

**MÉTODOS PARA ENCONTRAR INTERVALOS DE ESTIMACIÓN
PARA EL PROBLEMA ON/OFF**

Por

Devis Moises Alvarado Zavala

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICA (ESTADÍSTICA)

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2014

Aprobada por:

Karen Ríos Soto, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Edgardo Lorenzo González, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Wolfgang A. Rolke, Ph.D
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Omar Molina Bas, Ph.D
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Omar Colón Reyes, Ph.D
Director del Departamento

Fecha

Resumen de Tesis Presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

MÉTODOS PARA ENCONTRAR INTERVALOS DE ESTIMACIÓN PARA EL PROBLEMA ON/OFF

Por

Devis Moises Alvarado Zavala

2014

Consejero: Wolfgang Rolke
Departamento: Ciencias Matemáticas

Considera los métodos para encontrar intervalos de estimación para alguno o varios parámetros, cuando hay parámetros de interés y parámetros de estorbo utilizados en modelos de probabilidad del problema on/off. Hacemos la comparación en cada uno de los métodos del ancho del intervalo y de la probabilidad de cobertura, y con esto poder usar el método más adecuado para el problema. También hacemos algunas extensiones y el cálculo de integrales de forma exacta, lo que permite mejorar la precisión del intervalo y la cobertura. Los ejemplos que tratamos muestran que con algunos métodos obtenemos lo deseado, aunque la selección del método dependerá de la información disponible o del investigador.

Abstract of Thesis Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Sciences

**METHODS TO FIND INTERVALS ESTIMATION FOR THE
PROBLEM ON/OFF**

By

Devis Moises Alvarado Zavala

2014

Chair: Wolfgang Rolke
Major Department: Mathematical Sciences

We consider methods for finding intervals estimation for one or more parameters, when parameters of interest and nuisance parameters are used in probability models of the on/off problem. We make the comparison for each of the methods, the interval width and coverage probability, and thereby use the most appropriate method for the problem. Also we make some extensions and integral calculus accurately, thereby improving the accuracy of the range and coverage. The examples tried show that some methods we obtain what was wanted,, although the selection of the method depends on the information available or the investigator.

Copyright © 2014

por

Devis Moises Alvarado Zavala

A mis padres, y hermanos, gracias por el apoyo que me han brindado todos estos años.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis, el profesor Wolfwang Rolke, quien me ha guiado a través de mis estudios.

Para el profesor Paul Castillo que me ha animado a seguir adelante, y los profesos con los cuales tuve el privilegio de llevar cursos.

Para los profesores del Departamento de Matemáticas y su personal por haberme concedido la oportunidad de hacer mis estudios de maestría.

A mi familia, mis nuevos amigos que he conocido durante mi estancia en Puerto Rico, y a mis amigos hondureños por su apoyo constante.

Índice general

	<u>página</u>
RESUMEN EN ESPAÑOL	II
ABSTRACT ENGLISH	III
AGRADECIMIENTOS	VI
Índice de cuadros	IX
Índice de figuras	XI
LISTA DE ABREVIATURAS	XIII
LISTA DE SÍMBOLOS	XIV
1. INTRODUCCIÓN	1
2. PRELIMINARES	4
2.1. Intervalos de Estimación	4
2.2. Métodos Para Encontrar Intervalos de Estimación	6
2.2.1. Invirtiendo una Prueba Estadística	7
2.2.2. Cantidades Pivote	10
2.2.3. Pivoteando la CDF	10
2.2.4. Intervalos Bayesianos	11
2.3. Distribución de LRT	12
2.4. Problema on/off	15
3. MÉTODOS USADOS EN EL PROBLEM ON/OFF	17
3.1. Método de FC	25
3.2. Método de RLC	29
3.3. Método CH	37
3.4. Métodos Bayesianos	45
4. IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS DE LOS MÉTODOS	51
4.1. Método FC	51
4.2. Método RLC	56
4.3. Método CH	64
4.4. Bayesiano	69
5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	72

APÉNDICES	74
A. Demostraciones de Teoremas	75

Índice de cuadros

<u>Tabla</u>	<u>página</u>
3-1. Ilustra las calculaciones en la construcción de la región de confianza para la señal μ , en presencia de un parámetro de estorbo $b = 3 \cdot 0$. Aquí se encuentra el intervalo de aceptación para $\mu = 0 \cdot 5$	24
3-2. Ilustra las calculaciones en la construcción de la región de confianza para la señal μ , en presencia de un parametro de estorbo $b = 3 \cdot 0$ con el metodo FC. Aquí se encuentra el intervalo de aceptación para $\mu = 0 \cdot 5$	26
4-1. Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0 \cdot 5, 1 \cdot 0$ y $3 \cdot 0$	52
4-2. Intervalos del 99,9 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0 \cdot 5, 1 \cdot 0$ y $3 \cdot 0$	53
4-3. Intervalos del 99,9 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con una eficiencia de $\epsilon = 0 \cdot 8, 0 \cdot 9$ y $b = 3 \cdot 0$	55
4-4. Intervalos del 95 % para μ con el método RLC, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 0, 1, 2$ y $b = 0 \cdot 5$, con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	57
4-5. Intervalos del 95 % para μ con el método RLC, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 2 \cdot 5$, con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	58
4-6. Intervalos del 95 % para μ con el método RLC, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 5 \cdot 0$, con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	60
4-7. Intervalos del 99.9 % para μ con el método RLC, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 0, 1, 2$ y $b = 0 \cdot 5$, con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	61
4-8. Intervalos del 99.9 % para μ con el método RLC, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 2 \cdot 5$, con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	62
4-9. Intervalos del 99.9 % para μ con el método RLC, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 5 \cdot 0$, con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	63
4-10. Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0 \cdot 5$, usando FC, y CH con $\sigma_b = 0 \cdot 1$	65
4-11. Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0 \cdot 5$, usando FC, y CH con $\sigma_b = 0 \cdot 25$	66

4-12. Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 5 \cdot 0$, usando FC, y CH con $\sigma_b = 0 \cdot 4$. . .	67
4-13. Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0 \cdot 5$, CH con $\delta = 0 \cdot 1, 0 \cdot 25, 0 \cdot 4$ e incertidumbre Γ	68
4-14. Intervalos de credibilidad del 95 % para μ con distribuciones a priori; $\mu \sim \Gamma(1, 1)$ y $b \sim \Gamma(1, 1)$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$. (Bayesiano)	70
4-15. Intervalos de credibilidad del 95 % para μ con distribuciones a priori; $\mu \sim \Gamma(3, 2)$ y $b \sim \Gamma(3, 2)$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	71
4-16. Intervalos de credibilidad del 95 % para μ con distribuciones a priori; $\mu \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$ y $b \sim b^{-\frac{1}{2}}$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$	71

Índice de figuras

<u>Figura</u>	Índice de figuras	<u>página</u>
2-1.	Intervalos de Confianza del 95 % para $\mu \geq 0$, de una Doble Exponencial(μ, σ).	15
3-1.	Intervalos de Confianza del 90 % para μ , de una v.a $N(\mu, 1)$.	19
3-2.	Banda de Confianza del 90 %, de una v.a $N(\mu, 1)$, con $\mu \geq 0$, usando un método Clásico.	21
3-3.	Banda de Confianza del 90 %, para una v.a $Pois(\mu + b)$, usando el método de Neyman.	23
3-4.	Probabilidad de Cobertura de los IC del 90 % para μ , usando el método de Neyman.	24
3-5.	Banda de Confianza del 90 %, para una v.a $Pois(\mu + b)$, usando el método de FC.	27
3-6.	Probabilidad de Cobertura de los IC del 90 % para μ , usando el método FC.	27
3-7.	Región de confianza del 90 % con el método RLC, para μ y b simultáneamente, con $x = 3, y = 3, \tau = 2$.	32
4-1.	Probabilidad de Cobertura para la señal media μ con el método FC, para $b = 0.5, 1.0$ y 3.0 de los IC95 %.	52
4-2.	Probabilidad de Cobertura para la señal media μ con el método FC, para $b = 0.0, 1.0$ y 3.0 de los IC99,9 %.	54
4-3.	Comparación de la probabilidad de cobertura para la señal media μ con el método FC, para $b = 3.0$ y $\epsilon = 0.8$ de los IC99,9 %.	55
4-4.	Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 0.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC95 %.	57
4-5.	Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 2.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC95 %.	59
4-6.	Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 5.0$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC95 %.	60
4-7.	Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 0.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC99.9 %.	61

4-8. Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 2.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC99.9%.	62
4-9. Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 5.0$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC99.9%.	63
4-10. Probabilidad de Cobertura de μ con CH, para $b = 0.5$ de los IC95%.	66
4-11. Probabilidad de Cobertura de μ con CH, para $b = 0.5$ de los IC95%.	67
4-12. Comparación de Probabilidades de Cobertura para μ con FC, CH Y CH modificado, para $b = 5.0$, de los IC95%.	68
4-13. Comparación de Probabilidades de Cobertura para μ con FC, CH Y CH modificado, para $b = 5.0$, de los IC95%.	69

LISTA DE ABREVIATURAS

i.i.d	Independiente e idénticamente distribuido.
p.d.f	Función de densidad de probabilidad.
c.d.f	Función de distribución acumulada.
v.a	Variable aleatoria.

LISTA DE SÍMBOLOS

$N(0, 1)$	Función de Densidad de Probabilidad Normal con media 0 y varianza 1.
$N(\mu, \sigma^2)$	Función de Densidad de Probabilidad Normal con media μ y varianza σ^2
$\Gamma(x)$	Función gamma.
$\Gamma(\alpha, \beta)$	Función de Densidad de Probabilidad Gamma de parametros α y β
$P(x \theta)$	Función de distribución de probabilidad(PDF) de X , que depende del parametro θ .
$\Phi(x)$	Función de distribución acumulada(CDF) de una $N(0, 1)$ hasta x .
$\Phi_X(t)$	Función de distribución acumulada(CDF) de una v.a X hasta t .

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En muchos problemas actuales, tanto en estadística como en teoría de la probabilidad o cualquier disciplina donde se apliquen, por ejemplo en física, el interés principal(en algunos problemas) es encontrar intervalos de estimación, de uno o varios parámetros, que tengan muy buena precisión y la cobertura correcta. Hasta el momento, este problema no tiene un método o una técnica específica que nos diga, cuál o cuales son los intervalos adecuados.

Existen una variedad de modelos de probabilidad en los que el interés principal es encontrar intervalos de confianza o intervalos de credibilidad cuando hay parámetros de interés y parámetros de estorbo. A manera de ejemplo, considere el modelo de probabilidad para el problema on/off (de gran importancia en física de alta velocidad y en astrofísica), el cual depende de los parámetros μ y b de interés y de estorbo respectivamente, con datos que tienen distribución de probabilidad independientes:

$$X \sim Pois(\mu + b), Y \sim Pois(\tau b)$$

donde X, Y son las observaciones en el área “on” y área “off”, y τ es la relación entre los tamaños de las áreas. La función de verosimilitud está dada por: $\mathcal{L}(\mu, b|X, Y) \equiv f(X, Y|\mu, b)$. Para encontrar un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$, para el parámetro μ , se buscan los límites del intervalo $L(x, y)$ y $U(x, y)$ tales que

$$P(L(x, y) < \mu < U(x, y)|X = x, Y = y) = 1 - \alpha$$

Existe varios métodos para encontrar L y U . Muchos de estos están basados en el artículo de J.Neyman [2] 1937, en este lo que se hace es encontrar L y U tal que $\int_L^U \mathcal{L}(\mu|X, b)d\mu \geq 1 - \alpha$ (o $\sum_L^U \mathcal{L}(\mu|X, b) \geq 1 - \alpha$) donde la integral(o la suma) se toma después de ordenar las probabilidades de X de mayor a menor. Desde este artículo no se tinán muchos trabajos al respecto, hasta que Cousins y Feldman [1] en 1998 hacen uso de la razón de máxima verosimilitud $\lambda(\mu|X) = \frac{\mathcal{L}(\mu|X, b)}{\sup\{\mathcal{L}(\mu|X, b); \mu\}}$ y se hace el mismo ordenamiento de Neyman pero con respecto a λ . Cousins y Feldman sólo consideran $X \sim Pois(\mu + b)$ y b es conocido.

En 2009, Bodhisattva Sen, Matthew Walker, and Michael Woodroofe [13], motivados por el trabajo de Cousins y Feldman describen una forma para encontrar L y U siempre y cuando se conozca la distribución de $\lambda(\mu|X)$.

W.A. Rolke, A.M. López [3]; W.A. Rolke, A.M. López y Conrad [4] describen un método y algunas extensiones al mismo, en este método a diferencia de los anteriores se estudia tanto μ y b , y por lo cual ya no tendremos un intervalo de confianza, si no una región de confianza, la cual la construyen de dos formas, una usando sólo la información de las probabilidades de las distribuciones y el otro usa la información del perfil de verosimilitud.

Otro método es descrito por J. Conrad, O. Botner, A. Hallgren y C. Perez de los Heros en [8] y [11]. Se dice semi-bayesiano, pues utiliza elementos bayesianos y frecuentistas.

También existen métodos bayesianos, considerando distintas distribuciones a priori, por ejemplo una Gamma con parámetros α , β . En este caso los intervalos de credibilidad los consideraremos como de confianza, para poder hacer el cálculo de probabilidades de cobertura, ya que los bayesianos no lo hacen, con lo que resultaria imposible hacer la comparación con intervalos calculados con un método frecuentista.

En este trabajo incluiremos nuevos métodos y algunas extensiones a los métodos

ya creados, para estimar los límites de intervalos de estimación para el problema on/off.

En la mayoría de problemas en los que deseamos encontrar un intervalo de estimación existe un gran dilema, y es acerca del nivel de confianza $1 - \alpha$, no se sabe cual es el valor óptimo a usar y es que va a depender del investigador o del problema que se esté trabajando, los valores que se usan frecuentemente en una variedad de aplicaciones son 0.90, 0.95 y 0.99. En los ejemplos trabajados en este documento se usa un nivel de 0.90 y en las aplicaciones los niveles de confianza del 0.95 y 0.999 ó 95% y 99.9%.

Todos estos métodos tienen en común un único objetivo y es encontrar L y U . Sin embargo, se puede de formas distintas, unos pueden ser menos costosos computacionalmente y otros pueden tener intervalos más anchos. Para ver que método usar en determinado problema, se tiene que comparar tanto el ancho del intervalo como su probabilidad de cobertura.

Capítulo 2

PRELIMINARES

Este capítulo contiene las nociones básicas que ocuparemos en el resto de este trabajo, como lo son: los intervalos de estimación, los métodos más utilizados para encontrar dichos intervalos y probabilidades de cobertura.

2.1. Intervalos de Estimación

En muchos problemas de Inferencia Estadística de una variedad de modelos de probabilidad estamos interesados en la estimación de uno, digamos μ o varios parámetros, el cual casi siempre no se puede encontrar. Por ende buscamos un conjunto C tal que $\mu \in C$, donde $C = C(x)$ es un conjunto determinado por el valor $X = x$ de los datos, con que certeza este conjunto contendrá nuestro parámetro de interés.

Las siguientes definiciones y algunos ejemplos nos dan una idea más clara de cómo funciona.

Definición 2.1.1 (Intervalo de Estimación). *Un intervalo de estimación de un parámetro real μ es un par de funciones, $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, de una muestra que satisface $L(x) \leq U(x)$ para todo $x \in X$. Si $X = x$ es una observación, se hace la inferencia $L(x) \leq \mu \leq U(x)$. El intervalo aleatorio $[L(X), U(X)]$, es llamado un intervalo estimador.*

Usaremos la notación anterior $[L(X), U(X)]$ para denotar un intervalo de estimación basado en la muestra X , aunque a veces se suele escribir este intervalo como $(L(X), U(X))$. Para los casos donde el intervalo sea unilateral, es decir que si

$L(X) = -\infty$ o sea que $\mu \leq U(X)$ y se escribirán como $(-\infty, U(X)]$ similarmente si $U(X) = \infty$, tenemos el intervalo $[L(X), \infty)$.

Ejemplo 2.1.1. Sea $X \sim \text{Pois}(\mu)$, para μ grande, donde μ es la un intervalo de estimación de μ es $[X + 2 - 2\sqrt{X + 1}, X + 2 + 2\sqrt{X + 1}]$. La probabilidad de que μ esté, en este intervalo es:

$$\begin{aligned} & P\left(\mu \in [X + 2 - 2\sqrt{X + 1}, X + 2 + 2\sqrt{X + 1}]\right) \\ &= P\left(X + 2 - 2\sqrt{X + 1} \leq \mu \leq X + 2 + 2\sqrt{X + 1}\right) \\ &= P\left((\sqrt{X + 1} - 1)^2 \leq \mu \leq (\sqrt{X + 1} + 1)^2\right) \\ &= P\left(\sqrt{\mu} - 1 \leq \sqrt{X + 1} \leq \sqrt{\mu} + 1\right) \\ & P\left(-2 \leq \frac{X - \mu}{\sqrt{\mu}} \leq 2\right) \approx P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.9545 \end{aligned}$$

Esto es tenemos un 95 % de certeza de que el parámetro estará en dicho intervalo. Cuando μ es pequeña no se puede aplicar el teorema de límite central, por lo que tiene que buscarse otra forma de encontrar intervalos de estimación.

Ahora supongamos que tenemos todos los intervalos de estimación que contienen a μ .

Definición 2.1.2. Para un intervalo estimador $[L(X), U(X)]$ de un parámetro μ , la probabilidad de cobertura de $[L(X), U(X)]$ es la probabilidad de que el intervalo aleatorio $[L(X), U(X)]$ contenga el verdadero parámetro μ , es decir, $P_\mu(\mu \in [L(X), U(X)])$ o $P(\mu \in [L(X), U(X)]|\mu)$.

Definición 2.1.3. Para un intervalo estimador $[L(X), U(X)]$ de un parámetro μ , el coeficiente de confianza de $[L(X), U(X)]$ es el ínfimo de las probabilidades de cobertura, $\inf_\mu P_\mu(\mu \in [L(X), U(X)])$.

Los intervalos de estimación, con una medida de confianza(o coeficiente de confianza) son los llamados intervalos de confianza(frecuentista) o intervalos de credibilidad (bayesianos), y al conjunto de todos los intervalos de confianza se le llama

conjunto de confianza.

A un conjunto de confianza con coeficiente de confianza $1 - \alpha$, simplemente se le dice conjunto de confianza de nivel $1 - \alpha$.

Ejemplo 2.1.2. Sea X_1, X_2 una muestra aleatoria de una población $Exp(\frac{1}{\mu})$, un estimador para μ está dado $\hat{\mu} = \bar{X}$. Consideremos dos intervalos candidatos a intervalos de estimación: $[\frac{\bar{X}}{a}, a\bar{X}]$ y $[\bar{X} - b, \bar{X} + b]$ para $a > 0$ y $b \leq \bar{X}$.

Para el primer intervalo tenemos

$$P_{\mu}(\mu \in [\frac{\bar{X}}{a}, a\bar{X}]) = P_{\mu}(\frac{\bar{X}}{a} \leq \mu \leq a\bar{X}) = P_{\mu}(\frac{\mu}{a} \leq \bar{X} \leq a\mu).$$

Sabemos que si $x_1, x_2, \dots, x_n \sim Exp(\frac{1}{\mu})$ entonces $\bar{X} \sim \Gamma(n, \frac{1}{n\mu})$. Por lo que en nuestro ejemplo tendríamos

$$P_{\mu}(\frac{\mu}{a} \leq \bar{X} \leq a\mu) = \int_{\frac{\mu}{a}}^{a\mu} \frac{x e^{-\frac{x}{2\mu}}}{2\mu} dx = -e^{-\frac{a}{2}}(\frac{a}{2} + 1) + e^{-\frac{1}{2a}}(\frac{1}{2a} + 1)$$

La probabilidad de cobertura del primer intervalo es independiente del parámetro μ , y el coeficiente de confianza del intervalo está dado por: $-e^{-\frac{a}{2}}(\frac{a}{2} + 1) + e^{-\frac{1}{2a}}(\frac{1}{2a} + 1)$.

Para el segundo se hace de manera similar, para $\mu \geq b$

$$\begin{aligned} P_{\mu}(\mu \in [\bar{X} - b, \bar{X} + b]) &= P_{\mu}(\bar{X} - b \leq \mu \leq \bar{X} + b) = P_{\mu}(\mu - b \leq \bar{X} \leq \mu + b) \\ &= -e^{-\frac{1}{2} - \frac{b}{2\mu}}(\frac{3}{2} + \frac{b}{2\mu}) + e^{-\frac{1}{2} + \frac{b}{2\mu}}(\frac{3}{2} - \frac{b}{2\mu}) \end{aligned}$$

En este caso la probabilidad depende de μ , el coeficiente de confianza sería ,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (-e^{-\frac{1}{2} - \frac{b}{2\mu}}(\frac{3}{2} + \frac{b}{2\mu}) + e^{-\frac{1}{2} + \frac{b}{2\mu}}(\frac{3}{2} - \frac{b}{2\mu})) = 0.$$

por lo que existirán intervalos con cobertura cercana a cero.

2.2. Métodos Para Encontrar Intervalos de Estimación

En el ejemplo 2.1.2, para los intervalos dados, obtuvimos su probabilidad de cobertura y el coeficiente de confianza. Pero si estamos interesados en encontrar intervalos de estimación con un coeficiente de confianza del $1 - \alpha$, y con buena

precisión, hay muchas formas de hacerlo. Para esto actualmente existe una gran cantidad de métodos. En esta sección describiremos los más usados.

2.2.1. Invirtiendo una Prueba Estadística

Existe una fuerte relación entre pruebas de hipótesis e intervalos de estimación, se puede decir en general que a cada conjunto de confianza le corresponde una prueba de hipótesis y viceversa.

Teorema 2.1. *Para todo $\mu_0 \in \Lambda$, sea $A(\mu_0)$ la región de aceptación con un nivel $1 - \alpha$ de la prueba $H : \mu = \mu_0$. Par todo $\mathbf{x} \in \chi$, defina un conjunto $C(\mathbf{x})$ en el espacio de parámetros por*

$$C(\mathbf{x}) = \{\mu_0 \in A(\mu_0)\}.$$

Entonces el conjunto aleatorio $C(\mathbf{X})$ es un conjunto de confianza del $1 - \alpha$. Similarmete, sea $C(\mathbf{X})$ un conjunto de confianza del $1 - \alpha$.

Para algún $\mu_0 \in \Lambda$, defina

$$A(\mu_0) = \{\mu_0 \in C(\mathbf{x})\}.$$

Entonces $A(\mu_0)$ la región de aceptación con un nivel $1 - \alpha$ de la prueba $H_0 : \mu = \mu_0$.

Ejemplo 2.2.1 (Invirtiendo la LRT(Prueba de la Razón de Verosimilitud)). *Este ejemplo se basa en el ejemplo 9.2.3 de Casella y Berger [ver [5]]. Suponga que se quiere encontrar un intervalo de confianza para μ de una distribución Weibull(μ, k), podemos obtener tal intervalo por inversión de la prueba de nivel $1 - \alpha$. Si $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Si se tiene una muestra aleatoria x_1, x_2, \dots, x_n el LRT está dado por:*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}(\mu_0|\mathbf{x})}{\sup_{\mu} \mathcal{L}(\mu|\mathbf{x})} &= \frac{\left(\frac{k}{\mu_0}\right)^n \left(\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\mu_0^n}\right)^{k-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu_0}\right)^k}}{\sup_{\mu} \left(\left(\frac{k}{\mu}\right)^n \left(\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\mu^n}\right)^{k-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu}\right)^k}\right)} \\
&= \left(\frac{\bar{x}_k}{\mu_0}\right)^{nk} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu_0}\right)^k + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\bar{x}_k}\right)^k} \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu_0}\right)^k\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu_0}\right)^k + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\bar{x}_k}\right)^k}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Para un μ_0 fija, la región de aceptación esta dada por

$$A(\mu_0) = \left\{ \mathbf{x} : \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu_0}\right)^k \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu_0}\right)^k} \geq k_1 \right\} \tag{2.2}$$

Donde k_1 es una constante que satisface $P_{\mu_0}(\mathbf{X} \in A(\mu_0)) = 1 - \alpha$, $\bar{x}_k^k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n}$.

