = B$ en la definición, i. e., si

$$\sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 = A\|f\|^2, \quad \textit{para todo } f \in H_N. \tag{4.2}$$

Para un marco ajustado, el valor exacto A en (4.2) es llamado *cota del marco*; en el caso $A = 1$, se dice que Φ es un *marco Parseval*, si existe una constante c tal que $\|\varphi_k\| = c$, para todo $k = 1, ..., M$ diremos que Φ es un *marco de igual norma*, en particular se dice *marco de norma unitaria* en el caso que $c = 1$. Si existe c tal que $|\langle f_k, f_l\rangle| = c$, para todo $k \neq l$ el marco se dice equiangular. Los valores $\{\langle f, \varphi_k\rangle\}_{k=1}^M$ son llamados los coeficientes de marco del vector f respecto al marco Φ.

En este trabajo, solo consideraremos familias finitas $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$. Con esta restricción, la desigualdad de Cauchy–Schwarz muestra que

$$\sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{M} \|\varphi_k\|^2 \|f\|^2, \quad \forall f \in H_N,$$

i. e., la condición de la cota superior para el marco se satisface automáticamente. Para que la condición de la cota inferior en (4.1) se cumpla, es necesario que $span\{\varphi_k\}_{k=1}^M = H_N$. Esta condición se vuelve suficiente; de hecho, toda sucesión finita es un marco para el span de los elementos, como se observa en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ una sucesión en H_N. Entonces $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco para $span\{\varphi_k\}_{k=1}^M$.*

Demostración. Primero asumamos que no todos los vectores φ_k son cero, como se observó anteriormente, la cota superior se satisface con $B = \sum_{k=1}^{M} \|\varphi_k\|^2$. Ahora definamos

$$W := span\{\varphi_k\}_{k=1}^M$$

y consideremos la aplicación continua

$$\phi : W \to \mathbb{R}, \quad \phi(f) := \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

Puesto que la esfera unitaria en W es compacta, existe $g \in W$ con $\|g\| = 1$ tal que

$$A := \sum_{k=1}^{M} |\langle g, \varphi_k \rangle|^2 = \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \mid f \in W, \|f\| = 1 \right\}.$$

Es claro que $A > 0$. Ahora dado $f \in W$, $f \neq 0$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{M} \left| \left\langle \frac{f}{\|f\|}, \varphi_k \right\rangle \right|^2 \|f\|^2 \geq A\|f\|^2.$$

$\square$

La Proposición 4.1.2 implica de manera inmediata un resultado que caracteríza a los marcos en un espacio de dimensión finita.

Corolario. 4.1.3 *Una familia de vectores $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ en H_N es un marco para H_N si y sólo si span$\{\varphi_k\}_{k=1}^{M} = H_N$.*

Demostración. Nótese que si $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ no es un conjunto generador para H_N, entonces existe $f \neq 0$ tal que $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$ para todo $k = 1, ..., M$. Por lo tanto Φ no podría ser un marco. Recíprocamente, si se asume que Φ no es un marco, entonces, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores normalizados en H_N tales que

$$\sum_{k=1}^{M} |\langle f_n, \varphi_k \rangle|^2 < \frac{1}{n} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, el limite f de una subsusección convergente de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$ para todo $k = 1, ..., M$. Puesto que $\|f\| = 1$, se sigue que Φ no es un conjunto generador. $\square$

El Corolario 4.1.3 muestra que un marco puede contener más elementos de los necesarios para ser una base. En particular, si $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco para H_N y $\{g_k\}_{k=1}^n$ es una colección arbitraría finita de vectores en H_N, entonces $\{\varphi_k\}_{k=1}^M \cup \{g_k\}_{k=1}^n$ también es un marco para H_N. Un marco el cual no es una base se dice que es *sobrecompleto* o *redundante*.

Proposición 4.1.4 *si* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *es una base ortonormal, entonces* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *es un marco Parseval. El reciproco no se cumple en general.*

Demostración. Si $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es una base ortonormal, entonces, por la identidad de parseval,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \quad para\ todo\ f \in H_N$$

por lo tanto Φ es un marco Parseval.
Para la segunda parte, sean $\{e_k\}_{k=1}^N$ y $\{g_k\}_{k=1}^N$ bases ortonormales para H_N, entonces $\{e_k/\sqrt{2}\}_{k=1}^N \cup \{g_k/\sqrt{2}\}_{k=1}^N$ es un marco Parseval para H_N pero no una base ortonormal. $\square$

Proposición 4.1.5 $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *es un marco Parseval de norma unitaria si y sólo si es una base ortonormal*

Demostración. Por la identidad de Parseval, para cada $k_0 \in \{1, ..., M\}$, tenemos

$$\|\varphi_{k_0}\|^2 = \sum_{k=1}^{M} |\langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle|^2 = \|\varphi_{k_0}\|^4 + \sum_{k=1, k\neq k_0}^{M} |\langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle|^2$$

Puesto que los vectores son normalizados, entonces

$$\sum_{k=1,k\neq k_0}^{M} |\langle \varphi_{k_0}, \varphi_k\rangle|^2 = 0 \quad \textit{para todo } k_0 \in \{1, ..., M\}$$

Por lo tanto $\langle \varphi_k, \varphi_j\rangle = 0 \quad \textit{para todo } k \neq j$, entonces, Φ es un sistema ortonormal que además es completo por 4.1.3, entonces es una base ortonormal. □

A continuación presentamos una serie de ejemplos de carácter ilustrativo:

Ejemplos. 4.1.6 *Sea $\{e_k\}_{k=1}^{M}$ una base ortonormal de H_N.*

(1) El sistema

$$(e_1, 0, e_2, 0, \ldots, e_N, 0)$$

Es un marco Parseval para H_N. Este ejemplo muestra que un marco Parseval puede contener vectores cero.

(2) El sistema

$$\{f_k\}_{k=1}^{M} = \{e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{e_M}{\sqrt{M}}, \ldots, \frac{e_M}{\sqrt{M}}\}$$

es un marco Parseval para H_N, en efecto, dado $f \in H_N$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{M} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{M} k|\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}} e_k\rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{M} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2\end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que un marco Parseval puede tener multiples copias de un solo vector.

(3) El sistema

$$\{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \ldots, e_M, e_M\}$$

es un marco 2-ajustado para H_N. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{M}|\langle f, f_k\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{M}2|\langle f, e_k\rangle|^2\\ &= 2\sum_{k=1}^{M}|\langle f, e_k\rangle|^2\\ &= 2\|f\|^2\end{aligned}$$

4.2. Operadores asociados a un marco

En esta sección se definen el operador de análisis, operador de síntesis, y operador marco, los cuales determinan la acción de un marco al momento de analizar y reconstruir una señal.
En adelante denotaremos por $\ell_2^M := \ell_2(\{1, ..., M\})$, notese que este espacio coincide con $\mathbb{R}^N$ o $\mathbb{C}^N$, dotado con el producto interno estandar.

4.2.1. Operador de análisis y Operador de síntesis

Consideremos ahora un espacio de Hilbert de dimensión finita H_N y sea $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ una sucesión de vectores en H_N, el operador lineal T definido de la siguiente manera

$$T : H_N \to \ell_2^M, \quad Tf = \{\langle f, \varphi_k\rangle\}_{k=1}^M \tag{4.3}$$

es llamado el *operador de análisis*.

A continuación presentamos un propiedad importante la cual es una caracterización que permite decidir cuando un conjunto de vectores resulta ser un marco a partir de su operador de análisis. Se define además otro operador asociado a un marco conocido como el operador de síntesis.

Lema. 4.2.1 *Sea $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ una sucesión de vectores en H_N con Operador Análisis T.*

(i) $\|Tf\|^2 = \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2$ *para todo* $f \in H_N$. *Por lo tanto, $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco para H_N si y sólo si T es inyectivo.*

(ii) El operador adjunto $T^* : \ell_2^M \to H_N$ de T esta dado por

$$T^*\{c_k\}_{k=1}^M = \sum_{k=1}^{M} c_k \varphi_k.$$

Demostración. De la definición de T, tenemos que

$$\|Tf\|^2 = \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \;\; para \;\; todo \;\; f \in H_N.$$

Sea $f \in H_N$ tal que $Tf = 0$, entonces $\|Tf\| = 0$, entonces $A\|f\|^2 \leq 0 \leq B\|f\|^2$, por lo tanto $f = 0$, por otra parte, si suponemos que T es inyectivo.
Sean $x = \{c_k\}_{k=1}^M \in \ell_2^M$ y $f \in H_N$, entonces

$$\langle T^*x, f \rangle = \langle x, Tf \rangle = \left\langle \{c_k\}_{k=1}^M, \{\langle f, \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M \right\rangle = \sum_{k=1}^{M} c_k \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} = \left\langle \sum_{k=1}^{M} c_k \varphi_k, f \right\rangle.$$

□

Definición. 4.2.2 *Sea $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ una sucesión de vectores en H_N con Operador Analisis T. El operador de síntesis está definido como el operador adjunto T^*.*

El siguiente lema resume algunas propiedades básicas del operador de síntesis.

