Cuñas en Sistemas Dinámicos

Por

Oscar Tomaiconza Ataulluco

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRIA EN CIENCIAS
en
MATEMATICAS PURAS

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGUEZ
Diciembre, 2010

Aprobado por:

Dorothy Bollman, Ph.D. — Fecha
Miembro, Comité Graduado

Gabriele Castellini, Ph.D. — Fecha
Miembro, Comité Graduado

Omar Colón Reyes, Ph.D. — Fecha
Presidente, Comité Graduado

Isidoro Couvertier, Ph.D. — Fecha
Representante de Estudios Graduados

Silvestre Colón, M.S. — Fecha
Director del Departamento

Resumen de Disertación a Escuela Graduada

de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los

Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

Cuñas en Sistemas Dinámicos

Por

Oscar Tomaiconza Ataulluco

Diciembre, 2010

Consejero: Omar Colón Reyes

Departamento: Departamento de Ciencias Matemáticas

RESUMEN

Para ciertos sistemas dinámicos no lineales de punto fijo, computamos el tiempo que toma dicho sistema en alcanzar un estado de quietud. En este trabajo introducimos la operación de cuña entre dos grafos dirigidos. Cuando estos grafos son un n-ágono y un m-ágono entonces la cuña de estos sistemas induce un sistema no lineal. Más aun, si m y n son co-primos entonces nuestro sistema es uno de punto fijo. Para este sistema entonces computamos su tiempo de transición, es decir lo que tarda en llegar a un estado de quietud.

Abstract of Dissertation to the Graduate School
Of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the degree of Master of Science

Cuñas en Sistemas Dinámicos

Por

Oscar Tomaiconza Ataulluco

Diciembre, 2010

Chair: Omar Colón Reyes

Major Department: Department of Mathematics Sciences

ABSTRACT

For certain non linear discrete dynamical systems that are fixed point systems, we compute the time that it takes to reach a steady state. In this work we introduce the operation of wedge among directed graphs. When these graphs are n-gons and m-gons then the wedge of them induces a non lineals dynamical system. More over, if m and n are co-prime then our system is a fixed point system. For this system we compute its transition time, that is, how long it takes for the system to stabilize.

A mis padres Pablo Tomaiconza y Martina Ataulluco

Agradecimientos

Gracias a Dios

Agradezco a Dios, por estar presente siempre en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a todas aquellas personas que han sido soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

Gracias a mi familia

Agradezco por siempre a mi familia porque a pesar de no estar presente, se que procuran mi bienestar desde mi País, Perú.

Gracias a mis Padres Pablo, Martina y mi preciada hermanita Blanca Flor

Por su cariño, comprensión y apoyo sin condiciones ni medida. Gracias por guiarme sobre el camino de la educación. Ahora entiendo porque me obligaban a terminar mi tarea antes de salir a jugar y muchas cosas más que no terminaría de mencionar.

Gracias a mi asesor Omar

Por permitirme ser parte de su grupo de trabajo. Por toda su ayuda, orientación y paciencia. Todo es muy agradecido.

Departamento de Matemáticas

Agradezco a todos los profesores y personal del Departamento de Matemáticas por todo su apoyo.

Índice General

Índice de figuras

Lista de abreviaturas

SDD	Sistema Dinámico Discreto
CFC	Componente Fuertemente Conectado
SDF	Sistema Dinámico Finito
SDFBM	Sistema Dinámico Finito Booleano Monomial

Capítulo 1

Introducción

Un sistema dinámico finito es un sistema dinámico en tiempo discreto que presenta un cambio o evolución de su estado como función de tiempo. El comportamiento en un sistema como este se puede caracterizar y entender determinando sus atractores y estados. Un sistema dinámico finito es una función de un conjunto finito en sí mismo. El enlace entre la estructura de un sistema y su dinámica es un problema abierto en la teoría de sistemas dinámicos discretos.

Conocemos ejemplos de aplicaciones de estos sistemas. En [1,3,8] se habla sobre la importancia de estos sistemas y sus aplicaciones en diferentes áreas como los autómatas celulares y redes booleanas, que han encontrado amplias aplicaciones en la ingeniería, la informática, circuitos eléctricos y más recientemente la biología computacional. Sistemas de multi-estado vienen siendo utilizados en la teoría de control y el diseño y análisis de simulación de ordenadores. En [1], Bollman et. al. habla sobre la importancia de estos sistemas en modelos genéticos y su capacidad para modelar la dinámica de expresión de los genes y las relaciones entre estos. Este enfoque permite a los genetistas a "determinar el impacto a largo plazo de un gen en los otros genes", usando cuerpos finitos, ver [9]. En un estudio, ver [3], B. Elspas menciona aplicaciones de sistemas dinámicos lineales en circuitos de control de computadoras y sistemas de comunicación.