Para invertir esta región de aceptación y obtener un conjunto de confianza con nivel $1 - \alpha$, se hace lo siguiente:

Se sabe que

$$P(\text{aceptar } H_0 | \mu = \mu_0) = P(\mu_0 \in A(\mu_0)) = P_{\mu}(\mu \in C(\mathbf{x})) = 1 - \alpha$$

donde

$$C(\mathbf{x}) = \left\{ \mu : \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu}\right)^k \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\mu}\right)^k} \geq k_1 \right\}$$

La expresión $C(\mathbf{x})$ sólo depende de \mathbf{x} , específicamente de $\sum_{i=1}^n x_i^k$ por lo que el intervalo de confianza se expresa de la forma

$$C\left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right) = \left\{ \mu : L \left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right) \leq \mu^k \leq U \left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right) \right\},$$

donde L y U están sujetas a las restricciones de el conjunto 2.2, que tiene probabilidad $1 - \alpha$, y

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{L}\right)^k\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{L}\right)^k} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{U}\right)^k\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{U}\right)^k} \tag{2.3}$$

Sea $a = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{L}\right)^k$ y $b = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{U}\right)^k$, entonces la Ecuación 2.3 se transforma en

$$a^n e^{-a} = b^n e^{-b} \quad (2.4)$$

Para un caso particular, sea $n = 2$, sabemos que $Y_i = \left(\frac{X_i}{\mu}\right)^k \sim \text{Exp}(1)$ y $\sum_{i=1}^2 Y_i \sim \Gamma(2, 1)$, entonces el intervalo de confianza para μ está dado por

$$\{\mu : L \leq \mu^k \leq U\} = \left\{ \mu : \frac{\sum_{i=1}^2 x_i^k}{a} \leq \mu^k \leq \frac{\sum_{i=1}^2 x_i^k}{b} \right\},$$

donde a y b satisfacen

$$\begin{aligned} P(\mu \in [L, U]) &= P_\mu \left(\frac{\sum_{i=1}^2 x_i^k}{a} \leq \mu^k \leq \frac{\sum_{i=1}^2 x_i^k}{b} \right) \\ &= P \left(b \leq \sum_{i=1}^2 \left(\frac{X_i}{\mu} \right)^k \leq a \right) \\ &= \int_b^a x e^{-x} dx \\ &= e^{-b}(b+1) - e^{-a}(a+1) = 1 - \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por ejemplo si queremos un intervalo de confianza del 95% se resuelve el sistema dado por las Ecuaciones 2.5 y 2.4, que se resuelven numericamente, obteniendo $a = 6.40122$ y $b = 0.303501$ y por tanto el intervalo de confianza para μ está dado por

$$\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^2 x_i^k}{6.40122} \right)^{\frac{1}{k}}, \left(\frac{\sum_{i=1}^2 x_i^k}{0.303501} \right)^{\frac{1}{k}} \right].$$

Ejemplo 2.2.2. Sea $X \sim \text{Pois}(\mu)$, podemos obtener un intervalo de confianza para μ por inversión de la prueba de nivel $1 - \alpha$ para $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$, el LRT está dado por,

$$\frac{\mu_0^x e^{-\mu_0}}{x!} = \left(\frac{\mu_0}{x} \right)^x e^{-(\mu_0 - x)}$$

La región de aceptación está dada por $A(\mu_0) = \{x : \mu_0^x e^{-\mu_0} \geq k\}$ que satisface $P_{\mu_0}(x \in A(\mu_0)) = 1 - \alpha$.

Invirtiendo la prueba se obtiene el conjunto de confianza del $1 - \alpha$

$$C(x) = \{\mu : \mu^x e^{-\mu} \geq k\}.$$

La expresión $C(x)$ solo depende de x , un intervalo de confianza tiene la forma

$$\{\mu : L(x) \leq \mu \leq U(x)\},$$

donde L y U satisfacen

$$P_\mu(L(x) \leq \mu \leq U(x)) = 1 - \alpha$$

Otro ejemplo sería la Inversión de una Prueba Normal [ver [5]]

2.2.2. Cantidades Pivote

Definición 2.2.1. Una variable aleatoria $Q(X, \mu) = Q(X, X_1, X_2, \dots, X_n, \mu)$ es un cantidad pivote (o pivote) si la distribución de $Q(X, \mu)$ es independiente de todos los parámetros; es decir que si $X \sim F(\mathbf{x}|\mu)$, entonces $Q(X, \mu)$ es alguna distribución para todos los valores de μ .

Ilustraremos este método con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. Consideremos la distribución del ejemplo 2.2.1, el estadístico $T = \sum_{i=1}^n x_i^k$ es suficiente para μ y $\frac{2T}{\mu^k} = 2 \sum_{i=1}^n (\frac{X_i}{\mu})^k \sim \Gamma(n, 2)$ esta distribución no depende de μ , por lo que $Q(X, \mu) = \frac{2T}{\mu^k}$ es un pivote. Para encontrar un intervalo de confianza encontramos constantes a y b tal que

$$P_\mu(a \leq Q(X, \mu) \leq b) = P_\mu(a \leq \frac{2T}{\mu^k} \leq b) = P(a \leq \chi_{2n}^2 \leq b) = 1 - \alpha$$

$A(\mu) = \{t : a \leq \frac{2t}{\mu} \leq b\}$ invirtiendo el conjunto se obtiene $C(t) = \{\mu : \frac{2t}{b} \leq \mu \leq \frac{2t}{a}\}$ es un intervalo de confianza del $1 - \alpha$.

2.2.3. Pivoteando la CDF

Teorema 2.2 (Pivoteando una cdf). Sea T un estadístico con cdf continua $F_T(t|\mu)$.

Sea $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ valores fijos. Suponga que para cada $t \in \Lambda$, las funciones $\mu_U(t)$ y $\mu_L(t)$ están definidas por:

(i). Si $F_T(t|\mu)$ es una función decreciente de μ para cada t , define $\mu_U(t)$ y $\mu_L(t)$ por

$$F_T(\mu_U(t)) = \alpha_1, F_T(\mu_L(t)) = 1 - \alpha_2$$

(ii). Si $F_T(t|\mu)$ es un función no decreciente de μ para todo t , define $\mu_U(t)$ y $\mu_L(t)$ por

$$F_T(\mu_U(t)) = 1 - \alpha_2, F_T(\mu_L(t)) = \alpha_1$$

Entonces el intervalo aleatorio $[\mu_L(T), \mu_U(T)]$ es un intervalo de confianza del $1 - \alpha$ para μ .

Estos dos últimos métodos casi siempre se usan cuando se tienen PDF continuas, por lo que en los que resta de este trabajo no los usaremos. Para más detalles y ejemplos ver [5].

2.2.4. Intervalos Bayesianos

En este método cambiamos todo lo de confianza por credibilidad, es decir, Intervalo de credibilidad, conjunto de credibilidad y usamos la propiedad

$$\pi(\mu|x) = \frac{f(x|\mu)\pi(\mu)}{\int_0^\infty f(x|\mu)\pi(\mu)d\mu} \quad (2.6)$$

Donde π es la distribución a priori del parámetro μ .

Ejemplo 2.2.4. Consideremos $X \sim Pois(\mu)$ y una distribución a priori $\mu \sim \pi(\mu) = \Gamma(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta > 0$. La distribución posteriori para μ es:

$$\begin{aligned} \pi(\mu|x) &= \frac{\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{\mu}{\beta}}}{\int_0^\infty \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{\mu}{\beta}} d\mu} \\ &= \frac{\mu^{x+\alpha-1} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\mu}}{\int_0^\infty \mu^{x+\alpha-1} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\mu} d\mu} \\ &= \frac{\mu^{x+\alpha-1} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\mu}}{\Gamma(x+\alpha)(1+\frac{1}{\beta})^{x+\alpha}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

por lo que $\pi(\mu|x) \sim \Gamma(x+\alpha, \frac{\beta}{1+\beta})$.

Para encontrar un intervalo de confianza del $1 - \alpha$, encontramos μ_1 y μ_2 tal que

$$1 - \alpha = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \pi(\mu|x) d\mu \quad (2.8)$$

y $\pi(\mu_1|x) = \pi(\mu_2|x)$

Por ejemplo, si $\beta = 1, \alpha = 2$ y $x = 4$, se tiene que $\pi(\mu|x = 4) \sim \Gamma(6, \frac{1}{2})$, un intervalo de confianza del 90 % para μ está dado por $[1.065, 4.862]$.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos la distribución y el primer intervalo del Problema 2.1.2, pero con $\theta = \frac{1}{\mu}$ se tenía que

$$P_{\theta}\left(\frac{\theta}{a} \leq \bar{X} \leq a\theta\right) = -e^{-\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2} + 1\right) + e^{-\frac{1}{2a}}\left(\frac{1}{2a} + 1\right)$$

si queremos un intervalo confianza del 95 %, $a = 9.553$ y si $\bar{X} = 1$ entonces el intervalo está dado por $\theta \in [0.105, 9.553]$ o $\mu \in [0.105, 9.524]$, Ahora supongamos que μ tiene distribución a priori, $\pi(\mu) = e^{-\mu}$, la distribución posteriori es:

$$\begin{aligned} \pi(\mu|x) &= \frac{\mu e^{-\mu x - \mu}}{\int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x - \mu} d\mu} \\ &= \frac{\mu e^{-(x+1)\mu}}{\frac{1}{(x+1)^2}} = (x+1)^2 \mu e^{-(x+1)\mu} \end{aligned}$$

Con esta expresión un intervalo de confianza del 95 % para μ , con $x = 1$, es $[0.021, 2.383]$.

Si calculáramos μ_1 y μ_2 al invertir una prueba de hipótesis obtendríamos que un intervalo de confianza del 95 %, con $x = 1$ es $[0.0424, 4.765]$.

Este método se trabajará más detalladamente en el siguiente capítulo.

2.3. Distribución de LRT

En muchos de los métodos que veremos en el siguiente capítulo, usaremos la Razón de Máxima Verosimilitud, para encontrar intervalos de confianza en modelos de probabilidad que dependen de más de un parámetro. Sería mucho más fácil si se conociera la distribución de la RMV(o LRT), pero en la mayoría de los casos es casi imposible saberla. Por ende, es pertinente utilizar los métodos que discutiremos a lo largo de este trabajo.

Para los casos donde es posible saber la Razón de Máxima Verosimilitud existen varios métodos y técnicas para encontrar los límites del intervalo, por ejemplo en [13]

se da un método unificado para tratar problemas que tienen parámetros de interés y parámetros de estorbo, donde se discuten varios casos, entre ellos el siguiente.

La razón cuando se tiene más de un parámetro es

$$\lambda(\mu|x, y) = \frac{\sup_{\sigma}(\mathcal{L}(\sigma|x, y, \mu))}{\sup_{\mu, \sigma}(\mathcal{L}(\mu, \sigma|x, y))} \quad (2.9)$$

Supongamos que se tienen X e Y v.a independientes con

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \geq 0, \frac{Y}{\sigma^2} \sim \chi_r^2$$

y se encuentra que un intervalo de confianza del nivel $1 - \alpha$ para μ está dado por

$$[x - bs]_+ \leq \mu \leq x + bs$$

donde

$$b = \sqrt{t_{r, 1-\frac{1}{2}\alpha}^2 + \frac{x_-^2}{s^2} \left(1 + \frac{t_{r, 1-\frac{1}{2}\alpha}^2}{r} \right)},$$

$s^2 = \frac{y}{r}$, $y_- = -\min[0, y]$, $[x - bs]_+ = \max[0, x - bs]$, $t_{r, 1-\frac{1}{2}\alpha}$ es el $1 - \frac{1}{2}\alpha$ percentil de una distribución T con r grados de libertad.

Para ilustrar el procedimiento necesario para calcular intervalos de confianza para μ con este método daremos el siguiente ejemplo:

Consideremos el modelo de probabilidad

$$X \sim L(\mu, \sigma), \mu \geq 0, \frac{Y}{\sigma} \sim \Gamma(n, 1)$$

Donde L es la distribución de Laplace o doble exponencial. Así, la función de verosimilitud es

$$\mathcal{L}(\sigma, \mu|x, y) = \frac{y^{n-1}}{2\Gamma(n)\sigma^n} e^{-\left(\frac{|x-\mu|+y}{\sigma}\right)}$$

Para algún μ , \mathcal{L} es maximizado por

$$\hat{\sigma}_{\mu} = \frac{|x - \mu| + y}{n}$$

y \mathcal{L} es maximizado con respecto a μ y σ simultaneamente por

$$\hat{\mu} = \max(0, x) = x_+$$

$$\hat{\sigma} = \frac{|x - \hat{\mu}| + y}{n} = \frac{x_- + y}{n}$$

sustituyendo en la Ecuación 2.9 y aplicándole logaritmo se obtiene

$$\ln(\lambda(\mu|x, y)) = -n \ln\left(\frac{\hat{\sigma}^\mu}{\hat{\sigma}}\right) = -n \ln\left(\frac{|X - \mu| + Y}{X_- + Y}\right)$$

Haciendo los cambios $W = \frac{|X - \mu|}{\sigma}$ y $Z = \frac{Y}{\sigma}$ se tiene que W y Z son v.a independientes con $W \sim \text{Exp}(1)$ y $Z \sim \Gamma(n, 1)$, y

$$\ln(\lambda(\mu|x, y)) = -n \ln\left(\frac{Z + W}{Z + \left(\frac{\mu}{\sigma} \pm W\right)_-}\right)$$

Esta expresión es decreciente en σ , para todo $\mu > 0$. Y por el hecho que las distribuciones de W y Z no dependen de los parámetros,

$$\min_{\sigma > 0} P_{\sigma, \mu}(\lambda(\mu|x, y) \geq c) = \lim_{\mu \rightarrow 0} P_{\sigma, \mu}(\lambda(\mu|x, y) \geq c) = P\left(\left(\frac{Z + W}{Z}\right)^{-n} \geq c\right)$$

Sea $V = 1 + \frac{W}{Z} \sim \pi(v) = \frac{n}{v^{n+1}}$.

En general si $W \sim \text{Exp}(\mu)$ y $Z \sim \Gamma(r, \mu^{-1})$ entonces $V = 1 + \frac{W}{Z} \sim \pi(v) = \frac{r}{v^{r+1}}, v \geq 1$.

Con esto se obtiene que

$$P(v^{-n} \geq c) = P(v \geq c^{-\frac{1}{n}}) = 1 - \alpha \Rightarrow c = \alpha^{-\frac{1}{n}}$$

Por otro lado, como $\lambda(\mu|x, y) \geq c$ se obtiene el intervalo del $1 - \alpha$

$$[x + y - c^{\frac{1}{n}}(y + x_-)]_+ \leq \mu \leq x + y + c^{\frac{1}{n}}(y + x_-).$$

Por ejemplo, si $n = 4$, $\alpha = 0.05$ y $y = 1$, en la Figura 2-1, se muestran los intervalos de confianza para μ .

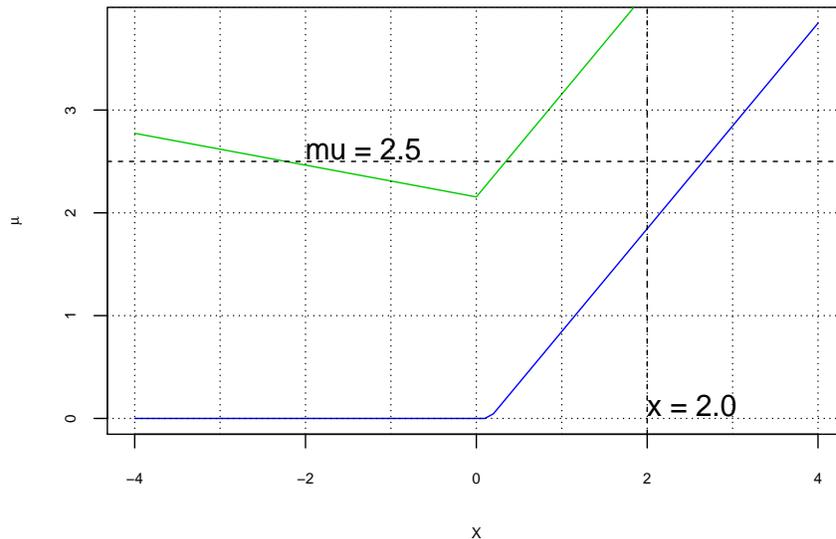


Figura 2-1: Intervalos de Confianza del 95% para $\mu \geq 0$, de una Doble Exponencial(μ, σ).

2.4. Problema on/off

El término On / Off se originó en el campo de la Astronomía. Aquí a veces uno se enfrenta a la siguiente pregunta: se sospecha que en una determinada área o zona del cielo, además de las fuentes de luz normales existe una adicional. Así un telescopio especializado observa el área “on” y el número de fuentes de luz se cuentan. A continuación, el telescopio se mueve al área “off”, donde sabemos que no hay fuente adicional, y el número de fuentes de luz se cuenta.

Digamos que observamos 9 fuentes de luz en el área “on” y 4 en “off”. ¿Qué se puede decir acerca de la tasa de estas fuentes de luz adicionales?.

Si X es la variable aleatoria que cuenta las fuentes de luz en el área “on”, y Y la variable aleatoria de los recuentos en el área “off”. Además τ es la relación entre los tamaños de las áreas, de modo que $\frac{Y}{\tau}$ es la estimación de la tasa de fuentes de luz regulares (o “fondo”). Teoría astronómica y probabilidad sugieren que tanto X y Y se pueden modelar como una variable aleatoria de Poisson, y así nos encontramos

con el siguiente modelo de probabilidad para este problema

$$X \sim Pois(\mu + b), Y \sim Pois(\tau b) \quad (2.10)$$

donde μ y b son las tasas de las fuentes respectivas, fuentes de el área “on”.

Claramente $X - \frac{Y}{\tau}$ es el estimador de máxima verosimilitud de μ . En el ejemplo anterior, si se utilizan las áreas de igual tamaño, se estima la tasa de fuentes de luz adicionales para ser $\mu = 9 - \frac{4}{1} = 5$. Pero, ¿cuál es un intervalo de confianza (digamos) 95 % para μ ?

El mismo problema se plantea en otros campos también. Por ejemplo, en experimentos de física de alta energía que cuenten con mediciones de desintegraciones de partículas. Uno de ellos es la masa de la partícula. Digamos que queremos saber si en un determinado rango de masas hay un exceso de eventos. Aquitambien se puede utilizar el modelo dado en la ecuación [2.10](#).

Capítulo 3

MÉTODOS USADOS EN EL PROBLEMA ON/OFF

En la búsqueda de intervalos de estimación, para ciertos modelos de probabilidad se han creado muchos métodos para encontrar los límites del intervalo, o sea, encontrar los valores de L y U . Sin embargo todos estén tras el mismo objetivo, difieren ya sea en la anchura del intervalo, es decir ganan o pierden precisión, o en que las probabilidades de cobertura no sean las requeridas. Para los problemas a tratar, usaremos varios métodos y algunas formas alternativas de los mismos.

En los métodos clásicos, por ejemplo los que hemos discutido en la Sección 2.2, si tenemos la función de probabilidad $P(x|\mu)$ para encontrar los límites del intervalo de confianza del $1 - \alpha$, se tiene la siguiente condición

$$P_{\mu}(\mu \in [L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]) \geq 1 - \alpha \quad (3.1)$$

Sin embargo, esta ecuación tiene dos valores desconocidos, por lo que se necesita otra condición para poder resolverla, de tal forma que el conjunto $C(X)$ tenga una cobertura correcta, es decir $P_{\mu}(\mu \in [L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]) \geq 1 - \alpha$. Si existe μ para el cual $P_{\mu}(\mu \in [L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]) < 1 - \alpha$, se dice que este intervalo está falto de cobertura, y por tanto tendremos problemas al momento de rechazar la hipótesis nula.

Existen muchas formas de establecer la otra condición que se necesita, pero hasta el momento no hay una de tal forma que obtengamos un intervalo óptimo es decir, menos ancho y con mayor cobertura.

Las más usadas son:

$$P_\mu(\mu < L|X) = P_\mu(\mu > U|X) = \frac{\alpha}{2}. \quad (3.2)$$

y

$$P(L|X) = P(U|X). \quad (3.3)$$

Claro que lo anterior, es después de hacer la inversión o cuando ya sabemos la región de rechazo. Por otro lado, ecuación 3.3 sólo se usa cuando la distribución de X es continua o para el caso de métodos bayesianos. Construir esta región del $1 - \alpha$, es encontrar x_1 y x_2 tal que $P(x \in [x_1, x_2]) = 1 - \alpha$, para poder encontrar estos valores necesitamos otra condición, que podemos usar cualquiera de las Ecuaciones 3.2, y 3.3, pero con x_1 y x_2 , es decir

$$P(x < x_1|\mu) = P(x > x_2|\mu) = \frac{\alpha}{2} \quad (3.4)$$

$$P(x_1|\mu) = P(x_2|\mu) \quad (3.5)$$

A los intervalos que cumplen las Ecuaciones 3.2 y 3.4 se les llama intervalos de confianza centrales, en algunos casos se usan las condiciones,

$$P(x < x_1|\mu) = \alpha_1, P(x > x_2|\mu) = \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha. \quad (3.6)$$

La condición 3.6 usa el método descrito en la Sección 2.2.3 para encontrar μ_1 y μ_2 , que es lo mismo encontrar L y U antes mencionados.

Antes de tratar el problema on/off daremos algunos ejemplos donde se ilustra, las limitaciones que tienen los métodos clásicos para encontrar los límites del intervalo de estimación.

Ejemplo 3.0.1. Consideremos $X \sim N(\mu, 1)$ es decir,

$$P(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$$

Para encontrar intervalos que cumplan la Condición 3.4 y un $\alpha = 0.10$, se obtiene la región de rechazo $|x - \mu| > z_{0.05} = 1.645$ entonces se tiene que $x_1 = \mu - 1.645$ y $x_2 = \mu + 1.645$, para cierto valor de μ , si deseamos encontrar un intervalo de confianza para μ , hacemos la inversión y obtendríamos un intervalo $[\mu_1, \mu_2]$ con $\mu_1 = x - 1.645$ y $\mu_2 = x + 1.645$. En la Figura 3-1 se puede observar que para encontrar $[x_1, x_2]$, se fija un valor de μ , y para encontrar $[\mu_1, \mu_2]$, se fija un valor de x .

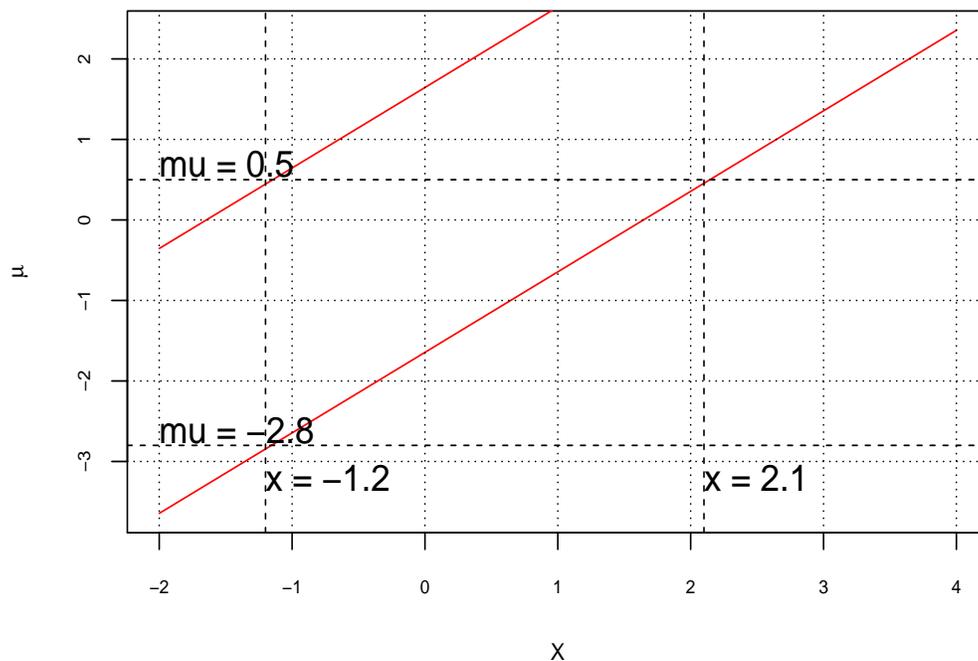


Figura 3-1: Intervalos de Confianza del 90% para μ , de una v.a $N(\mu, 1)$.

En esta figura los intervalos de confianza, sus límites están sobre las dos rectas, es decir las regiones de aceptación, están incluidas en la banda, que se le llama banda de confianza.

Ahora supongamos que la distribución cumple al menos una de las siguientes condiciones: no es continua, no es simétrica alrededor de μ o el parámetro μ tiene alguna restricción.

Veamos el siguiente ejemplo para mostrar el caso cuando el parámetro está restringido.

Ejemplo 3.0.2. *Supongamos que*

$$P(x|\mu) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} & \text{si } x \geq \mu, \\ 0 & \text{si } x < \mu. \end{cases}$$

Si usamos la Condición 3.4 y $\alpha = 0.10$, $P(x < x_1|\mu) = P(x > x_2|\mu) = 0.05$, entonces los valores de x_1 y x_2 para un intervalo de confianza de 90% se calculan así,

$$\int_{\mu}^{x_1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1-\mu} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \Rightarrow$$

$$x_1 = \mu + \text{qnorm}\left(\frac{1}{2} + \frac{0.05}{2}\right) = \mu + 0.063.$$

Similarmente $x_2 = \mu + 1.960$ como se necesita que $\mu \geq 0$, al invertir la prueba $\mu_1 = \max(0, x - 0.063)$ y $\mu_2 = \max(0, x + 1.960)$.

Con esta restricción algunos intervalos de confianza para μ no tendrían la cobertura deseada, es decir que $P(\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2]) < 0.90$. Por ejemplo para $\mu_0 = 0.5$, se tiene que

$$P(\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2]) = P(\mu_1 \leq \mu_0 \leq \mu_2) = P(x - 0.063 \leq \mu_0 \leq x + 0.960)$$

$$= P(-0.460 \leq x \leq 0.563) = 2(0.21318) = 0.42636.$$

En la Figura 3-2 se muestra la banda de confianza del 90%.