Lema. 4.2.3 *Sea $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ una sucesión de vectores en H_N con operador de análisis T.*

(i) Sea $\{e_k\}_{k=1}^M$ la base estandar de ℓ_2^M. Entonces, para todo $k = 1, 2, \ldots, M$, tenemos $T^* e_k = T^* P e_k = \varphi_k$, donde $P : \ell_2^M \to \ell_2^M$ denota la proyección ortogonal sobre $Im(T)$.

(ii) $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco si y solo si T^* es sobreyectivo.

A menudo, los marcos son modificados bajo la acción de un operador invertible. El siguiente resultado muestra el impacto sobre el operador de análisis asociado y el hecho de que la sucesión resultante tambien es un marco.

Proposición 4.2.4 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=}^M$ una sucesión de vectores en H_N con Operador Analisis T_Φ y sea $F : H_N \to H_N$ un operador lineal. Entonces el Operador Analisis asociado a la sucesión $F\Phi = \{F\varphi_k\}_{k=1}^M$ está dado por*

$$T_{F\Phi} = T_\Phi F^*.$$

Mas aún, si Φ es un marco para H_N y F es invertible, Entonces $F\Phi$ también es un marco para H_N.

Demostración. Dado $f \in H_N$ se tiene que,

$$T_{F\mathit{\Phi}} f = \{\langle f, F\varphi_k\rangle\}_{k=1}^M = \{\langle F^* f, \varphi_k\rangle\}_{k=1}^M = T_{\mathit{\Phi}} F^* f$$

Por lo tanto $T_{F\mathit{\Phi}} = T_{\mathit{\Phi}} F^*$. □

Ahora, se analiza la estructura de la matriz de representación asociada al operador de síntesis. Esta matriz es de fundamental importancia en la construcción de marcos.

Lema. 4.2.5 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ un marco para H_N con operador de análisis T. Entonces una matriz representativa para el operador de síntesis T^* es la matriz $N \times M$ dada por*

$$\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_N \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

Mas aún, las cotas de Riesz correspondientes a los vectores fila de esta matriz son iguales a las cotas de marco correspondientes a los vectores columna.

Demostración. Sea $\{e_j\}_{j=1}^N$ la base ortonormal correspondiente de H_N y para $j = 1, ..., N$, sean $\psi_j = [\langle\varphi_1, e_j\rangle, \langle\varphi_2, e_j\rangle, ..., \langle\varphi_M, e_j\rangle]$ los vectores fila de la matriz. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{M} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j \langle e_j, \varphi_k\rangle \right|^2 = \sum_{j,i=1}^{N} c_j \overline{c_i} \sum_{k=1}^{M} \langle e_j, \varphi_k\rangle\langle\varphi_k, e_i\rangle \\ &= \sum_{j,i=1}^{N} c_j \overline{c_i} \langle\psi_i, \psi_j\rangle = \left\| \sum_{j=1}^{N} \overline{c_j}\psi_j \right\|^2 . \end{aligned}$$

□

4.2.2. Operador Marco

El operador marco es considerado uno de los operadores mas importantes asociados a un marco, dicho operador recopila propiedades fundamentales del marco. Acontinuación se discuten algunas de sus propiedades fundamentales.

Definición. 4.2.6 *Dada una sucesión de vectores $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ en H_N con operador* *de analisis T, se define el operador marco como $S : H_N \to H_N$ definido por*

$$, \quad Sf = T^*Tf = \sum_{k=1}^{M} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k. \tag{4.4}$$

El siguiente lema muestra la relación entre el operador marco y las propiedades del marco.

Lema. 4.2.7 *Sea $\{\varphi_i\}_{k=1}^{M}$ una sucesión de vectores en H_N con operador marco asociado S. Entonces, para todo $f \in H_N$,*

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

Demostración. Por definición de operador marco se tiene que

$$\langle Sf, f \rangle = \langle T^*Tf, f \rangle = \langle Tf, Tf \rangle = \|Tf\|^2 = \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2$$

lo cual implica la desigualdad planteada. $\square$

Ejemplos. 4.2.8 *(1) Sea* $\{f_k\}_{k=1}^{4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Este es un ejemplo de marco cuyos elementos tienen todos norma $\sqrt{3}$ y que es equiangular. Constituye los vértices de un tetrahedro en $\mathbb{R}^3$. Su operador de síntesis respectivamente de análisis son

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; T^{\star} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y su operador marco es

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

es decir, se trata de un marco ajustado con cota de marco $A = 4$. Si re-escalamos estos vectores por $\frac{1}{2}$, estos vértices se transforman en un marco Parseval, pero no son una base ortonormal.

(2) *(El marco Mercedes-Benz). El marco Mercedes-Benz para $\mathbb{R}^2$ es el marco ajustado de norma unitaria con cota de marco $\frac{3}{2}$ dado por:*

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

Nótese que este marco tambien es equiangular. La razón de su nombre resulta evidente tal como se observa en la figura 4.1

(3) *Los ejemplos anteriores llevan a pensar que una manera de obtener marcos ajustados de norma unitaria es a partir de los vertices de figuras regulares. Por ejemplo, los vértices de los sólidos platónicos son marcos ajustados para $\mathbb{R}^3$ (Figura 4.2)*

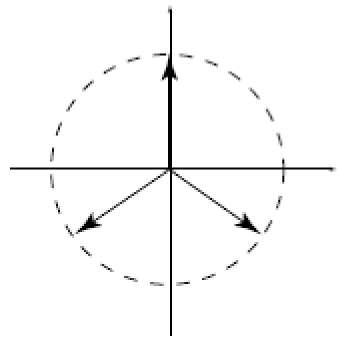

Figura 4.1: Marco Mercedes-Benz

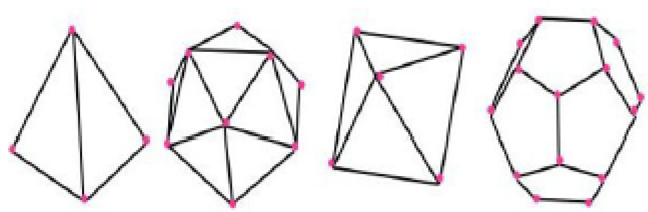

Figura 4.2: Sólidos platónicos

Si la sucesión de vectores $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco para el espacio de Hilbert H_N, entonces el operador marco es invertible. Esta es una propiedad fundamental para la formula de reconstrucción que sera presentada mas adelante.

Teorema. 4.2.9 *El operador marco S asociado a un marco $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ con cotas de marco A y B es un operador invertible, positivo y auto-adjunto que satisface*

$$A \cdot Id \leq S \leq B \cdot Id.$$

Demostración. Dado que $S = T^*T$, es claro que S es auto-adjunto. Para mostrar que S es inyectivo, sea $f \in H$, asumamos que $Sf = 0$. Entonces

$$0 = \langle Sf, f\rangle = \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2,$$

por lo que la condición de marco implica que $f = 0$. Puesto que estamos trabajando en un espacio de dimensión finita el hecho de que S es inyectivo implica que S es sobreyectivo. Para probar la desigualdad, notese que

$$\langle Af, f\rangle = A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 = \langle Sf, f\rangle \leq B\|f\|^2 = \langle Bf, f\rangle \quad para\, todo\; f \in H_N$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la proposición 4.2.4

Proposición 4.2.10 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ un marco para H_N con operador marco S, y sea F un operador invertible sobre H_N. Entonces $\{F\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco con Operador Marco FSF^*.*

Los marcos ajustados se caracterizan como aquellos cuyo operador marco es un multiplo positivo del operador identidad, así como se observa en el siguiente resultado.

Proposición 4.2.11 *Sea* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *un marco ajustado para* H_N *con cota de marco* A*. Entonces* $S = AI$*, y*

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{M}\langle f, \varphi_k\rangle\varphi_k, \quad \textit{para todo } f \in H_N. \tag{4.5}$$

Una interpretación de (4.5) es que si $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco ajustado y queremos expresar $f \in H_N$ como una combinación lineal $f = \sum_{k=1}^M c_k\varphi_k$, podemos sencillamente definir $g_k = \frac{1}{A}\varphi_k$ y tomar $c_k = \langle f, g_k\rangle$.

Los marcos ajustados tienen la propiedad de que los autovalores asociados a su operador marco coinciden. En el siguiente resultado consideramos operadores marco cuyos autovalores son arbitrarios, observese que el autovalor mas grande y el mas pequeño coinciden con las cotas optimas del marco.

Teorema. 4.2.12 *Sea* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *un marco para* H_N *con operador marco* S*. Sean* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N$ *los autovalores asociados a* S*. Entonces* λ_1 *y* λ_N *conincicen con la cota superior optima del marco y la cota inferior optima del marco, respectivamente.*

Demostración. Denotemos por $\{e_k\}_{k=1}^N$ los autovectores normalizados para el operador marco S con los respectivos autovalores $\{\lambda_j\}_{k=1}^N$ escritos en orden decreciente. Dado $f \in H_N$, podemos escribir $f = \sum_{k=1}^N \langle f, e_k\rangle e_k$, entonces

$$Sf = \sum_{k=1}^{N}\langle f, e_k\rangle Se_k = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\langle f, e_k\rangle e_k,$$

En virtud del lema 4.2.7 obtenemos

$$\sum_{k=1}^{M} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^{N} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \lambda_1 \|f\|^2.$$

Por lo tanto, $B_{op} \leq \lambda_1$ donde B_{op} denota la cota superior optima para el marco $\{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$.

