

**SOLUCIONES PARA LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO
LINEAL CON COEFICIENTES VARIABLES:
EXISTENCIA DE SOLITONES Y SU DINÁMICA**

Por

José Manuel Escorcía Tafur

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS (APLICADA)

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2014

Aprobada por:

Paul Castillo, Ph.D.
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Karen Rios Soto, Ph.D.
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Erwin Suazo, Ph.D.
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Guillermo Serrano, Ph.D.
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Omar Colón, Ph.D.
Director del Departamento

Fecha

ABSTRACT

The study of non-linear Schrödinger (NLS) equation with time dependent coefficients (non-autonomous) is of increasing interest for the different applications in non-linear optics, Bose-Einstein condensates and water waves. In this master thesis we impose a balance between the time-dependent coefficients; they are part of a non-linear coupled Riccati system. We will use solutions of this Riccati system to study the dynamics of soliton solutions for the non-autonomous NLS, for this end we will use multiparameter solutions for this system proposed by Suslov and Suazo in 2009. As a contribution, in this thesis we present a modification of the method presented by Suslov in 2011 that allow us to construct global solutions. In particular, we are able to construct bright, dark and Peregrine type solitons for the non-autonomous NLS. Further, we are able to manipulate the parameters in order to produce solitons with bending. Finally, using a classical uniqueness result for the autonomous NLS in the space of functions $L_t^\infty L_x^q$, with $q = 2, \infty$, we prove uniqueness of the Cauchy initial value problem for the non-autonomous NLS.

RESUMEN

El estudio de la ecuación de Schrödinger no lineal (SNL) con coeficientes dependientes del tiempo (no autónomas) es de interés creciente para las diferentes aplicaciones en óptica no lineal, los condensados de Bose-Einstein y las ondas de agua. En esta tesis de maestría se impone un balance entre los coeficientes que dependen del tiempo; que son parte de un sistema de Riccati acoplado no lineal. Las soluciones de este sistema de Riccati se utilizarán para estudiar la dinámica de soluciones solitónicas para las ecuaciones SNL no autónomas, para tal fin, las soluciones con multiparámetros para el sistema que fue propuesto por Suslov y Suazo en el 2009 se aplicará. En esta tesis se presenta como contribución, una modificación del método introducido por Suslov en 2011. Esta modificación nos permite construir soluciones globales para la ecuación SNL autónoma. En particular, es posible construir solitones del tipo brillante, oscuros y Peregrino para las ecuaciones SNL no autónomas. Además, como se muestra en este trabajo, los parámetros pueden producir solitones con flexión. Por último, se usa un resultado clásico de unicidad para las ecuaciones SNL autónomas en el espacio de funciones $L_t^\infty L_x^q$, con $q = 2, \infty$, para probar la unicidad de las soluciones de un problema de Cauchy de valor inicial para la SNL no autónoma.

Copyright © 2014

por

José Manuel Escorcía Tafur

A mis padres: Trinidad y Damaso.

Por haberme apoyado siempre en mis decisiones, por brindarme su amor y comprensión en todo momento, pero sobre todo, por ser el pilar fundamental de mi vida... Los Amo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por darme fuerza y la fé suficiente para creer en mi en los momentos que sentia desfallecer.

A mis padres quienes siempre me impulsaron en la culminación de este proyecto.

A mi gran compañera de estudio y de la vida Jessica Paola Trespalacios Julio por sus certeros regaños y sabios consejos en aquellos instantes donde solía perder mi orientación.

Finalmente, a mi director de tesis el Dr. Erwin Suazo por permitirme hacer parte de su investigación y por su apoyo durante todo el proceso.

Índice general

	<u>Página</u>
RESUMEN EN INGLÉS	ii
RESUMEN EN ESPAÑOL	iii
AGRADECIMIENTOS	vi
Índice de figuras	x
1. INTRODUCCIÓN	1
2. CONCEPTOS Y TEORÍA PRELIMINAR	5
2.1. Solitones	5
2.1.1. Solitones brillantes y oscuros	6
2.2. La ecuación de Schrödinger no lineal	6
2.2.1. Breve deducción de la ecuación de Schrödinger no lineal desde la perspectiva de la óptica	8
2.2.2. Soluciones solitónicas para la ecuación de Schrödinger no lineal	10
2.3. Conceptos previos	14
3. SISTEMA DE RICCATI ACOPLADO Y TRANSFORMACIONES	19
3.1. Sistema de Riccati acoplado introducido por Cordero, López, Sua- zoz y Suslov [6]	19
3.2. La ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma propuesta por Suslov et al. (ver [5] y [7])	23
3.3. Sistema de Riccati acoplado y transformación al caso autónomo propuesto por Suslov	25
3.4. Construcción de soluciones solitónicas para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma	27
3.4.1. Multiparámetros y dinámica del solitón brillante para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma	27
3.4.2. Multiparámetros y dinámica del solitón oscuro para la ecua- ción de Schrödinger no lineal no autónoma	29
3.5. Método alternativo para resolver el sistema de Riccati acoplado	31
3.6. Unicidad de las soluciones clásicas para la ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes variables en $L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})$ con $q = 2, \infty$	36

4.	SOLUCIONES EXPLÍCITAS DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER NO LINEALES NO AUTÓNOMAS	39
4.1.	Dinámica de las soluciones para ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas: Soluciones globales	39
4.1.1.	Perturbaciones del solitón brillante: $b(t) = \text{sen}^2 t - \text{cos} t$, $c(t) = -\text{sen} t$	40
4.1.2.	Perturbaciones del solitón de Peregrine: $b(t) = t^2 - \frac{1}{2}$, $c(t) = -2t$	45
4.1.3.	Perturbaciones del solitón oscuro trasladado: $b(t) = 2 \tanh^2 t - 1$, $c(t) = -\tanh t$	48
4.1.4.	Sistema sin potencial cuadrático	50
4.2.	Soluciones locales para algunas ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas	56
4.2.1.	Traslaciones de un solitón brillante local: $b(t) = -\frac{1}{4}$, $c(t) = -\tan t$	56
4.2.2.	Singularidad en tiempo finito: $b(t) = e^t + 4e^{2t}$, $c(t) = -4e^t$	57
4.3.	Unicidad de dos problemas de Cauchy en el espacio $L_t^\infty L_x^q$ con $q = 2, \infty$	59
4.3.1.	Unicidad de una solución global	59
4.3.2.	Unicidad de una solución local	61
5.	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	63
5.1.	Conclusiones	63
5.2.	Discusión y trabajos futuros	65
	APÉNDICES	67
A.	VERIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE SCHRÖDINGER NO LINEALES NO AUTÓNOMAS	68
A.1.	Verificación de la solución (3.30)	68
A.2.	Verificación de la solución (3.32)	69
A.3.	Verificación de la solución (4.2), $d(t) = \text{sen} t$ y $h(t) = -3e^{3-3\text{cos} t}$	70
A.4.	Verificación de la solución (4.3), $d(t) = \frac{4t-\text{sen} t}{2}$ y $h(t) = -3e^{2t^2}$	71
A.5.	Verificación de la solución (4.4), $d(t) = \frac{t}{(t^2+1)(t^2+2)} - \frac{\text{sen} t}{2}$ y $h(t) = -\frac{3t^2+3}{t^2+2}$	72
A.6.	Verificación de la solución (4.6), $d(t) = \tanh t - t$ y $h(t) = -8 \cosh^2 t$	73
A.7.	Verificación de la solución (4.7), $d(t) = -(\tanh t \text{sech} 2t + t)$ y $h(t) = -\frac{2}{\tanh^2 t + 1}$	74
A.8.	Verificación de la solución (4.8), $d(t) = -(\text{sen} 2t + t)$ y $h(t) = -2e^{-2\text{sen}^2 t}$	75
A.9.	Verificación de la solución (4.10), $d(t) = \frac{\text{sen} t}{2}$ y $h(t) = \cosh t e^{1-\text{cos} t}$	76
A.10.	Verificación de la solución (4.11), $d(t) = -\frac{1}{2}(\text{sen} t \tanh(\text{cos} t) + \tanh t)$ y $h(t) = \cosh(\text{cos} t)$	77

A.11.	Verificación de la solución (4.13), $d(t) = 2t - 4 \tanh t$ y $h(t) = 2e^{2t^2} \operatorname{sech}^8 t$	78
A.12.	Verificación de la solución (4.14), $d(t) = 0$ y $h(t) = 2$	79
A.13.	Verificación de la solución (4.16).	80
A.14.	Verificación de la solución (4.18).	81

Índice de figuras

Figura	Índice de figuras	Página
2-1.	Visualización gráfica de las características principales de un solitón. . .	6
2-2.	Gráfica y contorno de un solitón brillante.	7
2-3.	Evolución del solitón brillante para la Ecuación (2.6) con parámetros $\beta = 1, \lambda = 3, v = -2$ e intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-10 \leq x \leq 10$. . .	11
2-4.	Solución de la Ecuación (2.7) correspondiente a $A = -1.8$ y $v = -4$ en los intervalos $-1 \leq t \leq 1$ y $-10 \leq x \leq 10$	11
2-5.	Vista tridimensional de la evolución del solitón oscuro para la Ecuación (2.8) con $A = 4$ e intervalos $-3 \leq t \leq 3$ y $-6 \leq x \leq 6$	12
2-6.	Comportamiento de la solución para la Ecuación (2.9) dado los valores $A = 1$ y $v = 2$ e intervalos $-5 \leq t \leq 5$ y $-10 \leq x \leq 10$	13
2-7.	Dinámica del solitón de Peregrine para la Ecuación (2.10) para $A = 1$.	15
3-1.	Aplicación de los multiparámetros $\delta(0), \kappa(0), \varepsilon(0)$ y $\gamma(0)$ en la dinámica de la solución de la Ecuación (3.29) para $t \in (0, 1]$ y $x \in [-40, 40]$.	30
3-2.	Aplicación de los multiparámetros $\delta(0), \kappa(0), \varepsilon(0)$ y $\gamma(0)$ en la dinámica de las soluciones de la Ecuación (3.31) para $t \in (0, 5]$ y $x \in [-15, 15]$	32
4-1.	Dinámica de las soluciones de la Ecuación (4.1) para $d(t) = \text{sen } t$ y $h(t) = -3e^{3-3 \cos t}$ en los intervalos $-30 \leq t \leq 30$ y $-10 \leq x \leq 10$. . .	42
4-2.	Soluciones de la Ecuación (4.1) para $d(t) = (4t - \text{sen } t)/2$ y $h(t) = -3e^{2t^2}$ con $-2 \leq t \leq 2$ y $-10 \leq x \leq 10$	43
4-3.	Vista tridimensional de las soluciones de la Ecuación (4.1) con $d(t) = t/(t^2 + 1)(t^2 + 2) - (\text{sen } t)/2$ y $h(t) = -(3t^2 + 3)/(t^2 + 2)$ en los intervalos $-30 \leq t \leq 30$ y $-10 \leq x \leq 10$	44
4-4.	Dinámica del solitón de Peregrine para la Ecuación (4.5) para $d(t) = \tanh t - t, h(t) = -8 \cosh^2 t, A = 0.5$ y $\kappa(0) = 0$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-25 \leq x \leq 25$	46
4-5.	Solución de la Ecuación (4.5) con $d(t) = -(\tanh t \text{sech } 2t + t), h(t) = -2/(\tanh^2 t + 1), A = 0.5$ y $\kappa(0) = 0$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-25 \leq x \leq 25$	47

4-6. Solución de la Ecuación (4.5) con $d(t) = -(\text{sen } 2t+t)$, $h(t) = -2e^{-2\text{sen}^2 t}$, $A = 0.5$ y $\kappa(0) = 0$ para los valores en $-10 \leq t \leq 10$ y $-25 \leq x \leq 25$.	49
4-7. Soluciones de la Ecuación (4.9) con $d(t) = (\text{sen } t)/2$ y $h(t) = \cosh t e^{1-\cos t}$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-200 \leq x \leq 200$.	51
4-8. Soluciones de la Ecuación (4.9) $d(t) = -(\text{sen } t \tanh(\cos t) + \tanh t)/2$ y $h(t) = \cosh(\cos t)$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-30 \leq x \leq 30$.	52
4-9. Soluciones de la Ecuación (4.12) $d(t) = 2t-4 \tanh t$ y $h(t) = 2e^{2t^2} \text{sech}^8 t$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-300 \leq x \leq 300$.	54
4-10. Soluciones de la Ecuación (4.12) $d(t) = 0$ y $h(t) = 2$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-10 \leq x \leq 10$.	55
4-11. Soluciones de la ecuación (4.15) en los intervalos $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y $-12 \leq x \leq 12$.	58
4-12. Soluciones de la Ecuación (4.17) en los intervalos $0 \leq t \leq \frac{\pi}{10}$ y $-12 \leq$ $x \leq 12$.	60

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas (con coeficientes que dependen del tiempo) surgen frecuentemente en la formulación de leyes fundamentales y el análisis matemático de una amplia variedad de problemas en mecánica cuántica [1], óptica no lineal [2], condensados de Bose-Einstein [3], física del plasma [4], entre otras aplicaciones. La versatilidad de este tipo de ecuaciones sienta sus bases en la importante característica que admiten soluciones con propiedades trascendentales como los solitones. Un solitón es una onda solitaria no lineal que tiene la capacidad de propagarse con forma y velocidad constante en medios no lineales (piense en una ola que preserva su forma sin desaparecer). Desde su primera observación hecha por el ingeniero hidrodinámico John Scott Russell los solitones, han generado diferentes perspectivas a un sinnúmero de problemas físicos.

Por otro lado, el carácter no lineal de estas ecuaciones y la dependencia en tiempo de sus coeficientes dificultan el estudio de las mismas mediante los métodos clásicos utilizados por ejemplo en el análisis de Fourier y análisis de la función de Green, por referenciar algunos. La principal razón para ello reside en la relación directa que existe entre muchos de los métodos y el llamado “principio de superposición lineal”, el cual establece que en cualquier sistema lineal toda combinación lineal finita de soluciones representa una solución para dicho sistema (es posible extender a sumas infinitas siempre que el requisito de la convergencia sea satisfecho); pero como es bien sabido para ecuaciones no lineales no es posible superponer las soluciones de esta manera.

En el presente trabajo se estudia un tipo general de ecuación de Schrödinger no lineal con potencial cuadrático introducido por Suslov et al.:

$$i\psi_t = -a(t)\psi_{xx} + b(t)x^2\psi - ic(t)x\psi_x - id(t)\psi - f(t)x\psi + ig(t)\psi_x + h(t)|\psi|^2\psi, \quad (1.1)$$

donde $a(t), b(t), c(t), d(t), f(t), g(t)$ y $h(t)$ son funciones reales dadas, ver ([5], [6], [7], [8]). El prototipo de ecuaciones (1.1) ya han surgido en problemas referentes al estudio de campos magnéticos uniformes [6], puntos cuánticos [1] (denominados átomos artificiales) y fenómenos de Bose-Einstein [3]. El estudio del caso lineal de la ecuación de Schrödinger anterior ($h(t) = 0$), ha sido fuente de investigación por Suslov et al. en [6]. En [6] los autores construyen la solución fundamental para la Ecuación (1.1) ($h(t) = 0$) y así logran dar solución al problema de Cauchy asociado mediante el uso del principio de superposición. Para llevar a cabo la construcción de esta solución los autores sujetan el problema a la resolución de un sistema de ecuaciones que denominan como sistema de Riccati, el cual consiste de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales con coeficientes variables encabezado por la reconocida ecuación de Riccati.

El interés de esta tesis consiste en estudiar la dinámica de las soluciones para ecuaciones de Schrödinger del tipo (1.1), concentrando todo el esfuerzo principalmente en la construcción de soluciones solitónicas. En efecto, a través del trabajo hecho por Suslov en [5], donde establece un método para transformar la ecuación de Schrödinger (1.1) en la ecuación de Schrödinger no lineal estándar (autónoma), se construye en esta tesis soluciones solitónicas no autónomas (con amplitud y velocidad variando en tiempo) para la Ecuación (1.1) utilizando las soluciones clásicas tipo solitón de la ecuación de Schrödinger no lineal autónoma. La conexión establecida entre ambas ecuaciones tiene como ente regulador el sistema de Riccati utilizado en [6] y la familia de multiparámetros introducidos por Suslov y Suazo en su estudio acerca de ecuaciones de difusión y ecuaciones dispersivas, ver [9], por lo que se dificulta la

obtención de estas ejemplares soluciones.

La transformación propuesta por Suslov permite determinar condiciones adecuadas en los coeficientes de la Ecuación (1.1) que posibiliten la extensión de un resultado clásico de unicidad de las soluciones para la ecuación de Schrödinger no lineal estándar hacia un tipo particular de la Ecuación (1.1).

A continuación se presenta la organización de esta tesis. El Capítulo 2 está constituido por parte de la teoría preliminar, iniciando en primera instancia con una breve descripción del concepto de solitón y algunas de sus clasificaciones. Se introduce la ecuación de Schrödinger no lineal estándar; una deducción física desde el punto de vista de la óptica [10], junto a la exposición de algunas soluciones solitónicas. Finalmente, definiciones previas son dadas para la formulación del resultado de unicidad para las soluciones clásicas de la ecuación de Schrödinger no lineal.

El Capítulo 3 tiene como fin principal el estudio de un tipo de ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes que dependen del tiempo (no autónoma). El método (transformaciones) utilizado para ello es el propuesto por Suslov en [5], el cual permite la construcción de soluciones para ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas a partir de las soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal estándar. En este contexto, dos nuevas soluciones solitónicas no autónomas tipo solitón brillante y oscuro con flexiones hacia izquierda y derecha en su eje central, son construidas bajo la dinámica de los multiparámetros inmersos en la transformación, (ver Sección 3.4). Cabe resaltar que la dinámica de dicho método es regulada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales conocido en la literatura como sistema de Riccati. Finalmente, se propone un enfoque alternativo constituido por una transformación particular la cual establece una relación directa entre los dos tipos de ecuaciones de Schrödinger antes mencionados (Lema 2). La relación obtenida da pie a garantizar la unicidad de las soluciones de un problema de Cauchy para ciertas ecuaciones de Schrödinger no autónomas (Proposición 2).

En lo que concierne al Capítulo 4, se exhiben diversas aplicaciones correspondientes al enfoque alternativo y la Proposición 2 presentada en el Capítulo 3; se observa la dinámica de soluciones solitónicas de índole brillante, oscuro y Peregrine para distintos valores de dos de los coeficientes ($d(t)$ y $h(t)$) de la Ecuación (1.1), ver Secciones 4.1 y 4.2. Adicionalmente, la unicidad de las soluciones de dos problemas de Cauchy surge como consecuencia de la Proposición 2 (consultar Sección 4.3). Finalmente, las conclusiones y las discusiones de los posibles trabajos futuros pueden ser encontradas en el Capítulo 5.

En el correspondiente Apéndice de esta tesis el lector podrá encontrar las respectivas verificaciones, usando el Sistema de Álgebra Computacional Mathematica, de las soluciones construidas para las ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas (ver Apéndice A).

Capítulo 2

CONCEPTOS Y TEORÍA PRELIMINAR

El eje central de este capítulo es presentar de manera concisa las pertinentes bases teóricas y conceptos esenciales que permitan al lector tener una buena comprensión del trabajo que se desarrollará en los capítulos posteriores.

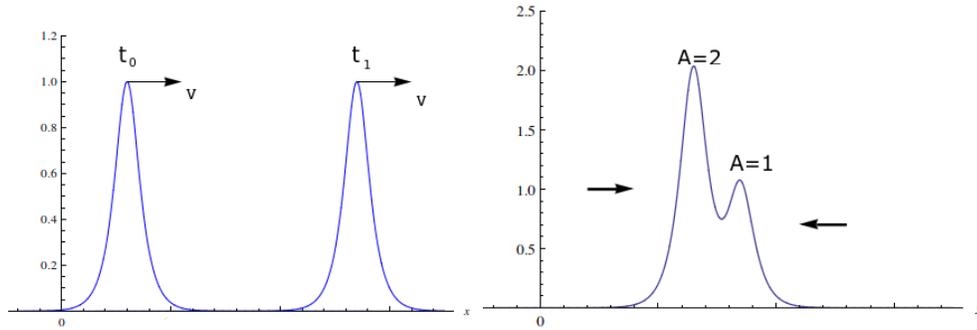
2.1. Solitones

Un solitón es una onda solitaria no lineal con propiedades excepcionales de estabilidad, la cual surge de un sólido balance entre la dispersión y no linealidad. Ésta tiene la propiedad de propagarse y preservar asintóticamente su forma y velocidad en interacciones no lineales con otras ondas solitarias o con otras perturbaciones localizadas (ver Figura 2-1). Desde su primera observación en 1834 por el ingeniero hidrodinámico John Scott Russell, éstas ondas tienen fascinado a los científicos por sus espectaculares propiedades experimentales y las elegantes teorías matemáticas originadas [11].

Este tipo de ondas determinan una herramienta esencial para describir fenómenos como la propagación de ondas hidrodinámicas, propagación de señales en fibras ópticas y la dinámica de moléculas biológicas tales como el ADN y proteínas; entre otras aplicaciones [11].

Un hecho que explica el gran interés por los solitones en física es la propiedad que tienen éstos de surgir espontáneamente en un sistema físico en el cual la energía es alimentada, como por ejemplo energía térmica o por una excitación con una onda electromagnética, incluso si la excitación no coincide exactamente con la solución

solitón. En consecuencia, si un sistema posee las propiedades necesarias para la existencia de solitones, es muy probable que cualquier gran excitación conduzca a su formación [11].



(a) Dos instantes t_0 y t_1 de un pulso solitónico que se mueve con velocidad v . (b) Momento de colisión entre dos solitones de diferentes amplitudes.

Figura 2–1: Visualización gráfica de las características principales de un solitón.

2.1.1. Solitones brillantes y oscuros

Dentro de los tipos de solitones que surgen frecuentemente en muchos problemas físicos, se encuentran los denominados solitón brillante y solitón oscuro. Los solitones brillantes (resp. oscuros) son el resultado de un exceso (defecto) en la densidad del medio, son muy robustos por que resultan del “tira” y “afloja” de dos efectos opuestos, la dispersión y la no linealidad [12] (ver parte (a) y (c) de la Figura 2–2). Para mostrar el por qué de los términos brillantes y oscuros utilizados para éstos, el lector puede referirse a las partes (b) (franja brillante) y (d) (franja oscura) de la Figura 2–2 donde se expone el contorno de las respectivas versiones tridimensionales de los solitones dados en la parte izquierda de la misma.