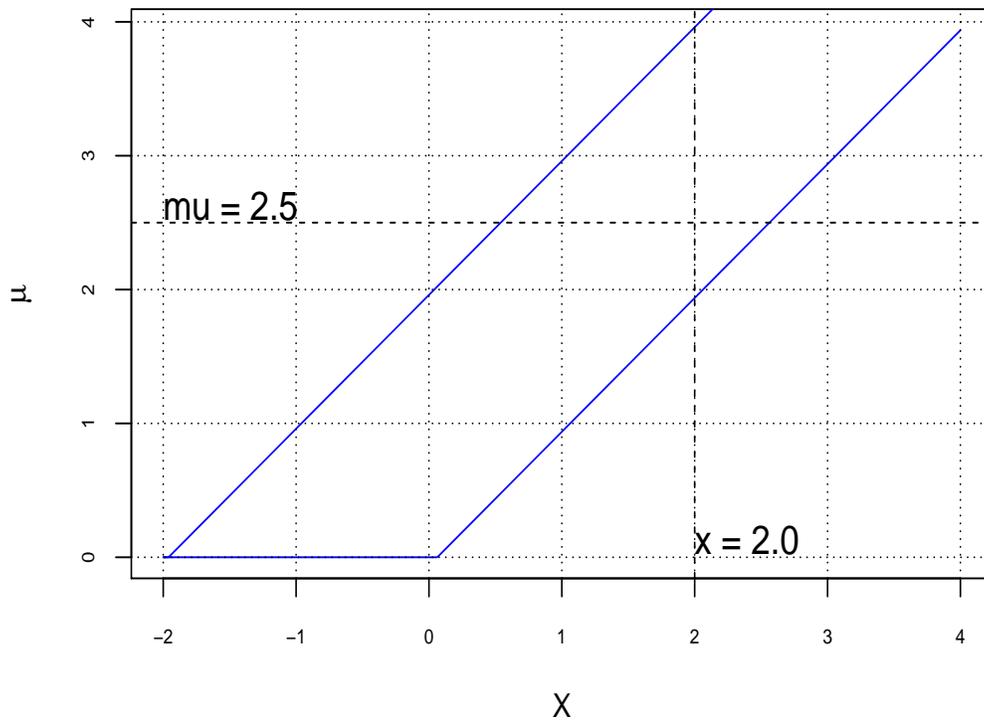


Figura 3–2: Banda de Confianza del 90 %,de una v.a $N(\mu, 1)$, con $\mu \geq 0$, usando un método Clásico.

Como nos hemos dado cuenta en el Ejemplo 3.0.2, está no sería la manera adecuada de encontrar x_1 y x_2 . Cuando restringimos a μ , los intervalos de confianza no siempre tendrán la cobertura correcta, por lo que para problemas donde tengamos estas restricciones no convendría usar esta técnica. Para ello en lo que resta de este capítulo describiremos varios métodos, algunos de los cuales están basados en lo siguiente.

En 1937, J.Neyman [1] propone una forma alternativa, para encontrar intervalos de confianza, es uno de los métodos más clásicos, y simples que existen. A continuación se describe es una manera de usar este método.

Si tenemos la función de probabilidad $P(x|\mu)$, la región de confianza serán todos los valores de $P(x|\mu)$ tales que:

- (i.) $\sum_{x_1}^{x_2} P(x|\mu) \geq 1 - \alpha$ ó $\int_{x_1}^{x_2} P(x|\mu) \geq 1 - \alpha$
(ii.) Para todo $x \in [x_1, x_2]$ y para todo $y \notin [x_1, x_2]$, entonces $P(x|\mu) > P(y|\mu)$.

A este método se le conoce como el Principio de Ordenamiento.

El siguiente ejemplo muestra como construir con este método un intervalo de confianza de 90 % para μ .

Ejemplo 3.0.3. Consideremos la v.a $X \sim \text{Pois}(\mu + b)$, es decir

$$P(x|\mu, b) = \frac{(\mu + b)^x e^{-(\mu+b)}}{x!} \quad (3.7)$$

Donde x es el total de eventos observados, μ es la media de los eventos de la señal (se denomina parámetro de interes) y b la media de los eventos de ruido o de fondo (denominado parametro de estorbo). Por el momento supondremos que b es conocido.

La Tabla 3-1, muestra los valores cuando $\mu = 0.5$, $b = 3$: En la primera columna los valores de x , en la segunda los valores de $P(x|\mu, b)$ y en la tercera los valores mostrados están de tal forma, que el 1, es el mayor de la segunda columna o el término de mayor probabilidad, el 2 es el mayor excluyendo el que le a correspondido el 1, es decir la segunda probabilidad más grande, así sucesivamente hasta que la suma de los elementos que han sido numerados de la segunda columna sea mayor o igual a $1 - \alpha$.

Por ejemplo, si consideramos los valores de la tercera fila, aquí $x = 2$, $P(x = 2, \mu = 0.5, b = 3) = 0.18496$ y el valor de 3, quiere decir que la probabilidad anterior es la tercera más grande de la segunda columna. Por ende, tenemos valores de x tal que $\sum_x P(x|\mu = 0.5, b = 3) \geq 0.90$, o sea que tenemos la región de confianza que está dada por $[1, 6]$, la cual es la que se representa el la columna 4.

El siguiente paso es la inversión para obtener un intervalo de confianza para μ , para encontrar este intervalo se fija un x , ver Figura 3-3, buscamos los valores de μ_1 y μ_2 que estén dentro de la banda de confianza, por ejemplo para $x = 2$ se obtiene el

intervalo $[0.000, 3.477]$, y para $x = 8$ el intervalo de confianza es $[0.586, 10.039]$.

Para comprobar si estos intervalos tienen la cobertura correcta, se encuentran todos los intervalos de confianza que contienen a $\mu = 0.5$, que es 0.90452 . En la Figura 3-4, se muestra la cobertura de $\mu \in [0, 12]$. Mientras que en la siguiente sección se volverá a tratar este ejemplo y se explicará como se encuentran estos límites.

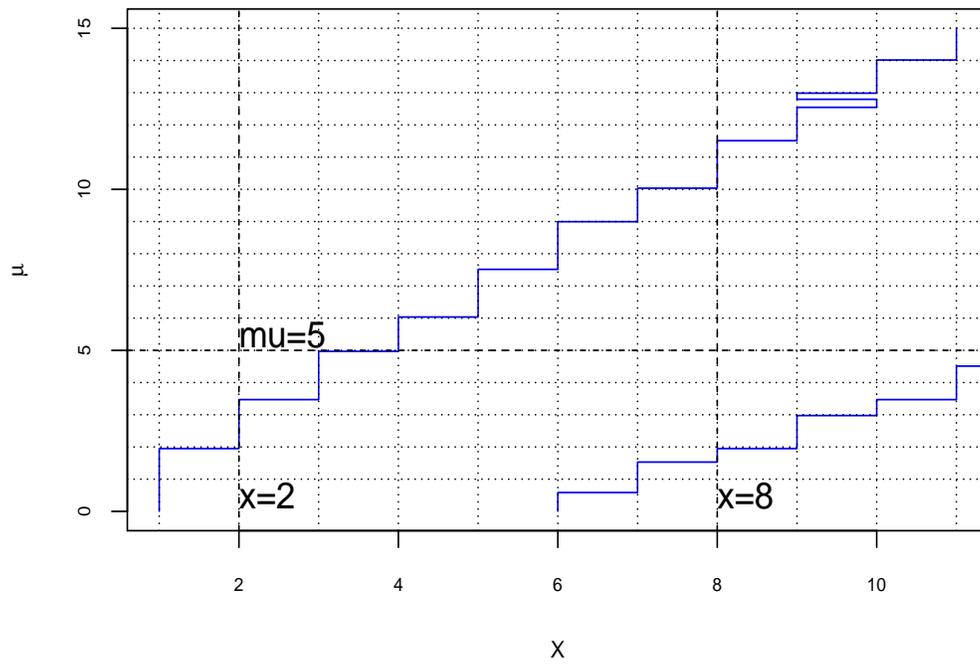


Figura 3-3: Banda de Confianza del 90%, para una v.a $Pois(\mu + b)$, usando el método de Neyman.

Cuadro 3–1: Ilustra las calculaciones en la construcción de la región de confianza para la señal μ , en presencia de un parámetro de estorbo $b = 3 \cdot 0$. Aquí se encuentra el intervalo de aceptación para $\mu = 0 \cdot 5$.

x	$P(x \mu, b)$	rank	$\sum_x P(x \mu, b)$	IC
0	0.03020			
1	0.10569	5	0.82742	1
2	0.18496	3	0.58956	2
3	0.21579	1	0.21579	3
4	0.18881	2	0.40460	4
5	0.13217	4	0.72173	5
6	0.07710	6	0.90452	6
7	0.03855			
8	0.01687			
9	0.00656			
10	0.00230			
11	0.00073			

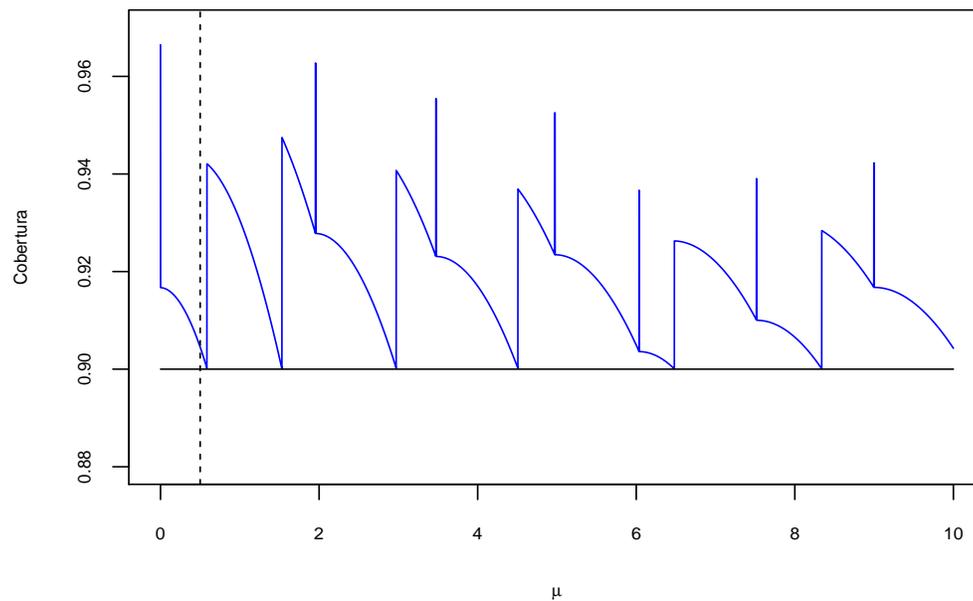


Figura 3–4: Probabilidad de Cobertura de los IC del 90% para μ , usando el método de Neyman.

Para el problema con Ecuación 3.7 existen muchas variantes para calcular $[x_1, x_2]$, una dada por Crow y Garber [15]. En las siguientes secciones discutiremos los métodos propuestos en la actualidad y que se están usando en una variedad de problemas tanto en física, como en otras áreas afines.

3.1. Método de FC

El método FC o de Feldman y Cousins(ver [1]), se basa en el Principio de Ordenamiento de J.Neyman, con la variante que ya no ordenaremos los valores de $P(x|\mu, b)$, como en el Ejemplo 3.0.3, si no que consideraremos los valores de la razón de máxima verosimilitud(ver Ecuación 2.2.1), es decir que consideramos

$$\lambda(\mu) = \frac{\mathcal{L}(\mu|x, b)}{\sup_{\lambda}(\mathcal{L}(\mu|x, b))} = \frac{P(x|\mu, b)}{P(x|\hat{\mu}, b)}. \quad (3.8)$$

Donde $\hat{\mu}$ es el estimador de máxima verosimilitud, que en este caso consideraremos, de la distribución Poisson, el valor se encuentra como sigue.

La razón de máxima verosimilitud está dada por:

$$\mathcal{L}(\mu|x, b) = \frac{(\mu + b)^x e^{-(\mu+b)}}{x!}$$

$$l(\mu) = \ln(\mathcal{L}(\mu|x, b)) = x \ln(\mu + b) - (\mu + b) - \ln(x!)$$

derivando e igualando a cero,

$$\frac{dl}{d\mu} = \frac{x}{\mu + b} - 1 = 0$$

por lo que $\mu = x - b$, como $\mu \geq 0$ entonces $\hat{\mu} = \max(0, x - b)$. Por ejemplo los cálculos para $\mu = 0.5$ y $b = 3.0$ se encuentran en la Tabla 3-2.

Suponga que $x = 2$, se encuentra en la primera columna, la probabilidad es $P(x = 2|\mu = 0.5, b = 3.0) = 0.18496$ en la segunda columna, $\hat{\mu} = 0.0$ es el valor del estimador de máxima verosimilitud tercera columna.

$P(x = 2|\hat{\mu} = 0.5, b = 3.0) = 0.22404$ es el valor de máxima verosimilitud cuarta columna, $\lambda(\mu = 0.5) = \frac{0.18496}{0.22404} = 0.82556$ es el valor de la máxima verosimilitud la

quinta columna y las otras columnas su explicación es la misma que la del Ejemplo 3.0.3.

Hasta este momento tenemos para $\mu = 0.5$, $b = 3.0$ la región de confianza de 90 %, que es $[0, 6]$, para construir la banda de confianza, solo necesitamos hacer variar a μ , por ejemplo, iniciamos en 0 y en cada paso vamos aumentando 0.005, hasta donde deseemos o necesitemos, en la Figura 3-5 se puede apreciar la banda de confianza 90 %.

Cuadro 3-2: Ilustra las calculaciones en la construcción de la región de confianza para la señal μ , en presencia de un parametro de estorbo $b = 3.0$ con el metodo FC. Aquí se encuentra el intervalo de aceptación para $\mu = 0.5$.

x	$P(x \mu, b)$	$\hat{\mu}$	$P(x \hat{\mu}, b)$	$\lambda(\mu)$	rank	$\sum_x P(x \mu, b)$	IC
0	0.03020	0.0	0.04979	0.60653	6	0.85761	0
1	0.10569	0.0	0.14936	0.70762	5	0.82742	1
2	0.18496	0.0	0.22404	0.82556	3	0.58956	2
3	0.21579	0.0	0.22404	0.96315	2	0.40460	3
4	0.18881	1.0	0.19537	0.96645	1	0.18881	4
5	0.13217	2.0	0.17547	0.75324	4	0.72173	5
6	0.07710	3.0	0.16062	0.48000	7	0.93471	6
7	0.03855	4.0	0.14900	0.25871			
8	0.01687	5.0	0.13959	0.12082			
9	0.00656	6.0	0.13176	0.04978			
10	0.00230	7.0	0.12511	0.01835			
11	0.00073	8.0	0.11938	0.00612			

Con este método se soluciona el caso cuando $x = 0$, que con el ordenamiento de Neyman se obtienen intervalos de confianza para μ vacíos, como se puede observar en el Gráfico 3-3.

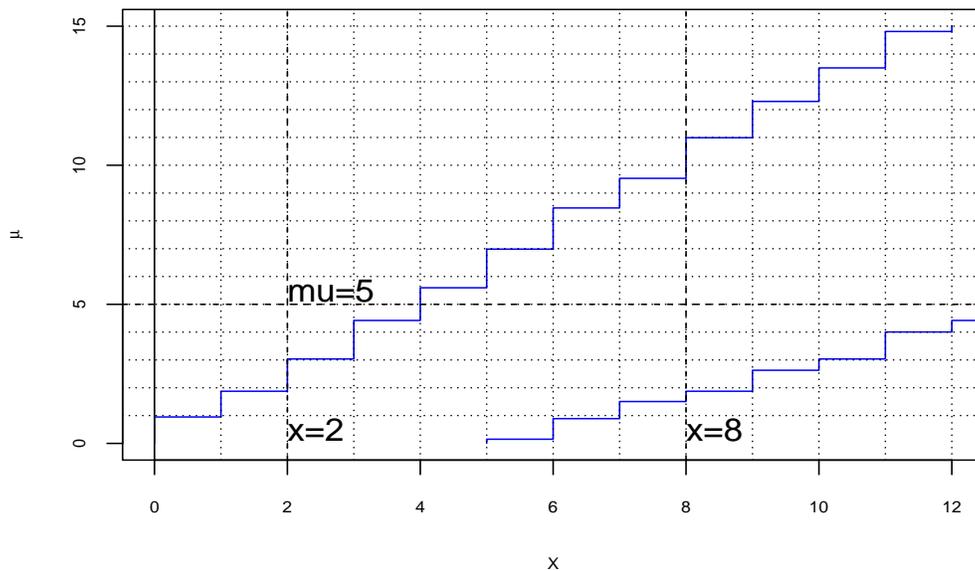


Figura 3-5: Banda de Confianza del 90%, para una v.a $Pois(\mu + b)$, usando el método de FC.

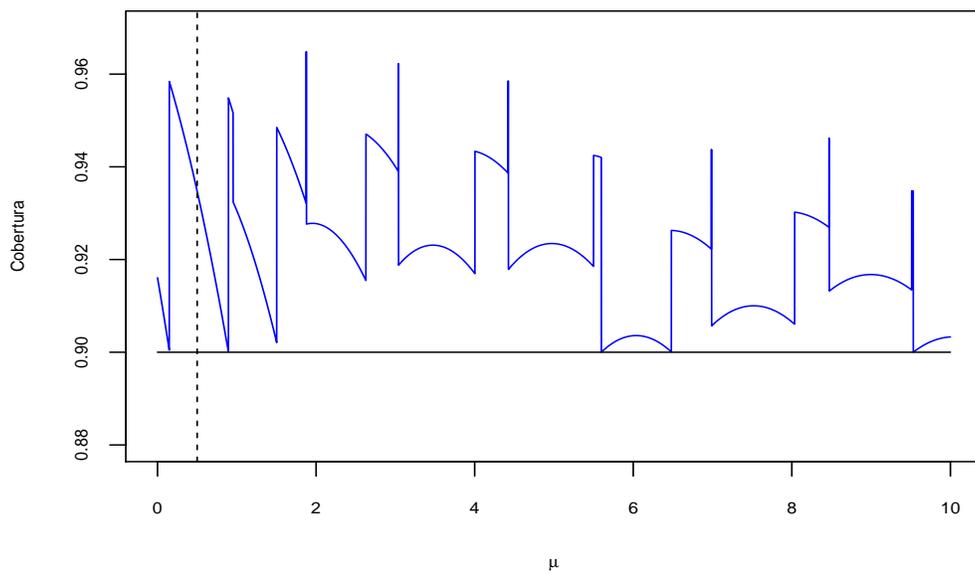


Figura 3-6: Probabilidad de Cobertura de los IC del 90% para μ , usando el método FC.

Para la inversión de la prueba se fija un valor de x , y encontraremos los valores de μ_1 y μ_2 que le corresponda. Esto se puede hacer de muchas formas, una es aplicarle el método de bisección, para cada uno de los límites, la probabilidad de cobertura para $b = 0.5$ es 0.93471.

En la Figura 3-6, se puede apreciar la probabilidad de cobertura para este método, $\mu \in [0, 12]$.

Existen varias variantes de este método, por ejemplo Roe and Woodroffe [12], Aquí ya no usan el principio de ordenamiento para los cocientes de las probabilidades, $\frac{\mathcal{L}(\mu|x,b)}{\sup_{\mu}(\mathcal{L}(\mu|x,b))}$ con $P(x|\mu, b)$. Si no que la reemplaza por $q_k(x|\mu, b)$ definida por;

$$q_k(x|\mu, b) = \begin{cases} \frac{P(k|\mu,b)}{P(x|b)} & \text{si } k \leq x, \\ \sum_{i=0}^k \frac{P(i|b)P(k-i|\mu)}{P(x|b)} & \text{si } k > x. \end{cases}$$

donde $P(x|b) = \frac{b^x e^{-b}}{x!}$, $P(k-i|\mu) = \frac{\mu^{k-i} e^{-\mu}}{(k-i)!}$ con $k \leq x$, luego se procede como el método de J.Neyman.

Y Giunti [10], reemplaza en la Ecuación 3.8 a $\hat{\mu}$ por μ_{ref} , definida por

$$\mu_{ref} = \int_0^{\infty} \mu P(\mu|x, b) d\mu$$

Donde $P(\mu|x, b)$ es la distribución de probabilidad posteriori para μ , asumiendo una distribución a priori constante. haciendo las calculaciones se obtiene.

$$P(\mu|x, b) = (\mu + b)^x e^{-\mu} (x! \sum_{i=0}^n \frac{b^i}{k!})^{-1}.$$

Por lo que

$$\mu_{ref} = x + 1 - \left(\sum_{i=0}^n \frac{ib^i}{k!} \right) \left(\sum_{i=0}^n \frac{b^i}{k!} \right)^{-1} \quad (3.9)$$

y la razón de máxima verosimilitud estará dada por

$$\lambda(\mu) = \frac{P(x|\mu, b)}{P(x|\mu_{ref}, b)}.$$

Estas dos variantes tienen una gran mejoría en la anchura de la banda de confianza de la Figura 3-5.

Otra variante es, cuando incluimos la eficiencia en la medición de μ . Si consideremos el modelo

$$X \sim Pois(\epsilon\mu + b),$$

para algún ϵ , se obtiene que $\hat{\mu}$ es: $\max(0, \frac{x-b}{\epsilon})$.

3.2. Método de RLC

Considere ahora el método RLC o de Rolke, Lopez y Conrad.

En los métodos mostrados hasta el momento se tiene que tener un conocimiento preciso de la tasa b , que se ha tomado fijo. Estos métodos pueden fallar cuando hay un error o incertidumbre en la calculación, por ejemplo, cuando se usan métodos Monte Carlo para estimarlo. Una posible solución se discute en Cousins y Highland [14] en la que sugiere el tratamiento del error de b como error sistemático(se discutirá en la Sección 3.3). En esta sección trataremos éste error, como un error estadístico y se desarrolla un método adecuado para esta situación.

Este método se basa en la prueba de razón de verosimilitud, junto con un ajuste para las situaciones en que hay poca (o ninguna) observación de la señal. Se demostrará que este método tiene una probabilidad de cobertura correcta y que tiene una buena precisión.

La tasa b puede ser estimado, ya sea a partir de los datos o a través de Monte Carlo. Estos dos métodos tienen sus fortalezas y sus debilidades. El uso de los datos requiere la elección de las bandas laterales, e implícitamente asume que la densidad de los eventos de fondo es la misma que los de la región de la señal.

Esto lleva a un dilema: Si elegimos una pequeña banda lateral , este supuesto parece más razonable, pero entonces veremos también que resulta un menor número de eventos de fondo y por lo tanto tienen un mayor error estadístico en la estimación de la tasa b . La elección de una región grande podría producir estadísticos más altos,

pero hace la suposición de un fondo lineal más delicado. Una forma alternativa para estimar la tasa de fondo es por Monte Carlo.

Un problema con este enfoque es que un buen Monte Carlo es a menudo difícil de hacer, porque nunca podemos estar completamente seguros de que hemos modelado todos los efectos pertinentes correctamente. Esto es particularmente cierto en la búsqueda de señales pequeñas ya que los esfuerzos para reducir el fondo significan a menudo, que uno está investigando los extremos de las distribuciones que pueden ser difíciles de modelar.

En la actualidad, en Física de Altas Energías la ejecución de simulaciones Monte Carlo de un experimento puede ser una tarea muy costosa desde el punto de vista computacional, y es posible que el método Monte Carlo sea suficiente para eliminar efectivamente el error en la estimación de fondo. Por esto, es que en muchos casos no es posible hacer caso omiso del error en la tasa de fondo.

El método aquí presentado hace frente al error que presentan estos dos casos, aquellos en los que el fondo se calcula a partir de los datos y así como aquellos en las que se estima el fondo usando Monte Carlo. Este método se adapta cualquiera de las dos estimaciones.

Para definir el método necesitamos la siguiente notación. Supongamos que observamos x eventos en una región de la señal adecuadamente elegida y un total de eventos y en la región de fondo. Aquí la región de fondo se puede elegir con bastante libertad y no tiene que estar contiguo. Además, se supone que la relación entre el tamaño de la región de fondo y el tamaño de la región de la señal es τ .

Por ejemplo, si utilizamos dos regiones, y la región de fondo del mismo tamaño que la región de la señal se tiene $\tau = 2$. Un modelo de probabilidad para los datos viene dado por

$$X \sim Pois(\mu + b), Y \sim Pois(\tau b)$$

Donde μ es la tasa de señal, b es la tasa de fondo y *Pois* es la Distribución de Poisson. Suponga que X e Y son independientes, por lo que

$$P(X = x, Y = y | \mu, b) = \frac{(\mu + b)^x e^{-(\mu+b)}}{x!} \frac{(\tau b)^y e^{-\tau b}}{y!}$$

Si se desea encontrar una región de confianza (o intervalos de confianza para los parámetros en una dimensión) para μ y b , se hará con la misma técnica que los demás métodos descritos hasta el momento han usado, que es encontrar una prueba de hipótesis correspondiente y luego invertir la prueba.

Comencemos con una prueba de hipótesis simultánea para μ y b , con la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0, b = b_0$. Los pasos son los siguientes:

(i.) Lista de todas las observaciones $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, junto con sus probabilidades, que se dan por

$$P(X = x_i, Y = y_i | \mu_0, b_0) = \frac{(\mu_0 + b_0)^{x_i} e^{-(\mu_0+b_0)}}{x_i!} \frac{(\tau b_0)^{y_i} e^{-\tau b_0}}{y_i!}$$

donde μ_0 y b_0 son los valores especificados en la hipótesis nula. En general, puede que hayan un número grande de observaciones, pero sólo se toman aquellas que tienen una probabilidad mayor que una tolerancia dada (ejemplo $tol = 10^{-6}$).

(ii.) Ordenar todas las observaciones desde la más probable hasta la más improbable.

(iii.) Encuentra las sumas parciales desde la más grande a la k -ésima observación hasta llegar a $1 - \alpha$, si el nivel deseado de la prueba es α .

(iv.) Si lo observado (x, y) aparece en la lista de posibles observaciones antes de alcanzar el nivel $1 - \alpha$, aceptar la hipótesis nula, de lo contrario rechazarla.

Si sólo se utilizan las probabilidades como las cantidades de ordenamiento, la prueba simplemente comprueba si la observación (x, y) es compatible con los tipos de μ_0 y b_0 especificado en la hipótesis nula. Y por eso el uso de los coeficientes de probabilidad como la cantidad de ordenamiento de manera similar a Feldman y

Cousins [1], sería un principio superior.

La inversión de la prueba de hipótesis a continuación, implica una búsqueda a través de todos los pares (μ, b) . Si para algún par se llega a la aceptación de la hipótesis nula, lo añadimos a la región de confianza, de lo contrario no lo hacemos.