Por otra parte,

$$\sum_{k=1}^{M} |\langle e_1, \varphi_1 \rangle|^2 = \langle Se_1, e_1 \rangle = \langle \lambda_1 e_1, e_1 \rangle = \lambda_1.$$

Por lo tanto $B_{op} = \lambda_1$

La demostración para la cota inferior se realiza de manera análoga. □

Corolario. 4.2.13 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ un marco para H_N. Entonces los siguientes enunciados se cumplen.*

(i) La cota superior óptima de Riesz y la cota superior óptima del marco Φ coinciden.

(ii) La cota inferior óptima de Riesz y la cota inferior óptima del marco Φ coinciden.

Demostración. Sea T el operador de análisis asociado a Φ, S el operador marco y $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ los autovalores de S escritos en orden decreciente. Entonces

$$\lambda_1 = \|S\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$$

y

$$\lambda_N = \|S^{-1}\|^{-1} = \|(T^*T)^{-1}\|^{-1} = \|(T^*)^{-1}\|^{-2}$$

En virtud de teorema 4.2.12, lema 4.2.3 y proposición 3.2.21 se obtienen ambos resultados. □

El siguiente teorema muestra la relación entre los vectores que conforman un marco y los autovalores y autovectores del operador marco asociado. Además, es de gran importancia para calcular la norma de los vectores de un marco Parseval de igual norma, como se observará posteriormente.

Teorema. 4.2.14 *Sea* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *un marco para* H_N *con operador marco* S*, sean* $\{e_j\}_{j=1}^N$ *los autovectores normalizados correspondientes y* $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ *los respectivos autovalores. Entonces para todo* $j = 1, 2, \dots, N$ *tenemos*

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{M} |\langle e_j, \varphi_k \rangle|^2.$$

En particular,

$$TrS = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = \sum_{k=1}^{M} \|\varphi_k\|^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} \lambda_k = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \|e_j\|^2 &= \sum_{j=1}^{N} \langle Se_j, e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} |\langle e_j, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Intercambiando las sumas y usando el hecho de que $\{e_j\}_{j=1}^N$ es una base ortonormal para H_N obtenemos el resultado. □

En el siguiente resultado mostramos una caracterización completa de la matriz síntesis para un marco en terminos del operador marco.

Proposición 4.2.15 *Sea $T : H_N \to \ell_2^M$ un operador lineal, sea $\{e_j\}_{j=1}^N$ una base ortonormal de H_N y sea $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ una sucesion de numeros positivos. Denotemos por A la matriz $N \times M$ de representación de T^* respecto a $\{e_j\}_{j=1}^N$ (y la base estandar $\{\widehat{e}_i\}_{i=1}^M$ de ℓ_2^M). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *$\{T^*\widehat{e}_i\}_{i=1}^M$ es un marco para H_N cuyo operador marco tiene autovectores $\{e_j\}_{j=1}^N$ y autovalores asociados $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$.*

(ii) *Las filas de A son ortogonales, y la suma de los cuadrados de la j-esima fila es λ_j.*

(iii) *Las columnas de A forman un marco para ℓ_2^N, y $AA^* = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$.*

Demostración. Sea $\{f_j\}_{j=1}^N$ la base estandar de ℓ_2^N y $U : \ell_2^N \to H_N$ el operador unitario que mapea f_j en e_j. Entonces $T^* = UA$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Para $j, k \in \{1, ..., N\}$ tenemos

$$\langle A^*f_j, A^*f_k\rangle = \langle TUf_j, TUf_k\rangle = \langle T^*Te_j, e_k\rangle = \lambda_j\delta_{jk},$$

Lo cual es esquivalente a (ii)

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Puesto que las columnas de A son ortogonales, entonces $rank\ A = N$, lo cual implica que las columnas de A forman un marco para ℓ_2^N.

$$\langle AA^*f_j, f_k\rangle = \langle A^*f_j, A^*f_k\rangle = \lambda_j\delta_{jk}\ para\ j, k = 1, ..., N$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Puesto que $\{A\widehat{e}_i\}_{i=1}^M$ es un conjunto generador para ℓ_2^N y $T^* = UA$, entonces $\{T^*\widehat{e}_i\}_{i=1}^M$ es un marco para H_N. Su operador de análisis esta dado por T,puesto que para todo $f \in H_N$,

$$\{\langle f, T^*\widehat{e}_i\rangle\}_{i=1}^M = \{\langle Tf, \widehat{e}_i\rangle\}_{i=1}^M = Tf.$$

Mas aún,

$$T^*Te_j = UAA^*U^*e_j = U\ diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)\ f_j = \lambda_j U f_j = \lambda_j e_j.$$

$\square$

4.2.3. Operador Grammian

La sección anterior fue dedicada a estudiar las propiedades del operador marco $S = T^*T : H_N \to H_N$ asociado a un marco $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ para un espacio de Hilbert H_N. El operador generado al aplicar primero el operador síntesis y luego el operador análisis tambien es de fundamental importancia. Esta sección será dedicada a estudiar dicho operador y algunas de sus propiedades fundamentales.

Definición. 4.2.16 *Sea $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ un marco para H_N con operador análisis T. Entonces el operador $G : \ell_2^M \to \ell_2^M$ definido por*

$$G\{a_i\}_{i=1}^M = TT^*\{a_i\}_{i=1}^M = \left(\sum_{i=1}^M a_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle \right)_{k=1}^M = \sum_{i=1}^M a_i \{\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M$$

es llamado el operador Grammian asociado a $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$.

Nótese que la matriz de representación canónica asociada al operador Grammian de un marco $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ para un espacio de Hilbert H_N está dada por

$$\begin{bmatrix} \|\varphi_1\|^2 & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_M, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \|\varphi_2\|^2 & \dots & \langle \varphi_M, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_M \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_M \rangle & \dots & \|\varphi_M\|^2 \end{bmatrix}$$

Si el marco es de norma unitaria, entonces las entradas de la matriz Grammian son los cosenos de los angulos entre los vectores del marco.

En el siguiente teorema presentamos las propiedades fundamentales del operador Grammian. Su demostración puede encontrarse en [6]

Teorema. 4.2.17 *Sea $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ un marco para H_N con operador de análisis T, operador marco S, y operador Gramian G. Entonces se cumple lo siguiente:*

(i) Un operador U sobre H_N es unitario si y solo si el Gramian de $\{U\varphi_i\}_{i=1}^M$ coincide con G.

(ii) Los autovalores diferentes de cero para G y S coinciden.

(iii) $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ es un marco Parseval si y solo sí G es una proyección ortogonal de rango N.

(iv) G es invertible si y solo si $M = N$.

4.3. Reconstrucción a partir de los coeficientes del Marco

La tarea de análizar una señal es a menudo realizada considerando simplemente los coeficientes del marco, sin embargo, si lo que se desea es trasmitir una señal de manera eficiente, entonces poder reconstruirla a partir de los coeficientes del marco resulta ser una herramiente clave.

La reconstrucción a partir de los coeficcientes respecto a una base ortonormal fue discutida en corolario 3.1.9. No obstante dicha reconstrucción respecto a un sistema redundante es una tarea mas delicada la cual requiere el uso de otro marco, conocido como el marco dual, el cual será definido en esta sección.

La formula (4.5) es similar a la representación $f = \sum_{k=1}^{M} \langle f, e_k \rangle e_k$ a través de una base ortonormal: la única diferencia es el factor $1/A$ en (4.5). Para marcos generales aún tenemos una representación para cada $f \in H$ de la forma $f = \sum_{k=1}^{M} \langle f, g_k \rangle \varphi_k$ con una elección apropiada de $\{g_k\}_{k=1}^{m}$. Tal y como advierte el teorema a continuación el cual es uno de los resultados más importantes acerca de marcos y es conocido como *descomposición de marcos*.

Teorema. 4.3.1 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ un marco para H_N con operador marco S. Entonces para todo $f \in H_N$, tenemos*

$$f = \sum_{k=1}^{M} \langle f, \varphi_k \rangle S^{-1} \varphi_k = \sum_{k=1}^{M} \langle f, S^{-1} \varphi_k \rangle \varphi_k \tag{4.6}$$

Demostración. Sea $f \in H_N$, f puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f &= SS^{-1}f \\ &= T^*TS^{-1}f \\ &= \sum_{k=1}^{M} \langle S^{-1}f, \varphi_k\rangle \varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{M} \langle f, (S^{-1})^*\varphi_k\rangle \varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{M} \langle f, (S^*)^{-1}\varphi_k\rangle \varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{M} \langle f, S^{-1}\varphi_k\rangle \varphi_k \end{aligned}$$

La primera representación en (4.6) se obtiene de manera similar, usando el hecho de que $f = S^{-1}Sf$ □

Nótese que la primera formula puede interpretarse como una estrategia de reconstrucción, mientras que la segunda resulta ser una descomposicion. Obsérvese además, que la sucesión $\{S^{-1}\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ juega un papel crucial en el teorema 4.3.1. El siguiente resultado muestra que dicha sucesión es tambien un marco.