2.2. La ecuación de Schrödinger no lineal

La ecuación de Schrödinger no lineal unidimensional está dada de la siguiente forma:

$$iu_t + \beta u_{xx} + \lambda u|u|^2 = 0. \quad (2.1)$$

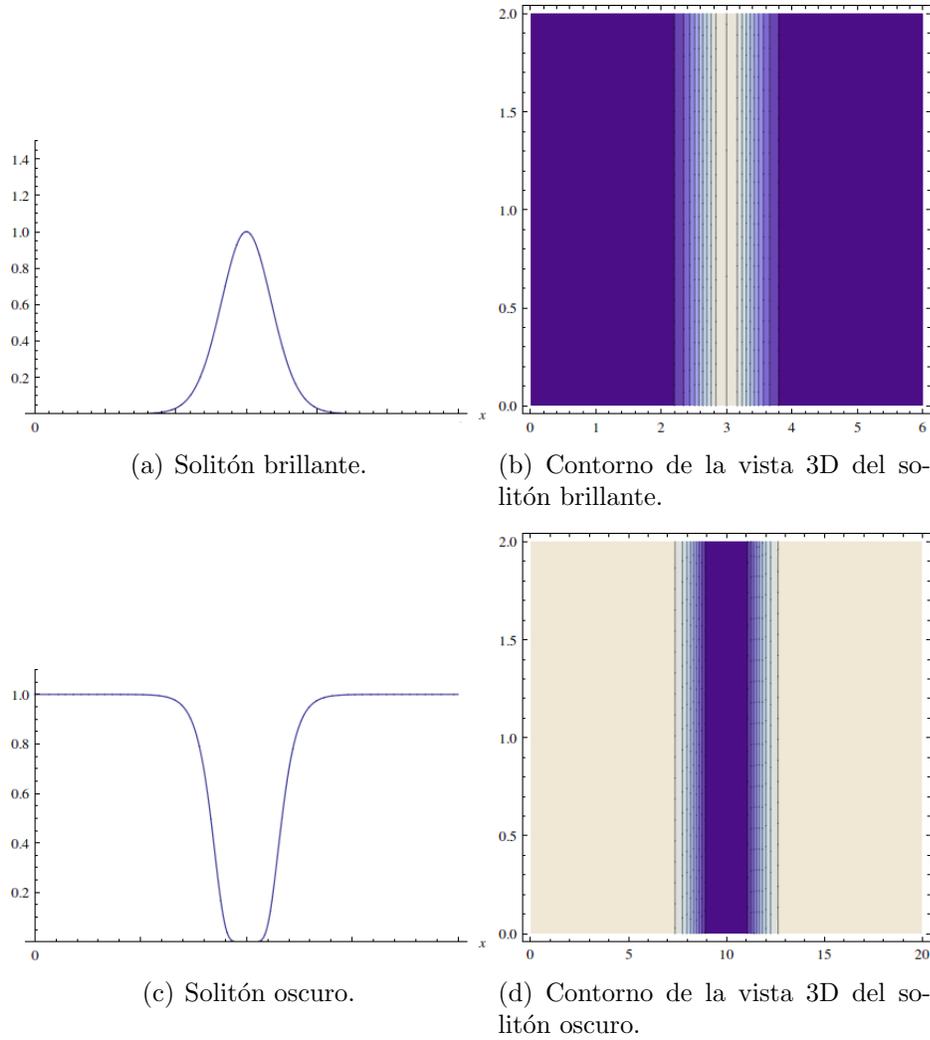


Figura 2-2: Gráfica y contorno de un solitón brillante.

Aquí $u(t, x)$ es un campo escalar complejo, $t, x \in \mathbb{R}$ determinan el tiempo y espacio respectivamente, $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias, i es la unidad imaginaria con la propiedad $i^2 = -1$ y los subíndices denotan derivadas parciales. Su nombre es debido a su similar apariencia con la bien conocida ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica. La Ecuación (2.1) aparece como herramienta fundamental en la descripción de muchos fenómenos físicos como condensados de Bose-Einstein ([11], [13]), ondas de agua [14], óptica no lineal ([15], [16]) y física del plasma [17], entre otros.

Se plantea a continuación una breve derivación de la Ecuación (2.1) en términos del estudio de la óptica no lineal, en este caso la ecuación que resulta de dicha deducción

corresponde a los valores $\beta = \frac{1}{2}$ y $\lambda = 1$.

2.2.1. Breve deducción de la ecuación de Schrödinger no lineal desde la perspectiva de la óptica

La ecuación básica que gobierna la propagación de pulsos en una fibra óptica es conocida como la ecuación de Schrödinger no lineal, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$-i \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u. \quad (2.2)$$

Aquí z es la distancia a lo largo de la dirección de propagación y t el tiempo. La cantidad compleja $u(z, t)$, da la forma temporal del pulso cuando es vista por un observador en la localización z . La magnitud absoluta de u que aparece en la Ecuación (2.2), representa la envolvente de la amplitud del pulso [10].

En lo que sigue se presenta una breve deducción de la Ecuación (2.2). Si el lector esta interesado en conocer más detalles sobre la misma, puede consultar la referencia [10].

Considérese la propagación de ondas de luz a través de una fibra óptica que tiene tanto dispersión de velocidad de grupo e índice de no linealidad. Asíumase que las ondas de luz están representadas por la función escalar $U(z, t)$ proporcional a la amplitud del campo complejo, por lo que la potencia P está dada por:

$$P = P_c |U|^2,$$

donde la constante P_c puede ser considerada como una unidad de potencia. Para frecuencias cercanas a una frecuencia central w_0 , la relación de dispersión genérica $k(w) = nw/c$ donde n es el índice de refracción, puede ser expandida de la siguiente forma (relación de dispersión):

$$k(w) = k_0 + k'(w - w_0) + \frac{1}{2} k''(w - w_0)^2 + k_{NL} P, \quad (2.3)$$

aquí las primas indican derivación parcial con respecto a w y k_{NL} es dado por:

$$k_{NL} = \frac{2\pi n_2}{\lambda A_{effect}},$$

donde n_2 es visto como media de todos los posibles estados de polarización, λ es la longitud de onda y A_{effect} es el área central efectiva de la fibra, es decir, el área que produce la intensidad media apropiada cuando la potencia del pulso se divide por éste. La Expresión (2.3) describe adecuadamente la propagación de ondas monocromáticas $U(z, t) = u_0 \exp(ikz - iwt)$ siempre que la frecuencia no se aleje demasiado de w_0 . Ahora, definiendo

$$u(z, t) \equiv U(z, t)e^{i(w_0t - k_0z)} = u_0 e^{i[(k - k_0)z - (w - w_0)t]}, \quad (2.4)$$

entonces la ecuación de onda para u que es necesaria y suficiente para reproducir exactamente la relación de dispersión inicial (Expresión (2.3)) es:

$$-i \frac{\partial u}{\partial z} = ik' \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} k'' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_{NL} P_c |u|^2 u. \quad (2.5)$$

Ésta puede ser verificada insertando la Ecuación (2.4) en la Ecuación (2.5). Finalmente, para obtener la Ecuación (2.2) se introducen las nuevas variables

$$t' = (t - k'z)/t_c,$$

$$z' = z/z_c,$$

donde los valores t_c , z_c y P_c satisfacen las relaciones:

$$t_c^2/z_c = -k'',$$

$$z_c P_c = 1/k_{NL}.$$

En términos de estas nuevas variables, la ecuación resultante (después de omitir las primas sobre z y t) es la ecuación de Schrödinger dada en (2.2).

2.2.2. Soluciones solitónicas para la ecuación de Schrödinger no lineal

La importancia de la ecuación de Schrödinger radica en gran medida en que ésta admite soluciones tipo solitón [18]. Las propiedades de las soluciones de la ecuación de Schrödinger dependen del signo del producto $\beta\lambda$. Si $\beta\lambda > 0$ las soluciones son de tipo **solitón brillante**. El pulso brillante surge cuando $|u|^2$ crece desde un valor finito al infinito y próximamente retorna al mismo valor. Si $\beta\lambda < 0$ la solución es de tipo expansiva, en el cual $|u|^2$ decrece desde un valor finito al infinito y después retorna al mismo estado. Estas soluciones son de tipo **solitón oscuro** [17].

En los siguientes ejemplos se muestran expresiones explícitas para los tipos de soluciones para la ecuación de Schrödinger no lineal con las propiedades antes descritas.

Ejemplo 1 (Solitón brillante). *La ecuación de Schrödinger no lineal*

$$iu_t + \beta u_{xx} + \lambda |u|^2 u = 0, \quad \text{con } \beta\lambda > 0, \quad (2.6)$$

admite una solución solitónica de la forma (ver [17])

$$u(t, x) = \sqrt{-\frac{2v}{\lambda}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{-\frac{v}{\beta}} x \right) \exp(-ivt),$$

donde v es un parámetro constante. La correspondiente gráfica de esta solución es dada en la Figura 2-3.

Ejemplo 2 (Traslación del pulso brillante). *La ecuación de Schrödinger*

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

posee la solución (ver [13]):

$$u(t, x) = A \exp \left[i \left(\frac{v}{2} x + \frac{2A^2 - v^2}{4} t \right) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{A}{\sqrt{2}} (x - vt) \right], \quad A, v \in \mathbb{R}.$$

La solución aquí mostrada corresponde a una traslación del pulso brillante por el factor vt para cada momento t fijo. La Figura 2-4 describe su evolución en el tiempo.

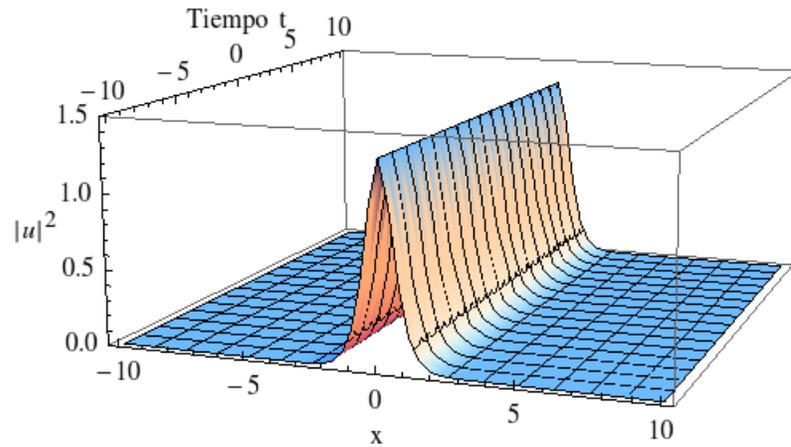


Figura 2-3: Evolución del solitón brillante para la Ecuación (2.6) con parámetros $\beta = 1$, $\lambda = 3$, $v = -2$ e intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-10 \leq x \leq 10$.

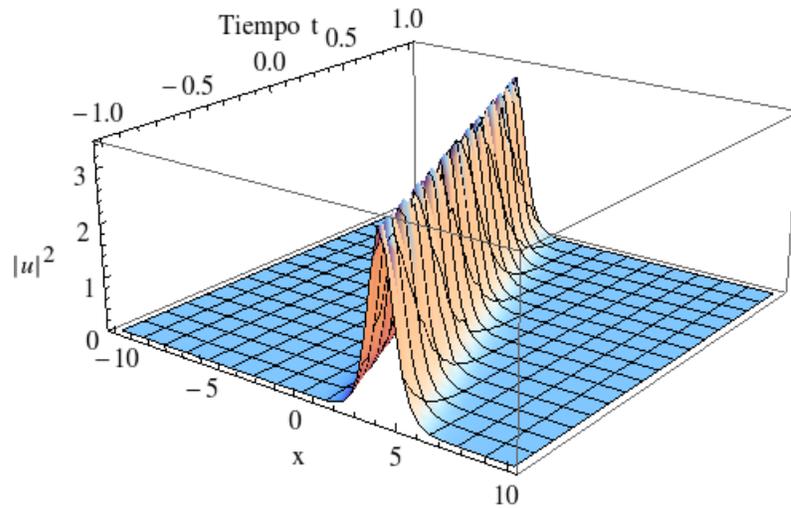


Figura 2-4: Solución de la Ecuación (2.7) correspondiente a $A = -1.8$ y $v = -4$ en los intervalos $-1 \leq t \leq 1$ y $-10 \leq x \leq 10$.

Ejemplo 3 (Solitón oscuro). *La ecuación de Schrödinger no lineal*

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} - 2|u|^2u = 0, \quad (2.8)$$

aparece también como el límite unidimensional del problema tridimensional de un condensado confinado en una trampa parabólica cilíndrica simétrica, en el cual la interacción entre átomos es repulsiva. Dicha ecuación presenta soluciones de la forma

(puede ver [11]):

$$u(t, x) = A \tanh \left(A\sqrt{2}x \right) \exp(-2iA^2t), \quad A \in \mathbb{R},$$

donde A determina la amplitud del solitón oscuro. Puede ver Figura 2-5 para su descripción gráfica.

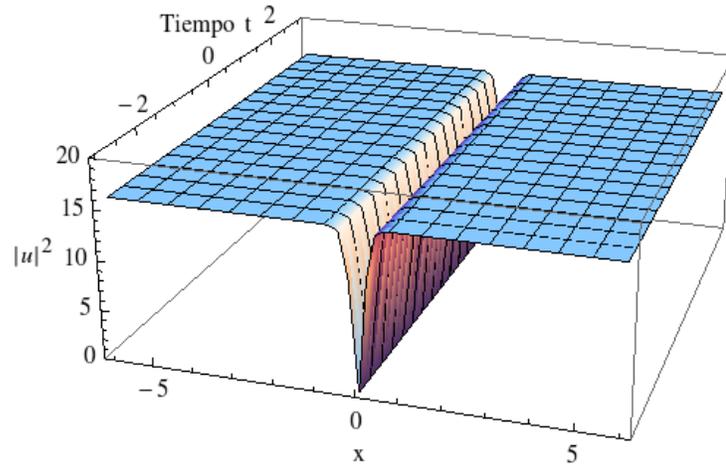


Figura 2-5: Vista tridimensional de la evolución del solitón oscuro para la Ecuación (2.8) con $A = 4$ e intervalos $-3 \leq t \leq 3$ y $-6 \leq x \leq 6$.

Ejemplo 4 (Traslación del solitón oscuro). *Considérese la ecuación de Schrödinger cúbica (con no linealidad $|u|^2u$),*

$$iu_t + u_{xx} - |u|^2u = 0. \quad (2.9)$$

En este caso la solución corresponde a un solitón oscuro el cual presenta traslaciones en cada instante del tiempo, éste mismo puede ser escrito en la forma general (consultar [13]):

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v - 2iA \tanh A(x - vt)] \exp \left(-\frac{i}{2} [v^2 + 4A^2] t \right),$$

donde los parámetros A y v corresponden a la amplitud y velocidad del solitón, respectivamente. La dinámica de esta solución es presentada en la Figura 2-6.

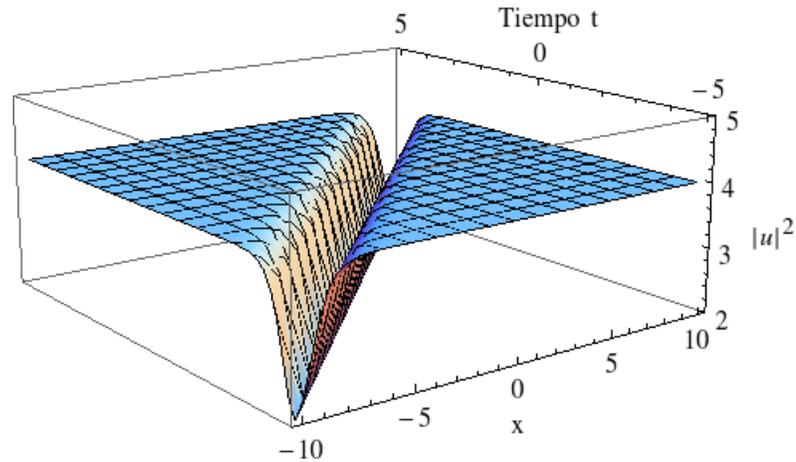


Figura 2-6: Comportamiento de la solución para la Ecuación (2.9) dado los valores $A = 1$ y $v = 2$ e intervalos $-5 \leq t \leq 5$ y $-10 \leq x \leq 10$.

Para finalizar esta parte, se presenta un nuevo tipo de solución para la ecuación de Schrödinger (2.1). En el año 1983 Howell Peregrine investigador en el departamento de matemáticas de la Universidad de Bristol, propuso una nueva solución analítica para la ecuación de Schrödinger no lineal autónoma la cual fué llamada **solitón de Peregrine** en su honor. Contrario al clásico solitón que puede mantener su perfil sin cambios durante la propagación, el solitón de Peregrine presenta una doble localización espacio-temporal. Su principal característica es que después de una leve oscilación en su fondo continuo, éste desarrolla un aumento progresivo de su amplitud y un estrechamiento de su duración temporal. En el punto de máxima compresión la amplitud es 3 veces el nivel del fondo continuo (si se considera la intensidad, ya que es relevante en la óptica, hay un factor de 9 entre la intensidad del pico y el fondo circundante) (ver Figura 2-7). Después de este punto de máxima compresión, disminuye la amplitud de la onda hasta que finalmente desaparece. Estas características del solitón de Peregrine lo convierten en una atractiva hipótesis para explicar la formación de esas ondas que tienen una alta amplitud y pueden aparecer de la nada y desaparecen sin dejar rastro alguno [19].

Ejemplo 5 (Solitón de Peregrine). *La ecuación de Schrödinger no lineal*

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

admite soluciones tipo racionales las cuales pueden ser compactadas en la fórmula a seguir (consultar [20]):

$$u(t, x) = A \exp(2iA^2t) \left(\frac{3 + 16iA^2t - 16A^4t^2 - 4A^2x^2}{1 + 16A^4t^2 + 4A^2x^2} \right), \quad A \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

En la Figura 2–7 se muestra la doble localización de este tipo de ondas, ver parte (a) y (b); mientras que una visualización tridimensional de estas mismas tiene lugar en (c).

2.3. Conceptos previos

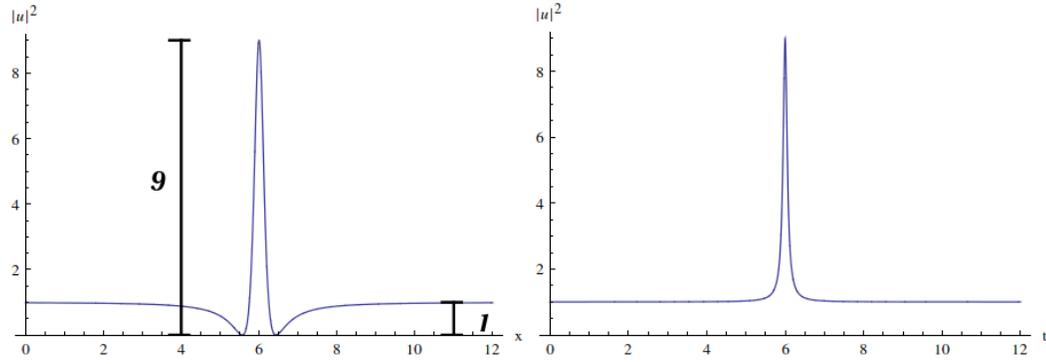
En la sección anterior se mostraron soluciones explícitas tipo solitones para la ecuación de Schrödinger no lineal (2.1). En lo que concierne a esta parte surge el siguiente interrogante: ¿Bajo qué condiciones es posible establecer la unicidad de las soluciones clásicas para la ecuación de Schrödinger no lineal?. Para dar respuesta a esta pregunta se hace necesario recordar al lector las siguientes definiciones. Los ejemplos aquí mostrados serán de gran utilidad para la Sección 3.6.

Definición 1 (Espacios L^p , [21]). *Considere el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}, m)$ donde \mathfrak{B} es la σ -álgebra de Borel y m la medida de Lebesgue. Si $1 \leq p < \infty$, entonces se define el espacio*

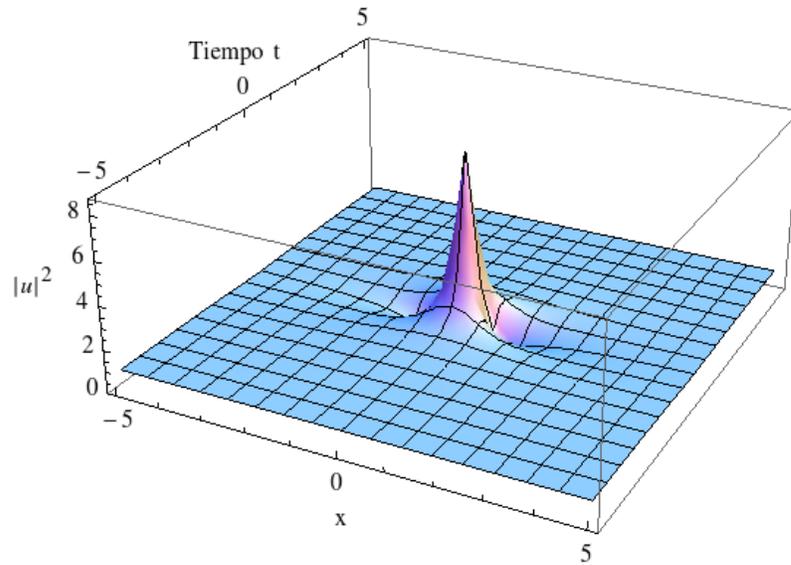
$$L_x^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es Lebesgue-medible y } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Dicho espacio es dotado de la norma

$$\|f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n)} := \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$



(a) Perfil espacial del solitón de Peregrine en el punto de máxima compresión, $t = 0$. (b) Perfil temporal del solitón de Peregrine en el punto de máxima compresión, $x = 0$.



(c) Evolución de la Solución para $A = 1$, $v = 0.1$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 2-7: Dinámica del solitón de Peregrine para la Ecuación (2.10) para $A = 1$.

Es posible extender la anterior definición al caso $p = \infty$, de la siguiente manera, considere el conjunto

$$S := \{a \in \mathbb{R}^+ : m(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) = 0\},$$

en estos términos se define el espacio

$$L_x^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es Lebesgue-medible y } \inf(S) < \infty\},$$

dotado de forma natural con la siguiente norma

$$\|f\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}^n)} := \inf(S).$$

Ejemplo 6. Para cualquier par de números a, b con $a > 0$, se tiene que $\operatorname{sech}(ax+b) \in L_x^2(\mathbb{R})$ y tiene norma $\|\operatorname{sech}(ax+b)\|_{L_x^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{2}{a}}$. En efecto: Como primera medida, la continuidad de ésta garantiza el hecho de ser medible en el sentido de Lebesgue. Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\operatorname{sech}(ax+b)\|_{L_x^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{sech}(ax+b)|^2 dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2 y dy, \quad y = ax+b, \\ &= \frac{1}{a} \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \operatorname{sech}^2 y dy \\ &= \frac{2}{a} \lim_{z \rightarrow \infty} \tanh z = \frac{2}{a}, \end{aligned}$$

por lo tanto al tomar la raíz cuadrada se obtiene lo deseado.

Ejemplo 7. Las siguientes condiciones se satisfacen:

$$\|\operatorname{sech}(ax+b)\|_{L_x^\infty(\mathbb{R})} = 1, \quad \|\sqrt{\cos t}\|_{L_t^\infty([-\pi/2, \pi/2])} = 1,$$

$$\|e^{\frac{3}{2}(\cos t - 1)}\|_{L_t^\infty(\mathbb{R})} = 1.$$

Las condiciones anteriores surgen como consecuencia directa de que toda función continua y acotada en su dominio tiene como supremo esencial el máximo de su valor absoluto.

Definición 2 (Espacios L^p mixtos, [22]). Sea I un intervalo en \mathbb{R} y $1 \leq p, q \leq \infty$.

Se define el espacio

$$L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^n) := \{u : I \longrightarrow L_x^q(\mathbb{R}^n) : u \in L_t^p(I)\}, \quad n \geq 1,$$

dotado con la norma

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q(I \times \mathbb{R}^n)} := \|\|u(t)\|_{L_x^q(\mathbb{R}^n)}\|_{L_t^p(I)}.$$

El siguiente resultado da respuesta al interrogante planteado al inicio de esta sección, es decir, se determinan condiciones para garantizar la unicidad de las soluciones clásicas de un problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger no lineal (para cualquier dimensión del espacio). La prueba puede ser consultada en la referencia [22].

Proposición 1. [22] *Sea I un intervalo de tiempo que contiene a t_0 y sean $u_1, u_2 \in C_{t,x}^2(I \times \mathbb{R}^n)$ dos soluciones clásicas del problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} iu_t + \Delta u - \lambda|u|^p u &= 0, & \lambda \in \mathbb{R}, \quad p > 0, \\ u(t_0, x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Asuma también que $u_1, u_2 \in L_t^\infty L_x^q(I \times \mathbb{R}^n)$ para $q = 2, \infty$. Entonces $u_1 = u_2$.

Cabe resaltar que el resultado anterior no garantiza la existencia de tales soluciones, sin embargo presenta un criterio para la unicidad de las mismas siempre que las soluciones hayan podido ser obtenidas previamente por algún método particular.