Como ejemplo tenemos la Figura 3–7, donde se muestran la región de confianza obtenida para $x = 3$ y $y = 3$ observaciones. Los límites de la región mencionada tienen cambios bruscos, y es debido a la naturaleza discreta de la variable aleatoria Poisson, las cuales se calcularon usando la razón de máxima verosimilitud es decir,

$$\lambda(\mu, b|x, y) = \frac{\mathcal{L}(\mu, b|x, y)}{\sup_{\mu, b}(\mathcal{L}(\mu, b|x, y))},$$

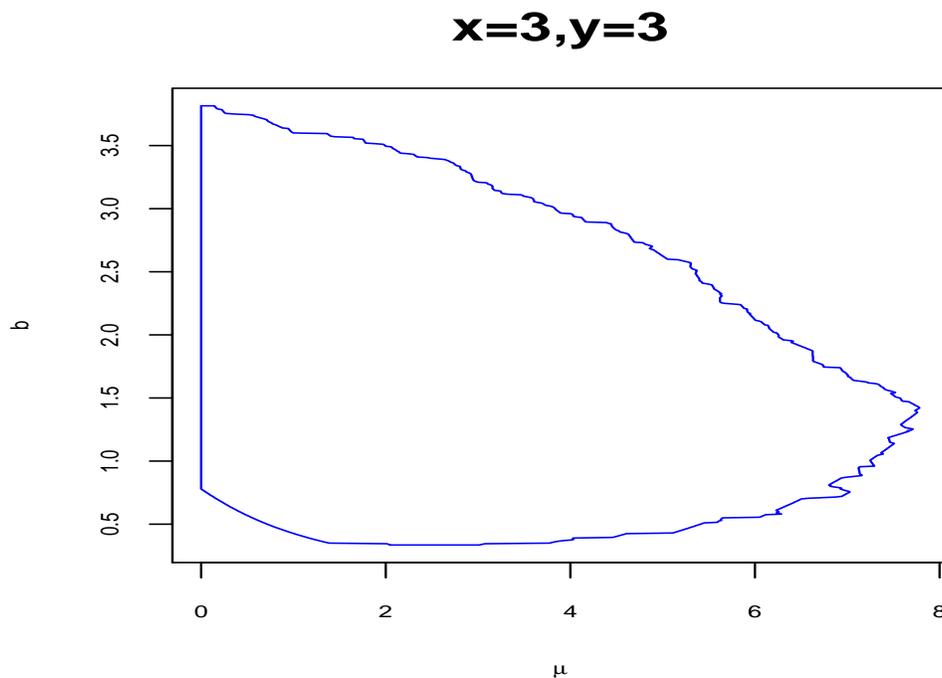


Figura 3–7: Región de confianza del 90 % con el método RLC, para μ y b simultáneamente, con $x = 3, y = 3, \tau = 2$.

donde $\mathcal{L}(\mu, b|x, y) = P(X = x, Y = y|\mu, b)$ y el $\sup_{\mu, b} P(X = x, Y = y|\mu, b)$. Se calcula así,

$$l(\mu, b) = \ln(\mathcal{L}(\mu, b|x, y)) = x \ln(\mu + b) - (\mu + b) - \ln(x!) + y \ln(\tau b) - \tau b - \ln(y!),$$

por lo que

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{x}{\mu + b} - 1 = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial l}{\partial b} = \frac{x}{\mu + b} + \frac{y}{b} - (1 + \tau) = 0 \quad (3.11)$$

Por ende, la solución de las Ecuaciones 3.10 y 3.11 es: $\hat{\mu} = x - \frac{y}{\tau}$ y $\hat{b} = \frac{y}{\tau}$.

Si se desea encontrar un intervalo de confianza para μ , usa algo similar a lo descrito anteriormente, con un cambio en el numerador de la razón de máxima verosimilitud,

$$\lambda(\mu|x, y) = \frac{\sup_b \mathcal{L}(b|x, y, \mu)}{\sup_{\mu, b} (\mathcal{L}(\mu, b|x, y))}$$

A esta razón se le llama perfil de verosimilitud.

Los valores que hacen máximo el denominador son los, ya encontrados antes, es decir $\hat{\mu} = x - \frac{y}{\tau}$ y $\hat{b} = \frac{y}{\tau}$, para encontrar $\sup_b P(X = x, Y = y|\mu, b)$, tenemos que $\frac{\partial l}{\partial b}$ es la misma que la de la Ecuación 3.11, esta ecuación se puede resolver algebraicamente, resultando ser:

$$\hat{b}(\mu) = \frac{x + y - (1 + \tau)\mu + \sqrt{(x + y - (1 + \tau)\mu)^2 + 4(1 + \tau)y\mu}}{2(1 + \tau)}. \quad (3.12)$$

En caso de no poderse resolver aplicaríamos un método numérico para resolverla.

Un resultado muy importante es que la razón,

$$\lambda(\mu|x, y) = \frac{\sup_b (\mathcal{L}(b|x, y, \mu))}{\sup_{\mu, b} (\mathcal{L}(\mu, b|x, y))}$$

es que $-2\ln(\lambda(\mu|x, y))$ es aproximadamente χ_1^2 . Esta aproximación sólo es posible usarla cuando $x \geq \frac{y}{\tau}$.

Ya teniendo la región de aceptación, el siguiente paso es la inversión de la prueba, que se hace similar que en los otros métodos, aunque va a depender de qué método de aproximación de los límites se utilice, aquí hemos usado el método de bisección. En el capítulo 4 se detallarán como se han hecho las calculaciones.

Otras extensiones de este método es considerar distintas ditribuciones para los datos Y (ver [4]).

Aquí se enumeran tres extensiones del método:

(1) Una primera opción es incluir una segunda región de fondo presente en los datos. Se ejecuta a Monte Carlo n veces y se observa un total de eventos z de este tipo. Considere que tenemos x observaciones en la región de la señal y las observaciones de Y en una región de fondo convenientemente elegido.

El modelo de probabilidad está dado por

$$x \sim Pois(\mu + b + \eta), Y \sim Pois(\tau b),$$

$$Z \sim Pois(n\eta),$$

donde μ es la razón de la señal, b es la razón de la primera señal de fondo y η es la segunda razón de fondo y se supone que X, Y y Z son independientes, por lo que

$$P(X = x, Y = y, Z = z|\mu, b, \eta) = \frac{(\mu + b + \eta)^x e^{-(\mu+b+\eta)}}{x!} \frac{(\tau b)^y e^{-\tau b}}{y!} \frac{(n\eta)^z e^{-n\eta}}{z!}.$$

Para construir un intervalo de confianza para μ tendremos que calcular:

$$\lambda(\mu|x, x, z) = \frac{\sup_{b, \eta}(\mathcal{L}(b, \eta|x, y, \mu))}{\sup_{\lambda, b, \eta}(\mathcal{L}(\mu, b, \eta|x, y))},$$

Por ende,

$$l(\mu) = \ln(\mathcal{L}(b, \eta|x, y, \mu)) =$$

$$x \ln(\mu + b + \eta) - (\mu + b + \eta) + y \ln(\tau b) - \tau b + z \ln(n\eta) - n\eta - \ln(x!y!z!)$$

Entonces

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{x}{\mu + b + \eta} - 1 = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial l}{\partial b} = \frac{x}{\mu + b + \eta} + \frac{y}{b} - (1 + \tau) = 0, \quad (3.14)$$

y

$$\frac{\partial l}{\partial \eta} = \frac{x}{\mu + b + \eta} + \frac{z}{\eta} - (1 + n) = 0. \quad (3.15)$$

Usando las Ecuaciones 3.13, 3.14 y 3.15 se obtiene los valores que hacen máximo el denominador es, $(\hat{\mu}, \hat{b}, \hat{\eta}) = (\max(0, x - \frac{y}{\tau}), \frac{y}{\tau}, \frac{z}{n})$. Para encontrar los valores que maximizan el numerador se usan solamente las Ecuaciones 3.14 y 3.15, de las cuales se obtiene

$$\hat{b}(\mu) = \frac{x + y - (1 + \tau)(\mu + \hat{\eta}) + \sqrt{(x + y - (1 + \tau)(\mu + \hat{\eta}))^2 + (1 + \tau)y(\mu + \hat{\eta})}}{2(1 + \tau)},$$

donde $\hat{\eta}(\mu)$, se calcula resolviendo la ecuación cúbica $a_1\eta^3 + a_2\eta^2 + a_3\eta + a_4 = 0$ y

$$a_1 = (1 + n)(n - \tau),$$

$$a_2 = (x + z - (1 + n)\mu)(\tau - n) - (1 + n)(z + y),$$

$$a_3 = xz + (\tau - n)z\mu + z^2 + yz - (1 + n)z\mu,$$

$$a_4 = \mu z^2,$$

por lo que la razón quedaría así

$$\lambda(\mu|x, x, z) = \frac{P(X = x, Y = y, Z = z|\mu, \hat{b}, \hat{\eta})}{P(X = x, Y = y, Z = z|\hat{\mu}, \hat{b}, \hat{\eta})}. \quad (3.16)$$

(2) La segunda extensión del método considera el tratamiento de eficiencia y errores sistemáticos.

El modelo está definido por

$$X \sim Pois(e\mu + b), Y \sim Pois(\tau b), Z \sim Bin(n, e)$$

donde *Bin* es la distribución binomial, igual que en el modelo anterior, para encontrar un intervalo de confianza para μ tendremos que resolver las siguientes ecuaciones para calcular la razón de máxima verosimilitud,

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{ex}{e\mu + b} - e = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial l}{\partial b} = \frac{x}{e\mu + b} + \frac{y}{b} - (1 + \tau) = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial l}{\partial e} = \frac{x\mu}{e\mu + b} - \mu + \frac{z}{e} - \frac{n - z}{1 - e} = 0. \quad (3.19)$$

De las Ecuaciones 3.17, 3.18 y 3.19 se obtiene, $(\hat{\mu}, \hat{b}, \hat{e}) = (max(0, \frac{x-y}{e}), \frac{y}{\tau}, \frac{z}{n})$ y sólo usando 3.18 y 3.19 para algún valor de μ , se tiene un sistema no lineal, que la mejor opción es aplicarle un método numérico para resolverlo, con esto podríamos calcular los valores de la ecuación 3.16.

(3) La tercera extensión es cuando los eventos de fondo no tienen distribución Poisson e igual que la del error sistemático. Por ejemplo si el modelo a considerar es

$$X \sim Pois(e\mu + b), Y \sim N(b, \sigma_b), Z \sim N(e, \sigma_e).$$

De igual forma que en los demas métodos se encontrará que

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{ex}{e\mu + b} - e = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial l}{\partial b} = \frac{x}{e\mu + b} + \frac{y - b}{\sigma_b^2} - 1 = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial l}{\partial e} = \frac{x\mu}{e\mu + b} - \mu + \frac{z - e}{\sigma_e^2} = 0, \quad (3.22)$$

de las cuales se obtiene:

$$(\hat{\mu}, \hat{b}, \hat{e}) = (\max(0, \frac{x - y}{e}), y, z),$$

y

$$\hat{e}(\mu) = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

$$\hat{b}(\mu) = a\hat{e}(\mu) - (az - y),$$

donde

$$a = \frac{\sigma_b^2}{\mu\sigma_e^2},$$

$$A = a(a + \mu),$$

$$B = (\mu + a)(az - \sigma_b^2) + a(az - y),$$

y

$$C = x\sigma_b^2 - (az - y)(az - \sigma_b^2).$$

Existen más extensiones, que daremos más adelante.

3.3. Método CH

El método CH o de Cousins y Highland [14] y [7], como ya se ha mencionado de la incorporación de errores sistemáticos en el cálculo de intervalos de confianza es, en cierta medida, un problema no resuelto. El método presentado en esta sección es semi-Bayesiano que tiene un comportamiento intuitivo satisfactoria y es relativamente fácil de calcular, y también añadiremos varias variantes para el método. Igual que en todos los métodos frecuentistas la probabilidad de cobertura es muy importante, así, que si tienen muy buena cobertura y por ser un método bayesiano, estos métodos suelen ser aceptados con mayor facilidad por la comunidad de la física de partículas. Por lo que, la cobertura será siempre de gran interés.

La forma en que se incorpora la incertidumbre en este método es mediante la integración de las funciones de densidad de probabilidad de la parametrización de las incertidumbres, que tiene en cuenta las incertidumbres en la predicción de los eventos de fondo, incertidumbres en la eficiencia de detección de señal y la eficiencia de fondo. En el Capítulo 4 presentamos estudios de cobertura, de éste y los demás métodos. Por construcción, aunque este método es de una precisión limitada en el límite de las incertidumbres sistemáticas relativas altas.

Algunas extensiones de este método fueron propuestas por Conrad , Hallgren y Heros [8], [9] aquí incluyen las incertidumbres sistemáticas tanto en la señal y la eficiencia de fondo, así como incertidumbres teóricas en la predicción de fondo. Como ya se mencionó este método presentado es referido como “semi-bayesiano”, que combina elementos clásicos y bayesianos. Se tendrán en cuenta las incertidumbres sistemáticas asumiendo (o, si es posible determinar) una PDF que incluye parámetros para nuestro conocimiento acerca de las incertidumbres y la integración en esta PDF, es decir con un enfoque bayesiano.

Primero consideramos que las incertidumbres vienen descritas por una distribución normal, y se hará el cálculo “exacto” de la integral, y no lo haremos con métodos Monte Carlo como se hace en los artículos citados anteriormente, luego daremos varias extensiones posibles del método.

Se ha venido hablando anteriormente de parámetros de incertidumbre sistemáticas, que generalmente son llamados parámetros de estorbo(nuisance parameters).

A continuación describimos dos casos del método.

(1.) En el caso en que sólo hay una única incertidumbre presente.

Sean x los eventos observados en la región de la señal, la PDF $q(x|\mu, b)$, se define

de la siguiente forma,

$$q(x|\mu, b) = \frac{1}{x! \sqrt{2\pi\sigma_b}} \int_0^\infty (\mu + b') e^{-(\mu+b')} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b'-b}{\sigma_b}\right)^2} db', \quad (3.23)$$

donde b es la tasa de fondo estimada y σ_b es el error en la estimación de fondo.

Una forma alternativa de plantear esta integral es tomando que cuenta que así como está dada $q(x|\mu, b)$, no es una distribución de probabilidad, para esto se hará un pequeño cambio en la ecuación 3.23, es decir considere

$$q(x|\mu, b) = \int_0^\infty P(x|\mu, b') P_1(b'|b, \sigma_b) db', \quad (3.24)$$

donde

$$P_1(x|b, \sigma_b) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b(1-\Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b'-b}{\sigma_b}\right)^2} & si \quad \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b} \geq 0, \\ 0 & si \quad \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b} < 0, \end{cases}$$

$$y \quad \Phi\left(-\frac{b}{\sigma_b}\right) = \int_{-\infty}^{-\frac{b}{\sigma_b}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Con esta expresión podríamos redefinir $q(x|\mu, b)$ de forma que esté bien definida, como una PDF.

Si se hacen las calculaciones de la integral obtenemos una representación alternativa, dada por

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} g^i \sigma_b^{x-i} 2^{\frac{x-i+1}{2}} \Gamma\left(\frac{x-i+1}{2}\right) p_i(z_0), \quad (3.25)$$

donde $g = \mu + b - \sigma_b^2$, $w_0 = \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}$, $z_0 = w_0^2$ y

$$p_i(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & si \quad w_0 \geq 0, \\ 1 + (-1)^{x-i} \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & si \quad w_0 < 0. \end{cases}$$

A las Ecuaciones 3.24 y 3.25 sera el método FC modificado, la demostración de Ecuación 3.25 se hace en Apendice A, Teorema 4.

(2.) Si además de la incertidumbre teórica para el fondo, existe la necesidad de incluir la incertidumbre en la eficiencia de la detección de señal, la expresión para $q(x|\mu, b)$ podría extenderse a:

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{1}{2\pi\sigma_b\sigma_\epsilon} \int_0^\infty \int_0^\infty p_{\epsilon'\mu+b'}(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b-b'}{\sigma_b}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-\epsilon'}{\sigma_\epsilon}\right)^2} db' d\epsilon', \quad (3.26)$$

Esta variante es distinta a las dadas en los artículos citados, que dan el caso cuando $\epsilon = 1$ y hacen el estudio de la incertidumbres por separado. El ya visto antes para la incertidumbre en el cálculo de b , y para el caso de la eficiencia, $q(x|\epsilon\mu, b)$ se calcula resolviendo la integral

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon} \int_0^\infty P(x|\epsilon'\mu, b) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon'-\epsilon}{\sigma_\epsilon}\right)^2} d\epsilon'. \quad (3.27)$$

De igual forma que para la Ecuación 3.23, se puede definir como

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \int_0^\infty P(x|\epsilon'\mu, b) P_2(\epsilon'|\epsilon, \sigma_\epsilon^2) d\epsilon', \quad (3.28)$$

$$P_2(\epsilon'|\epsilon, \sigma_\epsilon^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon(1-\Phi(-\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon'-\epsilon}{\sigma_\epsilon}\right)^2} & \text{si } \sigma_\epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon} \geq 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_\epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon} < 0. \end{cases}$$

Haciendo el calculo de la integral se obtiene

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{e^{-(\epsilon\mu+b-\frac{\mu^2\sigma_\epsilon^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} g^i (\epsilon\sigma_\epsilon)^{x-i} 2^{\frac{x-i+1}{2}} \Gamma\left(\frac{x-i+1}{2}\right) p_i(z_0), \quad (3.29)$$

donde $g = \epsilon\mu + b - \mu^2\sigma_\epsilon^2$, $w_0 = \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}$, $z_0 = w_0^2$ y

$$p_i(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } w_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^{x-i} \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } w_0 < 0 \end{cases}$$

ver Apéndice A, Teorema 5, para la demostración.

Igual que las Ecuaciones 3.24 y 3.27, la Ecuación 3.26 la podemos reescribir como:

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(x|\epsilon'\mu, b)P_1(\epsilon'|\epsilon, \sigma_\epsilon^2)d\epsilon'$$

donde

$$P_1(x|b, \sigma_b) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1-\Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} e^{-\frac{1}{2}(\frac{b'-b}{\sigma_b})^2} & \text{si } \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b} \geq 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b} < 0, \end{cases}$$

y

$$P_2(\epsilon'|\epsilon, \sigma_\epsilon^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon(1-\Phi(-\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\epsilon'-\epsilon}{\sigma_\epsilon})^2} & \text{si } \sigma_\epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon} \geq 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_\epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon} < 0. \end{cases}$$

Haciendo el calculo de la integral se obtiene que $q(x|\epsilon\mu, b)$ es igual a:

$$\frac{e^{-\frac{(\epsilon\mu+b+g)}{2}}}{8\pi c} \sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^i \binom{x}{i} \binom{i}{j} g^{x-i} (\mu\sigma_\epsilon)^{i-j} \sigma_b^j 2^{\frac{i+j}{2}} \Gamma(\frac{i-j+1}{2}) \Gamma(\frac{j+1}{2}) p_{i,j}(z_0) q_j(w_0),$$

donde $c = (1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))(1 - \Phi(-\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))$,

$$g = \epsilon\mu + b - \mu^2\sigma_\epsilon^2 - \sigma_p^2, v_0 = \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}, u_0 = \sigma_\epsilon - \frac{b}{\sigma_\epsilon},$$

y

$$z_0 = u_0^2, w_0 = v_0^2$$

$$p_{i,j}(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{i-j+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 \geq 0, \\ 1 + (-1)^{i-j} \Phi_{\Gamma(\frac{i-j+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$$

$$q_j(w_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 \geq 0, \\ 1 + (-1)^j \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 < 0 \end{cases}$$

ver Apendice A, Teorema 1, para la demostración.

En estos casos se ha considerado que la medición de la incertidumbre y la eficiencia tienen distribuciones normales o casi normales. Otras variantes de este método es considerar otra distribución, aquí discutiremos el caso donde se tiene distribución *Gamma* ó Poisson. Veamos dos casos con la distribución *Gamma*:

(1) Sea

$$q(x|\mu, b) = \int_0^\infty P(x|\mu, b') \frac{b'^{\frac{b^2}{\delta}-1} e^{-\frac{bb'}{\delta}}}{\Gamma(\frac{b^2}{\delta}) (\frac{\delta}{b})^{\frac{b^2}{\delta}}} db',$$

con $b > 0$ y $\delta > 0$, para este caso se desea que δ sea un valor bastante pequeño, ya que $E(b') = b$ y $Var(b') = \delta$, si b' es v.a con PDF $\Gamma(\frac{b^2}{\delta}, \frac{\delta}{b})$, ya que b' estima a b .

Integrando se obtiene la siguiente expresión para $q(x|\mu, b)$

$$q(x|\mu, b) = \frac{(\frac{b}{\delta})^{\frac{b^2}{\delta}} e^{-\mu}}{\Gamma(\frac{b^2}{\delta}) x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i} \frac{\Gamma(i + \frac{b^2}{\delta})}{(1 + \frac{b}{\delta})^{i + \frac{b^2}{\delta}}}, \quad (3.30)$$

ver Apendice A, Teorema 6.

(2) Sea

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \int_0^\infty P(x|\epsilon'\mu, b) \frac{\epsilon'^{\frac{\epsilon^2}{\delta}-1} e^{-\frac{\epsilon\epsilon'}{\delta}}}{\Gamma(\frac{\epsilon^2}{\delta}) (\frac{\delta}{\epsilon})^{\frac{\epsilon^2}{\delta}}} d\epsilon'$$

haciendo el cálculo de la integral se obtiene

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{(\frac{\epsilon}{\delta})^{\frac{\epsilon^2}{\delta}} e^{-b}}{\Gamma(\frac{\epsilon^2}{\delta}) x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i} b^i \frac{\Gamma(x - i + \frac{\epsilon^2}{\delta})}{(\mu + \frac{\epsilon}{\delta})^{x-i + \frac{\epsilon^2}{\delta}}} \quad (3.31)$$

La demostración se hace similar a la del Teorema 6, Apendice A.

Ahora si consideramos que la incertidumbre tiene una PDF Poisson, supongamos x los eventos observados en la región de la señal y y los observados en la región de fondo, la nueva distribución esta dada por,

$$q(x, y|\mu) = \int_0^\infty \frac{(\mu + b)^x e^{-(\mu+b)}}{x!} \frac{(\tau b)^y e^{-\tau y}}{y!} db,$$

que haciendo las calculaciones adecuadas obtenemos

$$\begin{aligned} q(x, y|\mu) &= \frac{\tau^y e^{-\mu}}{x!y!} \int_0^\infty (\mu + b)^x b^y e^{-(1+\tau)b} db, \\ &= \frac{\tau^y e^{-\mu}}{x!y!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i} \int_0^\infty b^{y+i} e^{-(1+\tau)b} db, \\ &= \frac{\tau^y e^{-\mu}}{x!y!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i} \frac{\Gamma(y+i+1)}{(1+\tau)^{y+i+1}}. \end{aligned}$$

En estos métodos descritos hasta el momento en esta sección sólo se ha considerado el problema con eventos en la región de la señal. Supongamos ahora que observamos x eventos en una región de la señal y un total de eventos y en la región de fondo. Aquí la región de fondo se puede elegir con bastante libertad y no tiene que estar contiguo y τ como en la Sección 3.2.

Consideremos el modelo de probabilidad dado por

$$X \sim q(x|\mu, b), Y \sim q(y|\tau b),$$

donde

$$q(x|\mu, b) = \int_0^\infty P(x|\mu', b) P_1(\mu'|\mu, \sigma_\mu^2) d\mu', \quad (3.32)$$

$$q(y|\tau b) = \int_0^\infty P(y|\tau b') P_2(b'|b, \sigma_b^2) db', \quad (3.33)$$

y

$$P_1(\mu'|\mu, \sigma_\mu^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu(1-\Phi(\frac{\mu}{\sigma_\mu}))}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu'-\mu}{\sigma_\mu})^2} & \text{si } \sigma_\mu - \frac{\mu}{\sigma_\mu} \geq 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_\mu - \frac{\mu}{\sigma_\mu} < 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

$$P_2(b'|b, \sigma_b^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1-\Phi(\frac{b}{\sigma_b}))} e^{-\frac{1}{2}(\frac{b'-b}{\sigma_b})^2} & \text{si } \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b} \geq 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b} < 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Las Ecuaciones 3.32 y 3.33 se pueden reescribir como

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_\mu^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-\frac{\mu}{\sigma_\mu}))} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu+b-\sigma_\mu^2)^{x-i} \sigma_\mu^i 2^{\frac{i+1}{2}} \Gamma(\frac{i+1}{2}) p_i(z_0),$$

$$q(y|\tau b) = \frac{\tau y e^{-(\tau b - \frac{\tau^2 \sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} \sum_{j=0}^y \binom{y}{j} (b-\tau\sigma_b^2)^{y-j} \sigma_b^j 2^{\frac{j+1}{2}} \Gamma(\frac{j+1}{2}) p_j(w_0),$$

donde $v_0 = \tau\sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}$, $u_0 = \sigma_\mu - \frac{\mu}{\sigma_\mu}$ y $z_0 = u_0^2, w_0 = v_0^2$

$$p_i(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 \geq 0, \\ 1 + (-1)^i \Phi_{\Gamma(\frac{i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$$

y

$$p_j(w_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 \geq 0, \\ 1 + (-1)^j \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 < 0, \end{cases}$$

ver Apendice A, Teorema 7, para la demostración

Un segundo modelo propuesto está dado por:

Sea

$$X \sim q(x|\mu, b), Y \sim q(y|\tau b),$$

donde

$$q(x|\mu, b) = \int_0^\infty P(x|\mu', b) \frac{\mu'^{\frac{\mu^2}{\delta}-1} e^{-\frac{\mu\mu'}{\delta}}}{\Gamma(\frac{\mu^2}{\delta})(\frac{\delta}{\mu})^{\frac{\mu^2}{\delta}}} d\mu', \quad (3.36)$$

$$q(y|\tau b) = \int_0^\infty P(y|\tau b') \frac{b'^{\frac{b^2}{\varepsilon}-1} e^{-\frac{bb'}{\varepsilon}}}{\Gamma(\frac{b^2}{\varepsilon})(\frac{\varepsilon}{b})^{\frac{b^2}{\varepsilon}}} db', \quad (3.37)$$

con $\delta, \varepsilon, \mu, b > 0$. Calculando las integrales se obtiene

$$q(x|\mu, b) = \frac{\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^{\frac{\mu^2}{\delta}} e^{-b}}{\Gamma\left(\frac{\mu^2}{\delta}\right)x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} b^{x-i} \frac{\Gamma\left(i + \frac{\mu^2}{\delta}\right)}{\left(1 + \frac{\mu}{\delta}\right)^{i + \frac{\mu^2}{\delta}}},$$

y

$$q(y|\tau b) = \frac{\tau^y \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^{\frac{b^2}{\varepsilon}}}{y! \Gamma\left(\frac{b^2}{\varepsilon}\right)} \frac{\Gamma\left(i + \frac{b^2}{\varepsilon}\right)}{\left(1 + \frac{b}{\varepsilon}\right)^{i + \frac{b^2}{\varepsilon}}}.$$

ver Apendice A, Teorema 8, para la demostración.