Proposición 4.3.2 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ un marco para H_N con cotas de marco A y B y operador marco S. Entonces la sucesión $\{S^{-1}\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ es un marco para H_N con cotas de marco B^{-1} y A^{-1} y operador marco S^{-1}.*

Definición. 4.3.3 *Sea $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ un marco para H_N con operador marco S. Entonces $\{S^{-1}\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ es llamado el marco dual canonico asociado a $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$.*

Ejemplos. 4.3.4 *Sea $\{e_k\}_{k=1}^{2}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H_2. Sean*

$$f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 - e_2,\ f_3 = e_1 + e_2.$$

Entonces $\{f_k\}_{k=1}^3$ *es un marco para* H_2 *y*

$Se_1 = e_1 + e_1 - e_2 + e_1 + e_2 = 3e_1,\ Se_2 = -(e_1 - e_2) + e_1 + e_2 = 2e_2,$ *con lo cual*

$$S^{-1}e_1 = \tfrac{1}{3}e_1,\ S^{-1}e_2 = \tfrac{1}{2}e_2.$$

Así, su marco dual canónico es

$$\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^3 = \{\tfrac{1}{3}e_1, \tfrac{1}{3}e_1 - \tfrac{1}{2}e_2, \tfrac{1}{3}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2\}.$$

es decir, dado $f \in H_2$ *su descomposición de marco es*

$$f = \langle f, \tfrac{1}{3}e_1\rangle e_1 + \langle f, \tfrac{1}{3}e_1 - \tfrac{1}{2}e_2\rangle(e_1 - e_2) + \langle f, \tfrac{1}{3}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2\rangle(e_1 + e_2).$$

El marco dual canónico asociado a un marco Parseval queda determinado fácilmente gracias al resultado anterior, tal y como se observa en el siguiente resultado.

Corolario. 4.3.5 *Sea* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *un marco Parseval para* H_N. *Entonces su marco dual canónico es el mismo marco* $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$, *y la formula de reconstrucción en el teorema 4.3.1 se convierte en la siguiente:*

$$f = \sum_{k=1}^{M} \langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k, \quad f \in H_N.$$

El siguiente resultado es concecuencia de la formula de reconstrucción para marcos Parseval en el corolario 4.3.5, en este se muestra una vez mas la estrecha relación entre marcos Parseval y bases ortonormales.

Proposición 4.3.6 *Sea* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *un marco Parseval para* H_N*, y sea* F *un operador lineal sobre* H_N*. Entonces*

$$Tr(F) = \sum_{k=1}^{M} \langle F\varphi_k, \varphi_k \rangle.$$

Demostración. Sea $\{e_j\}_{j=1}^N$ una base ortonormal para H_N. Entonces, por definición

$$Tr(F) = \sum_{j=1}^{N} \langle Fe_j, e_j \rangle.$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} Tr(F) &= \sum_{j=1}^{N} \left\langle \sum_{i=1}^{M} \langle Fe_j, \varphi_i \rangle \varphi_i, e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \langle e_j, F^*\varphi_i \rangle \langle \varphi_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi_i, e_j \rangle e_j, F^*\varphi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{M} \langle \varphi_i, F^*\varphi_i \rangle = \sum_{i=1}^{M} \langle F\varphi_i, \varphi_i \rangle. \end{aligned}$$

□

Definición. 4.3.7 *Sea* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *un marco para* H_N*. Entonces un marco* $\{\psi_i\}_{i=1}^M$ *es llamado un marco dual para* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$*, si*

$$f = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i \rangle \psi_i \quad \textit{para todo } f \in H_N.$$

Los marcos duales que no coinciden con el marco dual canónico, son llamados *marcos duales alternos.*

Proposición 4.3.8 *Sean* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *y* $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ *marcos para* H_N *y sean* T *y* $\tilde{T}$ *los operadores análisis asociados a* Φ *y* Ψ*, respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $f = \sum_{i=1}^{M} \langle f, \psi_i \rangle \varphi_i$ *para todo* $f \in H_N$.

(ii) $f = \sum_{i=1}^{M} \langle f, \varphi_i \rangle \psi_i$ *para todo* $f \in H_N$.

(iii) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i \rangle \langle \psi_i, y \rangle$ *para todo* $x, y \in H_N$.

(iv) $T^* \tilde{T} = I$ *y* $\tilde{T}^* T = Id$.

Proposición 4.3.9 *Sea* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ *un marco para* H_N *con operador marco* S, *y sea* $f \in H_N$. *Si existen escalares* $\{c_k\}_{k=1}^{M}$ *tales que* $f = \sum_{k=1}^{M} c_k f_k$, *entonces:*

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left| \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle \right|^2 + \sum_{k=1}^{m} \left| c_k - \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle \right|^2.$$

Demostración. Para probar *(iii)* suponemos que $f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$. Podemos escribir

$$\{c_k\}_{k=1}^{m} = \left(\{c_k\}_{k=1}^{m} - \left\{ \langle f, S^{-1} f_k \rangle \right\}_{k=1^m} \right) + \left\{ \langle f, S^{-1} f_k \rangle \right\}_{k=1}^{m}.$$

Por la elección de $\{c_k\}_{k=1}^{m}$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{m} \left(c_k - \langle f, S^{-1} f_k \rangle \right) f_k = 0,$$

i.e., $\{c_k\}_{k=1}^{m} - \{\langle f, S^{-1} f_k \rangle\}_{k=1}^{m} N_T = R_{T^*}^{\perp}$; ya que

$$\left\{ \langle f, S^{-1} f_k \rangle \right\}_{k=1}^{m} = \left\{ \langle S^{-1} f, f_k \rangle \right\}_{k=1}^{m} \in R_{T^*},$$

obtenemos *(iii)*. $\square$

4.4. Construcción de Marcos

La forma mas básica de generar un marco Parseval es mediante la aplicación del operador $S^{-1/2}$ donde S es el operador marco asociado a un marco dado.

Lema. 4.4.1 *Si $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco para H_N con operador marco S, entonces $\{S^{-1/2}\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco Parseval, conocido como el marco Parseval canónico.*

Demostración. $S^{-1/2}$ es un operador invertible, entonces por 4.2.10 $\{S^{-1/2}\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco para H_N con operador marco

$$\begin{aligned} S^{-1/2}S(S^{-1/2})^* &= S^{-1/2}SS^{-1/2} \\ &= S^{-1/2}S^{-1/2}S \\ &= I \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{S^{-1/2}\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco Parseval. □

El siguiente resultado muestra que los marcos son invariantes bajo la acción de proyecciones ortogonales, la cual es una propiedad de gran importancia.

Proposición 4.4.2 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ un marco para H_N con cotas A, B, y sea P una proyección ortogonal de H_N sobre un subespacio W. Entonces $\{P\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco para W con cotas A, B . En particular, si Φ es un marco Parseval para H_N y P es una proyección ortogonal de H_N sobre W, entonces $\{P\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco Parseval para W.*

Demostración. Para cada $f \in W$,

$$A\|f\|^2 = A\|Pf\|^2 \leq \sum_{k=1}^{M} |\langle Pf, \varphi_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{M} |\langle f, P\varphi_k\rangle|^2 \leq B\|Pf\|^2 = B\|f\|^2.$$

$\square$

Un resultado inmediato a la proposición anterior es el siguiente corolario, el cual caracteriza a los marcos Parseval como las imagenes de proyecciones ortogonales sobre bases ortonormales.

Corolario. 4.4.3 *Sea $\{e_i\}_{i=1}^N$ una base ortonormal para H_N, y sea P una proyección ortogonal de H_N sobre un subespacio W. Entonces $\{Pe_k\}_{k=1}^N$ es un marco Parseval para W*

El corolario 4.3.5 puede interpretarse de la siguiente manera: Dada una matriz unitaria de tamaño $M \times M$, si se seleccionan cualesquiera N filas de la matriz, entonces los vectores columna de estas filas forman un marco Parseval para H_N. El siguiente teorema, conocido como *teorema de Naimark*, muestra que todo marco Parseval puede obtenerse como resultado de una operación como la descrita. Para la demostración ver [6]

Teorema. 4.4.4 *(**Teorema de Naimark**) Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ un marco para H_N con operador de análisis T, sea $\{e_i\}_{i=1}^M$ la base ortonormal estandar de ℓ_2^M, y sea $P : \ell_2^M \longrightarrow \ell_2^M$ la proyección ortogonal sobre $Im(T)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *es un marco Parseval para H_N.*

(ii) *Para todo $i = 1, \cdots, M$, tenemos que $Pe_i = T\varphi_i$.*

(ii) *Existen* $\psi_1, \cdots, \psi_M \in H_{M-M}$ *tales que* $\{\varphi_i \oplus \psi_i\}_{i=1}^M$ *es una base ortonormal para* H_M.