Ejemplo 8 (Unicidad del solitón brillante). *Considere el siguiente problema de valor inicial para la ecuación dada en el Ejemplo 1 con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [-T, T]$ para todo $T > 0$:*

$$iu_t + \beta u + \lambda|u|^2 u = 0, \quad \lambda\beta > 0, \quad v < 0, \quad (2.11)$$

$$u(0, x) = \sqrt{-\frac{2v}{\lambda}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{-\frac{v}{\beta}} x\right). \quad (2.12)$$

Como se puede ver, se ha considerado el problema de Cauchy que surge de manera natural de la solución dada en el Ejemplo 1, por lo tanto, tal problema admite la solución explícita:

$$u(t, x) = \sqrt{-\frac{2v}{\lambda}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{-\frac{v}{\beta}} x\right) \exp(-ivt),$$

la cual satisface que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})} &= \sqrt{-\frac{2v}{\lambda}} \|\operatorname{sech}(\sqrt{-v/\beta}x)\|_{L_x^q(\mathbb{R})} \|1\|_{L_t^\infty([-T, T])} \\
&= \sqrt{-\frac{2v}{\lambda}} \|\operatorname{sech}(\sqrt{-v/\beta}x)\|_{L_x^q(\mathbb{R})} \\
&= \begin{cases} 2\sqrt[4]{-\frac{v\beta}{\lambda^2}}, & \text{si } q = 2, \\ \sqrt{-\frac{2v}{\lambda}}, & \text{si } q = \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Como consecuencia de la Proposición 1 se tiene que la función $u(t, x)$ dada como antes es la única solución al problema de Cauchy (2.11)-(2.12) en el espacio $L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})$ con $q = 2, \infty$. Note que la norma mixta anterior no depende del valor de T , por lo que el solitón brillante es a ciencia cierta una solución global para el problema de Cauchy.

Este ejemplo será de gran importancia para la Sección 4.3 donde se estudia la unicidad de las soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma (1.1).

Capítulo 3

SISTEMA DE RICCATI ACOPLADO Y TRANSFORMACIONES

El objetivo de este capítulo radica en presentar el sistema de Riccati como herramienta esencial frente al estudio de propiedades y construcción de soluciones explícitas para un tipo de ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes variables. El método utilizado para llevar a cabo el pertinente estudio, consiste en emplear la transformación entre la ecuación de Schrödinger no lineal estándar y la ecuación de Schrödinger a estudiar, dada por Suslov en su trabajo frente al estudio de la integrabilidad de este tipo de ecuaciones, ver [5]. Cabe resaltar que la dinámica de esta transformación es regulada por el sistema de Riccati.

3.1. Sistema de Riccati acoplado introducido por Cordero, López, Suazo y Suslov [6]

El sistema de Riccati acoplado que se usará (ver referencias adicionales: [5] y [9]) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales con coeficientes variables, encabezado por una conocida ecuación de Riccati, ver Ecuación (3.1). A continuación se describe la estructura de dicho sistema, en donde se ha introducido el parámetro adicional $l_0 = \pm 1$, con el fin de abarcar muchos de los modelos de ecuaciones de Schrödinger no lineales autónomos que aparecen en la literatura, ver Ecuación (3.26):

$$\frac{d\alpha}{dt} + b(t) + 2c(t)\alpha + 4a(t)\alpha^2 = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\beta}{dt} + (c(t) + 4a(t)\alpha(t))\beta = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + l_0 a(t) \beta^2(t) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\delta}{dt} + (c(t) + 4a(t)\alpha(t))\delta = f(t) + 2\alpha(t)g(t), \quad (3.4)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (g(t) - 2a(t)\delta(t))\beta(t), \quad (3.5)$$

$$\frac{d\kappa}{dt} = g(t)\delta(t) - a(t)\delta^2(t), \quad (3.6)$$

donde los coeficientes $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ y $g(t)$ representan funciones de valor real. En primera instancia, resolver el sistema de Ecuaciones (3.1)-(3.6) podría acarrear una labor difícil de conseguir, a causa de la no linealidad de la Ecuación (3.1). La construcción de la solución general para ecuaciones de Riccati requiere en muchos casos el conocimiento previo de una solución particular de la misma, este primer paso no siempre puede ser dado, debido a la no existencia de un método general que permita obtener dicha solución particular.

Frente a este inconveniente Suslov et al. introducen la sustitución estándar

$$\alpha = \frac{1}{4a(t)} \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} - \frac{d(t)}{2a(t)}, \quad (3.7)$$

la cual junto a la Ecuación (3.1) conllevan a la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\mu'' - \tau(t)\mu' + 4\sigma(t)\mu = 0, \quad (3.8)$$

donde

$$\tau(t) = \frac{a'}{a} - 2c + 4d, \quad \sigma(t) = ab - cd + d^2 + \frac{d}{2} \left(\frac{a'}{a} - \frac{d'}{d} \right), \quad (3.9)$$

de hecho, de la sustitución de la Ecuación (3.7) se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} \mu'' &= (4a'\alpha + 4a\alpha' + 2d')\mu + (4a\alpha + 2d)^2\mu \\ &= \left(\alpha(4a' + 16ad) + 4a\alpha' + 16a^2\alpha^2 + 2d' + 4d^2 \right) \mu \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\tau(t)\mu' &= \left(2c - 4d - \frac{a'}{a}\right) (4a\alpha + 2d) \mu \\ &= \left(\alpha(8ac - 16ad - 4a') + 4cd - 8d^2 - \frac{2a'd}{a}\right) \mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mu'' - \tau(t)\mu' + 4\sigma(t)\mu = 4a(\alpha' + 2c\alpha + 4a\alpha^2 + b)\mu = 0,$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el hecho que α satisface la ecuación de Riccati (3.1). La Ecuación (3.8) y su solución, son denominadas la ecuación característica y función característica del sistema de Riccati, respectivamente. La importancia de la función característica radica en permitir dar fórmulas explícitas para la solución de dicho sistema en términos de sus soluciones, ilustrado por las Ecuaciones (3.10)-(3.16) (ver [5], [6] y [9]. Aquí se ha adicionado el parámetro $l_0 = \pm 1$):

$$\mu(t) = 2\mu(0)\mu_0(t)(\alpha(0) + \gamma_0(t)), \quad (3.10)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0(t) - \frac{\beta_0^2(t)}{4(\alpha(0) + \gamma_0(t))}, \quad (3.11)$$

$$\beta(t) = -\frac{\beta(0)\beta_0(t)}{2(\alpha(0) + \gamma_0(t))} = \frac{\beta(0)\mu(0)}{\mu(t)}w(t), \quad (3.12)$$

$$\gamma(t) = l_0\gamma(0) - \frac{l_0\beta^2(0)}{4(\alpha(0) + \gamma_0(t))}, \quad (3.13)$$

$$\delta(t) = \delta_0(t) - \frac{\beta_0(t)(\delta(0) + \varepsilon_0(t))}{2(\alpha(0) + \gamma_0(t))}, \quad (3.14)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) - \frac{\beta(0)(\delta(0) + \varepsilon_0(t))}{2(\alpha(0) + \gamma_0(t))}, \quad (3.15)$$

$$\kappa(t) = \kappa(0) + \kappa_0(t) - \frac{(\delta(0) + \varepsilon_0(t))^2}{4(\alpha(0) + \gamma_0(t))}, \quad (3.16)$$

sujeto a las condiciones iniciales arbitrarias $\mu(0)$, $\alpha(0)$, $\beta(0) \neq 0$, $\gamma(0)$, $\delta(0)$, $\varepsilon(0)$ y $\kappa(0)$. Con α_0 , β_0 , γ_0 , δ_0 , ε_0 y κ_0 dadas explícitamente por:

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{4a(t)} \frac{\mu'_0(t)}{\mu_0(t)} - \frac{d(t)}{2a(t)}, \quad (3.17)$$

$$\beta_0(t) = -\frac{w(t)}{\mu_0(t)}, \quad w(t) = \exp\left(-\int_0^t (c(s) - 2d(s)) ds\right), \quad (3.18)$$

$$\gamma_0(t) = \frac{d(0)}{2a(0)} + \frac{1}{2\mu_1(0)} \frac{\mu_1(t)}{\mu_0(t)}, \quad (3.19)$$

$$\delta_0(t) = \frac{w(t)}{\mu_0(t)} \int_0^t \left[\left(f(s) - \frac{d(s)}{a(s)} g(s) \right) \mu_0(s) + \frac{g(s)}{2a(s)} \mu'_0(s) \right] \frac{ds}{w(s)}, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) = & -\frac{2a(t)w(t)}{\mu'_0(t)} \delta_0(t) + 8 \int_0^t \frac{a(s)\sigma(s)w(s)}{(\mu'_0(s))^2} (\mu_0(s)\delta_0(s)) ds \\ & + 2 \int_0^t \frac{a(s)w(s)}{\mu'_0(s)} \left[f(s) - \frac{d(s)}{a(s)} g(s) \right] ds, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \kappa_0(t) = & \frac{a(t)\mu_0(t)}{\mu'_0(t)} \delta_0^2(t) - 4 \int_0^t \frac{a(s)\sigma(s)}{(\mu'_0(s))^2} (\mu_0(s)\delta_0(s))^2 ds \\ & - 2 \int_0^t \frac{a(s)}{\mu'_0(s)} (\mu_0(s)\delta_0(s)) \left[f(s) - \frac{d(s)}{a(s)} g(s) \right] ds, \end{aligned} \quad (3.22)$$

con $\delta_0(0) = g_0(0)/(2a(0))$, $\varepsilon_0(0) = -\delta_0(0)$, $\kappa_0(0) = 0$. Aquí μ_0 y μ_1 representan la solución fundamental de la Ecuación (3.8) correspondientes a las condiciones iniciales $\mu_0(0) = 0$, $\mu'_0(0) = 2a(0) \neq 0$ y $\mu_1(0) \neq 0$, $\mu'_1(0) = 0$.

Note que la construcción de la solución del sistema de Riccati requiere determinar inicialmente las funciones auxiliares α_0 , β_0 , γ_0 , δ_0 , ε_0 y κ_0 , por ello los autores denominan a las soluciones (3.17)-(3.22) como la **solución fundamental del sistema de Riccati**.

El enfoque actual para resolver el sistema de Riccati consiste en traducir el problema de obtener la solución de la ecuación de Riccati en el equivalente de resolver la ecuación característica para $\mu(t)$, sin embargo, la dependencia temporal de los coeficientes de la ecuación característica, limita en mayor o igual escala el proceso de encontrar una óptima solución de dicho sistema.

3.2. La ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma propuesta por Suslov et al. (ver [5] y [7])

El estudio de ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas (con coeficientes dependiendo del tiempo), ha despertado un gran interés debido a que son modelos fundamentales para diversos problemas físicos. Problemas pertenecientes a física cuántica [1], óptica no lineal [2], física del plasma [4], entre otros; proveen a estas ecuaciones un fuerte potencial para el entendimiento y desarrollo de muchos fenómenos físicos. La propiedad que tienen este prototipo de ecuaciones de admitir soluciones con propiedades solitónicas no autónomas (con velocidad y amplitud dependiendo del tiempo) justifican en gran medida la versatilidad de las mismas en las diferentes áreas del saber.

Un tipo de ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma ha sido introducida por Suslov et al. ([5], [7]), la cual puede ser escrita en la forma

$$i\psi_t = H\psi + h(t)|\psi|^2\psi, \quad (3.23)$$

donde el Hamiltoniano H (piense en la energía total del sistema) tiene una forma cuadrática de los operadores $-i\frac{\partial}{\partial x}$ y x ; esto es,

$$i\psi_t = -a(t)\psi_{xx} + b(t)x^2\psi - ic(t)x\psi_x - id(t)\psi - f(t)x\psi + ig(t)\psi_x + h(t)|\psi|^2\psi, \quad (3.24)$$

para $a(t), b(t), c(t), d(t), f(t), g(t)$ y $h(t)$ funciones reales dadas. Ecuaciones con este singular Hamiltoniano ya han surgido en problemas físicos concernientes a puntos

cuánticos [1], campos magnéticos uniformes [6] y fenómenos de Bose-Einstein [3], por citar algunos. En términos generales, la mayor parte de los coeficientes de la Ecuación (3.24) pueden ser justificados en cuanto al carácter físico se refiere [23], es decir;

- $\psi(t, x)$: Denota la **función de onda**.

La **función de onda** tiene como fin describir a través del tiempo el estado del sistema.

- $a(t)$: Parámetro de gestión de **dispersión** (dispersion management).

Se denomina **dispersión** al fenómeno de separación de las ondas de diferentes frecuencias al atravesar un material. En el contexto de la óptica, este parámetro caracteriza una fibra óptica en términos de la velocidad de transmisión máxima (máxima velocidad en la que se transmiten los pulsos a través de la fibra), ya que determina las deformaciones sufridas de un impulso a medida que se propaga por dentro de la fibra [24].

- $b(t)x^2$: Determina una **trampa armónica** o un **potencial cuadrático** que depende del tiempo al cual está expuesto el sistema.

Este término permite ver a la Ecuación (3.24) como una versión generalizada del **oscilador armónico**, en el cual el coeficiente $b(t)$ es constante [25].

- $d(t)$: Término de **disipación** ($d(t) > 0$) ó **ganancia** ($d(t) < 0$).

- $f(t)x$: Estandariza un **potencial lineal** arbitrario que depende del tiempo.

Éste término permite contemplar la posibilidad que el sistema se encuentre sujeto a un potencial adicional.

- $h(t)$: Es una medida de la **gestión no lineal** (nonlinear management).

El caso lineal de la Ecuación (3.24) (tome $h(t) = 0$) ha sido motivación de estudio para Suslov et al. en [6], en la cual resuelven de forma general un problema de Cauchy asociado para esta ecuación particular a través de la construcción de la solución fundamental de la misma. El principal cimiento de esta construcción lo

determina el sistema de Riccati mencionado con anterioridad.

3.3. Sistema de Riccati acoplado y transformación al caso autónomo propuesto por Suslov

No cabe duda de la importancia del estudio de ecuaciones del tipo (3.24), pero resolver explícitamente tal problema resulta en la mayoría de los casos difícil. Suslov en [5], proporciona una forma de enfrentar dicha situación, éste establece una conexión entre la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma, dada con anterioridad, y la ecuación de Schrödinger no lineal estándar, permitiendo de esta manera aprovechar las soluciones clásicas de esta última en pro de generar nuevas soluciones para la versión no autónoma.

El resultado a seguir tiene como base el trabajo de Suslov en [?] con la única variante que en esta tesis se ha introducido el parámetro $l_0 = \pm 1$ (el trabajo original corresponde al caso $l_0 = 1$) para usar otros modelos autónomos que aparecen en la literatura.

Lema 1 ($l_0 = 1$, Suslov [5]). *Asúmase que $h(t) = \lambda a(t)\beta^2(t)\mu(t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la sustitución*

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(t)}} e^{i(\alpha(t)x^2 + \delta(t)x + \kappa(t))} u(\tau, \xi), \quad (3.25)$$

donde $\xi = \beta(t)x + \varepsilon(t)$ y $\tau = \gamma(t)$, transforma la Ecuación (3.24) en la ecuación de Schrödinger no lineal estándar

$$iu_\tau - l_0 u_{\xi\xi} + l_0 \lambda |u|^2 u = 0, \quad l_0 = \pm 1, \quad (3.26)$$

siempre que se satisfaga el sistema de Riccati (3.1)-(3.6) y la Ecuación (3.7).

Demostración: Sea $\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(t)}} e^{iS(t,x)} u(\tau, \xi)$, con $S(t, x) = \alpha(t)x^2 + \delta(t)x + \kappa(t)$ y $\xi = \beta(t)x + \varepsilon(t)$, $\tau = \gamma(t)$. Entonces diferenciando se obtiene

$$i\psi_t = \frac{e^{iS(t,x)}}{\sqrt{\mu}} \left[-(\alpha'x^2 + \delta'x + \kappa')u + i \left((\beta'x + \varepsilon')u_\xi + \gamma'u_\tau - \frac{\mu'}{2\mu}u \right) \right],$$

$$\psi_x = \frac{e^{iS(x,t)}}{\sqrt{\mu}} [i(2\alpha x + \delta)u + \beta u_\xi]$$

y

$$\psi_{xx} = \frac{e^{iS(x,t)}}{\sqrt{\mu}} \left[(2i\alpha - 4\alpha^2 x^2 - 4\alpha x\delta - \delta^2) u + 2i(2\alpha x + \delta)\beta u_\xi + \beta^2 u_{\xi\xi} \right].$$

En consecuencia al reemplazar en la Ecuación (3.24) se tiene

$$\begin{aligned} i\psi_t + a\psi_{xx} - bx^2\psi + icx\psi_x + id\psi + fx\psi - ig\psi_x - h|\psi|^2\psi = \\ \frac{e^{iS(x,t)}}{\sqrt{\mu}} \left[x^2u(-\alpha' - 4a\alpha^2 - b - 2c\alpha) + xu(-\delta' - 4a\alpha\delta + f - c\delta + 2\alpha g) \right. \\ \left. + i xu_\xi(\beta' + 4a\alpha\beta + c\beta) + i u_\xi(\varepsilon' + 2a\delta\beta - g\beta) + i u \left(d + 2a\alpha - \frac{\mu'}{2\mu} \right) \right. \\ \left. + u(-\kappa' + g\delta - a\delta^2) + \left(i\gamma' u_\tau + a\beta^2 u_{\xi\xi} - \frac{h}{\mu} u|u|^2 \right) \right] \\ = \frac{e^{iS(x,t)}}{\sqrt{\mu}} \left(i\gamma' u_\tau + a\beta^2 u_{\xi\xi} - \frac{h}{\mu} u|u|^2 \right). \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha usado el hecho que las funciones $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ y κ satisfacen el sistema de Riccati y que la Ecuación (3.7) se cumple. Ahora utilizando las condiciones $h = \lambda a\beta^2 \mu$ y $\gamma' + l_0 a\beta^2 = 0$ se tiene

$$i\gamma' u_\tau + a\beta^2 u_{\xi\xi} - \frac{h}{\mu} u|u|^2 = -il_0 a\beta^2 u_\tau + a\beta^2 u_{\xi\xi} - \lambda a\beta^2 u|u|^2 \quad (3.27)$$

$$= -al_0\beta^2 (iu_\tau - l_0 u_{\xi\xi} + l_0 \lambda u|u|^2), \quad (3.28)$$

por lo que si u es una solución de la Ecuación (3.26), entonces ψ satisface (3.24) como se deseaba probar. \square

El lema anterior presenta de forma puntual un método de transformaciones para construir soluciones para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma. El eslabón principal de dicho método lo determina el ya discutido sistema de Riccati en la Sección 3.1, razón por lo cual el estudio de las soluciones para la ecuación de Schrödinger general (3.24) se traduce en elegir coeficientes “óptimos” de tal forma que el sistema de Riccati pueda ser enteramente resuelto.

En la siguiente sección se describen dos aplicaciones del lema anterior, en éstos se

observa la compleja tarea que puede resultar de utilizar como medio de construcción de soluciones la transformación expuesta en el Lema 1.

3.4. Construcción de soluciones solitónicas para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma

En esta sección se muestra cómo la dinámica de las soluciones cambia bajo los multiparámetros que aparecen en las Ecuaciones (3.10)-(3.16), ver Figuras 3-1 y 3-2. En estos términos se resuelven dos ecuaciones del tipo (3.24) bajo la transformación expuesta en el Lema 1, que presentan soluciones de tipo solitón brillante y oscuro. Para la construcción de las soluciones de dichas ecuaciones se han utilizado las soluciones tipo solitón de la ecuación de Schrödinger no lineal estándar dadas en el capítulo anterior, y de esta manera las soluciones obtenidas poseen características solitónicas cuya amplitud y velocidad pueden depender del tiempo, es decir, representan solitones no autónomos. Las verificaciones de las mismas han sido corroboradas usando el Sistema de Álgebra Computacional, “Mathematica”, ver apéndice A para estos detalles.

3.4.1. Multiparámetros y dinámica del solitón brillante para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma

Considere la ecuación de Schrödinger con coeficientes dependiendo del tiempo

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} - ix \tanh t \psi_x - i \cosh t \psi - \frac{e^{2\sinh t} \operatorname{sech} t}{2 \sinh t + \cosh t} |\psi|^2 \psi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (3.29)$$

La ecuación característica correspondiente a dicha ecuación es

$$\mu'' - (4 \cosh t - 2 \tanh t)\mu' + (4 \cosh^2 t - 6 \sinh t)\mu = 0,$$

cuyas soluciones estándar tienen la forma

$$\mu_0(t) = \tanh t e^{2\sinh t} \quad y \quad \mu_1(t) = \mu_1(0)(1 - 2 \tanh t)e^{2\sinh t}, \quad \mu_1(0) \neq 0.$$

Por lo tanto, la solución fundamental del sistema de Riccati viene dado por las expresiones

$$\alpha_0(t) = \operatorname{csch} 2t, \quad \beta_0(t) = -\operatorname{csch} t, \quad \gamma_0(t) = \frac{\operatorname{coth} t}{2},$$

$$\delta_0(t) = \varepsilon_0(t) = \kappa_0(t) = 0,$$

y de esta manera su solución general es:

$$\alpha(t) = \frac{\operatorname{csch} t \operatorname{sech} t}{2 + \operatorname{coth} t}, \quad \beta(t) = \frac{\operatorname{csch} t}{2 + \operatorname{coth} t}, \quad \gamma(t) = \gamma(0) - \frac{1}{4 + 2 \operatorname{coth} t},$$

$$\delta(t) = \frac{\delta(0) \operatorname{csch} t}{2 + \operatorname{coth} t}, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon(0) - \frac{\delta(0)}{2 + \operatorname{coth} t}, \quad \kappa(t) = \kappa(0) - \frac{\delta(0)^2}{4 + 2 \operatorname{coth} t},$$

$$\mu(t) = (2 + \operatorname{coth} t)e^{2 \operatorname{senh} t} \tanh t.$$

Por otro lado, la ecuación de Schrödinger autónoma asociada a este problema es

$$iu_\tau - u_{\xi\xi} - 2|u|^2u = 0, \quad \xi = \beta(t)x + \varepsilon(t), \quad \tau = \gamma(t),$$

y admite la solución (ver Ejemplo 1),

$$u(\tau, \xi) = \sqrt{v} \operatorname{sech}(\sqrt{v}\xi) \exp(-iv\tau), \quad v > 0,$$

se sigue que una solución para la ecuación de Schrödinger (3.29) está dada por:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \exp \left[i \left(\frac{2x^2 \operatorname{csch} t \operatorname{sech} t + 2\delta(0)x \operatorname{csch} t - \delta(0)^2 + v}{4 + 2 \operatorname{coth} t} + \kappa(0) - v\gamma(0) \right) \right] \\ &\times \sqrt{\frac{v \operatorname{coth} t}{2 + \operatorname{coth} t}} \operatorname{sech} \left[\sqrt{v} \left(\frac{x \operatorname{csch} t - \delta(0)}{2 + \operatorname{coth} t} + \varepsilon(0) \right) \right] \exp(-\operatorname{senh} t). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En la Figura 3-1 se describe el comportamiento de la solución obtenida. Note que ésta misma es sensible ante el signo de $\delta(0)$ y $\varepsilon(0)$. Para $\delta(0) < 0$ ($\varepsilon(0) > 0$) y $\delta(0) > 0$ ($\varepsilon(0) < 0$) la solución presenta flexiones en su eje hacia la izquierda y derecha, respectivamente. Por otro lado, no existe contribución alguna por parte de los parámetros $\kappa(0)$ y $\gamma(0)$ debido a que su posible contribución es anulada via el

módulo (por ello solo se asume los valores de estos iguales cero). El rápido decaimiento del pulso hiperbólico es debido al factor $e^{-\sinh t}$ para $t > 0$.