Hasta este momento en todos los métodos sólo tenemos la función de densidad de probabilidad. Ahora, como nuestro objetivo es encontrar intervalos de confianza (o regiones de confianza) y su correspondiente probabilidad de cobertura, para esto usaremos el método descrito en la Sección 3.1 es decir el método FC y para los últimos dos usaremos el método RLC (ver Sección 3.3). Las calculaciones de los estimadores para calcular la razón de máxima verosimilitud se harán numéricamente, pues como se puede apreciar las ecuaciones no son posible tratarlas algebraicamente para maximizarlas.

3.4. Métodos Bayesianos

Ya se ha dado la noción que necesitamos para encontrar intervalos de credibilidad usando algún método bayesiano. Estos métodos se pueden aplicar a una variedad de problemas bastante extensa y con diferentes funciones de densidad de probabilidad a priori. Sin embargo, sólo trataremos el problema que hemos estado describiendo, entonces el modelo de probabilidad a considerar será

$$X \sim P(\mu + b), Y \sim P(\tau b),$$

o el modelo tratando la eficiencia en el calculo de μ será

$$X \sim P(\varepsilon\mu + b), Y \sim P(\tau b).$$

Con X y Y independientes, para métodos frecuentistas las distribuciones de X e Y son más que suficientes para encontrar la región de confianza, pero para poder usar

una idea bayesiana necesitamos distribuciones a priori para los parámetros μ y b , y más general sería que también ϵ tenga su propia distribución. Una pregunta que hasta el momento no tiene respuesta es, ¿cuál es la distribución a priori óptima a usar?

Aquí trataremos tres casos:

Caso (1): Las distribuciones a priori π están dadas por

$$\mu \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1), b \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2) \quad (3.38)$$

Para ciertos valores de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ dados.

La distribución a posteriori para μ y b ese calcula usando la siguiente definición

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{f(x, y|\mu, b)\pi(\mu, b)}{\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|\mu, b)\pi(\mu, b)d\mu db}$$

que integrando y simplificando se obtiene

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b}}{\sum_{i=1}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x - i + \alpha_1)\Gamma(y + i + \alpha_2)}{(1 + \frac{1}{\beta_1})^{x - i + \alpha_1} (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})^{y + i + \alpha_2}}} \quad (3.39)$$

La demostración se hace en Apendice A, Teorema 1.

Con esta expresión podemos encontrar un intervalo de credibilidad de $1 - \alpha$ para el parámetro μ , es decir encontrar μ_1 y μ_2 de tal forma que

$$f(\mu_1|x, y) = f(\mu_2|x, y), \quad (3.40)$$

y

$$1 - \alpha = \int_{\mu_1}^{\mu_2} f(\mu|x, y)d\mu. \quad (3.41)$$

Por ende,

$$\begin{aligned} f(\mu|x, y) &= \int_0^\infty f(\mu, b|x, y)db, \\ &= k \int_0^\infty (\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b} db, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i+\alpha_1-1} e^{-(1+\frac{1}{\beta_1})\mu} \int_0^\infty b^{y+i+\alpha_2-1} e^{-(1+\tau+\frac{1}{\beta_2})b} db, \\
&= k \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\tau+\frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}} \mu^{x-i+\alpha_1-1} e^{-(1+\frac{1}{\beta_1})\mu}.
\end{aligned}$$

Y la segunda condición se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&\int_{\mu_1}^{\mu_2} f(\mu|x, y) d\mu \\
&= k \int_{\mu_1}^{\mu_2} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\tau+\frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}} \mu^{x-i+\alpha_1-1} e^{-(1+\frac{1}{\beta_1})\mu} d\mu, \\
&= k \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\tau+\frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu^{x-i+\alpha_1-1} e^{-(1+\frac{1}{\beta_1})\mu} d\mu, \\
&= k \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\frac{1}{\beta_1})^{x-i+\alpha_1}(1+\tau+\frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}} (p_i(\mu_2) - p_i(\mu_1)),
\end{aligned}$$

donde

$$p_i(\mu) = \Phi_{\left(\frac{x-i+\alpha_1-1}{2}, \frac{\beta_1}{1+\beta_1}\right)}(\mu),$$

y

$$k = \frac{1}{\sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\frac{1}{\beta_1})^{x-i+\alpha_1}(1+\tau+\frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}}}.$$

Las Ecuaciones 3.40 y 3.41 es un sistema no lineal por lo que se resuelve numéricamente, para encontrar los valores de μ_1 y μ_2 .

Si se desea encontrar una intervalo de credibilidad para μ y b simultáneamente, que sería una región de credibilidad, se encuentran μ_1 , μ_2 y b_1 y b_2 tal que

$$f(\mu_1, b_1|x, y) = f(\mu_2, b_2|x, y), \quad (3.42)$$

$$1 - \alpha = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{b_1}^{b_2} f(\mu, b|x, y) db d\mu. \quad (3.43)$$

De manera similar se obtiene:

$$k \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\frac{1}{\beta_1})^{x-i+\alpha_1}(1+\tau+\frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}} (p_i(\mu_2) - p_i(\mu_1))(q_i(b_2) - q_i(b_1)),$$

donde

$$p_i(\mu) = \Phi_{(\frac{x-i+\alpha_1}{2}, \frac{\beta_1}{1+\beta_1})}(\mu),$$

y

$$q_i(b) = \Phi_{(\frac{y+i+\alpha_2}{2}, (1+\tau+\frac{1}{\beta_2})^{-1})}(b).$$

Caso (2): Las distribuciones a priori son,

$$\mu \sim \pi(\mu) = \mu^{\alpha_1-1}, b \sim \pi(b) = b^{\alpha_2-1} \quad (3.44)$$

para ciertos $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, entonces se tiene que la distribución posteriori para μ y b está dada por:

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1-1} b^{y+\alpha_2-1} e^{-\mu-(1+\tau)b}}{\sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\tau)^{y+i+\alpha_2}}}.$$

Un intervalo de credibilidad del $1 - \alpha$ para μ , se obtiene encontrando μ_1 y μ_2 tal que $f(\mu_1|x, y) = f(\mu_2|x, y)$ y

$$1 - \alpha = k_1 \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\tau)^{y+i+\alpha_2}} (p_i(\mu_2) - p_i(\mu_1)),$$

donde

$$\begin{aligned} f(\mu|x, y) &= \int_0^\infty f(\mu, b|x, y) db = k_1 \int_0^\infty (\mu + b)^x \mu^{\alpha_1-1} b^{y+\alpha_2-1} e^{-\mu-(1+\tau)b} db, \\ &= k_1 e^{-\mu} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i+\alpha_1-1} \frac{\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\tau)^{y+i+\alpha_2}}, \end{aligned}$$

$$p_i(\mu) = \Phi_{(x-i+\alpha_1, 1)}(\mu),$$

y

$$k_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1+\tau)^{y+i+\alpha_2}}}.$$

Caso (3): Las distribuciones a priori son Normales,

$$\mu \sim N(\mu_0, \sigma_\mu^2), b \sim N(b_0, \sigma_b^2) \quad (3.45)$$

La distribución posteriori $f(\mu, b|x, y)$ es,

$$\frac{(\mu + b)^x b^y e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-e}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b-g}{\sigma_b}\right)^2\right)}}{\sigma_\mu \sigma_b \sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^y \sum_{k=0}^i \binom{x}{i} \binom{y}{j} \binom{i}{k} (e+g)^{x-i} g^{y-j} \sigma_\mu^{i-k} \sigma_b^{j+k} I_{i,j,k}(z_0, w_0)},$$

donde

$$\begin{aligned} I_{i,j,k} &= \int_{u_0}^{\infty} u^{i-k} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \int_{v_0}^{\infty} v^{k+j} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv, \\ &= 2^{\frac{i+j+2}{2}} \Gamma\left(\frac{i-k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j+k+1}{2}\right) p_{i,k}(z_0) q_{k,j}(w_0). \end{aligned}$$

Aquí $z_0 = u_0^2$, $w_0 = v_0^2$ y

$$p_{i,k}(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\left(\frac{i-k+1}{2}, 2\right)}(z_0) & \text{si } u_0 \geq 0, \\ 1 + (-1)^{i-k} \Phi_{\left(\frac{i-k+1}{2}, 2\right)}(z_0) & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$$

$$q_{k,j}(w_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\left(\frac{j+k+1}{2}, 2\right)}(w_0) & \text{si } v_0 \geq 0, \\ 1 + (-1)^{j+k} \Phi_{\left(\frac{j+k+1}{2}, 2\right)}(w_0) & \text{si } v_0 < 0. \end{cases}$$

Para encontrar los límites de un intervalo de credibilidad para μ , se hace igual que en los casos anteriores y las ecuaciones que se resolverían son: $f(\mu_1|b, x, y) = f(\mu_2|b, x, y)$ y

$$1 - \alpha = \frac{\sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^y \sum_{k=0}^i \binom{x}{i} \binom{y}{j} \binom{i}{k} (e+g)^{x-i} g^{y-j} \sigma_\mu^{i-k} \sigma_b^{j+k} I'_{i,j,k}(z_0, w_0)}{\sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^y \sum_{k=0}^i \binom{x}{i} \binom{y}{j} \binom{i}{k} (e+g)^{x-i} g^{y-j} \sigma_\mu^{i-k} \sigma_b^{j+k} I_{i,j,k}(z_0, w_0)},$$

donde

$$\begin{aligned}
 I'_{i,j,k}(z_0, w_0) &= \int_{u_1}^{u_2} u^{i-k} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \int_{v_0}^{\infty} v^{k+j} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\
 &= 2^{\frac{i+j+2}{2}} \Gamma\left(\frac{i-k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j+k+1}{2}\right) (\Phi_{\frac{i-k+1}{2}, 2}(u_2) - \Phi_{\frac{i-k+1}{2}, 2}(u_1)) q_{k,j}(w_0),
 \end{aligned}$$

con esto se encontrarían los valores de $u_1 = \frac{\mu_1 - g}{\sigma_\mu}$ y $u_2 = \frac{\mu_2 - e}{\sigma_\mu}$ y por lo tanto se tendrían los de μ_1 y μ_2 .

Capítulo 4

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS DE LOS MÉTODOS

Hasta el momento sólo se ha dado la parte teórica de los métodos para encontrar intervalos de estimación, aquí se presentará la implementación en R y sus respectivos resultados.

4.1. Método FC

En la Tabla 4-1 se muestran intervalos de confianza del 95% con el método FC(ver Sección 3.1) para μ y $b = 0.5, 1, 3$, para encontrar los límites se aplicó el método de bisección. Por ejemplo, para encontrar el límite inferior L del intervalo cuando $x = 8$, $b = 0.5$, comenzamos preguntando si $L \in [0, 1]$, si la aceveración es verdadera bisecamos el intervalo y obtendríamos que $L \in [0, 0.5]$ ó $L \in [0.5, 1]$ y en el intervalo que pertenezca lo volvemos a bisecar hasta donde deseemos, si la aceveración inicial es falsa preguntamos si $L \in [1, 2]$ y procedemos como antes, así se va busacando hasta encontrar el intervalo al que pertenece éste, en nuestro caso particular $L \in [2, 3]$ y se encuentra que $L = 2.632813$. Similarmente encontramos U , para calcular la probabilidad de cobertura para algún μ , se encuentran todos los intervalos que contienen a μ y para cada uno de estos se evalua la CDF en x, b y μ , luego se hace la suma de estos valores y esta es la probabilidad deseada, que para que sea correcta tiene que ser mayor o igual a $1 - \alpha$, supongamos que $\mu = 0.5$ se obtiene que la probabilidad de cobertura es de 0.981012.

Cuadro 4-1: Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0.5, 1.0$ y 3.0 .

x	IC95 %, $b = 0.5$		IC95 %, $b = 1.0$		IC95 %, $b = 3.0$	
	L	U	L	U	L	U
0	0.000	2.637	0.000	2.336	0.000	1.621
1	0.000	4.645	0.000	4.145	0.000	2.629
2	0.000	6.223	0.000	5.723	0.000	3.840
3	0.316	7.754	0.000	7.254	0.000	5.254
4	0.863	9.262	0.363	8.762	0.000	6.762
5	1.469	10.762	0.969	10.262	0.000	8.262
6	1.898	12.254	1.605	11.754	0.000	9.754
7	2.266	13.313	1.969	12.813	0.285	10.813
8	2.633	14.793	2.332	14.293	0.980	12.293
9	3.855	16.273	3.355	15.773	1.617	13.773
10	4.250	17.316	3.750	16.816	2.250	14.816
11	4.641	18.793	4.141	18.293	2.625	16.293
12	5.816	19.836	5.316	19.336	3.438	17.336
13	6.219	21.305	5.719	20.805	3.836	18.805
14	7.336	22.445	6.836	21.945	4.836	19.945
15	7.750	23.809	7.250	23.309	5.250	21.309

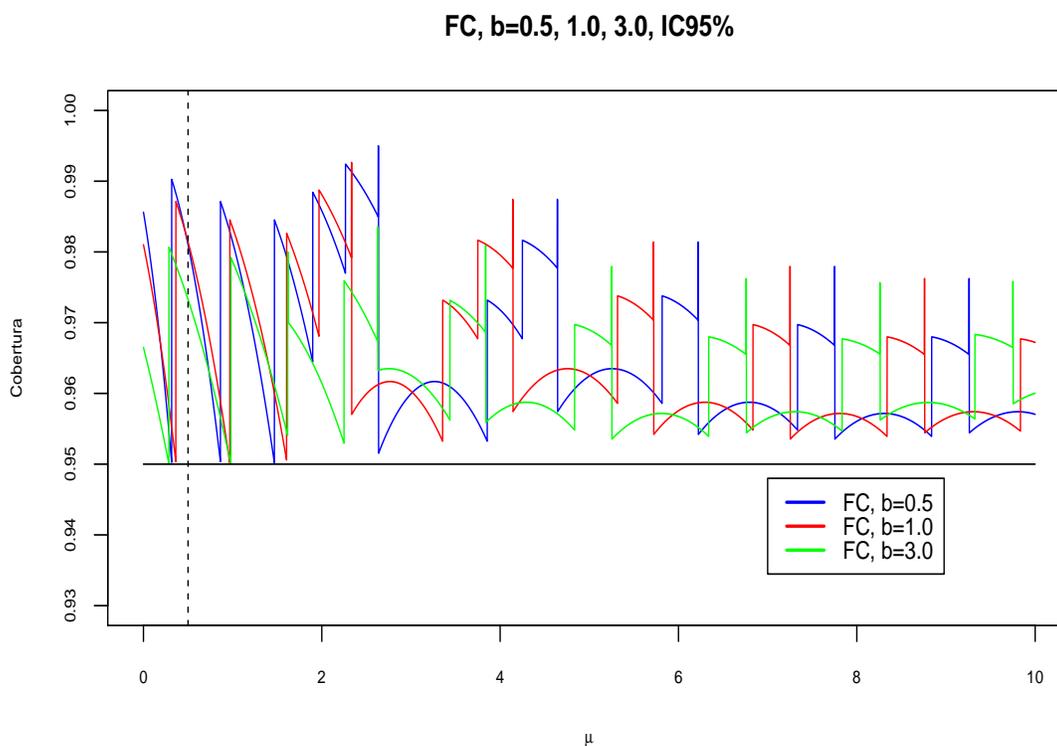


Figura 4-1: Probabilidad de Cobertura para la señal media μ con el método FC, para $b = 0.5, 1.0$ y 3.0 de los IC95 %.

La Figura 4-1 muestra las probabilidades de cobertura de los intervalos de confianza del 95 %, para todos los valores de $\mu \in [0, 10]$, con $b = 0.5, 1, 3$.

La Figura 4-2 y la Tabla 4-2 muestran los mismos cálculos con los mismos valores de b , pero con una confianza del 99.9 %, aquí nos podemos dar cuenta que al aumentar la confianza estamos perdiendo precisión, digamos que $x = 8, b = 1$, el intervalo pasa de ser $[2.632813, 14.792969]$ a $[1.468750, 21.105469]$.

Cuadro 4-2: Intervalos del 99,9 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0.5, 1.0$ y 3.0 .

x	IC99,9 %, $b = 0.5$		IC99,9 %, $b = 1.0$		IC99,9 %, $b = 3.0$	
	L	U	L	U	L	U
0	0.000	6.566	0.000	6.066	0.000	4.824
1	0.000	8.879	0.000	8.379	0.000	6.789
2	0.000	10.957	0.000	10.457	0.000	8.551
3	0.000	12.969	0.000	12.469	0.000	10.469
4	0.000	14.645	0.000	14.145	0.000	12.145
5	0.238	16.508	0.000	16.008	0.000	14.008
6	0.605	18.047	0.105	17.547	0.000	15.547
7	1.019	19.574	0.519	19.074	0.000	17.074
8	1.469	21.105	0.969	20.605	0.000	18.605
9	1.949	22.672	1.449	22.172	0.000	20.172
10	2.457	24.179	1.957	23.679	0.000	21.679
11	2.988	25.629	2.488	25.129	0.488	23.129
12	3.539	27.113	3.039	26.613	1.039	24.613
13	4.109	28.609	3.609	28.109	1.609	26.109
14	4.695	30.102	4.195	29.602	2.195	27.602
15	5.203	31.594	4.793	31.094	2.793	29.094

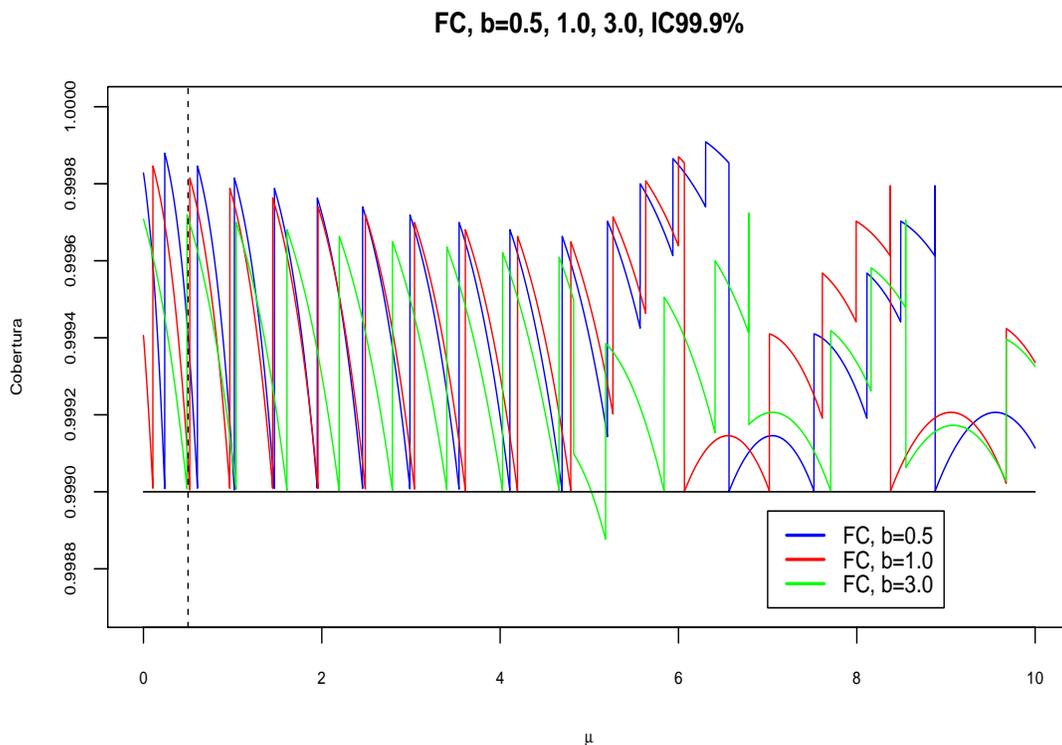


Figura 4-2: Probabilidad de Cobertura para la señal media μ con el método FC, para $b = 0.0, 1.0$ y 3.0 de los IC99,9%.

Ahora si consideramos la eficiencia en la medición de μ , para este caso la eficiencia la tomamos constante. La Tabla 4-3 muestra las calculaciones con $b = 3.0$, para $\epsilon = 0.8, 0.9$ y cuando la eficiencia es 1 y con una confianza del 99.9%. Podemos observar como (era de esperarse) que los intervalos son más anchos o sea que a menor eficiencia menor precisión y en la Figura 4-3 se muestran las probabilidades de cobertura μ para $b = 3.0$ con $\epsilon = 0.8, 0.9$ y 1.

Cuadro 4-3: Intervalos del 99,9% para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con una eficiencia de $\epsilon = 0.8, 0.9$ y $b = 3.0$.

x	$\epsilon = 0.8$		$\epsilon = 0.9$		$\epsilon = 1.0$	
	L	U	L	U	L	U
0	0.000	6.031	0.000	5.359	0.000	4.824
1	0.000	8.488	0.000	7.543	0.000	6.789
2	0.000	10.691	0.000	9.504	0.000	8.551
3	0.000	13.086	0.000	11.633	0.000	10.469
4	0.000	15.184	0.000	13.496	0.000	12.145
5	0.000	17.508	0.000	15.563	0.000	14.008
6	0.000	19.434	0.000	17.273	0.000	15.547
7	0.000	21.344	0.519	18.973	0.000	17.074
8	0.000	23.254	0.000	20.672	0.000	18.605
9	0.000	25.215	0.000	22.414	0.000	20.172
10	0.000	27.098	0.000	24.086	0.000	21.679
11	0.613	28.910	0.543	25.695	0.488	23.129
12	1.301	30.766	1.156	27.348	1.039	24.613
13	2.012	32.637	1.789	29.008	1.609	26.109
14	2.742	34.500	2.438	30.668	2.195	27.602
15	3.492	36.363	3.102	32.324	2.793	29.094

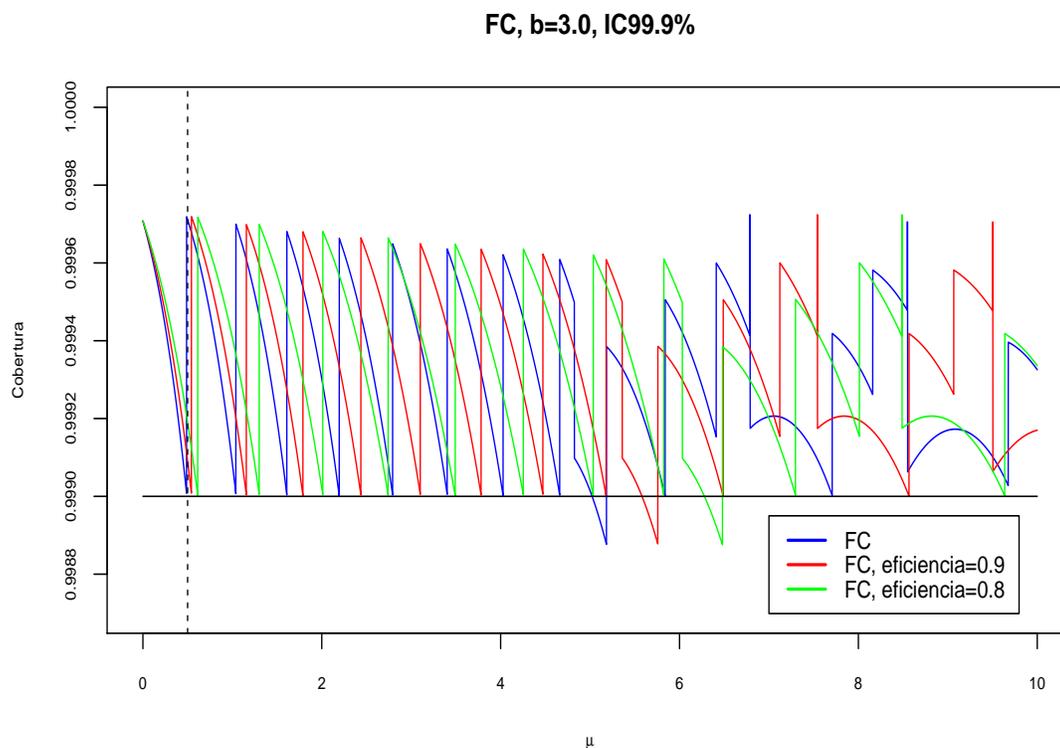


Figura 4-3: Comparación de la probabilidad de cobertura para la señal media μ con el método FC, para $b = 3.0$ y $\epsilon = 0.8$ de los IC99,9%.

4.2. Método RLC

Para el método RLC considere primero el modelo de probabilidad

$$X \sim \text{Pois}(\mu + b), Y \sim \text{Pois}(\tau b).$$

La implementación es similar que el método FC, con la diferencia que ya se incluyen más valores y el costo computacional es mucho mayor. Es decir, para el método FC para hacer la calculación de la razón de máxima verosimilitud sólo es necesario un vector, mientras que para el método RLC se necesita una matriz y los vectores que se utilizan son de mayor dimensión. Para encontrar los límites de los intervalos, igual se aplicó bisección.