4.5. Equivalencia entre marcos

En esta sección consideramos clases de equivalencia entre marcos. La idea consiste en que aquellos marcos que se encuentran en la misma clase de equivalencia comparten determinadas propiedades.

En la siguiente definición se establece una relación de equivalencia entre dos marcos.

Definición. 4.5.1 *Dos marcos* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *y* $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^M$ *son isomorfos, si existe un operador* $F : H_N \to H_N$ *tal que* $F\varphi_k = \psi_k$ *para todo* $k = 1, \ldots, M$.

En el siguiente resultado presentamos una caracterización para la relación de isomorfiá entre dos marcos en terminos de sus operadores de análisis y síntesis.

Teorema. 4.5.2 *Sean* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *y* $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^M$ *marcos para* H_N *con operadores de análisis* T_1 *y* T_2 *respectivamente. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) Φ *es isomorfo a* Ψ

ii) $R(T_1) = R(T_2)$

iii) $N(T_1^*) = N(T_2^*)$

Si una de las anteriores se cumple, entonces el operador $F : H_N \to H_N$ *con* $F\varphi_k = \psi_k$ *para todo* $k = 1, \ldots, N$ *esta dado por* $F = T_2^*(T_1^*|_{R(T_1)})^{-1}$.

Demostración.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ La equivalencia se sigue por complementacion ortogonal.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Sea F un operador invertible sobre H_N tal que $F\varphi_k = \psi_k$ para todo $k = 1, \dots, M$. Entonces la proposición 4.2.4 implica que $T_2 = T_1 F^*$ y por lo tanto $FT_1^* = T_2^*$, puesto que F es invertible, entonces obtenemos (iii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea P la proyección ortogonal sobre $W := R(T_1) = R(T_2)$. Entonces $\varphi_k = T_1^* e_k = T_1^* P e_k$, donde $\{e_k\}_{k=1}^M$ es la base estandar de ℓ_2^M, y $\psi_k = T_2^* e_k = T_2^* P e_k$. Los operadores T_1^* y T_2^* son biyectivos. Por lo tanto el operador $F := T_2^*(T_1^*|_W)^{-1}$ también es biyectivo. En consecuencia, para cada $k \in \{1, \dots, M\}$ tenemos

$$F\varphi_k = T_2^*(T_1^*|_W)^{-1} T_1^* P e_1 = T_2^* P e_2 = \psi_k,$$

con lo que tenemos (i).

□

Un resultado interesante en el contexto de la isomorfía entre marcos es que el marco Parseval en el lema 4.4.1 es isomorfo al marco original.

Lema. 4.5.3 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ un marco para H_N con operador marco S. Entonces el marco Parseval $\{S^{-1/2}\varphi_k\}_{k=1}^M$ es isomorfo a Φ.*

Similarmente, un marco dado y su marco dual canónico son isomorfos.

Lema. 4.5.4 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ un marco para H_N con operador marco S. Entonces, el marco dual canónico $\{S^{-1}\varphi_k\}_{k=1}^M$ es isomorfo a Φ.*

En el siguiente resultado se muestra un hecho interesante. El marco dual canónico es el único marco dual que es isomorfo a un marco dado.

Proposición 4.5.5 *Sea $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ un marco para H_N con operador marco S. Sean $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ y $\{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^M$ dos marcos duales diferentes para Φ. Entonces $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ y $\{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^M$ no son isomorfos. En particular, $\{S^{-1}\varphi_k\}_{k=1}^M$ es el único marco dual isomorfo a Φ.*

Demostración. Sean $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ y $\{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^M$ marcos duales diferentes para Φ. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ y $\{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^M$ son isomorfos, y denotemos por F el operador invertible que satisface $\psi_k = F\tilde{\psi}_k$, $k = 1, \dots, M$. Entonces, para cada $f \in H_N$ tenemos

$$F^* f = \sum_{k=1}^{M} \langle F^* f, \tilde{\psi}_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{M} \langle f, F\tilde{\psi}_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{M} \langle f, \psi_k \rangle \varphi_k = f.$$

Así, $F^* = I$ por lo cual $F = I$ lo cual es una contradicción. $\square$

Definición. 4.5.6 *Dos marcos $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ y $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^M$ son isomorfos unitariamente, si existe un operador unitario $U : H_N \to H_N$ tal que $U\varphi_k = \psi_k$ para todo $k = 1, \dots, M$.*

En el caso de los marcos Parseval, las nociones de *isomorfía* e *isomorfía unitaria* coinciden.

Lema. 4.5.7 *Sean $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ y $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^M$ marcos Parseval para H_N. Si Φ y Ψ son isomorfos, entonces son isomorfos unitariamente.*

Demostración. Sea F un operador invertible sobre H_N tal que $F\varphi_k = \psi_k$ para todo $k = 1, \dots, M$. Por la proposición 4.2.4, el operador marco asociado a $\{F\varphi_k\}_{k=1}^M$ es $FIF^* = FF^*$. Por otra parte, el operador marco asociado a $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ es el operador identidad. Por lo tanto, $FF^* = I$. $\square$

Proposición 4.5.8 *Dados dos marcos* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *y* $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^M$ *Parseval para* H_N *con operador de análisis* T_1 *y* T_2 *respectivamente, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) Φ *y* Ψ *son isomorfos unitariamente.*

(ii) $\|T_1^* c\| = \|T_2^* c\|$ *para todo* $c \in \ell_2^M$*.*

(iii) $T_1 T_1^* = T_2 T_2^*$*.*

Demostración.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Sea U un operador unitario sobre H_N tal que $U\varphi_k = \psi_k$ para todo $k = 1, \dots, M$. Entonces, en virtud de la proposición 4.2.4 tenemos que $T_2 = T_1 U^*$, luego $T_2 T_2^* = T_1 U^* U T_1^* = T_1 T_1^*$ por lo tanto obtenemos (iii).

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Esta implicación es inmediata.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Puesto que (ii) implica que $N(T_1^*) = N(T_2^*)$, entonces, se sigue del teorema 4.5.2 que $U\varphi_k = \psi_k$ para todo $k = 1, \dots, M$, donde $U = T_2^*(T_1^*|_{R(T_1)})^{-1}$. Notese que este operador es unitario, puesto que, gracias a (ii) tenemos que

$$\|T_2^*(T_1^*|_{R(T_1)})^{-1} f\| = \|T_1^*(T_1^*|_{R(T_1)})^{-1} f\| = \|f\|$$

para todo $f \in H_N$. $\square$

Capítulo 5

El PROBLEMA DE PAULSEN EN TEORÍA DE OPERADORES

5.1. Planteamiento de los problemas

En esta sección se introducen las definiciones principales que nos permitirán plantear el problema de Paulsen y el problema de la proyección.

Definición. 5.1.1 *si* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ *y* $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{M}$ *son marcos para* H_N*, se define la distancia entre ellos como sigue:*

$$d(\Phi, \Psi) = \sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i - \psi_i\|^2.$$

Como se demostró en el capitulo anterior, el operador marco es un operador auto-adjunto y positivo, por lo tanto la relación de orden sobre la cual esta basada la siguiente definición tienen sentido gracias a la definición 3.2.4.

Definición. 5.1.2 *Un marco* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ *para* H_N *con operador marco* S *es*

ϵ-casi Parseval si

$$(1-\epsilon)\, I \leq S \leq (1+\epsilon) I.$$

Definición. 5.1.3 *Un marco $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ para H_N es ϵ-casi de igual norma si*

$$(1-\epsilon)\frac{N}{M} \leq \|\varphi_i\|^2 \leq (1+\epsilon)\frac{N}{M}, \quad \forall i = 1, \ldots, M.$$

Problema: (Problema de Paulsen). ¿Qué tan cercano es un marco ϵ-casi Parseval y ϵ-casi de igual norma a un marco Parseval de igual norma?.

Formalmente podemos formular el problema de Paulsen de la siguiente manera: Encontrar la función $f(\epsilon, N, M)$ tal que para cualquier marco ϵ-casi de igual norma y ϵ-casi Parseval $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ para un espacio de Hilbert N-dimensional H_N, existe un marco Parseval de igual norma $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{M}$ para H_N que satisface

$$d\,(\Phi, \Psi) = \leq f(\epsilon, N, M).$$

La importancia del problema de Paulsen radica en que existen algoritmos para construir marcos de igual norma y casi Parseval, sin embargo, no es seguro que dicho marco resulte ser cercano a algun marco Parseval de igual norma.

Un argumento debido a Hadwin [2] muestra que dicha función existe.

Lema. 5.1.4 *Dado un espacio de Hilbert de dimensión N y un entero $M \geq N$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta \geq 0$ tal que si Φ es un marco δ-casi Parseval y δ-casi de igual norma, entonces Φ es ϵ-cercano a algun marco Parseval de igual norma.*

El siguiente resultado muestra que el marco Parseval canonico $\left\{S^{-1/2}\varphi_i\right\}_{i=1}^{M}$ es el marco Parseval mas cercano a un marco dado. Para su demostracion ver [2].