3.4.2. Multiparámetros y dinámica del solitón oscuro para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma

La ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes variables

$$i\psi_t = -\frac{1}{2} \cosh t \psi_{xx} + \frac{1}{2} \cosh t x^2 \psi - ix \cosh t \psi_x - i\frac{1}{2} \cosh t \psi + \frac{4 \cosh t}{1 + \sinh t} |\psi|^2 \psi, \quad (3.31)$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, presenta la ecuación característica

$$\mu'' - \tanh t \mu' = 0,$$

cuyas respectivas soluciones estándar están dadas por la expresiones:

$$\mu_0(t) = \sinh t, \quad \mu_1(t) = \mu_1(0).$$

Por ello se tiene que la solución fundamental del sistema de Riccati asociado toma la forma:

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{csch} t - 1), \quad \beta_0(t) = -\operatorname{csch} t, \quad \gamma_0(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{csch} t + 1),$$

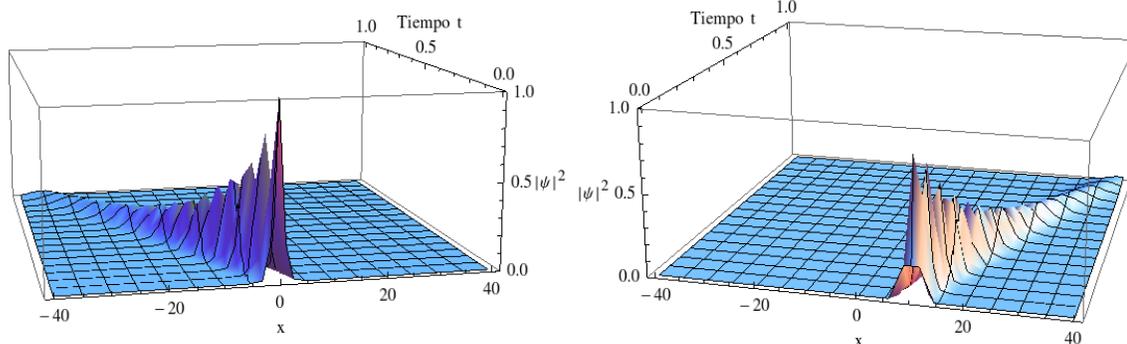
$$\delta_0(t) = \varepsilon_0(t) = \kappa_0(t) = 0.$$

En estos términos las funciones inmersas en la sustitución son:

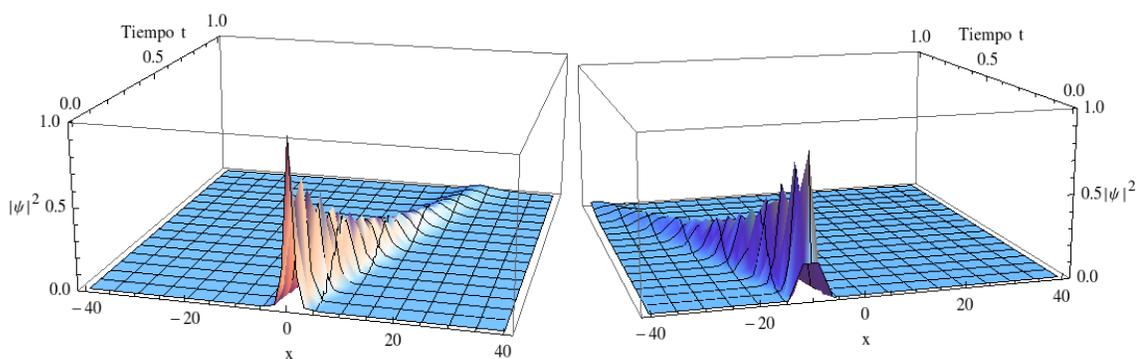
$$\alpha(t) = -\frac{1}{2 + 2 \operatorname{csch} t}, \quad \beta(t) = \frac{1}{1 + \sinh t}, \quad \gamma(t) = \frac{2}{1 + \operatorname{csch} t} - \gamma(0),$$

$$\delta(t) = \frac{\delta(0)}{1 + \sinh t} \quad \varepsilon(t) = \varepsilon(0) - \frac{2\delta(0)}{1 + \operatorname{csch} t} \quad \kappa(t) = \kappa(0) - \frac{\delta^2(0)}{2 + 2 \operatorname{csch} t},$$

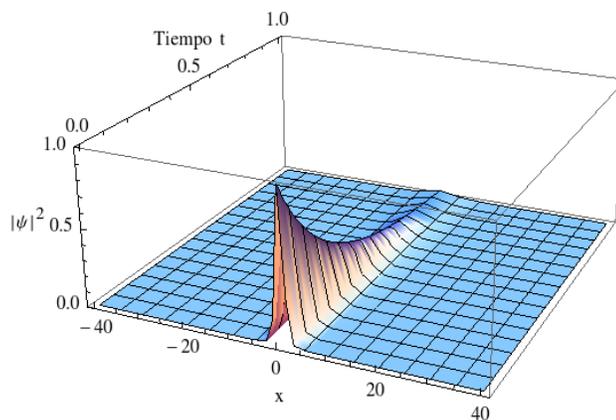
$$\mu(t) = 1 + \sinh t.$$



(a) Solución con parámetros $v = 1$, $\delta(0) = -30$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$.
 (b) Solución con parámetros $v = 1$, $\delta(0) = 0$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = -10$ y $\gamma(0) = 0$.



(c) Solución con parámetros $v = 1$, $\delta(0) = 20$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$.
 (d) Solución con parámetros $v = 1$, $\delta(0) = 0$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 10$ y $\gamma(0) = 0$.



(e) Solución con parámetros $v = 1$, $\delta(0) = \frac{1}{6}$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = -\frac{1}{6}$ y $\gamma(0) = 0$.

Figura 3–1: Aplicación de los multiparámetros $\delta(0)$, $\kappa(0)$, $\varepsilon(0)$ y $\gamma(0)$ en la dinámica de la solución de la Ecuación (3.29) para $t \in (0, 1]$ y $x \in [-40, 40]$.

Por otro lado, la Ecuación (3.31) es transformada en la ecuación de Schrödinger no lineal autónoma

$$iu_{\tau} + u_{\xi\xi} - 2|u|^2u = 0, \quad \xi = \beta(t)x + \varepsilon(t), \quad \tau = \gamma(t),$$

la cual posee una solución de la forma (ver Ejemplo 3)

$$u(\tau, \xi) = A \tanh(A\xi) \exp(-2iA^2\tau), \quad A \in \mathbb{R}.$$

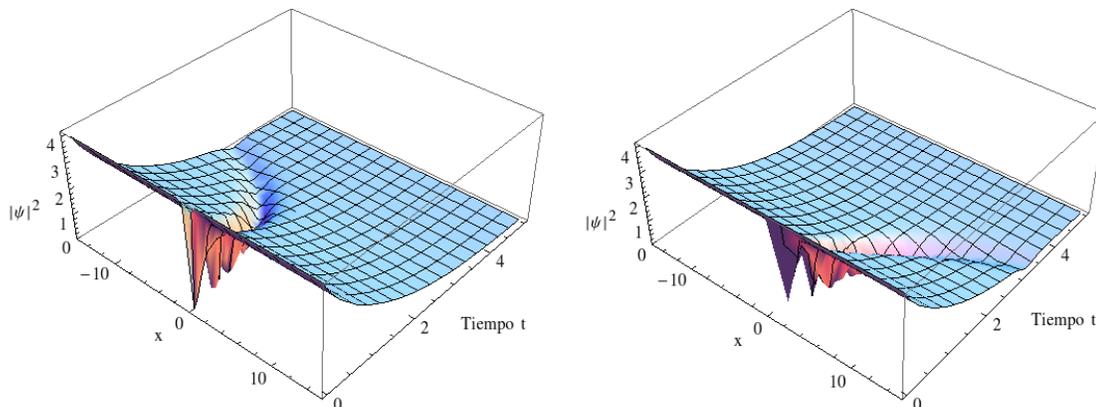
Así se tiene una solución para la ecuación de Schrödinger no lineal general dada por:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \exp \left[i \left(\frac{-x^2 + 2\delta(0)x \operatorname{csch} t - \delta^2(0) - 8A^2}{2 + 2 \operatorname{csch} t} + \kappa(0) + 2A^2\gamma(0) \right) \right] \\ &\times \frac{A}{\sqrt{1 + \operatorname{senh} t}} \tanh \left[A \left(\frac{2x \operatorname{csch} t - 2\delta(0)}{\operatorname{csch} t + 1} + \varepsilon(0) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

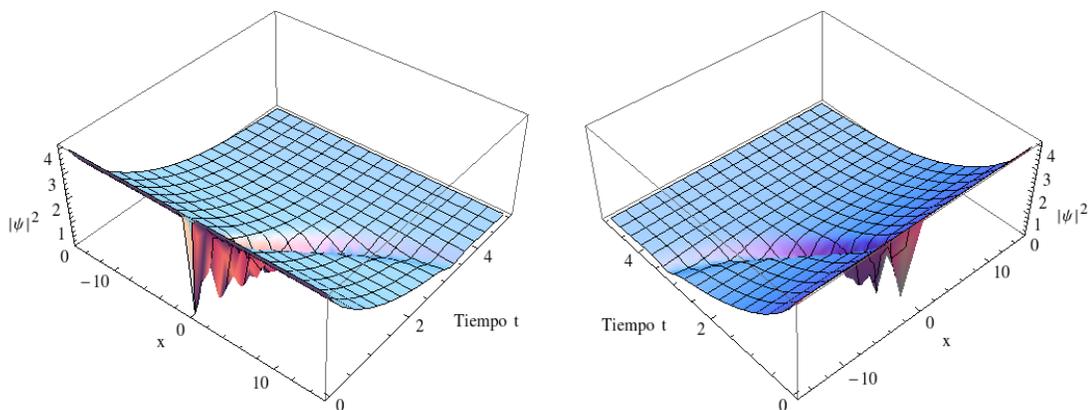
El comportamiento en el tiempo de la solución conseguida es muy similar al problema resuelto anteriormente, esto es, aquí la solución tipo solitón oscuro presenta flexiones en su eje central como resultado de la elección de valores adecuados para los multiparámetros $\delta(0)$ y $\varepsilon(0)$ (ver Figura 3-2), adicionalmente la decadencia en amplitud observada en la Figura 3-2 surge como consecuencia de factor $1 + \operatorname{senh} t$ para $t > 0$.

3.5. Método alternativo para resolver el sistema de Riccati acoplado

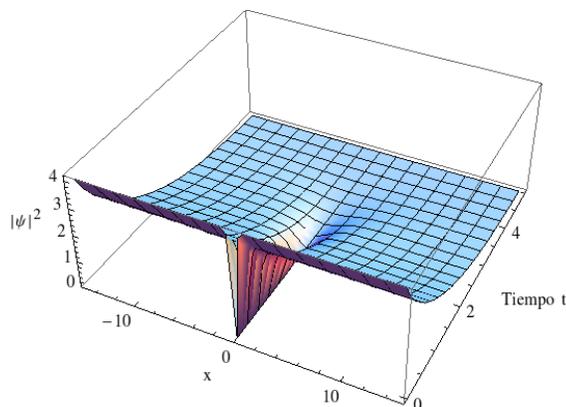
En términos generales, la construcción de la Transformación (3.25) de manera explícita resulta un trabajo difícil de llevar a cabo. Un factor contribuyente a esto lo representa la dependencia de la solución del sistema de Riccati de la ecuación característica (3.8), la cual es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables, por lo que en esta tesis se procede a presentar un método alternativo para resolver el sistema de Riccati acoplado (3.1)-(3.6), bajo este hecho, se asumen las condiciones $a(t) = -l_0$ con $l_0 \in \{-1, 1\}$, $\beta(t) = 1$, $\tau(t) = t$ y $\varepsilon(t) = 0$, las



(a) Solución con parámetros $A = 2$, $\delta(0) = -1$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$.
 (b) Solución con parámetros $A = 2$, $\delta(0) = 0$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = -2$ y $\gamma(0) = 0$.



(c) Solución con parámetros $A = 2$, $\delta(0) = 1$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$.
 (d) Solución con parámetros $A = 2$, $\delta(0) = 0$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 2$ y $\gamma(0) = 0$.



(e) Solución con parámetros $A = 2$, $\delta(0) = 0$, $\kappa(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$.

Figura 3–2: Aplicación de los multiparámetros $\delta(0)$, $\kappa(0)$, $\varepsilon(0)$ y $\gamma(0)$ en la dinámica de las soluciones de la Ecuación (3.31) para $t \in (0, 5]$ y $x \in [-15, 15]$.

cuales permitirán explorar un poco más en detalle dicho sistema de Riccati, en cuanto al estudio y construcción de soluciones para la ecuación de Schrödinger no lineal general se refiere. Adicional a esto, las mismas condiciones posibilitan eliminar las escalas en espacio y tiempo inmersas en la transformación (3.25). Note que bajo las hipótesis anteriores y las Ecuaciones (3.1)-(3.6) se obtienen las fórmulas $\alpha(t) = l_0 c(t)/4$, $\delta(t) = -l_0 g(t)/2$, $h(t) = -l_0 \lambda \mu(t)$ y el correspondiente sistema acoplado de ecuaciones:

$$\frac{d\alpha}{dt} + 2c\alpha - 4l_0\alpha^2 + b = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = f + 2g\alpha, \quad (3.34)$$

$$\frac{d\kappa}{dt} = l_0\delta^2 + g\delta, \quad (3.35)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = (2d - 4\alpha)\mu. \quad (3.36)$$

En consecuencia se puede obtener el sistema final:

$$\frac{dc}{dt} + c^2 + 4l_0b = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{dg}{dt} + 2l_0f + cg = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{d\kappa}{dt} + \frac{l_0}{4}g^2 = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = (2d - c)\mu. \quad (3.40)$$

Cuya solución está dada por:

$$\frac{dc}{dt} + c^2 + 4l_0b = 0, \quad (3.41)$$

$$\alpha(t) = l_0 \frac{c(t)}{4}, \quad \delta(t) = -l_0 \frac{g(t)}{2}, \quad (3.42)$$

$$\kappa(t) = \kappa(0) - \frac{l_0}{4} \int_0^t g^2(z) dz, \quad (3.43)$$

$$\mu(t) = \mu(0) \exp \left(\int_0^t (2d(z) - c(z)) dz \right), \quad \mu(0) \neq 0, \quad (3.44)$$

$$g(t) = g(0) - 2l_0 \exp\left(-\int_0^t c(z)dz\right) \int_0^t \exp\left(\int_0^z c(y)dy\right) f(z)dz. \quad (3.45)$$

Las Ecuaciones (3.41)-(3.45) muestran las condiciones necesarias que deben satisfacer los coeficientes para el funcionamiento de esta transformación particular. La primera de estas ecuaciones determina una relación directa entre $c(t)$ y $b(t)$ a través de la ecuación de Riccati, mientras que las funciones $d(t)$ y $f(t)$ aún permanecen como funciones “arbitrarias”. La Ecuación (3.45) establece la forma en la que debe ser elegida la función $g(t)$. Una fácil implicación de las Ecuaciones (3.41)-(3.45) y que será de gran utilidad en la Sección 3.6 es mostrada en la siguiente nota.

Nota 1. *Si se asume que las funciones $c(t)$, $d(t)$ y $f(t)$ son de clase C^1 entonces $\alpha(t)$, $\delta(t)$ y $\kappa(t)$ también están en dicha clase y $\mu(t)$ pertenece a la clase C^2 .*

En el lema que sigue se expone la primera consecuencia relevante del nuevo sistema de Riccati frente a las soluciones de un problema de Cauchy para la ecuación (3.24).

Lema 2 (J. E.). *Supóngase que $h(t) = -l_0\lambda\mu(t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $l_0 = \pm 1$ y que $c(t)$, $\alpha(t)$, $\delta(t)$, $\kappa(t)$, $\mu(t)$ y $g(t)$ satisfacen las Ecuaciones (3.41)-(3.45). Entonces*

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(t)}} e^{i(\alpha(t)x^2 + \delta(t)x + \kappa(t))} u(t, x), \quad (3.46)$$

es una solución del problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma

$$i\psi_t = l_0\psi_{xx} + b(t)x^2\psi - ic(t)x\psi_x - id(t)\psi - f(t)x\psi + ig(t)\psi_x + h(t)|\psi|^2\psi, \quad (3.47)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x) \quad (3.48)$$

si y solo si, $u(t, x)$ es una solución del problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger estándar

$$iu_t - l_0u_{xx} + l_0\lambda|u|^2u = 0. \quad (3.49)$$

$$u(0, x) = \sqrt{\mu(0)} e^{-i(\alpha(0)x^2 + \delta(0)x + \kappa(0))} \psi_0(x). \quad (3.50)$$

Demostración:(\Leftarrow). Esta primera parte es consecuencia del Lema 1, debido a que en este caso $\xi(t) = x$ y $\tau(t) = t$.

(\Rightarrow). Supóngase que ψ satisface el problema de Cauchy (3.47)-(3.48) y defínase la función

$$u(t, x) = \sqrt{\mu(t)}e^{-iS(t,x)}\psi(t, x),$$

donde $S(t, x) = \alpha(t)x^2 + \delta(t)x + \kappa(t)$. Al calcular las derivadas parciales correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} u_t &= \sqrt{\mu}e^{-iS} \left(\frac{1}{2}\mu^{-1}\mu'\psi - i(\alpha'x^2 + \delta'x + \kappa')\psi + \psi_t \right), \\ u_x &= \sqrt{\mu}e^{-iS} \left(-i(2\alpha x + \delta)\psi + \psi_x \right), \\ u_{xx} &= \sqrt{\mu}e^{-iS} \left(-2i\alpha\psi - (2\alpha x + \delta)^2\psi - 2i(2\alpha x + \delta)\psi_x + \psi_{xx} \right). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} iu_t - l_0u_{xx} + l_0\lambda|u|^2u &= \sqrt{\mu}e^{-iS} \left(\frac{i}{2}\mu^{-1}\mu'\psi + (\alpha'x^2 + \delta'x + \kappa')\psi + i\psi_t + 2l_0i\alpha\psi \right. \\ &\quad \left. + l_0(2\alpha x + \delta)^2\psi + 2l_0i(2\alpha x + \delta)\psi_x - l_0\psi_{xx} + l_0\lambda\mu|\psi|^2\psi \right). \end{aligned}$$

De las Ecuaciones (3.41)-(3.45) (y por ende (3.37)-(3.40)) se desprende

$$\begin{aligned} iu_t - l_0u_{xx} + l_0\lambda|u|^2u &= \sqrt{\mu}e^{-iS} \left(\frac{i}{2}(2d - c)\psi + \left(\frac{l_0}{4}c'x^2 - \frac{l_0}{2}g'x - \frac{l_0}{4}g^2 \right)\psi + i\psi_t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}ic\psi + \frac{l_0}{4}(cx - g)^2\psi + i(cx - g)\psi_x - l_0\psi_{xx} - h|\psi|^2\psi \right) \\ &= \sqrt{\mu}e^{-iS} \left(\psi \left(id + \frac{l_0x^2}{4}(c' + c^2) - \frac{l_0x}{2}(g' + cg) \right) + i\psi_t \right. \\ &\quad \left. + i(cx - g)\psi_x - l_0\psi_{xx} - h|\psi|^2\psi \right) \\ &= \sqrt{\mu}e^{-iS} \left(i\psi_t - l_0\psi_{xx} - bx^2\psi + icx\psi_x + id\psi + fx\psi \right. \\ &\quad \left. - ig\psi_x - h|\psi|^2\psi \right) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto u satisface (3.49)-(3.50), y de esta manera el hecho que la función $\sqrt{\mu(t)}e^{-iS(t,x)} \neq 0$ para todo t y x permite concluir lo deseado. Por último, la condición inicial es satisfecha. \square

La principal ventaja del resultado anterior es que bajo condiciones pertinentes, es posible establecer una estructura para la solución de un problema de Cauchy de este tipo de ecuaciones de Schrödinger, estableciéndolas forma como “múltiplos” de soluciones de un problema Cauchy particular para ciertas ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas. La razón para este hecho, radica en haber sido posible eliminar las escalas en tiempo y espacio implícitas en la transformación dada en el Lema 1, y en adición, el haber trasladado la ecuación de Riccati para $\alpha(t)$ hacia uno de los coeficientes de la Ecuación (3.46) (ver Ecuación (3.41)).

Por otro lado, al no haber escalas en tiempo y espacio, como sucede en el Lema 1, se hace más factible la construcción de soluciones globales (definidas para todo momento del tiempo, $t \in \mathbb{R}$) para la ecuación de Schrödinger no lineal general (ver Sección 4.1); propiedad que suele caracterizar a la ecuación de Schrödinger no lineal usual (es revertible en tiempo).

3.6. Unicidad de las soluciones clásicas para la ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes variables en

$$L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R}) \text{ con } q = 2, \infty$$

El fin primordial que motiva esta sección es el estudio de un problema de Cauchy de valor inicial para la ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes variables. Para llevar a cabo tal propósito, se utilizará la transformación expuesta en el Lema 2, por lo cual se asumirá la validez de las Ecuaciones (3.41)-(3.45).

La transformación utilizada permite trasladar un resultado clásico de unicidad para la ecuación de Schrödinger no lineal usual en su equivalente, bajo ciertas condiciones, en la ecuación de Schrödinger no autónoma. De esta manera, se determinan las

condiciones mínimas para la unicidad de las soluciones clásicas del tipo de ecuación de Schrödinger general aquí estudiada.

Proposición 2 (J. E.). *Asúmase que se satisfacen las Ecuaciones (3.41)-(3.45) (corresp. a $l_0 = -1$). Si $c(t), d(t), f(t) \in C^1([-T, T])$ para algún $T > 0$ y $h(t) = \lambda\mu(t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma*

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + b(t)x^2\psi - ic(t)x\psi_x - id(t)\psi - f(t)x\psi + ig(t)\psi_x + h(t)|\psi|^2\psi \quad (3.51)$$

$$\psi(0, x) = \psi_0(x), \quad (3.52)$$

tiene una única solución clásica en el espacio $L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})$ para $q = 2, \infty$.

Demostración: Sean $\psi^1, \psi^2 \in C_{t,x}^2([-T, T] \times \mathbb{R})$ soluciones clásicas de dicho problema que están en el espacio $L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})$ para $q = 2, \infty$. Debido a las condiciones asumidas sobre los coeficientes $c(t), d(t), f(t)$ y $h(t)$; el Lema 2 y la Nota 1, se puede concluir que las funciones

$$w^j(t, x) = \sqrt{\mu(t)}e^{-i(\alpha(t)x^2 + \delta(t)x + \kappa(t))}\psi^j(t, x) \in C_{t,x}^2([-T, T] \times \mathbb{R}) \quad \text{con } j = 1, 2 \quad (3.53)$$

son soluciones clásicas de la ecuación de Schrödinger no lineal estándar asociada (3.49) sobre $[-T, T]$, con dato inicial

$$w^j(0, x) = \sqrt{\mu(0)}e^{-i(\alpha(0)x^2 + \delta(0)x + \kappa(0))}\psi_0(x) \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Ahora, para ver que cada w^j satisface las condiciones de la Proposición 1, se mostrará que tales funciones pueden ser consideradas como aplicaciones

$$w^j : [-T, T] \longrightarrow L_x^q(\mathbb{R}), \quad q = 2, \infty,$$

que están en el espacio $L_t^\infty([-T, T])$. Sea $M > 0$ el máximo de $\sqrt{\mu(t)}$ en $[-T, T]$ cuya existencia es garantizada por la continuidad de $\mu(t)$ sobre $[-T, T]$, la cual es

directa consecuencia de la hipótesis que recae sobre $c(t)$ y $d(t)$ (son de clase C^1), entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

(a). Para todo $t \in [-T, T]$ se cumple que $w^j(t) \in L_x^q(\mathbb{R})$ para $q = 2, \infty$: En efecto,

$$\begin{aligned} \|u^j(t)\|_{L_x^q(\mathbb{R})} &= |\sqrt{\mu(t)}| \|\psi^j(t)\|_{L_x^q(\mathbb{R})}, \quad j = 1, 2, \\ &\leq M \|\psi^j(t)\|_{L_x^q(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

(b). La función u^j tiene norma mixta finita: De la parte anterior se desprende que

$$\begin{aligned} \|u^j\|_{L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})} &= \left\| \|u^j(t)\|_{L_x^q(\mathbb{R})} \right\|_{L_t^\infty([-T, T])} \\ &= \left\| |\sqrt{\mu(t)}| \|\psi^j(t)\|_{L_x^q(\mathbb{R})} \right\|_{L_t^\infty([-T, T])} \\ &\leq M \left\| \|\psi^j(t)\|_{L_x^q(\mathbb{R})} \right\|_{L_t^\infty([-T, T])} < \infty. \end{aligned}$$

En estos términos se ha probado que $u^j \in L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})$ con $q = 2, \infty$, por lo tanto la Proposición 1 implica que $u^1 = u^2$. El resultado final se obtiene de multiplicar ambos lados de la Ecuación (3.53) por la expresión $e^{i(\alpha(t)x^2 + \delta(t)x + \kappa(t))} / \sqrt{\mu(t)}$.