En la Figura 4-4 se muestran las probabilidades de cobertura para $\mu \in [0, 10]$ con $b = 0.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ con una confianza de 95 %, mientras que la Tabla 4-4 muestra los intervalos de confianza de μ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y $y = 0, 2, 4$ con los mismos valores de b y τ antes mencionados.

Cuadro 4-4: Intervalos del 95 % para μ con el método RLC, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 0, 1, 2$ y $b = 0.5$, con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC95 %, $\tau = 0.5$		IC95 %, $\tau = 1.0$		IC95 %, $\tau = 3.0$	
		L	U	L	U	L	U
0	0	0.000	2.445	0.000	2.289	0.000	1.339
1	0	0.000	4.777	0.000	4.645	0.000	3.582
2	0	0.000	6.625	0.000	6.336	0.152	5.004
3	0	0.289	8.164	0.391	8.023	0.602	6.508
4	0	0.832	9.679	0.922	9.570	0.969	8.004
5	0	1.336	11.179	1.336	11.102	1.336	9.488
0	1	0.000	3.281	0.000	3.203	0.000	2.762
1	1	0.000	4.211	0.000	4.902	0.000	5.336
2	1	0.125	5.781	0.000	6.809	0.000	7.105
3	1	0.621	7.441	0.281	8.469	0.113	8.719
4	1	1.117	8.977	0.742	10.082	0.535	10.297
5	1	1.484	10.348	1.227	11.429	0.887	11.598
0	2	0.000	3.563	0.000	2.934	0.000	3.074
1	2	0.000	3.574	0.000	3.613	0.000	5.434
2	2	1.089	3.582	0.227	5.281	2.195	7.152
3	2	1.664	3.738	0.832	6.758	0.105	8.793
4	2	4.016	5.339	1.281	8.262	0.527	10.395
5	2	3.734	5.945	1.645	9.699	0.883	11.969

RLC, $b=0.5, \tau=0.5, 1.0, 3.0$, IC95%

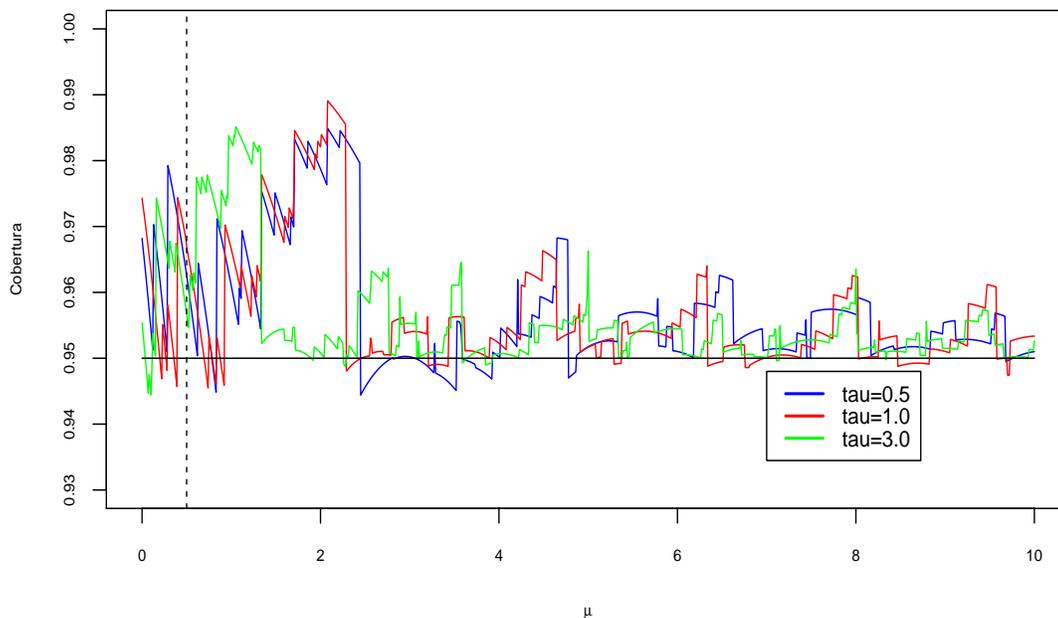


Figura 4-4: Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 0.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC95 %.

La Figura 4-5 muestra las probabilidades de cobertura para $\mu \in [0, 10]$ con $b = 2.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los intervalos de confianza del 95% y la Figura 4-6 igual muestra las probabilidades de cobertura con $b = 2.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$. Las Tablas 4-5 y 4-6 muestran los intervalos de confianza del 95% para μ , con $b = 2.5$ y $b = 5.0$ respectivamente, para ciertos valores de x y y . Por ejemplo con $x = 2, y = 3$ y $b = 2.5$ se tienen los intervalos de confianza del 95%, $[0.000, 5.535]$, $[0.000, 1.324]$ y $[0.000, 2.457]$ para $\tau = 0.5, 1, 3$ respectivamente. Podemos apreciar que al aumentar τ el ancho del intervalo disminuye y la probabilidad de cobertura sigue siendo correcta. En las tablas cuando el valor del límite superior del intervalo es *NA*, ocurre cuando el punto (x, y) , cae fuera de la región de aceptación en la prueba de hipótesis, es decir no hay intervalo con estos valores de x, y para μ . Cuadro 4-5: Intervalos del 95% para μ con el método RLC, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 2.5$, con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC95%, $\tau = 0.5$		IC95%, $\tau = 1.0$		IC95%, $\tau = 3.0$	
0	3	0.000	5.313	0.000	3.320	0.000	NA
1	3	0.000	5.519	0.000	4.269	0.000	0.660
2	3	0.000	5.535	0.000	1.324	0.000	2.457
3	3	0.000	7.188	0.000	2.805	0.0000	4.113
4	3	0.000	8.758	0.000	3.984	0.000	5.688
5	3	0.000	10.277	0.000	5.395	0.250	7.078
0	4	0.000	6.371	0.000	4.109	0.000	0.582
1	4	0.000	6.531	0.000	4.695	0.000	1.926
2	4	0.000	5.695	0.000	4.492	0.000	3.727
3	4	0.000	6.809	0.000	6.172	0.000	5.555
4	4	0.000	8.277	0.000	7.797	0.000	7.156
5	4	0.000	9.645	0.000	9.391	0.000	8.543
0	5	0.000	7.105	0.000	4.574	0.000	1.445
1	5	0.000	7.074	0.000	4.852	0.000	2.750
2	5	0.000	5.570	0.000	5.160	0.000	4.570
3	5	0.000	6.254	0.000	6.984	0.000	6.324
4	5	0.000	8.645	0.000	8.648	0.000	7.855
5	5	0.297	6.813	0.000	10.258	0.000	9.367

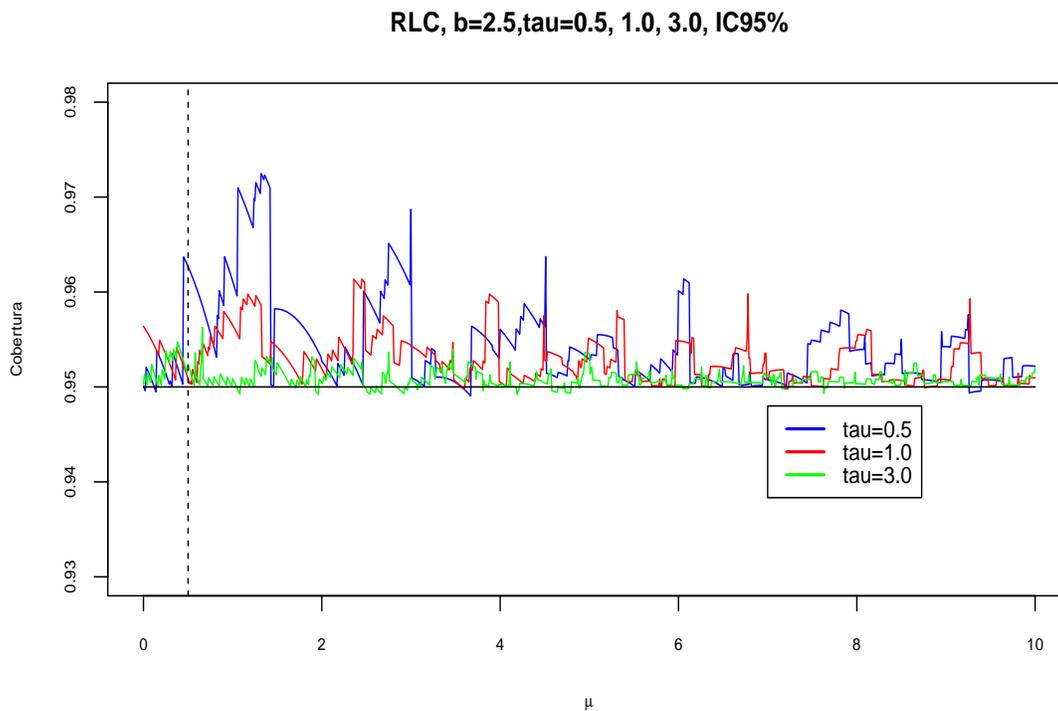


Figura 4-5: Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 2.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC95%.

Cuadro 4-6: Intervalos del 95 % para μ con el método RLC, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 5.0$, con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC95 %, $\tau = 0.5$		IC95 %, $\tau = 1.0$		IC95 %, $\tau = 3.0$	
0	6	0.000	8.238	0.000	3.629	0.000	NA
1	6	0.000	8.320	0.000	4.129	0.000	NA
2	6	0.000	8.473	0.000	4.652	0.000	NA
3	6	0.000	8.695	0.000	5.469	0.000	NA
4	6	0.000	8.891	0.000	6.355	0.000	NA
5	6	0.000	9.047	0.000	7.582	0.000	NA
0	7	0.000	9.363	0.000	4.375	0.000	NA
1	7	0.000	9.379	0.000	4.797	0.000	NA
2	7	0.000	9.422	0.000	5.223	0.000	NA
3	7	0.000	9.445	0.000	5.773	0.000	NA
4	7	0.000	9.473	0.000	6.508	0.000	NA
5	7	0.000	9.500	0.000	7.488	0.000	NA
0	8	0.000	10.324	0.000	5.035	0.000	NA
1	8	0.000	10.281	0.000	5.418	0.000	NA
2	8	0.000	10.215	0.000	5.664	0.000	NA
3	8	0.000	10.172	0.000	6.086	0.000	0.566
4	8	0.000	10.055	0.000	6.586	0.000	2.004
5	8	0.000	9.902	0.000	7.289	0.000	3.457

RLC, $b=5.0, \tau=0.5, 1.0, 3.0, IC95\%$

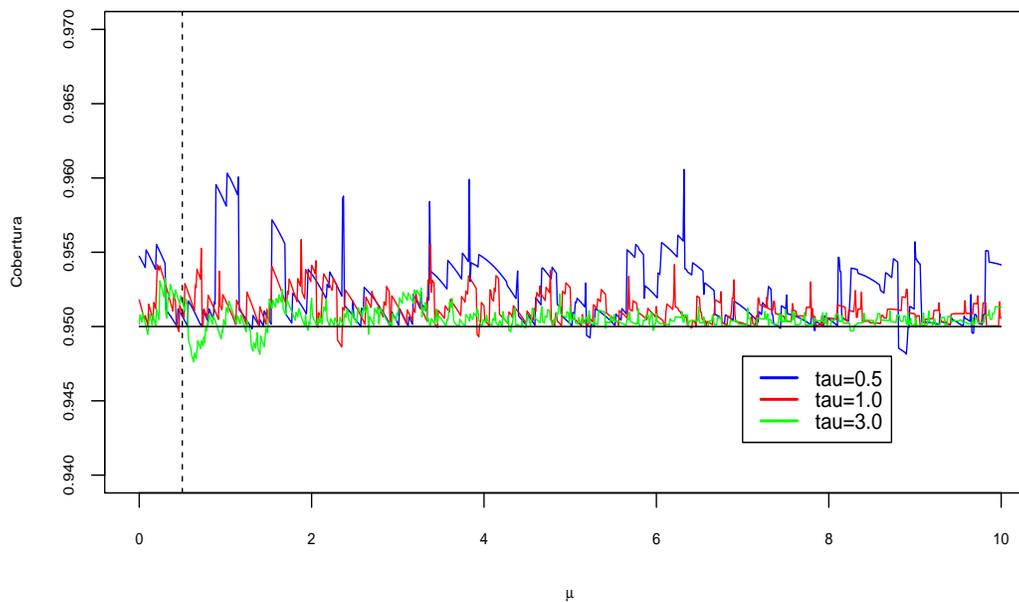


Figura 4-6: Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 5.0$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC95 %.

Cuadro 4-7: Intervalos del 99.9% para μ con el método RLC, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 0, 1, 2$ y $b = 0.5$, con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC99.9%, $\tau = 0.5$		IC99.9%, $\tau = 1.0$		IC99.9%, $\tau = 3.0$	
1	0	0.000	9.258	0.000	9.125	0.000	8.117
2	0	0.000	11.426	0.000	11.246	0.000	10.269
3	0	0.000	13.426	0.000	13.184	0.000	12.188
4	0	0.000	14.551	0.000	14.371	0.043	13.746
5	0	0.203	15.293	0.258	15.102	0.395	14.418
1	1	0.000	8.461	0.000	9.395	0.000	9.508
2	1	0.000	10.738	0.000	11.523	0.000	11.679
3	1	0.000	12.762	0.000	13.559	0.000	13.723
4	1	0.082	14.328	0.000	14.551	0.000	14.539
5	1	0.359	15.051	0.211	15.293	0.195	15.281
1	2	0.000	7.871	0.000	7.914	0.000	9.605
2	2	0.000	9.465	0.000	10.188	0.000	11.691
3	2	0.019	10.293	0.000	12.160	0.000	13.758
4	2	0.449	12.105	0.152	13.894	0.000	14.551
5	2	0.875	13.793	0.449	14.629	0.164	15.293

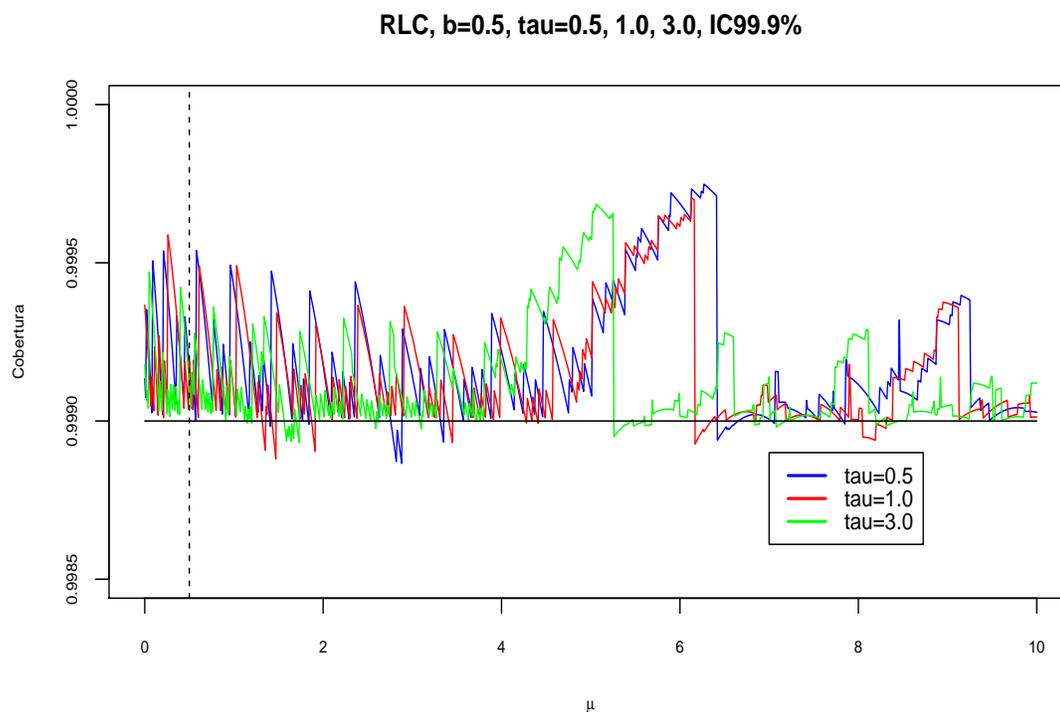


Figura 4-7: Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 0.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC99.9%.

Cuadro 4-8: Intervalos del 99.9% para μ con el método RLC, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 2.5$, con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC99.9%, $\tau = 0.5$		IC99.9%, $\tau = 1.0$		IC99.9%, $\tau = 3.0$	
1	3	0.000	9.633	0.000	8.141	0.000	6.195
2	3	0.000	10.5195	0.000	9.941	0.000	8.656
3	3	0.000	11.621	0.000	11.918	0.000	10.695
4	3	0.000	12.769	0.000	14.039	0.000	12.551
5	3	0.000	14.391	0.000	15.711	0.000	14.316
1	4	0.000	10.434	0.000	8.750	0.000	7.281
2	4	0.000	10.879	0.000	10.031	0.000	9.609
3	4	0.000	11.746	0.000	11.484	0.000	11.676
4	4	0.000	12.566	0.000	13.441	0.000	13.582
5	4	0.000	13.660	0.000	15.086	0.000	15.391
1	5	0.000	10.871	0.000	8.938	0.000	7.918
2	5	0.000	11.211	0.000	10.016	0.000	10.234
3	5	0.000	12.133	0.000	11.332	0.000	12.316
4	5	0.000	12.387	0.000	12.758	0.000	14.195
5	5	0.000	12.859	0.000	14.293	0.000	16.102

RLC, $b=2.5$, $\tau=0.5, 1.0, 3.0$, IC99.9%

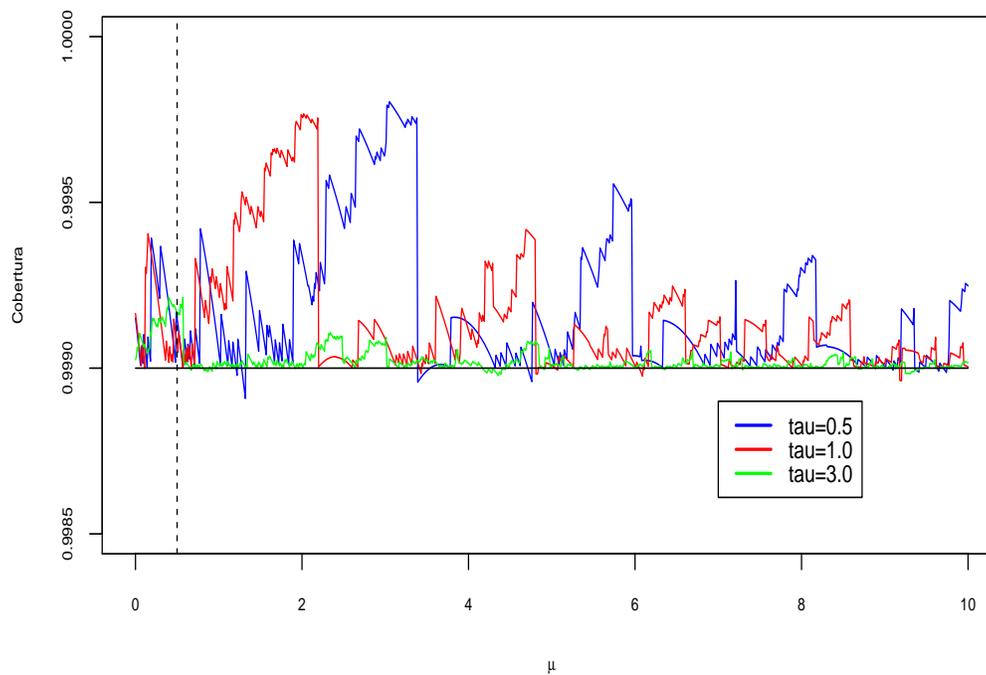


Figura 4-8: Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 2.5$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC99.9%.

Cuadro 4-9: Intervalos del 99.9% para μ con el método RLC, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y $b = 5.0$, con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC99.9%, $\tau = 0.5$		IC99.9%, $\tau = 1.0$		IC99.9%, $\tau = 3.0$	
1	3	0.000	8.023	0.000	5.496	0.000	NA
2	3	0.000	9.000	0.000	7.125	0.000	NA
3	3	0.000	10.047	0.000	8.918	0.000	NA
4	3	0.000	11.457	0.000	10.820	0.000	NA
5	3	0.000	13.031	0.000	12.809	0.000	NA
1	4	0.000	9.715	0.000	6.617	0.000	NA
2	4	0.000	10.301	0.000	7.906	0.000	NA
3	4	0.000	11.277	0.000	9.496	0.000	0.645
4	4	0.000	12.117	0.000	11.429	0.000	2.063
5	4	0.000	13.281	0.000	13.203	0.000	3.621
1	5	0.000	11.070	0.000	7.586	0.000	NA
2	5	0.000	11.484	0.000	8.738	0.000	1.348
3	5	0.000	12.105	0.000	10.145	0.000	3.019
4	5	0.000	12.836	0.000	11.633	0.000	4.762
5	5	0.000	13.582	0.000	13.516	0.000	6.238

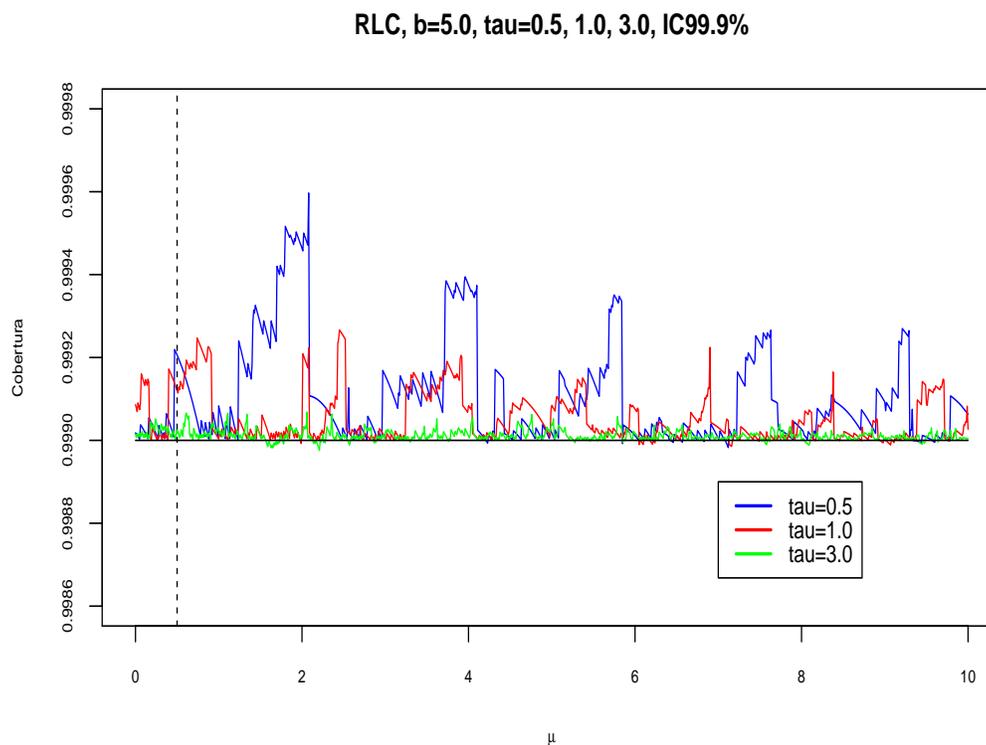


Figura 4-9: Probabilidad de Cobertura de μ con el método RLC, para $b = 5.0$ y $\tau = 0.5, 1, 3$ de los IC99.9%.

En las Figuras 4-7, 4-8 y 4-9 se muestran las probabilidades de cobertura para los mismos valores de b y τ antes mencionados pero con un nivel de confianza del 99.9%. En éstas se puede observar que la mayoría de valores de μ tienen cobertura correcta y los trayectos donde la gráfica baja de la línea de confianza es debido a que se está usando una aproximación de los límites del intervalo. Sin embargo, lo más bajo que llegan es alrededor de 0.949 y 0.9989 para los distintos niveles de confianza. En las Tablas 4-7, 4-8 y 4-9 se dan las calculaciones de los límites de los intervalos para μ con una confianza del 99.9%, para algunos valores de x y y .

4.3. Método CH

Presentamos calculaciones del modelo discutido con el método CH, con sus respectivas modificaciones, es decir, consideramos a x con la función de probabilidad dada en la Ecuación 3.23. Para poder usar este método tiene que cumplirse la restricción del σ_b y b .

$$\frac{b}{\sigma_b} \gg \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

Esto, debido a que tanto la distribución Poisson y la normal tienen que estar cercanas alrededor de b , esta condición nos limita a que tenemos que ser bastante precisos en la medición de b , para que σ_b sea bastante pequeña. Sin embargo, cuando agregamos la constante de integración $1 - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma_b}\right)$, se puede ser más flexible en el error cometido al medir b , siempre y cuando las dos distribuciones no se separen demasiado, de lo contrario se estaría encontrando los intervalos incorrectos.

La implementación y los resultados de este método se hicieron con los resultados obtenidos en la Sección 3.3, de los cuales todas las ecuaciones a excepción de las Ecuaciones 3.23, 3.26 y 3.27 son nuevos resultados que se han incluido en éste trabajo.