El mismo, permite trabajar con una variación mas simple del problema de Paulsen, conocida como *Problema de Paulsen (caso Parseval).*

Proposición 5.1.5 *Si* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ *es un marco* ϵ*-casi Parseval para* H_N *entonces el marco Parseval* $\Psi = \left\{S^{-1/2}\varphi_k\right\}_{k=1}^M$ *satisface:*

$$d(\Phi, \Psi) \leq N\left(2 - \epsilon - 2\sqrt{1-\epsilon}\right) \leq \frac{N\epsilon^2}{4}.$$

además, es casi de igual norma con cotas

$$\frac{(1-\epsilon)^2}{(1+\epsilon)}\frac{N}{M} \leq \|\psi_i\|^2 \leq \frac{(1+\epsilon)^2}{(1-\epsilon)}\frac{N}{M}.$$

Problema: (Problema de Paulsen - caso Parseval) Encontrar la función $f(\epsilon, N, M)$ tal que si $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ es un marco Parseval ϵ-casi de igual norma, entonces existe un marco Parseval de igual norma Ψ tal que

$$d(\Phi, \Psi) \leq f(\epsilon, N, M).$$

Definición. 5.1.6 *Si* P *y* Q *son proyecciones ortogonales sobre* H_M*, definimos la distacia entre ellas como*

$$d(P, Q) = \sum_{i=1}^{M} \|Pe_i - Qe_i\|^2$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^M$ *es una base ortonormal para* H_M*.*

Problema 2 : (Problema de la proyección). Dado H_M un espacio de Hilbert de dimensión M con base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^M$. Encontrar la función $g(\epsilon, N, M)$ que satisface lo siguiente: Si P es una proyección de rango N sobre H_M que satisface

$$(1-\epsilon)\frac{N}{M} \leq \|Pe_i\|^2 \leq (1+\epsilon)\frac{N}{M}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, M,$$

(Lo anterior se conoce como una proyección de diagonal ϵ-casi constante). entonces existe una proyección Q con $\|Qe_i\|^2 = \dfrac{N}{M}$ (proyección de diagonal constante) para todo $i = 1, \ldots, M$ que satisface:

$$d(P, Q) \leq g(\epsilon, N, M).$$

5.2. Resultados preliminares

En esta sección presentamos un bosquejo de como se llevara a cabo la prueba de la equivalencia entre el problema de Paulsen y el problema de la proyección, así como una serie de resultados necesarios para la misma.

Primero se asume que la función $f(\epsilon, N, M)$ en el problema de Paulsen (caso Parseval) está dada, y que P es una proyección de rango N sobre H_M con diagonal $\epsilon-$casi constante. Necesitamos encontrar una proyección de diagonal constante cuya distancia a P está en el orden de $f(\epsilon, N, M)$. Para esto consideramos un marco Parseval casi de igual norma $\Phi = \{Pe_i\}_{i=1}^{M}$ para H_N tal que

$$d(\Phi, \Psi) \leq f(\epsilon, N, M).$$

Sea T_1 el operador de análisis de Ψ, definimos Q como la proyección sobre $\mathrm{Im}(T_1)$ tal que

$$T_1\psi_i = Qe_i, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, M.$$

El objetivo consiste en encontrar $d(P, Q)$.

Reciprocamente, si se asume que la función $g(\epsilon, N, M)$ es conocida, escogemos un marco Parseval casi de igual norma $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ cuyo operador análsis $T : H_N \longrightarrow H_M$ es una isometría, y se define P como la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Im}(T)$. El objetivo consiste en encontrar un marco Parseval de igual norma, que sea cercano a Φ. Puesto que P es una proyección de diagonal casi constante, entonces por el problema de la proyección, existe una proyección Q sobre H_M tal que $d(P, Q) \leq g(\epsilon, N, M)$. Se sigue que $\{Qe_i\}_{i=1}^M$ es un marco Parseval de igual norma. Nuestro trabajo estaría terminado si podemos encontrar un marco Parseval de igual norma $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ para H_N con operador análisis T_1 tal que

$$T_1\psi_i = Qe_i \quad \text{y} \quad d(\Phi, \Psi) \approx g(\epsilon, N, M). \tag{5.1}$$

De modo que uno de los problemas que trataremos en esta sección es encontrar Ψ. Este problema se dificulta por el hecho de muchos de los marcos que satisfacen la primera parte de (5.1) no son suficientemete cercanos a Φ. En particular, si $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ satisface la primera parte de (5.1) y U es un operador unitario sobre H_N, entonces $U(\Psi) = \{U\psi_i\}_{i=1}^N$ también satisface la primera parte de (5.1). Para abordar este problema, se define la distancia cordal entre subespacios de un espacio de Hilbert y se calcula en términos de nuestra función distancia. Esto nos permitirá construir el marco Ψ requerido.

El siguiente resultado muestra la relacion que existe entre la distancia de dos marcos y la distancia entre los rangos de sus operadores de análisis.

Teorema. 5.2.1 *Sean $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$, $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ marcos Parseval para H_N con operadores de análisis T_1, T_2 respectivmente. Si*

$$d(\Phi, \Psi) = \sum_{i=1}^M \|\varphi_i - \psi_i\|^2 < \epsilon,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{M} \|T_1\varphi_i - T_2\psi_i\|^2 < 4\epsilon.$$

Demostración.

Nótese que para todo $j \in \{1, \ldots, M\}$,

$$T_1\varphi_j = \sum_{i=1}^{M} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle e_i \quad \text{y} \quad T_2\psi_j = \sum_{i=1}^{M} \langle \psi_j, \psi_i \rangle e_i.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|T_1\varphi_j - T_2\psi_j\|^2 &= \sum_{i=1}^{M} |\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle - \langle \psi_j, \psi_i \rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{M} |\langle \varphi_j, \varphi_i - \psi_i \rangle + \langle \varphi_j - \psi_j, \psi_i \rangle|^2 \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{M} |\langle \varphi_j, \varphi_i - \psi_i \rangle|^2 + 2\sum_{i=1}^{M} |\langle \varphi_j - \psi_j, \psi_i \rangle|^2 .
\end{aligned}$$

sumando sobre j y usando el hecho de que Φ y Ψ son marcos Parseval, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{M} \|T_1\varphi_j - T_2\psi_j\|^2 &\leq 2\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} |\langle \varphi_j, \varphi_i - \psi_i \rangle|^2 + 2\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} |\langle \varphi_j - \psi_j, \psi_i \rangle|^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} |\langle \varphi_j, \varphi_i - \psi_i \rangle|^2 + 2\sum_{j=1}^{M} \|\varphi_j - \psi_j\|^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i - \psi_i\|^2 + 2\sum_{j=1}^{M} \|\varphi_j - \psi_j\|^2 \\
&= 4\sum_{j=1}^{M} \|\varphi_j - \psi_j\|^2.
\end{aligned}$$

$\square$

La distancia cordal entre dos subespacios de dimensión finita N, W_1, W_2 se define como sigue:

$$d_c^2(W_1, W_2) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sen}^2 \theta_j.$$

Por definición, existen bases ortonormales $\{a_j\}_{j=1}^N$, $\{b_j\}_{j=1}^N$ para W_1, W_2 respectivmente, que satisfacen

$$\|a_j - b_j\| = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right), \quad \forall\ j = 1, \ldots, N.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}^2 \theta_j \leq 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_j}{2}\right) = \|a_j - b_j\|^2 \leq 4 \operatorname{sen}^2 \theta_j, \quad \forall\ j = 1, \ldots, N.$$

de donde

$$d_c^2(W_1, W_2) \leq \sum_{j=1}^{N} \|a_j - b_j\|^2 \leq 4 d_c^2(W_1, W_2). \tag{5.2}$$

La siguiente fórmula [9] brinda una manera de calcular la distancia cordal entre dos subespacios :

Lema. 5.2.2 *Si H_M es un espacio de Hilbert de dimensión finita M, y P, Q son proyecciones ortogonales de rango N sobre subespacios W_1 y W_2 respectivamente, entonces la distancia cordal $d_c^2(W_1, W_2)$ entre los subespacios satisface:*

$$d_c^2(W_1, W_2) = M - \operatorname{Tr} PQ.$$

El resultado a continuación muestra la relación que existe entre la distancia cordal para subespacios y la distancia entre las proyecciones sobre dichos subespacios.

Proposición 5.2.3 *Sea H_M un espacio de Hilbert de dimensión finita M, con base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^M$. Sean P, Q las proyecciones ortogonales de H_M sobre los subespacios de dimensión N, W_1, W_2 respectivamente. Entonces la distancia cordal entre W_1, W_2 satisface*

$$d_c^2(W_1, W_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\|Pe_i - Qe_i\|^2.$$

En particular, exiten bases ortonormales $\{a_j\}_{j=1}^N$, $\{b_j\}_{j=1}^N$ para W_1, W_2 respectivamente, tales que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\|Pe_i - Qe_i\|^2 \leq \sum_{j=1}^{N}\|a_j - b_j\|^2 \leq 2\sum_{i=1}^{M}\|Pe_i - Qe_i\|^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{M}\|Pe_i - Qe_i\|^2 &= \sum_{i=1}^{M}\langle Pe_i - Qe_i, Pe_i - Qe_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{M}\|Pe_i\|^2 + \sum_{i=1}^{M}\|Qe_i\|^2 - 2\sum_{i=1}^{M}\langle Pe_i, Qe_i\rangle \\
&= 2N - 2\sum_{i=1}^{M}\langle PQe_i, e_i\rangle \\
&= 2N - 2\,\mathrm{Tr}\,PQ \\
&= 2N - 2\left[N - d_c^2\left(W_1, W_2\right)\right] \\
&= 2d_c^2\left(W_1, W_2\right).
\end{aligned}$$

□

Ahora, podemos responder el segundo problema que necesitamos abordar en esta seción.