□

Cabe notar que el resultado anterior no dice nada de la existencia de dichas soluciones, en cambio brinda unas condiciones iniciales para que conocidas las soluciones del problema de Cauchy establecer la unicidad de las mismas. En el capítulo que sigue se muestra la aplicabilidad de la proposición anterior, al permitir establecer la unicidad de algunas soluciones de ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas.

Capítulo 4

SOLUCIONES EXPLÍCITAS DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER NO LINEALES NO AUTÓNOMAS

En el presente capítulo se pretende estudiar el comportamiento en el tiempo que presentan las soluciones de algunas ecuaciones de Schrödinger no lineales y no autónomas del tipo:

$$i\psi_t = -a(t)\psi_{xx} + b(t)x^2\psi - ic(t)x\psi_x - id(t)\psi - f(t)x\psi + ig(t)\psi_x + h(t)|\psi|^2\psi$$

Para tal fin se utiliza la transformación particular conseguida en el capítulo anterior. Adicionalmente, a través del resultado de unicidad propuesto para esta clase de ecuaciones se obtienen las únicas soluciones de ciertos problemas de valor inicial.

4.1. Dinámica de las soluciones para ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas: Soluciones globales

En el capítulo anterior se introdujo una transformación particular (Lema 2) que permite conectar de manera biunívoca soluciones de ecuaciones de Schrödinger no lineales estándar y ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas, a través del sistema (3.41)-(3.45). En éstas las funciones $d(t)$ y $f(t)$ desempeñan un papel importante como “parámetros arbitrarios” debido a la no dependencia de los mismos del resto de los coeficientes.

En esta sección nos interesa describir la dinámica de las soluciones para ciertas ecuaciones de Schrödinger no autónomas, para cuando se eligen diferentes valores para el

término de disipación/ganancia $d(t)$ (y por ende para $h(t)$); ya que la contribución generada por éste resulta mucho más relevante que la propiciada por $f(t)$, de hecho, cualquier contribución por parte de $f(t)$ es anulada via el módulo de las soluciones (ver Ecuaciones (3.43) y (3.44)).

En los casos a considerar parte de los valores utilizados para la función $c(t)$ han sido tomados de la referencia [13], mientras que las soluciones clásicas de la ecuación de Schrödinger expuestas en el Capítulo 2 tienen nuevamente una importante función en esta parte. Para una mayor confianza en las soluciones obtenidas, el lector puede consultar el Apéndice A para la verificación de dichas soluciones con el programa “Mathematica”.

4.1.1. Perturbaciones del solitón brillante: $b(t) = \sin^2 t - \cos t$, $c(t) = -\sin t$.

Considérese la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + \frac{x^2}{4} (\sin^2 t - \cos t) \psi + ix \sin t \psi_x - id(t)\psi + h(t)|\psi|^2\psi, \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Independientemente de la elección de la función $d(t)$, los coeficientes de la forma cuadrática asociada ($\alpha(t)x^2 + \delta(t)x + \kappa(t)$) son:

$$\alpha(t) = \frac{\sin t}{4}, \quad \delta(t) = 0, \quad \kappa(t) = \kappa(0).$$

Por otro lado, el Lema 2 traduce el problema en la ecuación de Schrödinger estándar

$$iu_t + u_{xx} + 3|u|^2u = 0, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

cuya solución tiene la siguiente forma (ver Ejemplo 1):

$$u(t, x) = \sqrt{-\frac{2v}{3}} \operatorname{sech}(\sqrt{-v}x) \exp(-vit), \quad v < 0.$$

- a). **Solución periódica en tiempo para la Ecuación (4.1):** $d(t) = \text{sen } t$ y $h(t) = -3e^{3-3 \cos t}$.

En este caso se obtiene la correspondiente función $\mu(t) = e^{3-3 \cos t}$. En consecuencia la ecuación de Schrödinger general (4.1) admite una solución de la forma:

$$\psi(t, x) = \sqrt{-\frac{2v}{3}} \text{sech}(\sqrt{-v}x) \exp \left[\frac{3}{2} (\cos t - 1) + i \left(\frac{x^2}{4} \text{sen } t + \kappa(0) - vt \right) \right]. \quad (4.2)$$

La Figura 4-1 ilustra el comportamiento periódico dominante en estas soluciones (dadas en términos de la función $\cos t$) y la dependencia de las mismas frente a la variación del parámetro v . Soluciones con $v = 2$ y $v = 0.1$ son mostradas en (a) y (b) respectivamente.

- b). **Solución con rápido decaimiento en tiempo para la Ecuación (4.1):** $d(t) = \frac{1}{2}(4t - \text{sen } t)$ y $h(t) = -3e^{2t^2}$.

Para la construcción de este tipo de soluciones obsérvese que la función característica es $\mu(t) = e^{2t^2}$. Entonces la solución toma la forma:

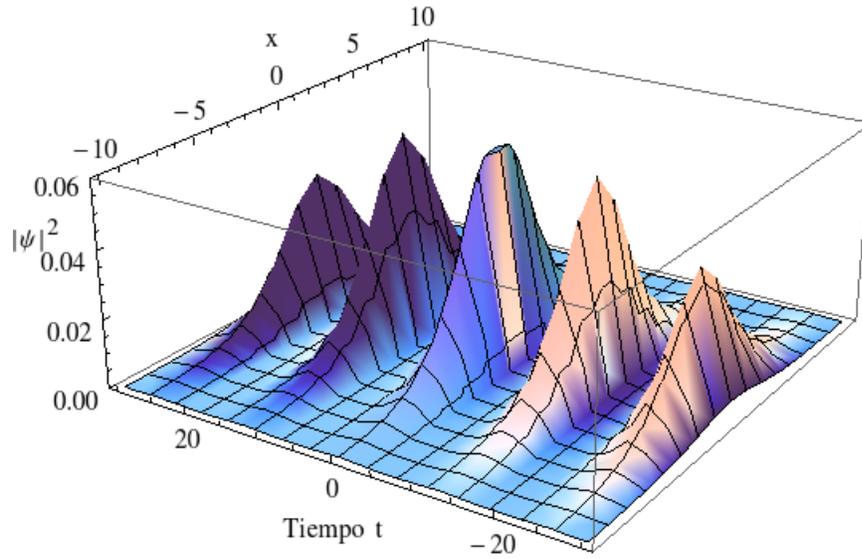
$$\psi(t, x) = \sqrt{-\frac{2v}{3}} \text{sech}(\sqrt{-v}x) \exp \left[i \left(\frac{x^2}{4} \text{sen } t + \kappa(0) - vt \right) - t^2 \right]. \quad (4.3)$$

La particular propiedad de estas soluciones se desprende del comportamiento dominante de la función $\mu^{-1}(t) = e^{-t^2}$ (decrece rápidamente) y éste a la vez surge como consecuencia de una debida elección del parámetro $d(t)$. La Figura 4-2 muestra la dinámica de dichas soluciones.

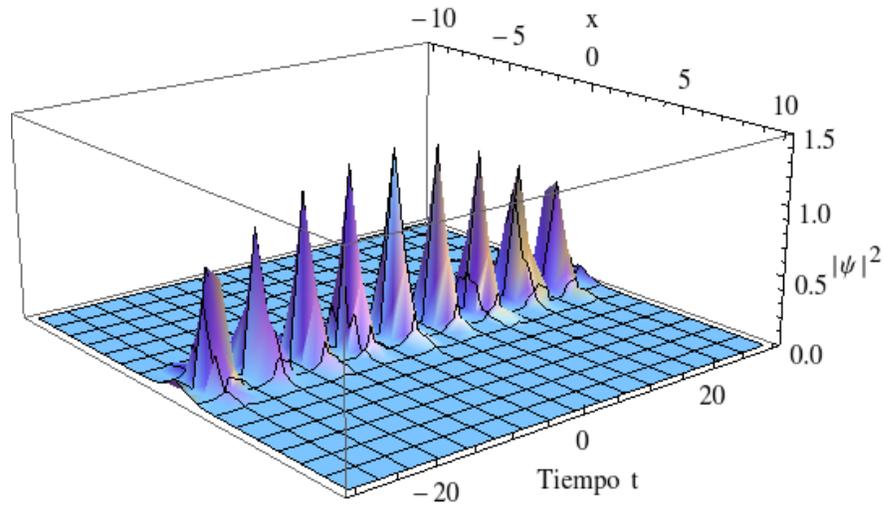
- c). **Perturbación en el origen del solitón brillante para la Ecuación (4.1):**

$$d(t) = \frac{t}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} - \frac{\text{sen } t}{2} \quad \text{y} \quad h(t) = -\frac{3t^2 + 3}{t^2 + 2}.$$

La toma de estos valores para $d(t)$ y $h(t)$, permitirá construir soluciones que sufren una ligera perturbación en amplitud en las cercanías del origen, pero que luego de esto el pulso hiperbólico “ $\text{sech}(\sqrt{-v}x)$ ” vuelve a predominar durante el resto de la



(a) Solución bajo los parámetros $v = -0.1$ y $\kappa(0) = 0$.



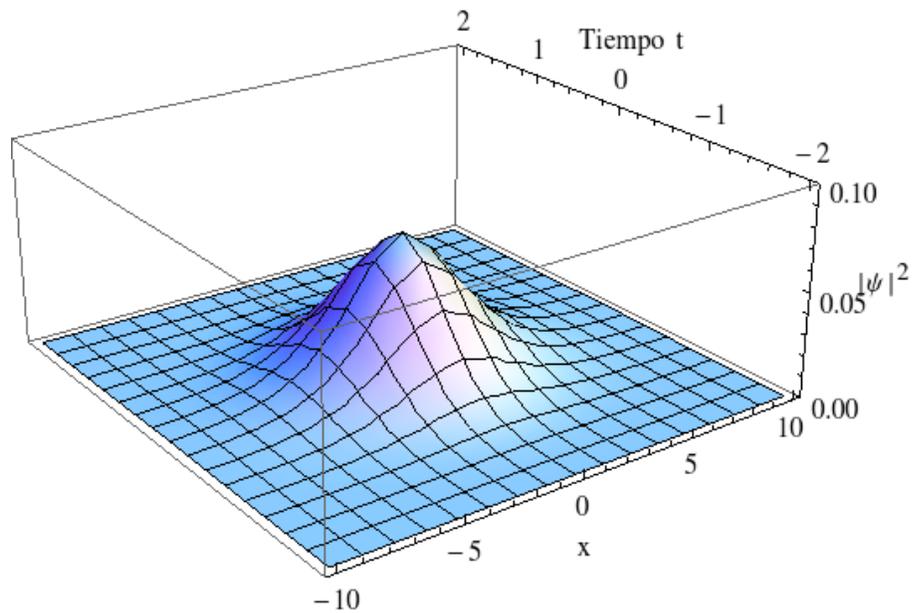
(b) Solución bajo los parámetros $v = -2$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 4-1: Dinámica de las soluciones de la Ecuación (4.1) para $d(t) = \text{sen } t$ y $h(t) = -3e^{3-3\cos t}$ en los intervalos $-30 \leq t \leq 30$ y $-10 \leq x \leq 10$.

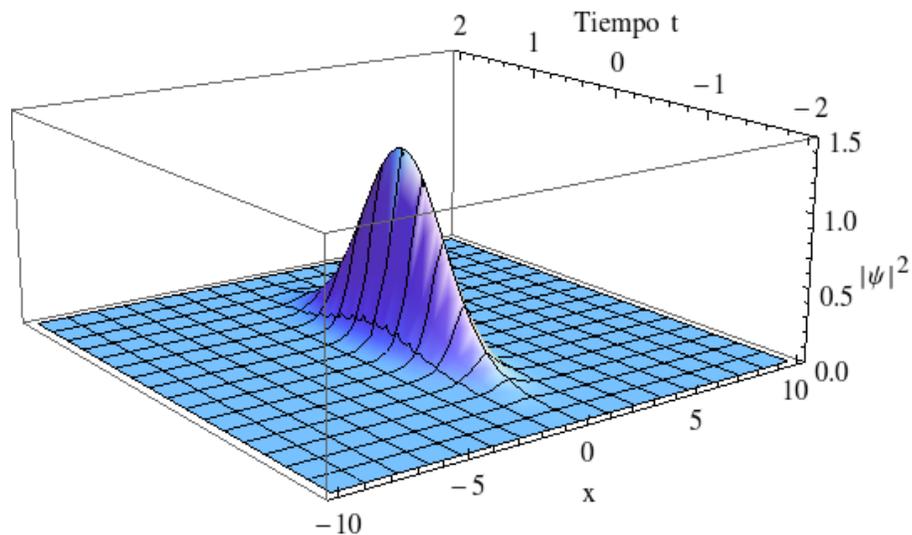
propagación. La correspondiente expresión para $\mu(t)$ y $\psi(t, x)$ son: $\mu(t) = \frac{t^2 + 2}{t^2 + 1}$ y

$$\psi(t, x) = \sqrt{-\frac{2vt^2 + 4v}{3t^2 + 3}} \text{sech}(\sqrt{-v}x) \exp \left[i \left(\frac{x^2}{4} \text{sen } t + \kappa(0) - vt \right) \right]. \quad (4.4)$$

El comportamiento antes mencionado acerca de las soluciones, puede ser apreciado en la Figura 4-3.

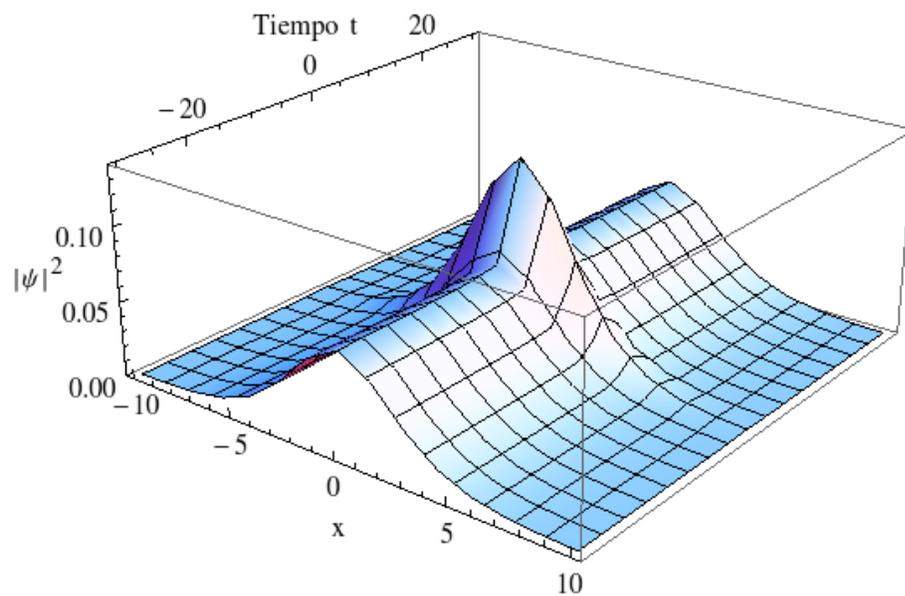


(a) Solución bajo los parámetros $v = -0.1$ y $\kappa(0) = 0$.

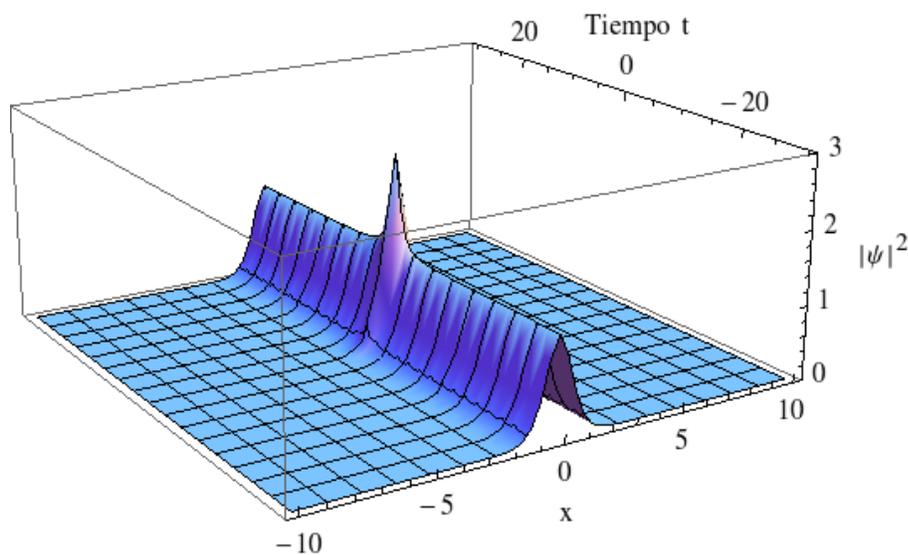


(b) Solución bajo los parámetros $v = -2$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 4-2: Soluciones de la Ecuación (4.1) para $d(t) = (4t - \text{sen } t)/2$ y $h(t) = -3e^{2t^2}$ con $-2 \leq t \leq 2$ y $-10 \leq x \leq 10$.



(a) Solución bajo los parámetros $v = -0.1$ y $\kappa(0) = 0$.



(b) Solución bajo los parámetros $v = -2$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 4-3: Vista tridimensional de las soluciones de la Ecuación (4.1) con $d(t) = t/(t^2+1)(t^2+2) - (\sin t)/2$ y $h(t) = -(3t^2+3)/(t^2+2)$ en los intervalos $-30 \leq t \leq 30$ y $-10 \leq x \leq 10$.

4.1.2. Perturbaciones del solitón de Peregrine: $b(t) = t^2 - \frac{1}{2}$, $c(t) = -2t$.

En esta parte se enfoca la atención en la construcción de soluciones que respondan a determinadas perturbaciones del conocido “solitón de Peregrine”, ver Ejemplo 5 en Capítulo 2. Para esto se plantea la siguiente ecuación de Schrödinger no lineal

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + x^2(t^2 - 1/2)\psi + 2itx\psi_x - id(t)\psi - e^{t^2}x\psi + 2ite^{t^2}\psi_x + h(t)|\psi|^2\psi \quad (4.5)$$

con $t, x \in \mathbb{R}$. Obsérvese inicialmente que los respectivos valores de α, δ, κ son:

$$\alpha(t) = \frac{t}{2}, \quad \delta(t) = te^{t^2}, \quad \kappa(t) = \kappa(0) + \frac{1}{8}e^{2t^2} \left(2t - \sqrt{2}D(\sqrt{2}t) \right),$$

donde $D(t)$ es la función Dawson dada por la expresión $D(t) = e^{-t^2} \int_0^t e^{z^2} dz$. En segunda instancia, la ecuación de Schrödinger no lineal autónoma asociada tiene la forma:

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Una solución para ésta última es (ver Ejemplo 5)

$$u(t, x) = A \exp(2iA^2t) \left(\frac{3 + 16iA^2t - 16A^4t^2 - 4A^2x^2}{1 + 16A^4t^2 + 4A^2x^2} \right), \quad A \in \mathbb{R}.$$

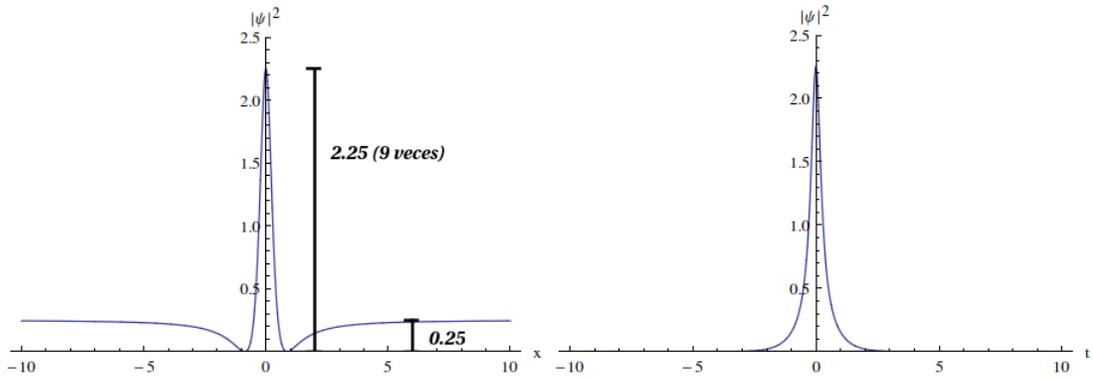
A continuación se inician las respectivas consideraciones para la funciones $d(t)$ y $h(t)$.

- a). **Solitón de Peregrine para la Ecuación (4.5):** $d(t) = \tanh t - t$ y $h(t) = -8 \cosh^2 t$.

Bajo estas elecciones se tiene que $\mu(t) = 4 \cosh^2 t$ y la solución correspondiente toma la forma:

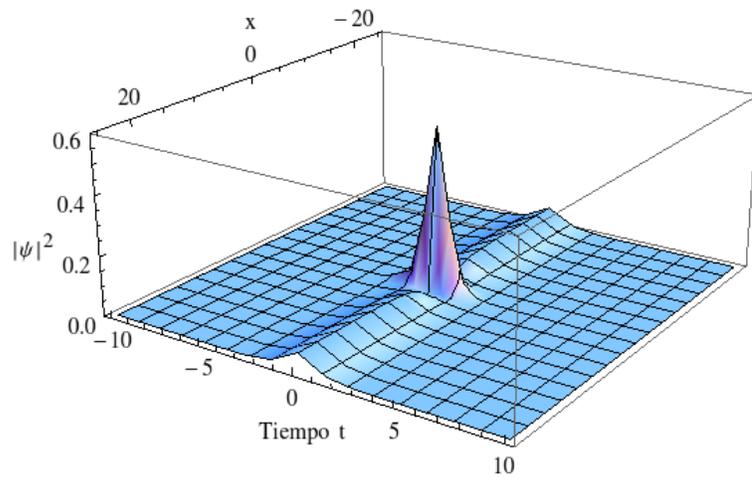
$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \exp \left[i \left(\frac{t}{2}x^2 + te^{t^2}x + \kappa(0) + \frac{1}{8}e^{2t^2} \left(2t - \sqrt{2}D(\sqrt{2}t) \right) + 2A^2t \right) \right] \\ &\times \frac{A}{2} \operatorname{sech} t \left(\frac{3 + 16iA^2t - 16A^4t^2 - 4A^2x^2}{1 + 16A^4t^2 + 4A^2x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

En este punto, se presenta una prueba fehaciente de la posibilidad de trasladar



(a) Perfil espacial del solitón de Peregrine perturbado en el tiempo $t = 0$.

(b) Perfil temporal del solitón de Peregrine perturbado en $x = 0$.