La Tabla 4-10 muestra las calculaciones de intervalos de confianza del 95% para μ , con $b = 0.5$ y usando los métodos FC, CH y el CH cuando incluimos la constante (en los dos últimos se usa un $\sigma_b = 0.1$). Se puede observar los límites del intervalo,

son bastante idénticos, pero si los cálculos lo hacemos con $\sigma_b = 0.25$, aquí con CH, los intervalos van perdiendo precisión, mientras que con la modificación que se le ha hecho seguimos con la misma o mejor precisión que FC, como se puede observar en la Tabla 4-11. Igual en la Tabla 4-12 y Figura 4-12, se hacen la calculaciones de los intervalos y la cobertura, cuando $b = 5.0$ y $\sigma_b = 0.4$, aquí también se puede observar la pequeña mejoría en la precisión de los intervalos con la modificación hecha al método CH. Mientras que en la Tabla 4-13 y 4-13 se hacen las calculaciones de los intervalos y probabilidades de cobertura cuando la distribución de la incertidumbre es una $\Gamma(\frac{b^2}{\eta}, \frac{\eta}{b})$, con $\eta = 0.1, 0.25, 0.4$ y $b = 0.5, 1, 5$ respectivamente. Se obtienen intervalos muy similares a los encontrados con el CH modificado.

Cuadro 4-10: Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0.5$, usando FC, y CH con $\sigma_b = 0.1$.

x	FC, $b = 0.5$		CH, $b = 0.5$		CH modificado $b = 0.5$	
	L	U	L	U	L	U
0	0.000	2.637	0.000	2.633	0.000	2.633
1	0.000	4.645	0.000	4.648	0.000	4.648
2	0.000	6.223	0.000	6.223	0.000	6.223
3	0.316	7.754	0.309	7.754	0.309	7.754
4	0.863	9.262	0.859	9.262	0.859	9.262
5	1.469	10.762	1.465	10.762	1.465	10.762
6	1.898	12.254	1.895	12.254	1.895	12.254
7	2.266	13.313	2.262	13.313	2.262	13.313
8	2.633	14.793	2.629	14.793	2.629	14.793
9	3.855	16.273	3.859	16.273	3.859	16.273
10	4.250	17.316	4.250	17.316	4.250	17.316
11	4.641	18.793	4.645	18.793	4.645	18.793

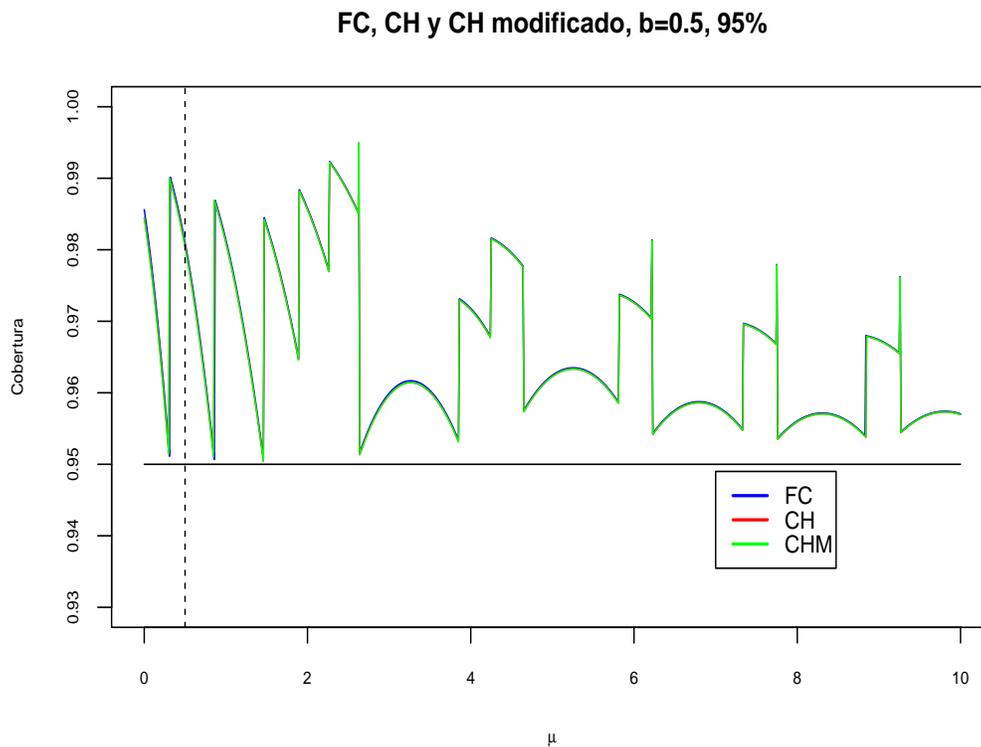


Figura 4–10: Probabilidad de Cobertura de μ con CH, para $b = 0.5$ de los IC95%.
 Cuadro 4–11: Intervalos del 95% para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0.5$, usando FC, y CH con $\sigma_b = 0.25$.

x	FC, $b = 0.5$		CH, $b = 0.5$		CH modificado $b = 0.5$	
	L	U	L	U	L	U
0	0.000	2.637	0.000	3.339	0.000	2.629
1	0.000	4.645	0.000	5.309	0.000	4.641
2	0.000	6.223	0.000	7.016	0.000	6.215
3	0.316	7.754	0.070	8.559	0.262	7.742
4	0.863	9.262	0.566	10.082	0.816	9.250
5	1.469	10.762	1.117	11.586	1.426	10.750
6	1.898	12.254	1.711	13.086	1.875	12.242
7	2.266	13.313	2.238	14.578	2.238	13.305
8	2.633	14.793	2.605	15.902	2.605	14.781
9	3.855	16.273	2.969	17.121	3.852	16.262
10	4.250	17.316	3.855	18.605	4.246	17.305
11	4.641	18.793	4.637	20.086	4.637	18.781

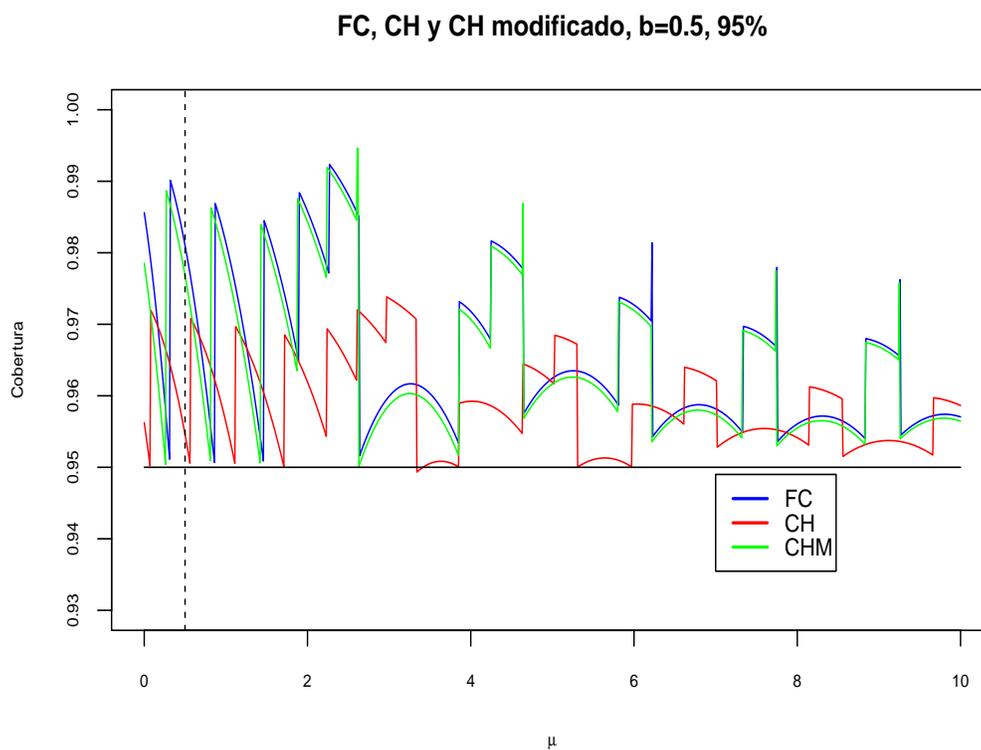


Figura 4–11: Probabilidad de Cobertura de μ con CH, para $b = 0.5$ de los IC95%.
 Cuadro 4–12: Intervalos del 95% para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 5.0$, usando FC, y CH con $\sigma_b = 0.4$.

x	FC, $b = 0.5$		CH, $b = 0.5$		CH modificado $b = 0.5$	
	L	U	L	U	L	U
0	0.000	1.379	0.000	1.363	0.000	1.363
1	0.000	1.879	0.000	1.867	0.000	1.867
2	0.000	2.477	0.000	2.469	0.000	2.469
3	0.000	3.582	0.000	3.578	0.000	3.578
4	0.000	4.844	0.000	4.848	0.000	4.848
5	0.000	6.262	0.000	6.269	0.000	6.269
6	0.000	7.754	0.000	7.758	0.000	7.758
7	0.000	8.813	0.000	8.934	0.000	8.934
8	0.000	10.293	0.000	10.297	0.000	10.297
9	0.000	11.773	0.000	11.777	0.000	11.777
10	0.422	12.816	0.371	12.820	0.371	12.820
11	1.168	14.293	1.117	14.297	1.117	14.297

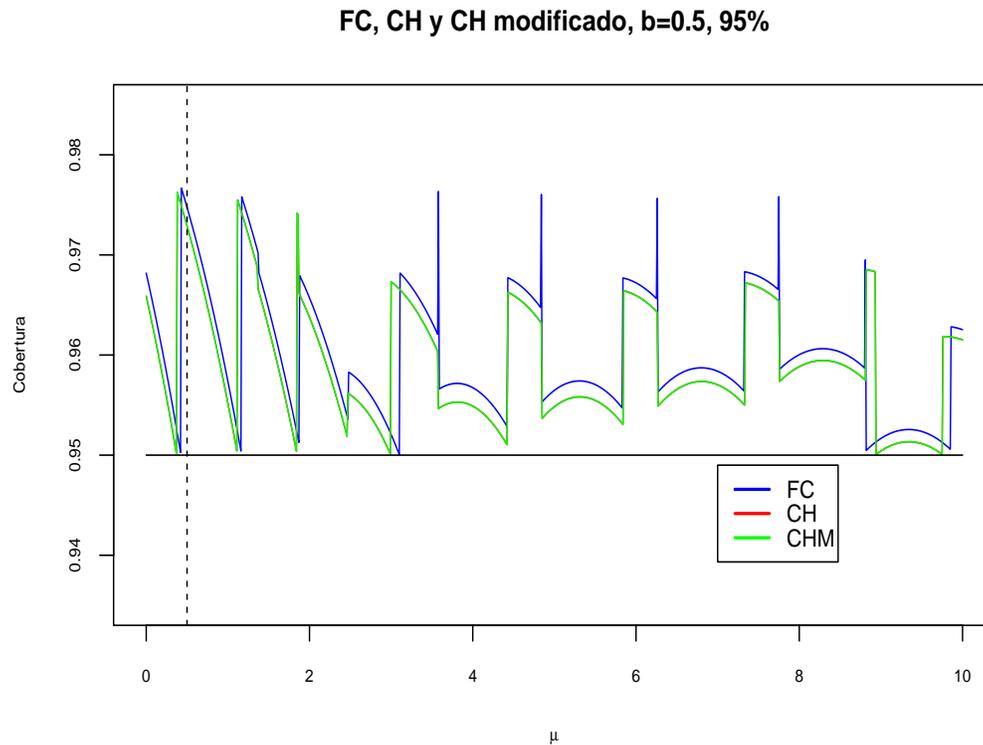


Figura 4-12: Comparación de Probabilidades de Cobertura para μ con FC, CH Y CH modificado, para $b = 5 \cdot 0$, de los IC95 %.

Cuadro 4-13: Intervalos del 95 % para la Poisson con señal media μ , de un total x eventos observados, con $b = 0 \cdot 5$, CH con $\delta = 0 \cdot 1, 0 \cdot 25, 0 \cdot 4$ e incertidumbre Γ .

x	CH, $b = 0 \cdot 5, \delta = 0 \cdot 1$		CH, $b = 0 \cdot 5, \delta = 0 \cdot 25$		CH $b = 5 \cdot 0, \delta = 0 \cdot 4$	
	L	U	L	U	L	U
0	0.000	2.679	0.000	2.816	0.000	1.339
1	0.000	4.656	0.000	4.656	0.000	1.848
2	0.000	6.230	0.000	6.230	0.000	2.453
3	0.246	7.758	0.148	7.762	0.000	3.570
4	0.805	9.266	0.723	9.269	0.000	4.848
5	1.418	10.766	1.344	10.766	0.000	6.277
6	1.871	12.254	1.844	12.258	0.000	7.766
7	2.234	13.363	2.195	13.555	0.000	9.250
8	2.598	14.797	2.551	14.797	0.000	10.305
9	3.871	16.277	3.754	16.277	0.000	11.781
10	4.262	17.320	4.269	17.344	0.293	13.031
11	4.652	18.797	4.652	18.797	1.043	14.301

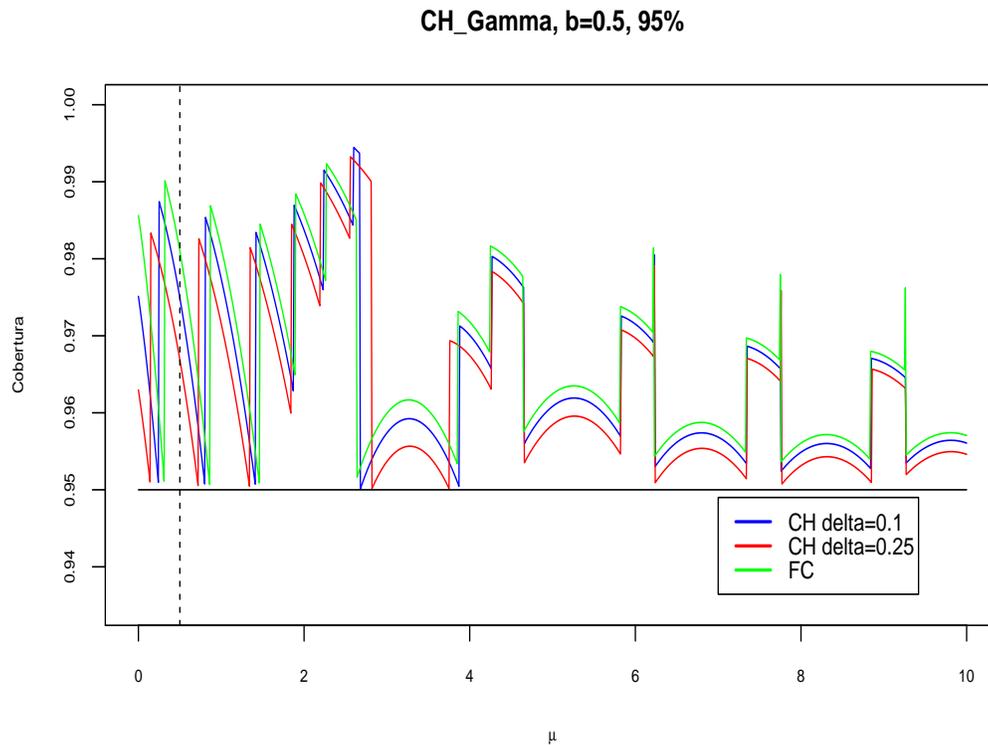


Figura 4–13: Comparación de Probabilidades de Cobertura para μ con FC, CH Y CH modificado, para $b = 5 \cdot 0$, de los IC 95 %.

La Tabla 4–13 muestra las calculaciones de intervalos de confianza del 95 %, cuando la distribución de la incertidumbre es una *Gamma* con $b = 0 \cdot 5, 5 \cdot 0$.

4.4. Bayesiano

En las Tablas 4–14, 4–15 y 4–16 se hacen algunas calculaciones de intervalos con iguales distribuciones a priori para μ y b , $\Gamma(1, 1)$, $\Gamma(3, 2)$ y $\frac{1}{\sqrt{\mu}}, \frac{1}{\sqrt{b}}$ respectivamente, con $\tau = 0 \cdot 5, 1, 3$. Aquí se puede observar que los límites de los intervalos, tienen crecimientos muy pequeños de un valor a otro en x y y .

Cuadro 4-14: Intervalos de credibilidad del 95% para μ con distribuciones a priori; $\mu \sim \Gamma(1,1)$ y $b \sim \Gamma(1,1)$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y con $\tau = 0.5, 1, 3$.(Bayesiano)

x	y	IC95%, $\tau = 0.5$		IC95%, $\tau = 1.0$		IC95%, $\tau = 3.0$	
0	6	0.000	1.498	0.000	1.498	0.000	1.498
1	6	0.000	1.706	0.000	1.737	0.000	1.836
2	6	0.000	1.922	0.000	1.992	0.000	2.218
3	6	0.000	2.146	0.000	2.263	0.000	2.644
4	6	0.000	2.377	0.000	2.550	0.000	3.111
5	6	0.000	2.617	0.000	2.855	0.000	3.614
0	7	0.000	1.498	0.000	1.498	0.000	1.498
1	7	0.000	1.686	0.000	1.714	0.000	1.809
2	7	0.000	1.879	0.000	5.223	0.000	2.160
3	7	0.000	2.080	0.000	2.188	0.000	2.552
4	7	0.000	2.288	0.000	2.447	0.000	2.985
5	7	0.000	2.503	0.000	2.721	0.000	3.455
0	8	0.000	1.498	0.000	1.498	0.000	1.498
1	8	0.000	1.669	0.000	1.695	0.000	1.785
2	8	0.000	1.845	0.000	1.944	0.000	2.110
3	8	0.000	2.027	0.000	2.127	0.000	2.473
4	8	0.000	2.215	0.000	2.362	0.000	2.875
5	8	0.000	2.409	0.000	2.610	0.000	3.313

Cuadro 4–15: Intervalos de credibilidad del 95% para μ con distribuciones a priori; $\mu \sim \Gamma(3, 2)$ y $b \sim \Gamma(3, 2)$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC95%, $\tau = 0.5$		IC95%, $\tau = 1.0$		IC95%, $\tau = 3.0$	
0	6	0.202	4.268	0.202	4.268	0.202	4.268
1	6	0.235	4.660	0.242	4.716	0.235	4.660
2	6	0.269	5.062	0.287	5.182	0.269	5.062
3	6	0.306	5.474	0.339	5.666	0.306	5.474
4	6	0.347	5.895	0.397	6.169	0.347	5.895
5	6	0.389	6.326	0.463	6.689	0.389	6.326
0	7	0.202	4.268	0.202	4.268	0.202	4.268
1	7	0.231	4.635	0.238	4.689	0.231	4.635
2	7	0.262	5.011	0.279	5.128	0.262	5.011
3	7	0.296	5.396	0.325	5.188	0.296	5.396
4	7	0.331	5.790	0.376	6.057	0.331	5.790
5	7	0.369	6.193	0.434	6.547	0.369	6.193
0	8	0.202	4.268	0.202	4.268	0.202	4.268
1	8	0.229	4.613	0.235	4.666	0.229	4.613
2	8	0.257	4.966	0.272	5.080	0.257	4.970
3	8	0.287	5.328	0.313	5.510	0.287	5.328
4	8	0.319	5.698	0.359	5.957	0.319	5.698
5	8	0.353	6.076	0.410	6.420	0.353	6.076

Cuadro 4–16: Intervalos de credibilidad del 95% para μ con distribuciones a priori; $\mu \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$ y $b \sim b^{-\frac{1}{2}}$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $y = 3, 4, 5$ y con $\tau = 0.5, 1, 3$.

x	y	IC95%, $\tau = 0.5$		IC95%, $\tau = 1.0$		IC95%, $\tau = 3.0$	
0	6	0.000	1.921	0.000	1.921	0.000	1.921
1	6	0.000	2.294	0.000	2.392	0.000	2.689
2	6	0.000	2.703	0.000	2.937	0.000	3.658
3	6	0.000	3.146	0.000	3.563	0.000	4.806
4	6	0.000	3.630	0.000	4.273	0.000	6.085
5	6	0.000	4.155	0.000	5.071	0.000	7.436
0	7	0.000	1.921	0.000	1.921	0.000	1.921
1	7	0.000	2.252	0.000	2.341	0.000	2.621
2	7	0.000	2.612	0.000	2.825	0.000	3.509
3	7	0.000	3.002	0.000	3.378	0.000	4.575
4	7	0.000	3.424	0.000	4.713	0.000	5.786
5	7	0.000	3.881	0.000	4.006	0.000	7.091
0	8	0.000	1.921	0.000	1.921	0.000	1.921
1	8	0.000	2.218	0.000	2.301	0.000	2.565
2	8	0.000	2.539	0.000	2.734	0.000	3.380
3	8	0.000	2.886	0.000	3.228	0.000	4.370
4	8	0.000	3.260	0.000	3.790	0.000	5.512
5	8	0.000	3.663	0.000	4.417	0.000	6.766

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Para los métodos presentados, en algunos obtenemos intervalos de confianza más precisos, y con probabilidad de cobertura correcta. Sin embargo es difícil decir que método es mejor, eso dependerá de muchos factores, por ejemplo de la aplicación que se esté haciendo y con las personas que estén trabajando.

El problema se trata de ver la precisión y cobertura, así que se usarán los intervalos que consideremos son mejores para el problema. Con las extensiones y modificaciones que se han hecho en algunos métodos se puede ser menos estricto en la precisión de los eventos de la señal y de fondo e igual que en el tratamiento de la incertidumbre de los mismos, y aún así seguir manteniendo intervalos y cobertura adecuados.

En el método CH y las extensiones dadas en [8] y [9] hacen uso de integración Monte Carlo para hacer el cálculo de la integral, por lo que los intervalos presentados en la Sección 3.3 son más precisos, dichos cálculos se obtuvieron con los resultados dados en la sección antes mencionada. Por lo que sería más conveniente usar los resultados propuestos en este trabajo. Y entre el CH, FC y CH con la modificación dada, usaríamos CH modificado, ya que es más flexible cuando tratamos la incertidumbre en la medición de b .

Con el método RLC se obtienen intervalos que difieren por décimas a los mostrados en los artículos originales de los autores y es debido a que aquí se están calculando los límites de manera distinta a como ellos lo hacen.

En el método bayesiano notamos que a medida que los valores de α y β de la distribución a priori $\Gamma(\alpha, \beta)$ aumentan también aumenta en ancho del intervalo,

pero su uso dependerá la información que se tenga.

En todo los métodos se han dado las calculaciones para valores de x e y no muy grandes, en el caso de que estos valores sean grandes usariamos la aproximación de la razón de máxima verosimilitud, que resultaría menos costoso computacionalemte que tratar de encontrar usar alguno de estos métodos, una de las razones sería , que en varios métodos se necesita calcular la función Γ varias veces, esta función crece muy rápido por ejemplo en R , es posible calcular hasta $\Gamma(171) = 7 \cdot 257416e^{306}$, por lo que se buscara otra forma de evaluar la expresión, también podrimos utilizar la función Integrate de R para hacer el cálculo de las integrales.

En los trabajos futuros que se podrían considerar es incluir todas las calculaciones de cada una de las modificaciones hechas y compararlas con las dadas en el capítulo 4, e implementar algunas modificaciones hechas especificamente al método CH y tratar de mejorar los métodos incluyendo las distribuciones adecuadas al problema tratado, o nuevos métodos que obtengan intervalos de confianza más precisos y con una mejor cobertura. También en los bayesianos hacer la implementación con más distribuciones a prior de μ y b y hacer la comparación con las antes dadas.

APÉNDICES

Apéndice A

DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS

Teorema 1 (Bayesiano). *Sea el modelo $X \sim \text{Pois}(\mu + b)$ y $Y \sim \text{Pois}(\tau b)$ con distribuciones a priori, $\mu \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \beta_1)$ y $b \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \beta_2)$ para ciertos $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, entonces se tiene que la distribución posteriori para μ y b esta dada por:*

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b}}{\sum_{i=1}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1 + \frac{1}{\beta_1})^{x-i+\alpha_1} (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}}}$$

Demostración. Como

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{f(x, y|\mu, b)\pi(\mu, b)}{\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|\mu, b)\pi(\mu, b)d\mu db}$$

Sustituyendo las distribuciones e integrando obtenemos:

$$\begin{aligned} f(\mu, b|x, y) &= \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b}}{\int_0^\infty \int_0^\infty (\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b} d\mu db} = \\ &= \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i+\alpha_1 - 1} b^{y+i+\alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b} d\mu db} = \\ &= \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b}}{\sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \int_0^\infty \mu^{x-i+\alpha_1 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu} d\mu \int_0^\infty b^{y+i+\alpha_2 - 1} e^{-(1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b} db} = \\ &= \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-(1 + \frac{1}{\beta_1})\mu - (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})b}}{\sum_{i=1}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x-i+\alpha_1)\Gamma(y+i+\alpha_2)}{(1 + \frac{1}{\beta_1})^{x-i+\alpha_1} (1 + \tau + \frac{1}{\beta_2})^{y+i+\alpha_2}}} \end{aligned}$$

con lo cual termina la prueba. □

Teorema 2 (b2). Si el modelo en el Teorema 1 es:

$X \sim \text{Pois}(\mu + b)$ y $Y \sim \text{Pois}(\tau b)$ con distribuciones a priori, $\mu \sim \pi(\mu) = \mu^{\alpha_1 - 1}$ y $b \sim \pi(b) = b^{\alpha_2 - 1}$ para ciertos $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, entonces se tiene que la distribución posteriori para μ y b esta dada por:

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{(\mu + b)^x \mu^{\alpha_1 - 1} b^{y + \alpha_2 - 1} e^{-\mu - (1 + \tau)b}}{\sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \frac{\Gamma(x - i + \alpha_1) \Gamma(y + i + \alpha_2)}{(1 + \tau)^{y + i + \alpha_2}}}$$

Demostración. En la demostración se hace similar que la del Teorema 1. □

El caso cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ tenemos que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y|\mu, b) \pi(\mu, b) d\mu db = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\mu + b)^x b^{y-1} e^{-(\mu + (1 + \tau)b)}}{x! \mu b} d\mu db \quad (\text{A.1})$$

Si hacemos $\mu = \frac{1}{u} - 1$ y $b = \frac{1}{v} - 1$ la integral se transforma en:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(u + v - 2uv)^x (1 - v)^{y-1} e^{-\left(\frac{1}{u} - 1 + (1 + \tau)\left(\frac{1}{v} - 1\right)\right)}}{x! u^{x+1} v^{x+y+1} (1 - v)} dudv \quad (\text{A.2})$$

Tanto (A.1) como (A.2) divergen.