Teorema. 5.2.4 *Sean P y Q proyecciones de rango N sobre H_M, y sea $\{e_i\}_{i=1}^M$ una base ortonormal para H_M. Además, asumamos que $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ es un marco Parseval para H_N tal que* $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(P)$. *Si*

$$\sum_{i=1}^{M} \|Pe_i - Qe_i\|^2 < \epsilon,$$

entonces existe un marco Parseval $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ tal que

$$T_1\psi_i = Qe_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, M,$$

y

$$\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i - \psi_i\|^2 < 2\epsilon.$$

Más aún, si $\{Qe_i\}_{i=1}^M$ es de igual norma, entonces $\{\psi_i\}_{i=1}^M$ también lo es.

Demostración. En virtud de la proposción 5.2.3 podemos garantizar la existencia de bases ortonormales $\{a_j\}_{j=1}^N$ y $\{b_j\}_{j=1}^N$ para W_1, W_2 respectivamente, tales que

$$\sum_{j=1}^{N} \|a_j - b_j\|^2 < 2\epsilon.$$

Sean A y B las matrices de tamaño $M \times N$ cuyas j-ésimas filas son a_j y b_j respectivamente, y sean a_{ij} y b_{ij} la (i, j) entrada de A,B respectivamente. Finalmente, sean $\{\varphi_i'\}_{i=1}^M$ y $\{\psi_i'\}_{i=1}^M$ las i-ésimas columnas de A y B respectivamente.

Entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{M}\|\varphi_i^{'}-\psi_i^{'}\|^2 &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}-b_{ij}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}-b_{ij}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N}\|a_j-b_j\|^2 \\
&\leq 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

Puesto que las filas de A forman una base ortonormal para W_1, entonces $\{\varphi_i^{'}\}_{i=1}^{M}$ es un marco Parseval isomorfo a $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$. Por lo tanto, existe un operador unitario $U : H_N \longrightarrow H_N$ con $U\varphi_i^{'} = \varphi_i$. Ahora, sea $\{\psi_i\}_{i=1}^{M} = \left\{U\psi_i^{'}\right\}_{i=1}^{M}$. Entonces

$$
\sum_{i=1}^{M}\|\varphi_i-\psi_i\|^2 = \sum_{i=1}^{M}\|U(\varphi_i^{'})-U(\psi_i^{'})\|^2 = \sum_{i=1}^{M}\|\varphi_i^{'}-\psi_i^{'}\|^2 \leq 2\epsilon.
$$

Finalmente, si T_1 es el operador de análisis para el marco Parseval $\{\psi_i\}_{i=1}^{M}$, entonces T_1 es una isometría, y puesto que $T_1\psi_i = Qe_i$ para todo $i = 1, \ldots, M$, si $\{Qe_i\}$ es de igual norma, entonces $\{T_1\psi_i\}_{i=1}^{M}$ también lo es y por lo tanto Ψ también. $\square$

5.3. Equivalencia entre los problemas

Ahora podemos mostrar que el Problema de Paulsen caso Parseval y el Problema de la Proyección son equivalentes en el sentido de que sus funciones $f(\epsilon, N, M)$ y $g(\epsilon, N, M)$, están relacionadas dentro de un factor de 2.

Teorema. 5.3.1 *Si $f(\epsilon, N, M)$ es la función para el problema de Paulsen y $g(\epsilon, N, M)$ es la función para el Problema de la Proyección, entonces*

$$g(\epsilon, N, M) \leq 4f(\epsilon, N, M) \leq 8g(\epsilon, N, M).$$

Demostración. Primero, se supone que el Problema de la Proyección se cumple con la función $g(\epsilon, N, M)$. Sea $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ un marco Parseval para H_N que satisface

$$(1-\epsilon)\frac{N}{M} \leq \|\varphi_i\|^2 \leq (1+\epsilon)\frac{N}{M}.$$

Sea T el operador análisis de Φ y sea P la proyección de H_M sobre $\operatorname{Im}(T)$, tal que $T\varphi_i = Pe_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, M$. Puesto que el Problema de la proyección se cumple, entonces existe una proyeción Q sobre H_M con diagonal constante tal que

$$\sum_{i=1}^{M} \|Pe_i - Qe_i\|^2 \leq g(\epsilon, N, M).$$

Por el teorema 5.2.4, existe un marco Parseval $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ para H_N con operador análisis T_1 tal que $T_1\psi_i = Qe_i$ y

$$\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i - \psi_i\|^2 \leq 2g(\epsilon, N, M).$$

Dado que T_1 es una isometría y $\{T_1\psi_i\}_{i=1}^M$ es de igual norma, se sigue que $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ es un marco Parseval de igual norma que satisface el problema de Paulsen.

Recíprocamente, asumamos que el Problema de Paulsen caso Parseval tiene solución con la función $f(\epsilon, N, M)$. Sea P una proyección ortogonal sobre H_M que satisface

$$(1-\epsilon)\frac{N}{M} \leq \|Pe_i\|^2 \leq (1+\epsilon)\frac{N}{M}.$$

Entonces $\{Pe_i\}_{i=1}^M$ es un marco Parseval para H_N y por el Problema de Paulsen (caso Parseval), existe un marco Parseval de igual norma $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ tal que

$$\sum_{i=1}^M \|\varphi_i - \psi_i\|^2 < f(\epsilon, N, M).$$

Sea T_1 el operador análisis de Ψ. Sea Q la proyección sobre $\mathrm{Im}\,(T_1)$, tenemos que $Qe_i = T_1\psi_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, M$. Por el teorema 5.2.1, tenemos que

$$\sum_{i=1}^M \|Pe_i - T_1\psi_i\|^2 = \sum_{i=1}^M \|Pe_i - Qe_i\|^2 \leq 4f(\epsilon, N, M).$$

Puesto que T_1 es una isometría y $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^M$ es de igual norma, entonces Q es una proyección de diagonal constante.

□

5.4. Problema de Paulsen generalizado

Definición. 5.4.1 *Una sucesión de números* $\{a_i\}_{i=1}^N$ *se dice una sucesión admisible Parseval para un espacio de Hilbert* H_M *si existe un marco Parseval* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ *para* H_M *que satisface* $\|\varphi_i\|^2 = a_i^2$*, para todo* $i = 1, ..., N$*.*

Teorema. 5.4.2 *Una sucesión de números* $\{a_i\}_{i=1}^N$ *es una sucesión admisible Parseval para un espacio de Hilbert* H_M *si y solo si las dos condiciones siguientes se satisfacen:*

(1) $\sum_{i=1}^{N} a_i^2 = M$

(2) $a_i \leq 1$*, para cada* $i = 1, ..., N$*.*

Problema (Problema de Paulsen Generalizado)

Sea $\{a_i\}_{i=1}^N$ una sucesión admisible Parseval para un espacio de Hilbert H_M. Si $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ es un marco Parseval para H_M que satisface lo siguiente:

$$(1-\epsilon)a_i^2 \leq \|\varphi_i\|^2 \leq (1+\epsilon)a_i^2$$

Encontrar el marco Parseval mas cercano $\Psi = \{g_i\}_{i=1}^N$ que satisface

$$\|g_i\| = a_i, \text{ para todo } i = 1, ..., N.$$

Problema (Problema de la proyección Generalizado)

Si P es una proyección ortogonal de rango M sobre $\ell_2(\mathbb{N})$, $\{a_i\}_{i=1}^N$ una sucesión de números que satisface el teorema 5.4.2 y

$$(1-\epsilon)a_i^2 \leq \|P_{e_i}\|^2 \leq (1+\epsilon)a_i^2$$

Encontrar la proyección Q mas cercana a P tal que $\|Q_{e_i}\| = a_i$, para todo $i = 1, ..., N$.

Teorema. 5.4.3 *El problema de Paulsen generalizado y el problema de la proyeccion generalizado son equivalentes en el sentido de que las funciones en cada uno de ellos se encuentran relacionas dentro de un factor de 2.*

Demostración. Mostremos que el problema de la proyección generalizado implica el problema de Paulsen Generalizado.