(c) Vista tridimensional del solitón de Peregrine

Figura 4-4: Dinámica del solitón de Peregrine para la Ecuación (4.5) para $d(t) = \tanh t - t$, $h(t) = -8 \cosh^2 t$, $A = 0.5$ y $\kappa(0) = 0$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-25 \leq x \leq 25$.

soluciones de gran relevancia como lo son aquellas de tipo “solitón de Peregrine” hacia ecuaciones de Schrödinger más generales (bajo ciertas perturbaciones). En la parte (a) de la Figura 4-4 se puede apreciar que la solución construida aún preserva la propiedad que su perfil espacial tiene una amplitud de 9 veces la de su fondo continuo (como sucede con el clásico solitón de Peregrine, ver Ejemplo 5). Mientras tanto, el perfil temporal de la solución no posee dicho fondo continuo, ver parte (b) para esto.

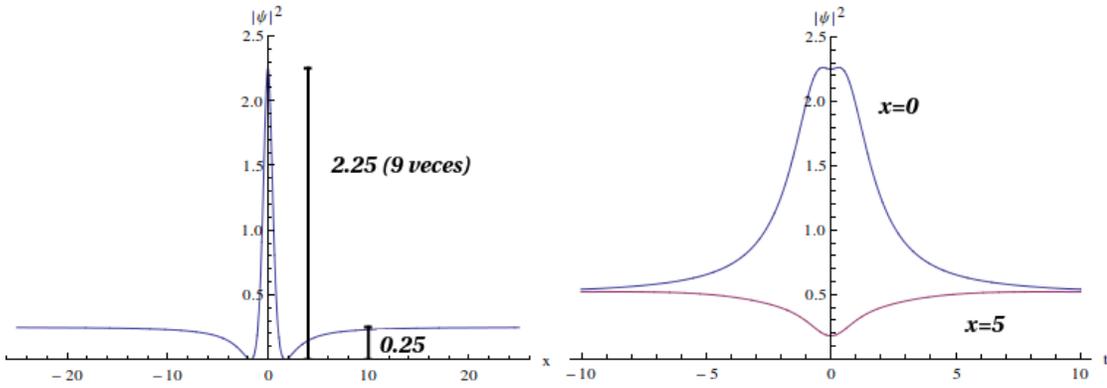
b). Solitón de Peregrine para la Ecuación (4.5) con: $d(t) = -(\tanh t \operatorname{sech} 2t + t)$

$$y h(t) = -\frac{2}{\tanh^2 t + 1}.$$

Los valores aquí considerados conllevan a las expresiones $\mu(t) = \frac{1}{\tanh^2 t + 1}$ y

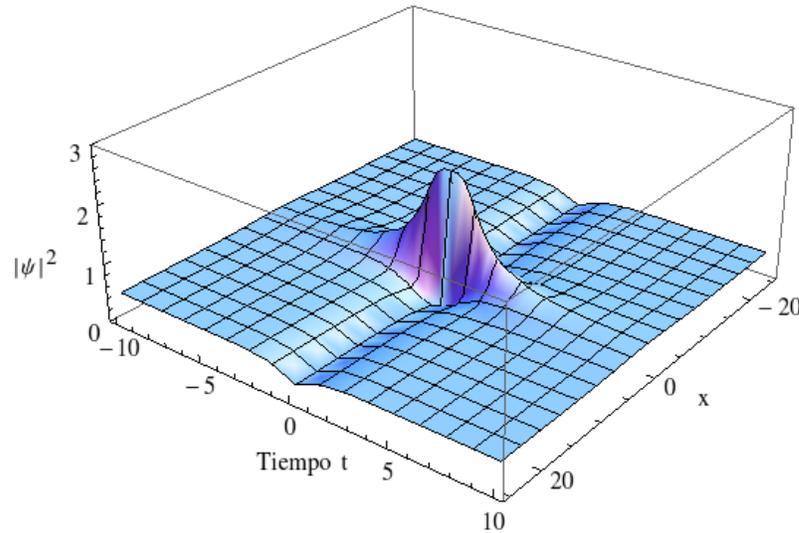
$$\begin{aligned} \psi(t, x) = & \exp \left[i \left(\frac{t}{2} x^2 + t e^{t^2} x + \kappa(0) + \frac{1}{8} e^{2t^2} (2t - \sqrt{2} D(\sqrt{2}t)) + 2A^2 t \right) \right] \\ & \times A \sqrt{\tanh^2 t + 1} \left(\frac{3 + 16iA^2 t - 16A^4 t^2 - 4A^2 x^2}{1 + 16A^4 t^2 + 4A^2 x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Al igual que en el caso anterior, la solución aquí encontrada guarda la propiedad



(a) Perfil espacial del solitón de Peregrine perturbado en $t = 0$.

(b) Perfil temporal de solitón de Peregrine perturbado en $x = 0$ y $x = 5$.



(c) Evolucion tridimensional del solitón de Peregrine perturbado.

Figura 4-5: Solución de la Ecuación (4.5) con $d(t) = -(\tanh t \operatorname{sech} 2t + t)$, $h(t) = -2/(\tanh^2 t + 1)$, $A = 0.5$ y $\kappa(0) = 0$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-25 \leq x \leq 25$.

que caracteriza al clásico solitón de Peregrine de que su perfil espacial tiene amplitud máxima igual a 9 veces a la de su fondo circundante, ver parte (a) en la Figura 4-5 para esto. Por otro lado, en la parte (b) de dicha figura se puede observar las perturbaciones sufridas en el perfil temporal del solitón de Peregrine inicial.

c). Solución para la Ecuación (4.5) con: $d(t) = -(\sin 2t + t)$ y $h(t) = -2e^{-2\sin^2 t}$.

Con la elección de estos valores se tiene que $\mu(t) = e^{-2\sin^2 t}$, y por lo tanto la solución puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= A \exp \left[i \left(\frac{t}{2} x^2 + t e^{t^2} x + \kappa(0) + \frac{1}{8} e^{2t^2} \left(2t - \sqrt{2} D(\sqrt{2}t) \right) + 2A^2 t \right) + \sin^2 t \right] \\ &\times \left(\frac{3 + 16iA^2 t - 16A^4 t^2 - 4A^2 x^2}{1 + 16A^4 t^2 + 4A^2 x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

En esta parte la solución obtenida no preserva las propiedades que caracterizan al solitón de Peregrine, debido a que el perfil temporal y espacial de ésta se ven enteramente perturbados, ver Figura 4-6 para mejor apreciación.

4.1.3. Perturbaciones del solitón oscuro trasladado: $b(t) = 2 \tanh^2 t - 1$,
 $c(t) = -\tanh t$.

Se construyen tipos de solitones oscuros generales con amplitudes variables a partir del solitón oscuro trasladado dado en el Ejemplo 4. Para este hecho se propone la siguiente ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma:

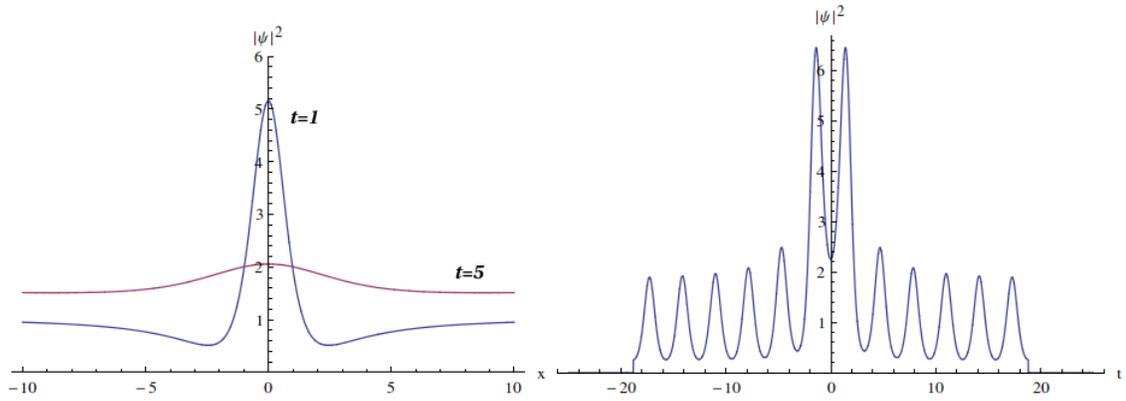
$$i\psi_t = -\psi_{xx} - \frac{x^2}{4} (1 - 2 \tanh^2 t) \psi + ix \tanh t \psi_x - id(t)\psi + h(t)|\psi|^2\psi, \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

En consecuencia, las funciones inmersas en la transformación son:

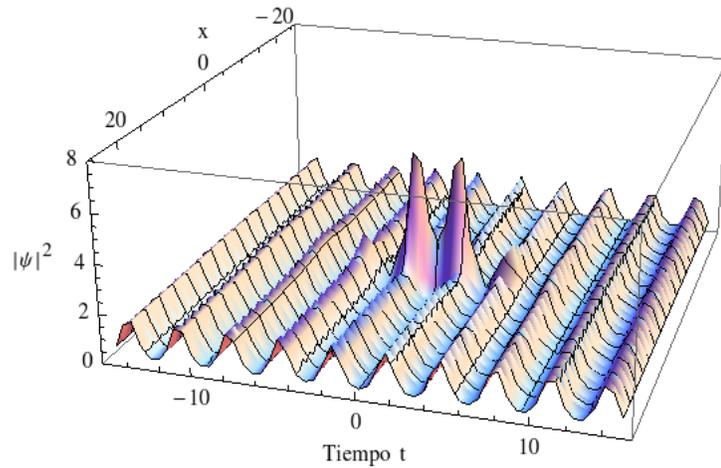
$$\alpha(t) = \frac{\tanh t}{4}, \quad \delta(t) = 0, \quad \kappa(t) = \kappa(0),$$

y la ecuación de Schrödinger no lineal asociada es:

$$iu_t + u_{xx} - |u|^2 u = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$



(a) Perfil espacial del solitón de Peregrine perturbado en los tiempos $t = 1$ y $t = 5$. (b) Perfil temporal del solitón de Peregrine perturbado en $x = 0$.



(c) Vista tridimensional de la solución

Figura 4-6: Solución de la Ecuación (4.5) con $d(t) = -(\sin 2t + t)$, $h(t) = -2e^{-2\sin^2 t}$, $A = 0.5$ y $\kappa(0) = 0$ para los valores en $-10 \leq t \leq 10$ y $-25 \leq x \leq 25$.

Una solución para esta última ecuación es de la forma (ver Ejemplo 4):

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[-\frac{i}{2}(v^2 + 4A^2)t \right] [v - 2iA \tanh A(x - vt)], \quad A, v \in \mathbb{R}.$$

Para ver la dinámica de este tipo de soluciones, se pasará a considerar los siguientes casos.

- a). Un tipo de solitón brillante temporal para la Ecuación (4.9): $d(t) = \frac{\sin t}{2}$
y $h(t) = \cosh t e^{1-\cos t}$.

La respectiva expresión para la función $\mu(t)$ es, $\mu(t) = \cosh t e^{1-\cos t}$, por lo que la solución que se propone en este caso puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \exp \left[i \left(\frac{\tanh t}{4} x^2 + \kappa(0) - \frac{1}{2}(v^2 + 4A^2)t \right) + \frac{\cos t - 1}{2} \right] \\ &\times \frac{\sqrt{\operatorname{sech} t}}{\sqrt{2}} [v - 2iA \tanh A(x - vt)]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

El carácter sinusoidal de la función $d(t)$ le impregna a las soluciones de la Ecuación (4.9) un destacado comportamiento para ciertos valores del parámetro v (correspondiente a la velocidad del clásico solitón oscuro). Para un valor pequeño de éste, las soluciones describen el surgimiento de dos pulsos ligeramente separados cuyas amplitudes crecen a medida que se propagan hasta alcanzar un punto máximo. Después de este punto, sus amplitudes decrecen rápidamente hasta desvanecerse por completo, ver inciso (a) en Figura 4-7. Por otro lado, en la parte (b) se consigue la formación de un tipo de solitón brillante en la variable temporal t (su perfil temporal no cambia mediante su propagación).

b). Solución para la Ecuación (4.9) con: $d(t) = -\frac{1}{2}(\sin t \tanh(\cos t) + \tanh t)$ y $h(t) = \cosh(\cos t)$.

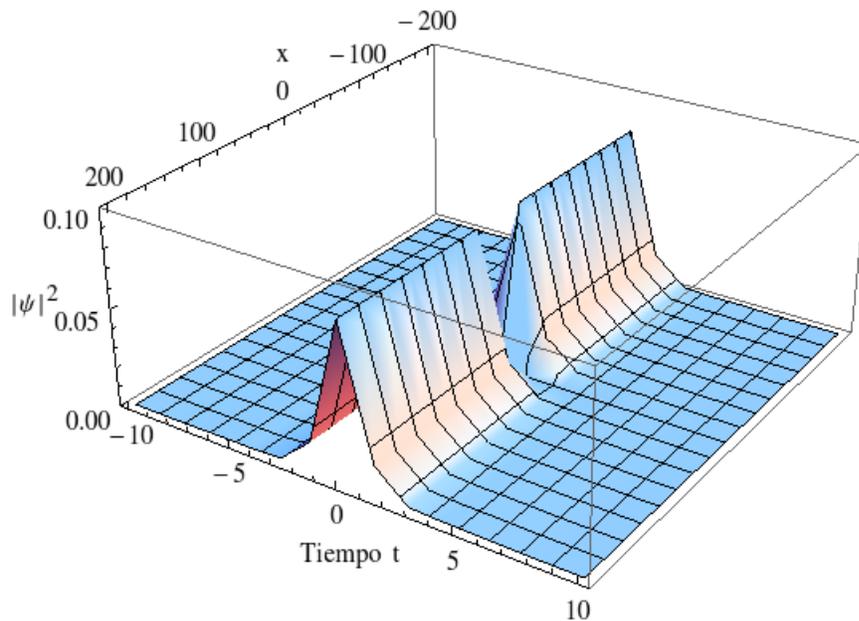
Las consideraciones aquí tomadas conducen a la función $\mu(t) = \cosh(\cos t)$ y la correspondiente solución toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \frac{\sqrt{\cosh(\cos t)}}{\sqrt{2}} \exp \left[i \left(\frac{\tanh t}{4} x^2 + \kappa(0) - \frac{1}{2}(v^2 + 4A^2)t \right) \right] \\ &\times [v - 2iA \tanh A(x - vt)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

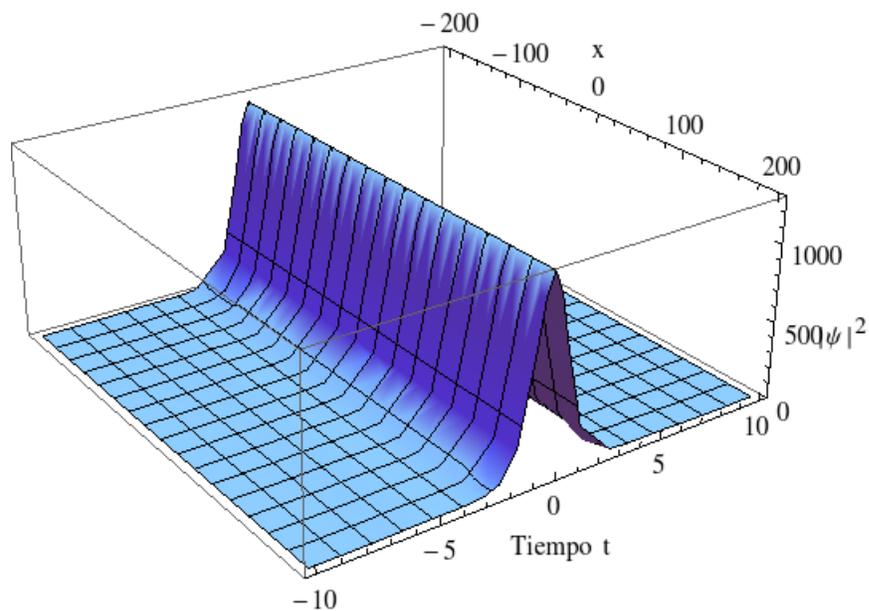
En la Figura 4-8 se muestra el comportamiento de la solución construida.

4.1.4. Sistema sin potencial cuadrático

Para esta parte se muestra la dinámica de las soluciones en ausencia de un potencial cuadrático, $b(t) = 0$. Considérese la ecuación de Schrödinger no autónoma:

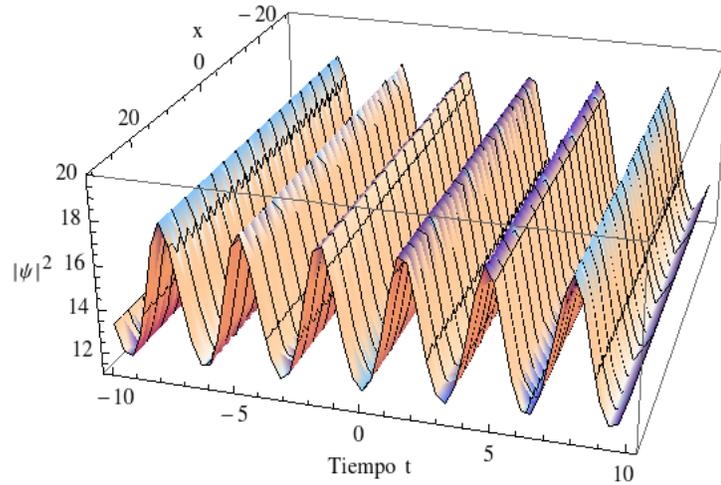


(a) Evolución de la solución para $A = 0.2$, $v = 0.001$ y $\kappa(0) = 1$.

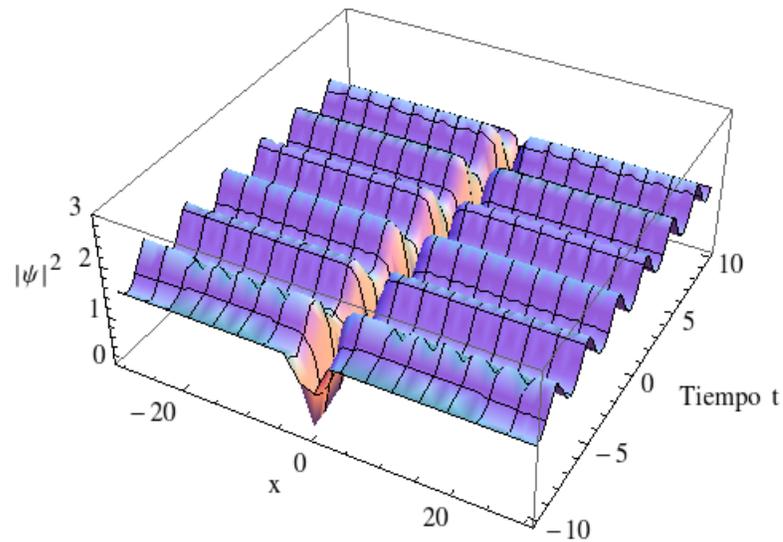


(b) Evolución de la solución para $A = 0.2$, $v = 50$ y $\kappa(0) = 1$, un tipo de “solitón brillante” en la variable temporal.

Figura 4-7: Soluciones de la Ecuación (4.9) con $d(t) = (\text{sen } t)/2$ y $h(t) = \cosh te^{1-\cos t}$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-200 \leq x \leq 200$.



(a) Evolución de la solución para $A = 0.2$, $v = 6$ y $\kappa(0) = 0$.



(b) Evolución de la solución para $A = 1$, $v = 0.1$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 4–8: Soluciones de la Ecuación (4.9) $d(t) = -(\text{sen } t \tanh(\cos t) + \tanh t)/2$ y $h(t) = \cosh(\cos t)$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-30 \leq x \leq 30$.

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - id(t)\psi - t^2x\psi + \frac{2}{3}it^3\psi_x + h(t)|\psi|^2\psi, \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

La ecuación de Schrödinger autónoma correspondiente a este problema tiene la forma

$$iu_t + u_{xx} - 2|u|^2u = 0, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

y admite la solución¹

$$u(t, x) = A \tanh(Ax) \exp(-2iA^2t), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, los valores de α , δ y κ son:

$$\alpha(t) = 0, \quad \delta(t) = \frac{t^3}{3}, \quad \kappa(t) = \kappa(0) + \frac{t^7}{63}.$$

- a). **Dinámica de las soluciones para la Ecuación (4.12) con:** $d(t) = 2t - 4 \tanh t$ y $h(t) = 2e^{2t^2} \operatorname{sech}^8 t$.

Para esta parte se tiene que $\mu(t) = e^{2t^2} \operatorname{sech}^8 t$, lo que permite construir una solución en términos explícitos para la Ecuación (4.12) en la forma a seguir:

$$\psi(t, x) = A \cosh^4 t \tanh(Ax) \exp \left[i \left(\frac{t^3}{3} x + \kappa(0) + \frac{t^7}{63} - 2A^2 t \right) - t^2 \right]. \quad (4.13)$$

Para ver la evolución en tiempo de las soluciones anteriores consulte Figura 4-9.

- b). **Ausencia del término de disipación/ganancia en la Ecuación (4.12):** $d(t) = 0$ y $h(t) = 2$.

Es posible construir soluciones tipo solitones oscuros clásicos para la ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes variables (4.12). Una primera forma de hacerlo es considerar a la función μ independiente de la variable temporal t , lo cual se logra a través de la condición $c(t) = 2d(t)$ (ver Ecuación (3.44)). Hecho lo anterior se obtiene en este caso que $\mu(t) = 1$ (al tomar $\mu(0) = 1$) y la correspondiente solución toma la forma:

$$\psi(t, x) = A \tanh(Ax) \exp \left[i \left(\frac{t^3}{3} x + \kappa(0) + \frac{t^7}{63} - 2A^2 t \right) \right]. \quad (4.14)$$

¹Defina $u(t, x) = w(t, x/\sqrt{2})$ donde w satisface la Ecuación (2.8) del Ejemplo 3 dado en el Capítulo 2.

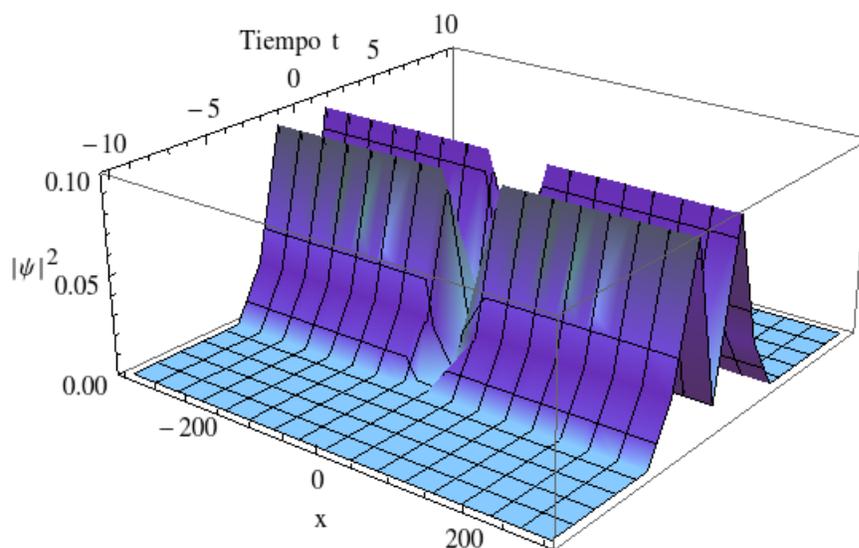
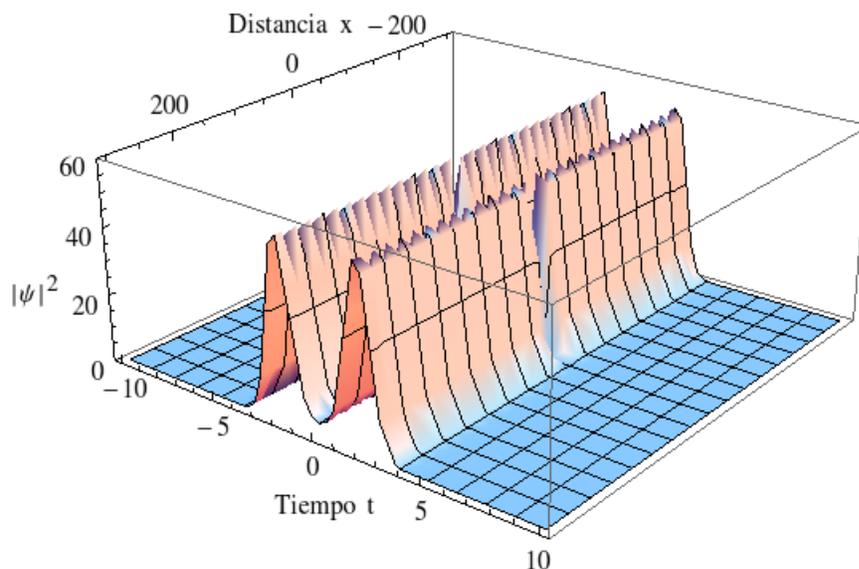
(a) Solución para $A = 0.1$ y $\kappa(0) = 0$.(b) Solución para $A = 2$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 4–9: Soluciones de la Ecuación (4.12) $d(t) = 2t - 4 \tanh t$ y $h(t) = 2e^{2t^2} \operatorname{sech}^8 t$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-300 \leq x \leq 300$.