Teorema 3. Consideremos el modelo $X \sim \text{Pois}(\mu + b)$ y $Y \sim \text{Pois}(\tau b)$, μ y b tienen distribuciones a priori dadas por $\mu \sim N(\mu_0, \sigma_\mu^2)$ y $b \sim N(b_0, \sigma_b^2)$ entonces la distribución posteriori es,

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{(\mu + b)^x b^y e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0}{\sigma_b}\right)^2\right)}}{\sigma_\mu \sigma_b \sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^y \sum_{k=0}^i \binom{x}{i} \binom{y}{j} \binom{i}{k} (e + g)^{x-i} g^{y-j} \sigma_\mu^{i-k} \sigma_b^{j+k} I_{i,j,k}(z_0, w_0)},$$

donde

$$I_{i,j,k} = 2^{\frac{i+j+2}{2}} \Gamma\left(\frac{i-k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j+k+1}{2}\right) p_{i,k}(z_0) q_{k,j}(w_0),$$

$$e = \mu_0 - \sigma_\mu^2, \quad g = b_0 - (1 + \tau)\sigma_b^2, \quad u_0 = \sigma_\mu - \frac{\mu_0}{\sigma_\mu} \quad y \quad v_0 = \sigma_b - \frac{b_0}{\sigma_b},$$

$$z_0 = u_0^2, \quad w_0 = v_0^2 \quad y$$

$$p_{i,k}(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{(\frac{i-k+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^{i-k} \Phi_{(\frac{i-k+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 < 0, \end{cases}$$

$$q_{k,j}(w_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{(\frac{j+k+1}{2}, \frac{1}{2})}(w_0) & \text{si } v_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^{j+k} \Phi_{(\frac{j+k+1}{2}, \frac{1}{2})}(w_0) & \text{si } v_0 < 0. \end{cases}$$

Demostración. Como

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{c(\mu + b)^x b^y e^{-\left(\mu + b + \tau b + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0}{\sigma_b}\right)^2\right)}}{c \int_0^\infty \int_0^\infty (\mu + b)^x e^{-\left(\mu + b + \tau b + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0}{\sigma_b}\right)^2\right)} d\mu db}, \quad (\text{A.3})$$

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{c(\mu + b)^x b^y e^{-\left(\mu + b + \tau b + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0}{\sigma_b}\right)^2\right)}}{c \int_0^\infty \int_0^\infty (\mu + b)^x e^{-\left(\mu + b + \tau b + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0}{\sigma_b}\right)^2\right)} d\mu db}$$

c es constante que no depende de (μ, b) .

Desarrollando y completando cuadrados en el exponente de e obtenemos

$$\mu + b + \tau b + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0}{\sigma_b}\right)^2 =$$

$$\mu_0 + (1 + \tau)b_0 - \frac{1}{2}(\sigma_\mu^2 + (1 + \tau)^2 \sigma_b^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0 + \sigma_\mu^2}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0 + (1 + \tau)\sigma_b^2}{\sigma_b}\right)^2. \quad (\text{A.4})$$

Sustituyendo la Ecuación A.4 y la A.3 y simplificando, se obtiene,

$$f(\mu, b|x, y) = \frac{(\mu + b)^x b^y e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0 + \sigma_\mu^2}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0 + (1 + \tau)\sigma_b^2}{\sigma_b}\right)^2\right)}}{\int_0^\infty \int_0^\infty (\mu + b)^x b^y e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0 + \sigma_\mu^2}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - b_0 + (1 + \tau)\sigma_b^2}{\sigma_b}\right)^2\right)} d\mu db}.$$

Haciendo $u = \frac{\mu - \mu_0 + \sigma_\mu^2}{\sigma_\mu}$, $v = \frac{b - b_0 + (1 + \tau)\sigma_b^2}{\sigma_b}$, la doble integral f se transforma en:

$$\frac{(\mu + b)^x b^y e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - e}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - g}{\sigma_b}\right)^2\right)}}{\sigma_\mu \sigma_b \int_{u_0}^{\infty} \int_{v_0}^{\infty} (e + g + \sigma_\mu u + \sigma_b v)^x (g + \sigma_b v)^y e^{-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)} du dv},$$

$$= \frac{(\mu + b)^x b^y e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - e}{\sigma_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b - g}{\sigma_b}\right)^2\right)}}{\sigma_\mu \sigma_b \sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^y \sum_{k=0}^i \binom{x}{i} \binom{y}{j} \binom{i}{k} (e + g)^{x-i} g^{y-j} \sigma_\mu^{i-k} \sigma_b^{j+k} I_{i,j,k}(z_0, w_0)}$$

donde

$$I_{i,j,k} = \int_{u_0}^{\infty} u^{i-k} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \int_{v_0}^{\infty} v^{k+j} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv$$

$$= 2^{\frac{i+j+2}{2}} \Gamma\left(\frac{i-k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j+k+1}{2}\right) p_{i,k}(z_0) q_{k,j}(w_0)$$

con lo cual termina la prueba. \square

Teorema 4 (CH). Consideremos la PDF

$$q(x|\mu, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} \int_0^{\infty} p_{\mu+b'}(x) e^{-\frac{(b-b')^2}{2\sigma_b^2}} db'$$

...

Sea $w_0 = \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}$ entonces $q(x|\mu, b)$ se puede reescribir como

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu + b - \sigma_b^2)^i \sigma_b^{x-i} 2^{\frac{x-i+1}{2}} \Gamma\left(\frac{x-i+1}{2}\right) p_i(z_0),$$

donde $z_0 = w_0^2$ y

$$p_i(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } w_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^{x-i} \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } w_0 < 0. \end{cases}$$

Demostración. La constante considerada es por el hecho de que

$$\sum_{x=0}^{\infty} q(x|\mu, b) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \int_0^{\infty} \frac{(\mu + b')^x e^{-(\mu+b')}}{x!} e^{-\frac{(b-b')^2}{2\sigma_b^2}} db'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \int_0^\infty e^{-\frac{(b-b')^2}{2\sigma_b^2}} db' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{b}{\sigma_b}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma_b}\right)$$

Ahora continuando la demostración,

$$q(x|\mu, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} \int_0^\infty \frac{(\mu + b')^x e^{-(\mu+b')} e^{-\frac{(b-b')^2}{2\sigma_b^2}}}{x!} db' =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \int_0^\infty (\mu + b')^x e^{-(\mu+b'+\frac{1}{2}(\frac{b-b'}{\sigma_b})^2)} db'.$$

Completando cuadrados obtenemos:

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \int_0^\infty (\mu + b')^x e^{-\frac{1}{2}(\frac{b'-b+\sigma_b^2}{\sigma_b})^2} db'$$

y realizando el cambio de variable $w = \frac{b'-b+\sigma_b^2}{\sigma_b}$ y $w_0 = \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}$ entonces

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \int_{w_0}^\infty (\mu + b - \sigma_b^2 + \sigma_b w)^x e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

$$= \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu + b - \sigma_b^2)^i \sigma_b^{x-i} \int_{w_0}^\infty w^{x-i} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

Si $w_0 \geq 0$, hacemos $w = z^{\frac{1}{2}}$ entonces

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu + b - \sigma_b^2)^i \sigma_b^{x-i} \int_{z_0}^\infty z^{\frac{x-i-1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} dz$$

$$= \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu + b - \sigma_b^2)^i \sigma_b^{x-i} 2^{\frac{x-i+1}{2}} \Gamma\left(\frac{x-i+1}{2}\right) p_i(z_0).$$

Si $w_0 < 0$

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu + b - \sigma_b^2)^i \sigma_b^{x-i} \left[\int_{w_0}^0 w^{x-i} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw + \int_0^\infty w^{x-i} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \right],$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu+b-\sigma_b^2)^i (\sigma_b)^{x-i} \left[(-1)^{x-i} \int_0^{z_0} z^{\frac{x-i-1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} dz + \int_0^{\infty} z^{\frac{x-i-1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} dz \right], \\
&= \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1-\Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu+b-\sigma_b^2)^i \sigma_b^{x-i} 2^{\frac{x-i+1}{2}} \Gamma\left(\frac{x-i+1}{2}\right) p_i(z_0).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5. Sea $q(x|\epsilon\mu+b)$ definida por

$$q(x|\epsilon\mu+b) = \int_0^{\infty} P(x|\epsilon'\mu, b) P_1(\epsilon'|\epsilon, \sigma_\epsilon),$$

donde

$$P_1(\epsilon'|\epsilon, \sigma_\epsilon^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon(1-\Phi(-\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\epsilon'-\epsilon}{\sigma_\epsilon})^2} & \text{si } \sigma_\epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon} \geq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_\epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon} < 0, \end{cases}$$

entonces $q(x|\epsilon\mu+b)$ esta dada por la siguiente expresi3n

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{e^{-(\epsilon\mu+b-\frac{\mu^2\sigma_\epsilon^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}(1-\Phi(\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\epsilon\mu+b-\mu^2\sigma_\epsilon^2)^i (\epsilon\sigma_\epsilon)^{x-i} 2^{\frac{x-i+1}{2}} \Gamma\left(\frac{x-i+1}{2}\right) p_i(z_0)$$

con $w_0 = \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}$, $z_0 = w_0^2$ y

$$p_i(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } w_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^{x-i} \Phi_{\Gamma(\frac{x-i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } w_0 \leq 0. \end{cases}$$

Demostraci3n. Sustituyendo las funciones de distribuci3n en la integral y luego completando cuadrados obtenemos

$$q(x|\epsilon\mu+b) = \frac{e^{-(\epsilon\mu+b-\frac{\mu^2\sigma_\epsilon^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon(1-\Phi(\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))} \int_0^{\infty} (\epsilon'\mu+b)^x e^{-\left(\frac{\epsilon'-\epsilon+\mu\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\epsilon}\right)^2} d\epsilon',$$

realizando los cambios $u = \frac{\epsilon' - \epsilon + \mu\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\epsilon}$ y $u_0 = \mu\sigma_\epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}$ la integral se reduce a

$$\frac{e^{-(\epsilon\mu + b - \frac{\mu^2\sigma_\epsilon^2}{2})}}{2\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon}))} \int_{u_0}^{\infty} (\epsilon\mu + b - \mu^2\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon\mu u)^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

que de aquí con argumentos similares a los utilizados en la demostración del Teorema 4, se hace el cálculo de la última integral. \square

Colorario 1 (CH2). *Si consideramos la función de densidad de X en los parametros ϵ, μ y b dada por*

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{1}{2\pi c\sigma_b\sigma_\epsilon} \int_0^\infty \int_0^\infty p_{\epsilon'\mu+b'}(x) e^{-\frac{1}{2}(\frac{b-b'}{\sigma_b})^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\epsilon-\epsilon'}{\sigma_\epsilon})^2} db' d\epsilon'$$

$$\text{donde } c = (1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))(1 - \Phi(-\frac{\epsilon}{\sigma_\epsilon})),$$

$q(x|\epsilon\mu, b)$ se puede reescribir como:

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{e^{-\frac{(\epsilon\mu + b + g)}{2}}}{8\pi c} \sum_{i=0}^x \sum_{j=0}^i \binom{x}{i} \binom{i}{j} g^{x-i} (\mu\sigma_\epsilon)^{i-j} \sigma_b^j 2^{\frac{i+j}{2}} \Gamma(\frac{i-j+1}{2}) \Gamma(\frac{j+1}{2}) p_{i,j}(z_0) q_j(w_0)$$

donde

$$g = \epsilon\mu + b - \mu^2\sigma_\epsilon^2 - \sigma_p^2, v_0 = \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}, u_0 = \sigma_\epsilon - \frac{b}{\sigma_\epsilon},$$

y

$$z_0 = u_0^2, w_0 = v_0^2$$

$$p_{i,j}(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{i-j+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^{i-j} \Phi_{\Gamma(\frac{i-j+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 \leq 0, \end{cases}$$

$$q_j(w_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^j \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 \leq 0. \end{cases}$$

Demostración: Completando cuadrados en el exponente de e y haciendo los cambios, $u = \frac{\epsilon' - \epsilon + \mu \sigma_\epsilon^2}{\sigma_\epsilon}$ y $v = \frac{b' - b + \sigma_b^2}{\sigma_b}$ se obtiene que:

$$q(x|\epsilon\mu, b) = \frac{e^{-\frac{(\epsilon\mu + b + g)}{2}}}{2c\pi} \int_{u_0}^{\infty} \int_{v_0}^{\infty} (g + \mu\sigma_\epsilon u + \sigma_b v)^x e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}} dudv$$

de manera similar que en el teorema anterior, se obtiene lo que se pide.

Teorema 6. Consideremos la PDF dada por

$$q(x|\mu, b) = \int_0^{\infty} P(x|\mu, b') \frac{b'^{\frac{b^2}{\delta} - 1} e^{-\frac{bb'}{\delta}}}{\Gamma(\frac{b^2}{\delta}) (\frac{\delta}{b})^{\frac{b^2}{\delta}}} db'$$

con $b, \delta > 0$

entonces $q(x|\mu, b)$ se puede reescribir como:

$$q(x|\mu, b) = \frac{(\frac{b}{\delta})^{\frac{b^2}{\delta}} e^{-\mu}}{\Gamma(\frac{b^2}{\delta}) x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i} \frac{\Gamma(i + \frac{b^2}{\delta})}{(1 + \frac{b}{\delta})^{i + \frac{b^2}{\delta}}}.$$

Demostración. Sustituyendo las funciones respectivas se tiene que

$$\begin{aligned} q(x|\mu, b) &= \frac{(\frac{b}{\delta})^{\frac{b^2}{\delta}}}{\Gamma(\frac{b^2}{\delta}) x!} \int_0^{\infty} (\mu + b')^x b'^{\frac{b^2}{\delta} - 1} e^{-(\mu + b' + \frac{bb'}{\delta})} db' \\ &= \frac{(\frac{b}{\delta})^{\frac{b^2}{\delta}} e^{-\mu}}{\Gamma(\frac{b^2}{\delta}) x!} \int_0^{\infty} (\mu + b')^x b'^{\frac{b^2}{\delta} - 1} e^{-(1 + \frac{b}{\delta})b'} db', \\ &= \frac{(\frac{b}{\delta})^{\frac{b^2}{\delta}} e^{-\mu}}{\Gamma(\frac{b^2}{\delta}) x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \mu^{x-i} \int_0^{\infty} b'^{(i + \frac{b^2}{\delta} - 1)} e^{-(1 + \frac{b}{\delta})b'} db', \end{aligned}$$

la integral obtenida, el argumento es de una $Gamma(i + \frac{b^2}{\delta}, \frac{\delta}{b + \delta})$ y con esto concluye la demostración. □

Teorema 7 (CH,RC). Si consideramos el modelo $X \sim q(x|\mu, b)$ y $Y \sim q(y|\tau b)$ con

$$q(x|\mu, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{\mu}{\sigma_\mu}))} \int_0^{\infty} P(x|\mu', b) e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu - \mu'}{\sigma_\mu})^2} d\mu'$$

y

$$q(y|\tau b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} \int_0^\infty P_{\tau b'}(y) e^{-\frac{1}{2}(\frac{b-b'}{\sigma_b})^2} db'$$

Tanto $q_{\mu+b}(x)$ como $q(y|\tau b)$ se pueden reescribir como:

$$q(x|\mu, b) = \frac{e^{-(\mu+b-\frac{\sigma_\mu^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{\mu}{\sigma_\mu}))} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\mu + b - \sigma_\mu^2)^{x-i} \sigma_\mu^i 2^{\frac{i+1}{2}} \Gamma(\frac{i+1}{2}) p_i(z_0) \quad (\text{A.5})$$

y

$$q(y|\tau b) = \frac{\tau^y e^{-(\tau b - \frac{\tau^2 \sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} \sum_{i=0}^y \binom{y}{i} (b - \tau \sigma_b^2)^{y-j} \sigma_b^i 2^{\frac{i+1}{2}} \Gamma(\frac{i+1}{2}) p_i(w_0), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{donde } v_0 = \tau \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}, u_0 = \sigma_\mu - \frac{\mu}{\sigma_\mu} \text{ y } z_0 = u_0^2, w_0 = v_0^2$$

$$p_i(z_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^i \Phi_{\Gamma(\frac{i+1}{2}, 2)}(z_0) & \text{si } u_0 < 0, \end{cases}$$

y

$$p_j(w_0) = \begin{cases} 1 - \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 \geq 0 \\ 1 + (-1)^j \Phi_{\Gamma(\frac{j+1}{2}, 2)}(w_0) & \text{si } v_0 < 0. \end{cases}$$

Demostración. La demostración de la ecuación A.5 es similar a la hecha en el Teorema 4, pues demostremos la Ecuación A.6,

$$\begin{aligned} q(y|\tau b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))} \int_0^\infty \frac{(\tau b')^y e^{-(\tau b')} e^{-\frac{(b-b')^2}{2\sigma_b^2}}}{y!} db' \\ &= \frac{\tau^y}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b}))y!} \int_0^\infty (b')^y e^{-(\tau b' + \frac{1}{2}(\frac{b-b'}{\sigma_b})^2)} db'. \end{aligned}$$

Completando cuadrados obtenemos:

$$q(x|\mu, b) = \frac{\tau^y e^{-(\tau b - \frac{\tau^2 \sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi} \sigma_b (1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b})) y!} \int_0^\infty (b')^y e^{-\frac{1}{2}(\frac{b' - b + \tau \sigma_b^2}{\sigma_b})^2} db'$$

Hacemos el cambio de variable $w = \frac{b' - b + \tau \sigma_b^2}{\sigma_b}$ y $w_0 = \tau \sigma_b - \frac{b}{\sigma_b}$ entonces

$$\begin{aligned} q(x|\mu, b) &= \frac{\tau^y e^{-(\tau b - \frac{\tau^2 \sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi} (1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b})) y!} \int_{w_0}^\infty (b - \tau \sigma_b^2 + \sigma_b w)^y e^{-\frac{1}{2} w^2} dw \\ &= \frac{\tau^y e^{-(\tau b - \frac{\tau^2 \sigma_b^2}{2})}}{\sqrt{2\pi} (1 - \Phi(-\frac{b}{\sigma_b})) y!} \sum_{i=0}^y \binom{y}{i} (b - \tau \sigma_b^2)^i \sigma_b^{y-i} \int_{w_0}^\infty w^{y-i} e^{-\frac{1}{2} w^2} dw. \end{aligned}$$

□

Teorema 8. Sean X e Y v.a con funciones de distribución definidas acontinuación,

$$q(x|\mu, b) = \int_0^\infty P(x|\mu', b) \frac{\mu'^{\frac{\mu^2}{\delta} - 1} e^{-\frac{\mu \mu'}{\delta}}}{\Gamma(\frac{\mu^2}{\delta}) (\frac{\delta}{\mu})^{\frac{\mu^2}{\delta}}} d\mu',$$

$$q(y|\tau b) = \int_0^\infty P(y|\tau b') \frac{b'^{\frac{b^2}{\varepsilon} - 1} e^{-\frac{b b'}{\varepsilon}}}{\Gamma(\frac{b^2}{\varepsilon}) (\frac{\varepsilon}{b})^{\frac{b^2}{\varepsilon}}} db'.$$

Estas ecuaciones se pueden reescribir como

$$q(x|\mu, b) = \frac{(\frac{\mu}{\delta})^{\frac{\mu^2}{\delta}} e^{-b}}{\Gamma(\frac{\mu^2}{\delta}) x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} b^{x-i} \frac{\Gamma(i + \frac{\mu^2}{\delta})}{(1 + \frac{\mu}{\delta})^{i + \frac{\mu^2}{\delta}}} \quad (\text{A.7})$$

y

$$q(x|\tau b) = \frac{\tau^y (\frac{b}{\varepsilon})^{\frac{b^2}{\varepsilon}}}{y! \Gamma(\frac{b^2}{\varepsilon})} \frac{\Gamma(i + \frac{b^2}{\varepsilon})}{(1 + \frac{b}{\varepsilon})^{i + \frac{b^2}{\varepsilon}}} \quad (\text{A.8})$$

Demostración. Aquí haremos la demostración sólo de la ecuación A.7 la otra se hace de manera similar. Sustituyendo las funciones respectivas se tiene que

$$\begin{aligned} q(x|\mu, b) &= \frac{(\frac{\mu}{\delta})^{\frac{\mu^2}{\delta}}}{\Gamma(\frac{\mu^2}{\delta}) x!} \int_0^\infty (\mu' + b)^x \mu'^{\frac{\mu^2}{\delta} - 1} e^{-(\mu' + b + \frac{\mu \mu'}{\delta})} d\mu' \\ &= \frac{(\frac{\mu}{\delta})^{\frac{\mu^2}{\delta}} e^{-b}}{\Gamma(\frac{\mu^2}{\delta}) x!} \int_0^\infty (\mu' + b)^x \mu'^{\frac{\mu^2}{\delta} - 1} e^{-(1 + \frac{\mu}{\delta}) \mu'} d\mu' \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^{\frac{\mu^2}{\delta}} e^{-b}}{\Gamma\left(\frac{\mu^2}{\delta}\right) x!} \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} b^{x-i} \int_0^{\infty} \mu'^{(i+\frac{\mu^2}{\delta}-1)} e^{-(1+\frac{\mu}{\delta})\mu'} d\mu'$$

la integral obtenida, el argumento es de una $Gamma(i + \frac{\mu^2}{\delta}, \frac{\delta}{\mu+\delta})$ y con esto concluye la demostración. □

Bibliografía

- [1] R.D. COUSINS, G.J. FELDMAN, *A Unified Approach to the Classical Statistical Analysis of Small Signals*, Phys. Rev, D57, (1998) 3873
- [2] J.NEYMAN, *Outline of a Theory of Statistical Estimation based on the Classical Theory of Probability*, **8**, Phil. Trans. Royal Soc. London, A236 (1937) 333.
- [3] W.A. ROLKE, A.M. LÓPEZ , *Confidence Intervals and Upper Bounds for Small Signals in the Presence of Background Noise*, Nucl. Inst. and Methods A458 (2001) 745-758.
- [4] W.ROLKE, A. LOPEZ, J. CONRAD, *Limits and Confidence Intervals in the Presence of Nuisance Parameters*, Nucl.Instrum.Meth.A551:493-503,2005.
- [5] G. CASELLA, R.L. BERGER, *Statistical Inference*, Duxbury Press, (1990) 346.
- [6] S.A. MURPHY, A.W. VAN DER VAART, *On Profile Likelihood*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 95, (2000), 449-485.
- [7] R. D. COUSINS AND V.L. HIGHLAND, *Incorporating Systematic Uncertainties into an Upper Limit*, Nucl. Inst. and Methods A320 (1992) 331-335.
- [8] J. CONRAD, O. BOTNER, O, A. HALLGREN, A. AND C. PEREZ DE LOS HEROS, *Including Systematic Uncertainties in Confidence Interval Construction for Poisson Statistics*, Phys. Rev, D67, (2003) 12002.
- [9] J. CONRAD, O. BOTNER, O, A. HALLGREN, A. AND C. PEREZ DE LOS HEROS, *Coverage of Confidence Intervals for Poisson Statics in Presence of Systematic Uncertainties*, Phys. Rev, D67, (2003) 12002.
- [10] C. GIUNTI, *A new ordering principle for the classical statistical analysis of Poisson processes with background*, Phys. Rev D59, 053001 (1999).

- [11] F. TEGENFELDT AND J.CONRAD, *On Bayesian Treatment of Systematic Uncertainties in Confidence Interval Calculations*, accepted for publication in Nucl. Inst. and Methods, arXiv:physics/0408039.
- [12] B.P. ROE, M.B. WOODROOFE, *Improved Probability Method for Estimating Signal in the Presence of Background*, Phys. Rev D60 053009 (1999).
- [13] BODHISATTVA SEN, MATTHEW WALKER, AND MICHAEL WOODROOFE, *On the unified method with nuisance parameters*, Statistica Sinica , vol. 19 (2009), 96-116.
- [14] R. D. COUSINS AND V.L. HIGHLAND, *Incorporating Systematic Uncertainties into an Upper Limit*, Nucl. Inst. and Methods A320 (1992) 331-335.
- [15] E.L.CROW AND R.S.GARBER, , Biometrika 46,441(1957).
- [16] VLADIMIR KULIKOVSKIY, *Adding a systematic uncertainty to the signal estimation in the on/off-zone measurements*, arXiv:1303.5195v2.

MÉTODOS PARA ENCONTRAR INTERVALOS DE ESTIMACIÓN PARA EL PROBLEMA ON/OFF

Devis Moises Alvarado Zavala
devis.alvarado@upr.edu
Departamento de Ciencias Matemáticas
Consejero: Wolfgang Rolke
Grado: Maestría en Ciencias
Fecha de Graduación:2014

Considera los métodos para encontrar intervalos de estimación para alguno o varios parámetros, cuando hay parámetros de interés y parámetros de estorbo utilizados en modelos de probabilidad del problema on/off. Hacemos la comparación en cada uno de los métodos del ancho del intervalo y de la probabilidad de cobertura, y con esto poder usar el método más adecuado para el problema. También hacemos algunas extensiones y el cálculo de integrales de forma exacta, lo que permite mejorar la precisión del intervalo y la cobertura. Los ejemplos que tratamos muestran que con algunos métodos obtenemos lo deseado, aunque la selección del método dependerá de la información disponible o del investigador.