Supongamos que el problema de la proyección generalizado se cumple con la función $g(\epsilon, M, N)$, sean $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ un marco Parseval para H_M y $\{a_i\}_{i=1}^N$ una sucesión admisible Parseval tales que

$$(1-\epsilon)a_i^2 \leq \|\varphi_i\|^2 \leq (1+\epsilon)a_i^2$$

El teorema 4.4.4 garantiza la existencia de una proyección P de H_N sobre $Im(T)$ tal que $T\varphi_i = Pe_i$ para todo $i = 1, ..., N$, donde T es el operador de análisis de Φ Nótese que T es una isometría, por lo tanto

$$(1-\epsilon)a_i^2 \leq \|Pe_i\|^2 \leq (1+\epsilon)a_i^2$$

Ademas, $\{a_i\}_{i=1}^N$ es una sucesión admisible Parseval por hipótesis. Puesto que asumimos que el problema de la proyección generalizado se cumple, entonces existe una proyección Q sobre H_N tal que

(i) $\|Qe_i\| = a_i$, para todo $i = 1, ..., N$

(ii) $d(P, Q) \leq g(\epsilon, M, N)$

Ahora, consideremos el marco Parseval $\{Qe_i\}_{i=1}^N$. Por el teorema 5.4.2 existe un marco Parseval $\Psi = \{g_i\}_{i=1}^N$ tal que $T_1 g_i = Qe_i$ para todo $i = 1, ..., N$ y

$$\sum_{i=1}^N \|\varphi_i - g_i\|^2 \leq 2g(\epsilon, M, N)$$

donde T_1, el operador de análisis de Ψ, es una isometría, lo cual implica que $\|T_1 g_i\| = \|g_i\|$, y $\|T_1 g_i\| = \|Qe_i\| = a_i$

por lo tanto $\|g_i\| = a_i$, para todo $i = 1, ..., N$.

Ahora, mostremos el el problema de Paulsen generalizado implica el problema de la proyección Generalizado.

Supongamos que el problema problema de Paulsen generalizado se cumple con la función $f(\epsilon, M, N)$. Sean P una proyección ortogonal de rango M sobre $\ell_2(\mathbb{N})$ y $\{a_i\}_{i=1}^N$ una sucesión de números que satisface el teorema 5.4.2 y ademas

$$(1-\epsilon)a_i^2 \leq \|Pe_i\|^2 \leq (1+\epsilon)a_i^2$$

Consideremos el marco Parseval $\Phi = \{Pe_i\}_{i=1}^N$, en virtud del teorema de Naimark $\|Tf_i\| = \|Pe_i\|$, por lo tanto

$$(1-\epsilon)a_i^2 \leq \|f_i\|^2 \leq (1+\epsilon)a_i^2$$

Puesto que asumimos que el problema de Paulsen generalizado se cumple con la función $g(\epsilon, M, N)$, entonces existe un marco Parseval $\Psi = \{g_i\}_{i=1}^N$ que satisface $\|g_i\| = a_i$, para todo $i = 1, ..., N$, tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \|Pe_i - g_i\|^2 < f(\epsilon, M, N)$$

Definamos Q como la proyección ortogonal sobre $Im(T_1)$ tal que $T_1 g_i = Qe_i$, en virtud del teorema 5.2.1, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{N} \|Pe_i - T_1 g_i\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \|Pe_i - Qe_i\|^2 < 4\epsilon$$

Ademas, $\|Qe_i\| = \|T_1 g_i\| = \|g_i\| = a_i$.

□

Capítulo 6

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

6.1. Conclusiones

- Se obtuvieron resultados que relacionan la distancia entre proyecciones ortogonales P y Q de rango N sobre un espacio de Hilbert H_M y la distancia entre los rangos de los correspondientes operadores de análisis para marcos Parseval sobre H_N.
- Se demostró que el problema de Paulsen y el problema de la proyección son equivalentes, en el sentido de que las funciones $f(\epsilon, N, M)$ y $g(\epsilon, N, M)$ en el problema de Paulsen y el problema de la proyección respectivamente son iguales hasta un factor de dos.
- Se demostró la equivalencia entre dos generalizaciones para el problema de Paulsen y el problema de la proyección respectivamente.

6.2. Trabajos futuros

En el capítulo 5 de este trabajo se estudió la equivalencia entre una generalización para el problema de Paulsen y el problema de la proyección. Como trabajo futuro proponemos estudiar una generalización mas fuerte para el problema de Paulsen.

Definición. 6.2.1 *Si S es un operador positivo, autoadjunto e invertible sobre un espacio de Hilbert H_M, una sucesión de números $\{a_i\}_{i=1}^N$ se dice S-admisible si existe un marco $\{f_i\}_{i=1}^N$ para H_M cuyo operador marco es S y $\|f_i\| = a_i^2$, para todo $i = 1, ..., N$.*

La demostración de el siguiente teorema puede ser encontrada en [7]:

Teorema. 6.2.2 *Sea S un operador positivo, autoadjunto e invertible sobre un espacio de Hilbert N-dimensional H_N. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...\lambda_N > 0$. Las siguientes son equivalentes:*

(1) Existe un marco $\{\varphi_j\}_{j=1}^M$ para H_N con operador marco S y $\|\varphi_j\| = a_j$, para todo $j = 1, ..., M$.

(2) Para cada $1 \leq k \leq N$, se tiene que $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, y $\sum_{i=1}^{M} a_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$.

Problema Si S es un operador positivo, autoadjunto e invertible sobre H_M, $\{a_i\}_{i=1}^N$ es una sucesión S-admisible, y $\{f_i\}_{i=1}^N$ es un marco con operador marco S que satisface

$$(1 - \epsilon \; a_i \leq \|f_i\|^2 \leq (1 + \epsilon \; a_i$$

Entonces encontrar el marco $\{g_i\}_{i=1}^N$ mas cercano tal que $\|g_i\|^2 = a_i$, para todo $i = 1, ..., N$.

Bibliografía

[1] Bodmann, B. G., and Casazza, P. G. When are frames close to equal-norm parseval frames? In *Wavelets XIII* (2009), vol. 7446, International Society for Optics and Photonics, p. 744616.

[2] Bodmann, B. G., and Casazza, P. G. The road to equal-norm parseval frames. *Journal of Functional Analysis 258*, 2 (2010), 397–420.

[3] Cahill, J. *Frames and projections.* University of Missouri-Columbia, 2013.

[4] Cahill, J., and Casazza, P. G. The paulsen problem in operator theory. *submitted to Operators and Matrices* (2011).

[5] Casazza, P. G., Fickus, M., and Mixon, D. G. Auto-tuning unit norm frames. *Applied and Computational Harmonic Analysis 32*, 1 (2012), 1–15.

[6] Casazza, P. G., and Kutyniok, G. *Finite frames: Theory and applications.* Springer, 2012.

[7] Casazza, P. G., and Leon, M. Existence and construction of finite frames with a given frame operator. *Int. J. Pure Appl. Math 63*, 2 (2010), 149–157.

[8] Christensen, O., et al. *An introduction to frames and Riesz bases*, vol. 7. Springer, 2003.

[9] Conway, J. H., Hardin, R. H., and Sloane, N. J. Packing lines, planes, etc.: Packings in grassmannian spaces. *Experimental mathematics 5*, 2 (1996), 139–159.

[10] Daubechies, I., Grossmann, A., and Meyer, Y. Painless nonorthogonal expansions. *Journal of Mathematical Physics 27*, 5 (1986), 1271–1283.

[11] Duffin, R. J., and Schaeffer, A. C. A class of nonharmonic fourier series. *Transactions of the American Mathematical Society 72*, 2 (1952), 341–366.

[12] Hamilton, L., and Moitra, A. The paulsen problem made simple. *arXiv preprint arXiv:1809.04726* (2018).

[13] Holmes, R. B., and Paulsen, V. I. Optimal frames for erasures. *Linear Algebra and its Applications 377* (2004), 31–51.

[14] Kwok, T. C., Lau, L. C., Lee, Y. T., and Ramachandran, A. The paulsen problem, continuous operator scaling, and smoothed analysis. In *Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing* (2018), ACM, pp. 182–189.

EL PROBLEMA DE PAULSEN EN TEORÍA DE OPERADORES

William Rueda Prada
william.rueda@upr.edu
Departamento de Ciencias Matemáticas
Consejero: Juan Romero
Grado: Maestría en Ciencias
Fecha de Graduación: Diciembre 2018

La teoría de marcos en espacios de Hilbert tiene un gran impacto en algunos de los problemas más profundos en matemáticas puras y aplicadas, en particular, los marcos Parseval de igual norma resultan ser significativamente importantes en cuanto a sus aplicaciones; sin embargo, son una de las clases de marcos menos comprendidas hasta el momento. Debido a la dificultad para encontrar marcos Parseval de igual norma el problema de Paulsen no ha sido solucionado totalmente.

En esta investigación, estudiamos los aspectos fundamentales de la teoría de marcos en espacios de Hilbert de dimensión finita. Analizamos la relación entre la distancia cordal de dos subespacios y la distancia entre sus proyecciones ortogonales, así como la conexión entre la distancia de dos proyecciones y la distancia entre los correspondientes rangos de los operadores de análisis para marcos Parseval. Finalmente, analizamos la equivalencia entre el problema de Paulsen y un problema fundamental en teoría de operadores conocido como el problema de la proyección, además presentamos una prueba de la equivalencia entre dos generalizaciones de estos problemas.