Es importante notar que en términos generales la condición $c(t) = 2d(t)$, provee a la soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma (3.24) del mismo comportamiento que las soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal usual (3.49) (la forma en que se distribuyen las soluciones de ambas ecuaciones es

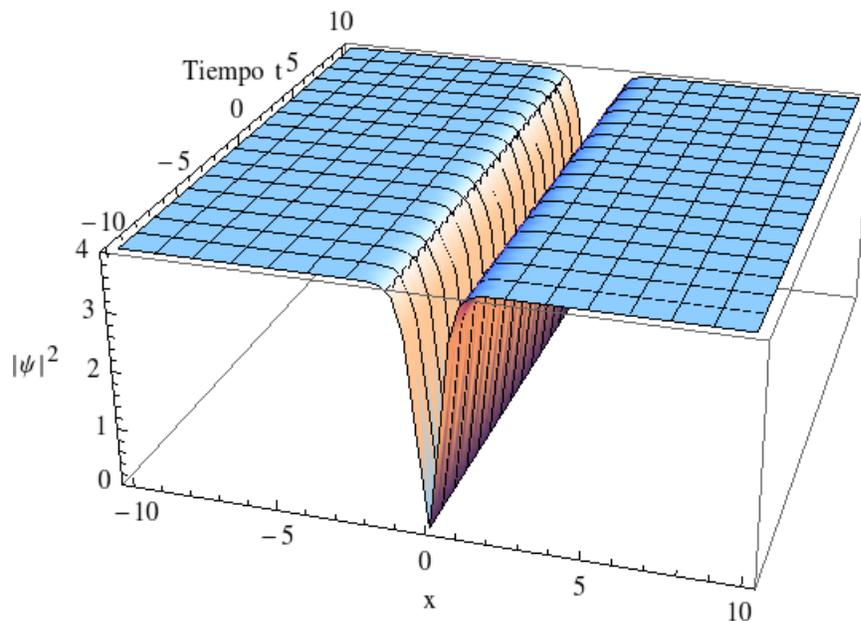
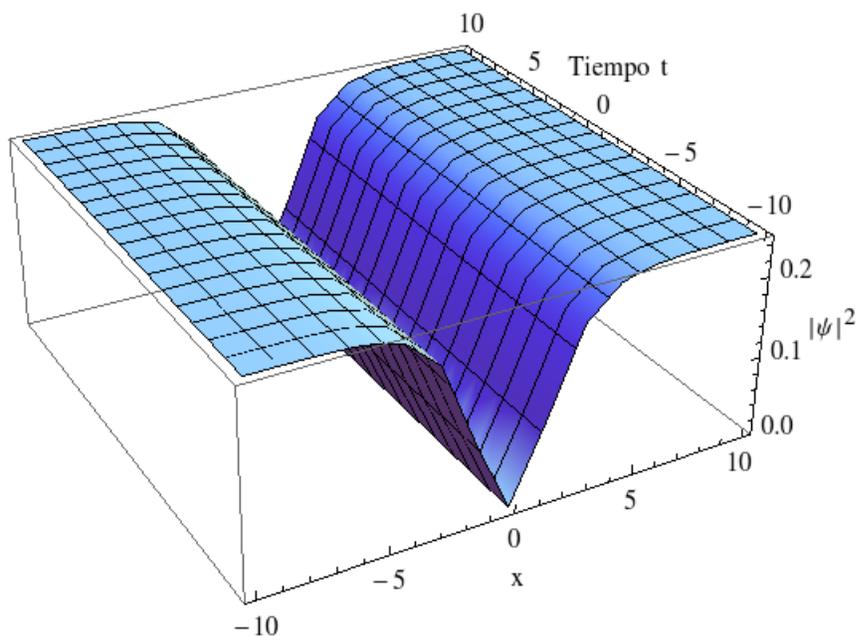
(a) Solución para $A = 2$ y $\kappa(0) = 0$.(b) Solución para $A = 0.5$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 4-10: Soluciones de la Ecuación (4.12) $d(t) = 0$ y $h(t) = 2$ en los intervalos $-10 \leq t \leq 10$ y $-10 \leq x \leq 10$.

la misma). En la Figura 4-10 se puede observar el solitón oscuro clásico construido para distintos valores de A .

4.2. Soluciones locales para algunas ecuaciones de Schrödinger no lineales no autónomas

En la sección anterior fué posible construir y estudiar la dinámica de soluciones explícitas para la ecuación de Schrödinger (3.24) definidas para todo tiempo t , encontrando una diversidad de comportamientos para elecciones adecuadas de los coeficientes.

En lo que concierne a esta parte, no se intenta abundar en la construcción de soluciones locales para el tipo de ecuación de Schrödinger aquí estudiada, ya que el único fin es mostrar que de alguna u otra forma existen soluciones que no poseen un buen comportamiento en todo instante del tiempo (por ejemplo existencia de singularidades), dando como resultado el no poderlas extender hacia todo $t \in \mathbb{R}$.

4.2.1. Traslaciones de un solitón brillante local: $b(t) = -\frac{1}{4}$, $c(t) = -\tan t$.

En este caso, es importante considerar la siguiente ecuación de Schrödinger con potencial cuadrático constante $b(t) = -\frac{1}{4}$:

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - \frac{x^2}{4}\psi + ix \tan t \psi_x - x\psi + 2i \tan t \psi_x - \sec t |\psi|^2 \psi, \quad |t| < \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Como primera medida, la ecuación anterior tiene como ecuación de Schrödinger no lineal estándar asociada

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0, \quad |t| < \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

la cual presenta como una solución a la función (ver Ejemplo 2):

$$u(t, x) = A \exp \left[i \left(\frac{v}{2}x + \frac{2A^2 - v^2}{4}t \right) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{A}{\sqrt{2}}(x - vt) \right], \quad A, v \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, los valores de la funciones α , δ , κ y μ correspondientes a este problema son respectivamente

$$\alpha(t) = \frac{\tan t}{4}, \quad \delta(t) = \tan t, \quad \kappa(t) = \kappa(0) + \tan t - t, \quad \mu(t) = \sec t,$$

aquí la localidad surge del hecho de construir la función $\mu(t)$ a través de la Ecuación (3.44), por lo que se hace necesaria la continuidad de la función $c(t) = -\tan t$ en todo momento t . Usando las ecuaciones anteriores se construye una solución para la Ecuación (4.15) en la siguiente forma:

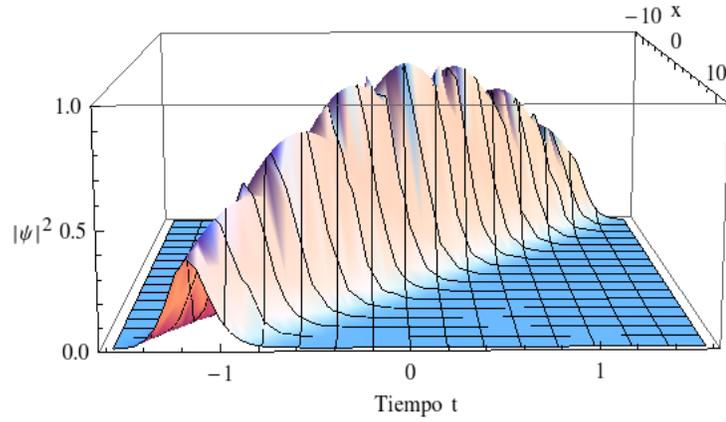
$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= A \exp \left[i \left(\frac{\tan t}{4} x^2 + x \left(\tan t + \frac{v}{2} \right) + \kappa(0) + \tan t + t \left(\frac{2A^2 - v^2}{4} - 1 \right) \right) \right] \\ &\times \sqrt{\cos t} \operatorname{sech} \left[\frac{A}{\sqrt{2}} (x - vt) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Una visualización del comportamiento de las soluciones de la Ecuación (4.15) son presentadas en la Figura 4-11. Las gráficas (a) y (b) muestran la evolución de un pulso que se traslada hacia la izquierda y derecha respectivamente, dichos comportamientos responden a elecciones negativas y positivas de v . El pulso inicial ($t = 0$) con perfil tipo “sech (x)” y amplitud $A = 1$, experimenta un leve decaimiento en su amplitud como respuesta a la acción del término “ $\cos t$ ” para valores de t tales que $|t| \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

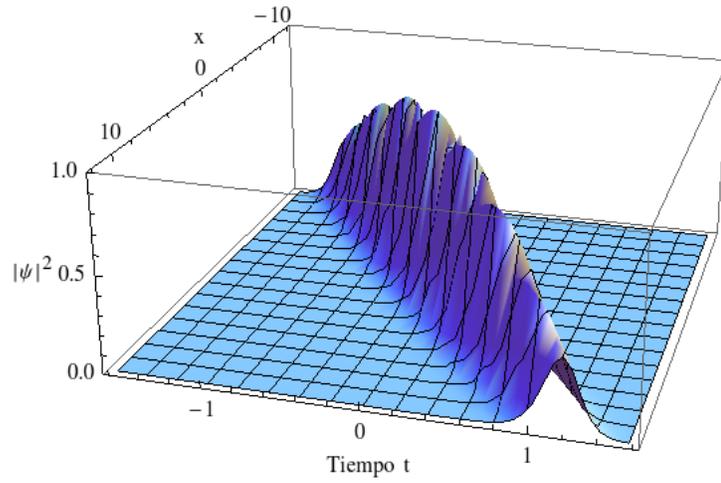
4.2.2. Singularidad en tiempo finito: $b(t) = e^t + 4e^{2t}$, $c(t) = -4e^t$.

A través de un potencial cuadrático cuya dependencia en tiempo es de tipo exponencial es posible la formulación de soluciones explícitas. En efecto, asúmase la ecuación

$$i\psi_t - \psi_{xx} + (e^t + 4e^{2t})x^2\psi + 4ixe^t\psi_x + i(2e^t - 5\sec^2 5t)\psi - 2e^{-2\tan 5t}|\psi|^2\psi = 0, \quad (4.17)$$



(a) Solución para $A = 1$, $v = -10$ y $\kappa(0) = 1$.



(b) Solución para $A = 1$, $v = 10$ y $\kappa(0) = 1$.

Figura 4-11: Soluciones de la ecuación (4.15) en los intervalos $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y $-12 \leq x \leq 12$.

con $|t| < \frac{\pi}{10}$, la cual admite las funciones:

$$\alpha(t) = e^t, \quad \delta(t) = 0, \quad \kappa(t) = \kappa(0), \quad \mu(t) = e^{-2 \tan 5t}.$$

Ahora, la ecuación asociada tiene la forma

$$iu_t - u_{xx} - 2|u|^2u = 0, \quad |t| < \frac{\pi}{10}, \quad x \in \mathbb{R},$$

y tiene como solución (ver Ejemplo 1)

$$u(t, x) = \sqrt{v} \operatorname{sech}(\sqrt{v}x) \exp(-ivt).$$

Entonces una solución para la Ecuación (4.17) está dada por:

$$\psi(t, x) = \sqrt{v} \operatorname{sech}(\sqrt{v}x) \exp [i(e^t x^2 + \kappa(0) - vt) + \tan 5t]. \quad (4.18)$$

En la Figura 4-12 se ilustra el comportamiento de la solución anterior. En ésta se observa el carácter creciente no acotado de las soluciones para valores cercanos a $t = \frac{\pi}{10}$ (singularidad en el tiempo $t = \frac{\pi}{10}$). Este mismo hecho evita extender las soluciones a todo instante del tiempo.

4.3. Unicidad de dos problemas de Cauchy en el espacio $L_t^\infty L_x^q$ con $q = 2, \infty$

El propósito de esta sección consiste en mostrar la aplicación de la Proposición 2, por lo que apoyados en las soluciones construidas anteriormente (ver parte (a) de la Sección 4.1.1 y Sección 4.2.1) se presentan las únicas soluciones para dos problemas de valor inicial para ciertas ecuaciones de Schrödinger no lineales con coeficientes dependiendo del tiempo.

4.3.1. Unicidad de una solución global

El problema de valor inicial para la ecuación de Schrödinger no autónoma con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [-T, T]$ para todo $T > 0$

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + \frac{x^2}{4} (\sin^2 t - \cos t) \psi + ix \sin t \psi_x - i \sin t \psi - 3e^{(3-3\cos t)} |\psi|^2 \psi$$

$$\psi(0, x) = \sqrt{-\frac{2v}{3}} \operatorname{sech}(\sqrt{-v}x) \exp [i\kappa(0)], \quad \kappa(0) \in \mathbb{R}, v < 0,$$

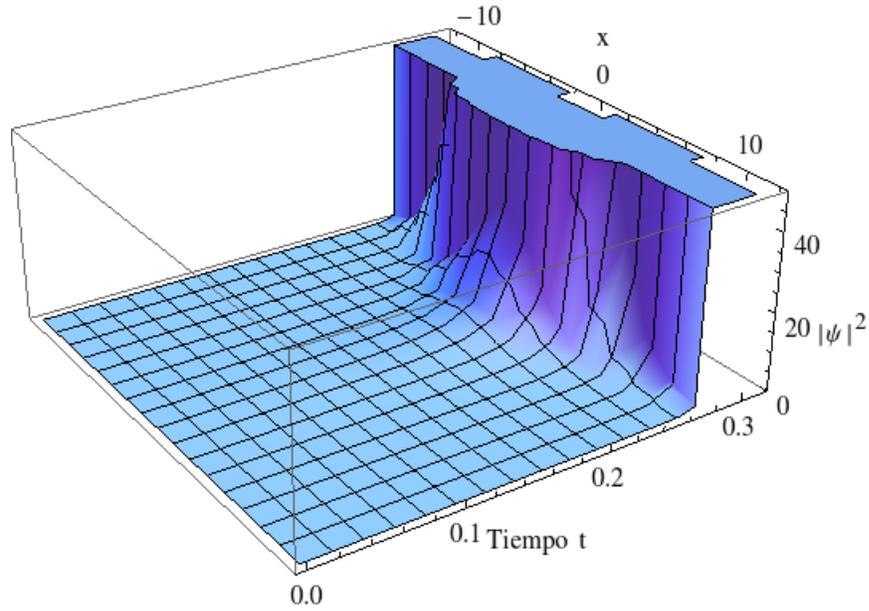
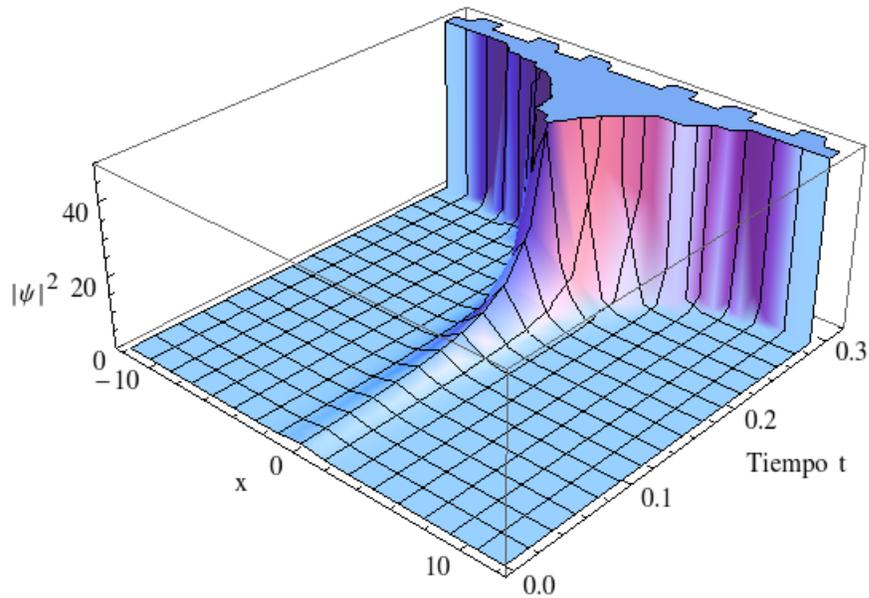
(a) Solución para $A = 1$, $v = 0.1$ y $\kappa(0) = 0$.(b) Solución para $A = 0.1$, $v = 1$ y $\kappa(0) = 0$.

Figura 4-12: Soluciones de la Ecuación (4.17) en los intervalos $0 \leq t \leq \frac{\pi}{10}$ y $-12 \leq x \leq 12$.

tiene una solución de la forma (ver la solución periódica de la Sección 4.1.1):

$$\psi(t, x) = \sqrt{-\frac{2v}{3}} \operatorname{sech}(\sqrt{-v}x) \exp \left[\frac{3}{2} (\cos t - 1) + i \left(\frac{x^2}{4} \sin t + \kappa(0) - vt \right) \right].$$

Claramente dicha solución pertenece a la clase $C_{t,x}^2([-T, T] \times \mathbb{R})$. Como se satisfacen las condiciones (ver Ejemplo 7),

$$\begin{aligned} \|\operatorname{sech}(\sqrt{-v}x)\|_{L_x^2(\mathbb{R})} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{-v}}, & \|\operatorname{sech}(\sqrt{-v}x)\|_{L_x^\infty(\mathbb{R})} &= 1, \\ \|e^{\frac{3}{2}(\cos t-1)}\|_{L_t^\infty([-T, T])} &= 1, & & \text{(no depende de } T\text{),} \end{aligned}$$

entonces la solución satisface

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_t^\infty L_x^p([-T, T] \times \mathbb{R})} &= \left\| \left\| \sqrt{-\frac{2v}{3}} \operatorname{sech}(\sqrt{-v}x) e^{\frac{3}{2}(\cos t-1)} \right\|_{L_x^p(\mathbb{R})} \right\|_{L_t^\infty([-T, T])} \\ &= \sqrt{-\frac{2v}{3}} \|\operatorname{sech}(\sqrt{-v}x)\|_{L_x^p(\mathbb{R})} \|e^{\frac{3}{2}(\cos t-1)}\|_{L_t^\infty([-T, T])} \\ &= \begin{cases} \frac{2\sqrt[4]{-v}}{\sqrt{3}}, & \text{si } p = 2, \\ \sqrt{-\frac{2v}{3}}, & \text{si } p = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

En estas circunstancias, la Proposición 2 permite concluir que dicha solución es la única con la propiedad antes mostrada. Note la no dependencia de T en los argumentos anteriores, por lo que en realidad la solución local obtenida es a ciencia cierta una solución global del problema de Cauchy (definida para todo $t > 0$).

4.3.2. Unicidad de una solución local

Considere el problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger no lineal con $x \in \mathbb{R}$ y $|t| < \frac{\pi}{2}$,

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - \frac{x^2}{4}\psi + ix \tan t \psi_x - x\psi + 2i \tan t \psi_x - \sec t |\psi|^2 \psi \quad (4.19)$$

$$\psi(0, x) = A \operatorname{sech} \left(\frac{A}{\sqrt{2}} x \right) \exp \left[i \left(\frac{v}{2} x + \kappa(0) \right) \right], \quad (4.20)$$

con $\kappa(0) \in \mathbb{R}$ y $A > 0$. Este problema posee la siguiente solución (ver Sección 4.2.1):

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= A \exp \left[i \left(\frac{\tan t}{4} x^2 + x \left(\tan t + \frac{v}{2} \right) + \kappa(0) + \tan t + t \left(\frac{2A^2 - v^2}{4} - 1 \right) \right) \right] \\ &\times \sqrt{\cos t} \operatorname{sech} \left[\frac{A}{\sqrt{2}} (x - vt) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como se satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} \|\operatorname{sech} [A(x - vt)/\sqrt{2}] \|_{L_x^2(\mathbb{R})} &= \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{A}}, & \|\operatorname{sech} [A(x - vt)/\sqrt{2}] \|_{L_x^\infty(\mathbb{R})} &= 1, \\ \|\sqrt{\cos t}\|_{L_t^\infty((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))} &= 1, \end{aligned}$$

se desprende que

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_t^\infty L_x^p((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R})} &= \left\| \|A\sqrt{\cos t} \operatorname{sech} [A(x - vt)/\sqrt{2}] \|_{L_x^p(\mathbb{R})} \right\|_{L_t^\infty((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))} \\ &= A \left\| \sqrt{\cos t} \operatorname{sech} [A(x - vt)/\sqrt{2}] \|_{L_x^p(\mathbb{R})} \right\|_{L_t^\infty((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))} \\ &= \begin{cases} \sqrt{A}\sqrt[4]{8}, & \text{si } p = 2, \\ A, & \text{si } p = \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por lo tanto la función ψ dada en la Ecuación (4.21) es la única solución al problema de valor inicial (4.19)-(4.20) sobre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ y que satisface la característica (4.22). Note que dicha solución no puede ser extendida hacia una solución global, ya que la función “ $\cos t$ ” no se mantiene siempre positiva en toda la recta real. En cambio, la solución encontrada resta aún única en todo aquellos intervalos donde “ $\cos t$ ” sea positivo.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

5.1. Conclusiones

El propósito principal de este proyecto fue construir nuevas soluciones explícitas para un tipo de ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes dependiendo del tiempo (no autónoma). En esta tesis se usa una perturbación de la transformación establecida por Suslov en [5], entre la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma y la bien conocida ecuación de Schrödinger no lineal (autónoma). El primer interés fue estudiar la dinámica de las soluciones tipo solitón brillante, oscuro y Peregrine a través de la familia de multiparámetros (3.10)-(3.16). Como propósito secundario, se planteó el siguiente interrogante: ¿Es posible determinar condiciones en los coeficientes de la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma y en la transformación para garantizar la unicidad de las soluciones para un problema de Cauchy?.

En cuanto al primer objetivo trazado, fue posible observar la dinámica que presentan dos nuevas soluciones solitónicas (brillante y oscuro) para la ecuación de Schrödinger no lineal general (3.24) para variaciones en los multiparámetros (3.10)-(3.16), generando consigo solitones con flexiones en su eje hacia la izquierda y derecha, ver Figuras 3-1 y 3-2 respectivamente. La dificultad en la construcción de soluciones mediante la Transformación (3.25) recae sobre el sistema de Riccati (3.1)-(3.6) que regula la dinámica de dicha transformación, el cual exige un balance complejo entre los coeficientes de la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma para su óptimo funcionamiento. En consecuencia, se propuso llevar a cabo dicha investigación a través de la transformación particular dada por la Ecuación (3.46), resultante

de eliminar las escalas en tiempo y espacio inmersas en la transformación original (3.25), la cual hizo factible el observar el comportamiento de las soluciones tipo solitones (brillante, oscuro y Peregrine) frente a la variación de los términos de disipación/ganancia, $d(t)$, y no linealidad, $h(t)$, de la ecuación de Schrödinger no autónoma (3.24). Sin embargo, esta última transformación demanda un vínculo tipo Riccati entre los coeficientes $b(t)$ y $c(t)$ de la ecuación Schrödinger no lineal general (ver Ecuación (3.41)), por lo que cierta “arbitrariedad” en los coeficientes se ve perdida en comparación con la transformación originalmente propuesta.

La respuesta afirmativa al interrogante de la unicidad surgió asimismo como consecuencia de la transformación particular introducida, debido a las propiedades adicionales que ésta trajo consigo; entre éstas una relación entre las soluciones de ambas ecuaciones de Schrödinger no lineales lo que permitió determinar una estructura general para las soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma. Como desenlace de la relación observada se precisan las condiciones necesarias en los coeficientes de la ecuación de Schrödinger general para garantizar la unicidad de las soluciones de un problema de valor inicial en el espacio de funciones $L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})$ con $q = 2, \infty$.

Finalmente, en el proceso de obtener los resultados se notó que las siguientes observaciones serán útiles para futuras investigaciones:

Aunque la transformación original dada en la Ecuación (3.25) aparentemente brinda cierto grado de “libertad” a los coeficientes de la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma (3.24), la exigencia del sistema de Riccati asociado dificulta el proceso de construcción de las soluciones.

El estudio de un problema de Cauchy de valor inicial y la construcción de soluciones explícitas para este tipo de ecuaciones resulta más viable a través del uso de la transformación particular aquí introducida, Ecuación (3.46), que mediante la transformación dada en sus términos generales, Ecuación (3.25).

5.2. Discusión y trabajos futuros

Inicialmente se le recuerda al lector la siguiente definición:

Definición 3 (Espacio de Schwartz). *Se define el espacio de Schwartz*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}.$$

Este espacio es dotado de la familia contable de seminormas

$$\|f\|_{\alpha, \beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|.$$

En consecuencia dicho espacio tiene estructura de espacio métrico definiendo la métrica

$$\rho(f, g) = \sum_{\alpha, \beta} 2^{-|\alpha| - |\beta|} \frac{\|f - g\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|f - g\|_{\alpha, \beta}}, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tienen la propiedad de ser suaves y todas sus derivadas tienden a cero más rápido que cualquier potencia de $|x|$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Ejemplo 9. *Para cualquier $a > 0$, la función e^{-ax^2} es un elemento del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

El problema de Cauchy en el espacio de Schwartz: En la Proposición 2 de la Sección 3.6 se probó que bajo el cumplimiento de las Ecuaciones (3.41)-(3.45) (corresp. a $l_0 = -1$) y los requerimientos $c(t), d(t), f(t) \in C^1([-T, T])$ y $h(t) = -\lambda\mu(t)$ con $\lambda > 0$ el problema de Cauchy (3.51)-(3.52) admite una única solución clásica en el espacio $L_t^\infty L_x^q([-T, T] \times \mathbb{R})$ para $q = 2, \infty$. En este contexto, un primer trabajo futuro consistirá en probar o refutar que mediante las hipótesis adicionales $l_0 = 1, c(t), d(t), f(t) \in C^\infty([0, \infty))$ y $\psi_0 \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R})$ se puede garantizar la existencia de una única solución del problema de valor inicial (3.51)-(3.52) en el espacio $C_t^\infty \mathcal{S}_x([0, T] \times \mathbb{R})$, aquí el resultado correspondiente al caso autónomo, ver Teorema 3.1 de [26], podría ser de vital importancia en el transcurso de la prueba.

Dentro de los proyectos que podrían realizarse como continuación de esta tesis pueden ser:

- Construir nuevas soluciones para el tipo de ecuación de Schrödinger no lineal (3.24) utilizando los multiparámetros (3.10)-(3.16).
- Utilizar la transformación particular (3.46) propuesta en esta tesis para el estudio del problema de Cauchy (3.51)-(3.52) en espacios más relevantes como los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ con $s = 0, 1, 2$.
- Estudiar la aproximación numérica del problema de Cauchy (3.51)-(3.52) empleando la transformación particular (3.46).

APÉNDICES

Apéndice A

VERIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE SCHRÖDINGER NO LINEALES NO AUTÓNOMAS

El contenido de este apéndice consta de las verificaciones simbólicas a través del programa “Mathematica” de las soluciones construidas para la ecuación de Schrödinger no lineal no autónoma (3.24).

A.1. Verificación de la solución (3.30)

Definición de la ecuación diferencial parcial (3.29):

```
pde1 = I*D[\Psi][x, t], t] + (1/2)*D[\Psi][x, t], {x, 2}]
      + ((Sech[t]*E^(2*Sinh[t]))/(2*Sinh[t] + Cosh[t]))
      * \Psi[x, t]*(Abs[\Psi][x, t])^(2)
      + I*x*Tanh[t]*D[\Psi][x, t], x] + I*Cosh[t]*\Psi[x, t]
      == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol1 = \Psi -> Function[{x, t}, Sqrt[v]*Sqrt[Coth[t]/(2
      + Coth[t])]* Exp[I*((2*Sech[t]*Csch[t]*(x^2)
      + 2*\Delta0*Csch[t]*x - \Delta0^(2) + v)/(4
      + 2*Coth[t]) + \Kappa0 - v*\Gamma0)
      - Sinh[t]]*Sech[Sqrt[v]*((Csch[t]*x - \Delta0)/(2
      + Coth[t]) + \Epsilon0)]];]
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde1 /. sol1;
test11 = Assuming[{{x, \[Epsilon]0, \[Delta]0, \[Gamma]0, \[Kappa]0} \
\[Element] Reals, v > 0, t > 0}, FullSimplify[test1]]
```

True

A.2. Verificación de la solución (3.32)

Definición de la ecuación diferencial parcial (3.31):

```
pde2 = I*D\[Psi][x, t], t] + (Cosh[t]/2)*D\[Psi][x, t], {x, 2}]
- ((Cosh[t]*(x^2))/2)*\[Psi][x, t] + I*x*Cosh[t]
*D\[Psi][x, t], x] + ((I*Cosh[t])/2)*\[Psi][x, t]
- ((4*Cosh[t])/(1 + Sinh[t]))
*\[Psi][x,t]*(Abs\[Psi][x,t])^(2)== 0;
```

Solución a verificar:

```
sol2 = \[Psi] -> Function[{x, t}, (A/Sqrt[1 + Sinh[t]])
*Exp[I*(((-(x^2) + 2*\[Delta]0*Csch[t]*x - (\[Delta]0^2)
- 8*(A^2))/(2 + 2*Csch[t]))) + \[Kappa]0 + (A^2)*\[Gamma]0]]
*Tanh[A*((2*x*Csch[t] - 2*\[Delta]0)/(1 + Csch[t]))
+ \[Epsilon]0]]];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde2 /. sol2;
test11 = Assuming[{{x, \[Epsilon]0, \[Gamma]0, \[Delta]0, \[Kappa]0,
A} \[Element] Reals, t > 0}, FullSimplify[test1]]
```

True

A.3. Verificación de la solución (4.2), $d(t) = \sin t$ y $h(t) = -3e^{3-3\cos t}$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.1) correspondiente:

```
pde3 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
      + 3*E^(3 - 3*Cos[t])*\[Psi][x, t]*Abs[\Psi][x, t]]^2
      - ((Sin[t]^2 - Cos[t])*x^2)/4*\Psi][x, t]
      - I*x*Sin[t]*D[\Psi][x, t], x] + I*Sin[t]*\[Psi][x, t]
      == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol3 = \Psi -> Function[{x, t}, Sqrt[-(2/3)*v]*Sech[Sqrt[v]*x]
      *Exp[(3*Cos[t] - 3)/2 + I*(x^2/4*Sin[t] - v*t + \Kappa0)]];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test = pde3 /. sol3;
test1 = Assuming[{{x, t, \Kappa0} \Element Reals, v < 0},
      FullSimplify[test]]
```

True

A.4. Verificación de la solución (4.3), $d(t) = \frac{4t - \operatorname{sen} t}{2}$ y $h(t) = -3e^{2t^2}$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.1) correspondiente:

```
pde4 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
      + 3*E^(2*(t^2))*\Psi[x, t]*Abs[\Psi][x, t]]^2
      - ((Sin[t]^2 - Cos[t])*x^2)/4*\Psi[x, t]
      - I*x*Sin[t]*D[\Psi][x, t], x] + I*((4*t
      - Sin[t])/2)*\Psi[x, t] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol4 = \Psi -> Function[{x, t}, Sqrt[-(2/3)*v]*Sech[Sqrt[v]*x]
      *Exp[-(t^2) + I*(x^2/4*Sin[t] - v*t + \Kappa0)]];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test = pde4 /. sol4;
test1 = Assuming[{{x, t, \Kappa0} \Element Reals, v < 0},
      FullSimplify[test]]
```

True

A.5. Verificación de la solución (4.4), $d(t) = \frac{t}{(t^2+1)(t^2+2)} - \frac{\text{sen } t}{2}$ y
 $h(t) = -\frac{3t^2+3}{t^2+2}$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.1) correspondiente:

```
pde5 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+ 3*(((t^2) + 1)/((t^2) + 2))*\Psi[x, t]
* Abs[\Psi][x,t]^2 - ((Sin[t]^2 - Cos[t])*x^2)/4
*\Psi[x, t] - I*x*Sin[t]*D[\Psi][x, t], x]
+ I*(-(Sin[t]/2) + t/(((t^2) + 2)*((t^2) + 1)))
*\Psi[x, t] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol5 = \Psi -> Function[{x, t}, Sqrt[((t^2) + 2)/((t^2)
+ 1)]*Sqrt[-(2/3)*v]*Sech[Sqrt[-v]*x]*Exp[I*(x^2/4*Sin[t]
- v*t + \[Kappa]0)]];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test = pde5 /. sol5;
test1 = Assuming[{{x, t, \[Kappa]0} \[Element] Reals, v < 0},
FullSimplify[test]]
```

True

A.6. Verificación de la solución (4.6), $d(t) = \tanh t - t$ y $h(t) = -8 \cosh^2 t$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.5) correspondiente:

```
pde6 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+ 8*(Cosh[t]^2)*\Psi[x,t]*(Abs[\Psi][x, t])^(2)
- ((t^2) - (1/2))*(x^2)*\Psi[x,t] - 2*I*x*t
*D[\Psi][x, t], x] + I*(Tanh[t] - t)*\Psi[x, t]
+ Exp[t^2]*x*\Psi[x, t] - 2*I*t*Exp[t^2]
*D[\Psi][x, t], x] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol6 = \Psi -> Function[{x, t}, (A*Sech[t]/2)
* Exp[I*((x^2)*t)/2 + t*Exp[t^2]*x + \Kappa]0
+(Exp[2*(t^2)]/8)*(2*t - Sqrt[2]*DawsonF[Sqrt[2]*t])
+ 2*(A^2)*t)]*((3 + 16*I*(A^2)*t - 16*(A^4)*(t^2)
- 4*(A^2)*(x^2))/(1 + 16*(A^4)*(t^2) + 4*(A^2)*(x^2)))];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde6 /. sol6;
test11 = Assuming[{x, t, A, \Kappa]0} \Element Reals,
FullSimplify[test1]]
```

True

A.7. Verificación de la solución (4.7), $d(t) = -(\tanh t \operatorname{sech} 2t + t)$ y
 $h(t) = -\frac{2}{\tanh^2 t + 1}$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.5) correspondiente:

```
pde7 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+ (2/((Tanh[t]^2) + 1))*\Psi[x,t]*(Abs[\Psi][x, t])^(2)
- ((t^2) - (1/2))*(x^2)*\Psi[x,t]
- 2*I*x*t*D[\Psi][x, t], x] -I*(Sech[2*t]*Tanh[t]+t)
*\Psi[x, t] + Exp[t^2]*x*\Psi[x, t]
-2*I*t*Exp[t^2]*D[\Psi][x, t], x] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol7 = \Psi -> Function[{x, t}, A*Sqrt[(Tanh[t]^2) + 1]
*Exp[I*((x^2)*t)/2 + t*Exp[t^2]*x + \Kappa]0
+ (Exp[2*(t^2)]/8)*(2*t - Sqrt[2]*DawsonF[Sqrt[2]*t])
+ 2*(A^2)*t]*((3 + 16*I*(A^2)*t - 16*(A^4)*(t^2)
- 4*(A^2)*(x^2))/(1 + 16*(A^4)*(t^2) + 4*(A^2)*(x^2)))];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde7 /. sol7;
test11 = Assuming[{x, t, A, \Kappa]0} \Element Reals,
FullSimplify[test1]]
```

True

A.8. Verificación de la solución (4.8), $d(t) = -(\sin 2t + t)$ y
 $h(t) = -2e^{-2\sin^2 t}$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.5) correspondiente:

```
pde2 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+2*Exp[-2*(Sin[t]^2)]*\Psi[x,t]*(Abs[\Psi][x, t])^(2)
- ((t^2) - (1/2))*(x^2)*\Psi[x,t] - 2*I*x*t
*D[\Psi][x, t], x] - I*(Sin[2*t] + t)*\Psi[x, t]
+ Exp[t^2]*x*\Psi[x, t] - 2*I*t*Exp[t^2]*D[\Psi][x, t],x]
== 0;
```

Solución a verificar:

```
sol8 = \Psi -> Function[{x, t}, A*Exp[I*((x^2)*t)/2
+t*Exp[t^2]*x + \Kappa0 + (Exp[2*(t^2)]/8)
*(2*t - Sqrt[2]*DawsonF[Sqrt[2]*t]) + 2*(A^2)*t)
+ (Sin[t]^2)]*((3 + 16*I*(A^2)*t - 16*(A^4)*(t^2)
- 4*(A^2)*(x^2))/(1 + 16*(A^4)*(t^2) + 4*(A^2)*(x^2)))];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde8 /. sol8;
test11 = Assuming[{x, t, A, \Kappa0} \Element Reals,
FullSimplify[test1]]
```

True

A.9. Verificación de la solución (4.10), $d(t) = \frac{\sin t}{2}$ y $h(t) = \cosh t e^{1-\cos t}$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.9) correspondiente:

```
pde9 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
      - Cosh[t]*Exp[1 - Cos[t]]*\Psi[x,t]*(Abs[\Psi][x,t])^(2)
      + ((1 - 2*(Tanh[t]^2))*x^2)/4*\Psi[x, t]
      - I*x*Tanh[t]*D[\Psi][x, t], x] + (I*Sin[t])/2*\Psi[x, t]
      == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol9 = \Psi -> Function[{x, t}, (Sqrt[Sech[t]]/Sqrt[2])
      *Exp[I*(((x^2)*Tanh[t])/4 + k0 - (1/2)*((v^2) + 4*(A^2))*t)
      + (Cos[t] - 1)/2]*(v - 2*I*A*Tanh[A*(x - v*t)])];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde9 /. sol9;
test11 = Assuming[{x, t, A, k0, v} \[Element] Reals,
      FullSimplify[test1]]
```

True

A.10. Verificación de la solución (4.11), $d(t) = -\frac{1}{2}(\sin t \tanh(\cos t) + \tanh t)$
y $h(t) = \cosh(\cos t)$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.9) correspondiente:

```
pde10 = I*D[\Psi][x, t], t] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
- Cosh[Cos[t]]*\Psi[x,t]*(Abs[\Psi][x, t])^(2)
+ ((1 - 2*(Tanh[t]^2))*x^2)/4*\Psi[x, t]
- I*x*Tanh[t]*D[\Psi][x, t], x] - (1/2)*
*I*(Sin[t]*Tanh[Cos[t]] + Tanh[t])*\Psi[x, t] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol10 = \Psi -> Function[{x, t}, (Sqrt[Cosh[Cos[t]]]/Sqrt[2])
*Exp[I*(((x^2)*Tanh[t])/4 + k0 - (1/2)*((v^2)
+4*(A^2))*t)]*(v -2*I*A*Tanh[A*(x - v*t)])];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde10 /. sol10;
test11 = Assuming[{x, t, A, k0, v} \[Element] Reals,
FullSimplify[test1]]
```

True

A.11. Verificación de la solución (4.13), $d(t) = 2t - 4 \tanh t$ y
 $h(t) = 2e^{2t^2} \operatorname{sech}^8 t$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.12) correspondiente:

```
pde11 = I*D[\Psi][x, t], {t, 1}] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+ 2*I*(t - 2*Tanh[t])*\Psi[x, t] + (t^2)*x*\Psi[x, t]
- (2/3)*I*(t^3)*D[\Psi][x, t], {x, 1}]
- 2*(Sech[t]^8)*Exp[2*(t^2)]*(Abs[\Psi][x, t]]^2)
*\Psi[x, t] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol11 = \Psi -> Function[{x, t}, A*(Cosh[t]^4)*Tanh[A*x]
* Exp[I*(((t^3)/3)*x + \[Kappa]0 + (t^(7)/63) - 2*(A^2)*t)
- t^2]];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde11 /. sol11;
test11 = Assuming[{x, \[Kappa]0, A, t} \[Element] Reals,
FullSimplify[test1]]
```

True

A.12. Verificación de la solución (4.14), $d(t) = 0$ y $h(t) = 2$.

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.12) correspondiente:

```
pde12 = I*D[\Psi][x, t], {t, 1}] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+ I*(0)*\Psi[x, t] + (t^2)*x*\Psi[x, t]
- (2/3)*I*(t^3)*D[\Psi][x, t], {x, 1}]
- (2)*(Abs[\Psi][x, t]^2)*\Psi[x,t] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol12 = \Psi -> Function[{x, t}, A*Tanh[A*x]*Exp[I
*((t^3)/3)*x + \Kappa]0 + ((t^7)/63)
- 2*(A^2)*t]]];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde12 /. sol12;
test11 = Assuming[{x, \Kappa]0, A, t} \[Element] Reals,
FullSimplify[test1]]
```

True

A.13. Verificación de la solución (4.16).

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.15):

```
pde13 = I*D[\Psi][x, t], {t, 1}] + D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+ (1/4)*(x^2)*\Psi[x, t] + x*\Psi[x, t]
- I*x*Tan[t]*D[\Psi][x, t], {x, 1}] + Sec[t]
*(Abs[\Psi][x, t]^2)*\Psi[x, t] - 2*I*Tan[t]
*D[\Psi][x, t], {x, 1}] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol13 = \Psi -> Function[{x, t},
A*Sqrt[Cos[t]]*Sech[(A/Sqrt[2])*(x - v*t)]
*Exp[I*((Tan[t]*(x^2))/4 + (Tan[t] + (v/2))*x
+ \[Kappa]0 + Tan[t] + t*((2*(A^2) - (v^2))/4 - 1)]];
```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde13 /. sol13;
test11 = Assuming[{{x, \[Kappa]0, A, v} \[Element] Reals,
(-Pi/2) < t < (Pi/2)}, FullSimplify[test1]]
```

True

A.14. Verificación de la solución (4.18).

Definición de la ecuación diferencial parcial (4.17):

```
pde14 = I*D[\Psi][x, t], {t, 1}] -D[\Psi][x, t], {x, 2}]
+ (Exp[t] + 4*Exp[2 t])*(x^2)*\Psi[x,t]
+ 4*I*x*Exp[t]*D[\Psi][x, t], {x, 1}]
- 2*(Exp[-2 Tan[5 t]])*(Abs[\Psi][x, t]^2)*\Psi[x, t]
+I*(-5*(Sec[5 t]^2) + 2 Exp[t])*\Psi[x, t] == 0;
```

Solución a verificar:

```
sol14 = \Psi -> Function[{x, t}, Sqrt[v]*Exp[Tan[5*t]]
*Sech[Sqrt[v]*x]*Exp[I*(Exp[t]*(x^2) + \Kappa0 - v*t)]];

```

Verificación de la solución anterior:

```
test1 = pde814 /. sol14;
test11 = Assuming[{{x, \Kappa0, A} \Element Reals,
v > 0, (-Pi/10) < t < (Pi/10)}, FullSimplify[test1]]
```

True

Bibliografía

- [1] R. Cordero-Soto. Solutions for time-dependent Schrödinger equations with applications to quantum dots. *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics*, Vol. 12:253–262, 2011.
- [2] G.-P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press., New York, Forth edition, 2007.
- [3] T. Brugarino and M. Sciacca. Integrability of an inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation in Bose-Einstein condensates and fiber optics. *J. Math. Phys.*, Vol. 51, 2010.
- [4] H-M. Chen and C.S. Liu. Solitons in nonuniform media. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 37:693 – 697, 1976.
- [5] S-K. Suslov. On integrability of nonautonomous nonlinear Schrödinger equations. *A.M.S.*, Vol. 140. No. 9:3067–3082, 2012.
- [6] R. Cordero-Soto, R-M. Lopez, E. Suazo, and S-K. Suslov. Propagator of a charged particle with a spin uniform magnetic and perpendicular electric fields. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 84. No. 2-3:159–178, 2008.
- [7] E. Suazo and S-K. Suslov. Soliton-Like solutions for nonlinear Schrödinger equation with variable quadratic Hamiltonians. *Journal of Russian Laser Research*, Vol. 33, Issue 1.:63–83, 2010.
- [8] Alex Mahalov and Sergei K. Suslov. An Airy gun: Self-accelerating solutions of the time-dependent Schrödinger equation in vacuum. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, Vol. 377:33–38, 2012.
- [9] E. Suazo. Fundamental solutions of some evolution equations. *Ph.D. Dissertation, Arizona State University*, September 2009.

- [10] L. Mollenauer and J. Gordon. *Solitons in Optical Fibers: Fundamentals and Applications*. Elsevier Academic Press, 2006.
- [11] T. Dauxois and M. Peyrand. *Physics of Solitons*. Cambridge Univ. Press, 2006.
- [12] Inesperado Comportamiento de los Solitones Oscuros en un Superfluido Fermiónico. <http://francis.naukas.com/2013/07/19/inesperado-comportamiento-de-los-solitones-oscuros-en-un-superfluido-fermionico/>.
- [13] M. Lakshmanan, P. Muruganandam, and S. Rajendran. Bright and dark solitons in a quasi-1D Bose-Einstein condensates modelled by 1D Gross-Pitaevskii equation with time-dependent parameters. *Phys. D*, 239:366–386, 2010.
- [14] D. Benney and G. Roskes. Wave instabilities. *Studies Appl. Math.*, 48:377–385, 1969.
- [15] Y. S. Kivshar. Dark Solitons in Nonlinear Optics. *Journal of Quantum Electronics*, Vol. 29. No. 1:250–264, 1993.
- [16] Y. Kivshar and G.P. Agrawal. *Optical Solitons: From fibers to photonic crystals*. Academic Press., 2003.
- [17] L. Debnath. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser, Second edition, 2005.
- [18] V-E. Zakharov and A-B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet. Phys. JETP*, Vol. 34. No. 1, 1972.
- [19] V. Shrira and V. Georgjaev. What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? *J. Eng. Math.*, 2009.
- [20] T. Aktosun, F. Demontis, and C. Van der Mee. Exact Solutions to the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation. *Mathematics, Preprint Series, The University of Texas Arlington*, 2000.
- [21] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley Sons. Inc., 1978.

- [22] T. Tao. *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*. Number 106. American Mathematical Society, 2006.
- [23] Liu Chong, Yang Zhan-Ying, Zhang Ming, Zhang Tao, Yang Wen-Li, and Yue Rui-Hong. Dynamics of Nonautonomous Dark Solitons. *Commun. Theor. Phys.*, Vol. 59. No. 6:703–710, 2013.
- [24] Prasenjit Pal. Optical fiber communication system-theory analysis. *Electronics Communication Engineering Department, Asansol Engineering College*.
- [25] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley Sons, third edition, New York, 1998.
- [26] M. Tsutsumi. Weighted Sobolev spaces and rapidly decreasing solutions of some nonlinear dispersive wave equations. *Journal of Differential Equations*, Vol. 42:260 – 281, 1981.