Algunas aplicaciones requieren que el sistema a considerar sea uno de punto fijo, esto es sistema con atractores triviales. Más aun, cuando un sistema es de punto fijo, entonces decimos que el evento que modela dicho sistema entra en un estado de quietud. Criterios para determinar si un sistema es de punto fijo son escasos, incluso determinar cuánto tarda un sistema en entrar a un estado de quietud son mínimos. En este trabajo el tiempo que tarda un sistema de punto fijo en entrar en un estado de quietud se conoce como el tiempo de transición del sistema. Este trabajo es una contribución a este problema ya que proveemos el tiempo de transición para una cierta familia de sistemas dinámicos discretos no lineales.

En nuestro trabajo, definimos un sistema dinámico finito (SDF) como un par (X, f) donde X es un conjunto finito y $f: X \to X$. Muchas de las aplicaciones requieren que el conjunto X sea el producto cartesiano de n-copias de un cuerpo finito, en particular $X = Z_2^n$. Por lo tanto (Z_2^n, f), $n \geq 1$, es un SDF. La dinámica es generada por la iteración de la función f con ella misma, esto es: $f^0(x) = x$, $f^2(x) = f(f(x))$, … , $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para $n \geq 1$. Debido a que trabajamos en un marco de estructuras finitas, la dinámica de f puede ser representada por el espacio de estados de f, denotado por $S(f)$, que se puede ver como un grafo dirigido y se define como:

a) El conjunto de vértices de $S(f)$ son los 2^n elementos de Z_2^n .
b) Existe un eje dirigido $a \to b$ en $S(f)$ si $f(a) = b$.

En particular, un eje dirigido de un vértice a sí mismo es permitido. El espacio de estados $S(f)$ contiene todos los estados de transición de f, y tiene la propiedad de que cada vértice tiene un grado de salida (out-degree) exactamente igual a 1. Cada componente del grafo conexo $S(f)$ consiste de ciclos dirigidos llamados ciclos límites con un árbol conexo adjunto a cada vértice en el ciclo, que consta de los llamados tiempo de transición (ver figura 1.1).

Nota: Los componentes del grafo conexo son subgrafos.

Si para algún $a \in Z_2^n$, existe un $t \geq 0$ tal que $f^t(a) = f^0(a) = a$ decimos que hay un ciclo de largo t basado en a. Decimos que el transient de $a \in Z_2^n$ es k, si k es el valor mínimo que satisface $f^k(a) = f^{k+t}(a)$ para $t \geq 0$. Definimos el tiempo de transición de $S(f)$ como el máximo de los tiempos de transiciones de todos los estados de $S(f)$.

Los sistemas dinámicos finitos (SDF) sobre un cuerpo finito pueden clasificarse en dos tipos: los lineales y no lineales ver [2,6].

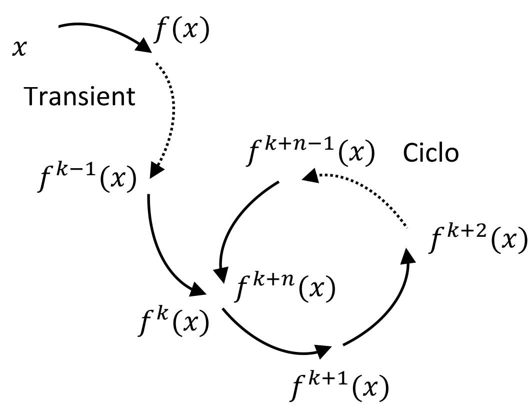


Figura 1.1 Orbita.

Cada función de un campo finito en si mismo puede ser escrito como un polinomio, por lo tanto f puede ser escrito como una tupla de polinomios, $f = (f_1, \dots, f_n)$, donde cada f_i está en el anillo $Z_2[x_1, \dots, x_n]$ vea [7]. Así que cualquier SDF sobre Z_2 se puede representar como una función de polinomios.

Ejemplo 1.1 Consideremos el SDF $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2): \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2$. El espacio de estados de f se muestra en la figura 1.2.

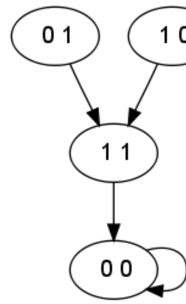


Figura 1.2: Espacio de estados de $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2): \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2$.

En la Figura 1.2 nosotros podemos observar el espacio de estados de la función $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2): \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2$, que contiene un ciclo trivial en $(0,0)$ y tiempo de transición igual a 2.

Ejemplo 2.1. Consideremos el SDF (Z_2^4, f) donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_1)$. El espacio de estados de f se muestra en la figura 1.3.

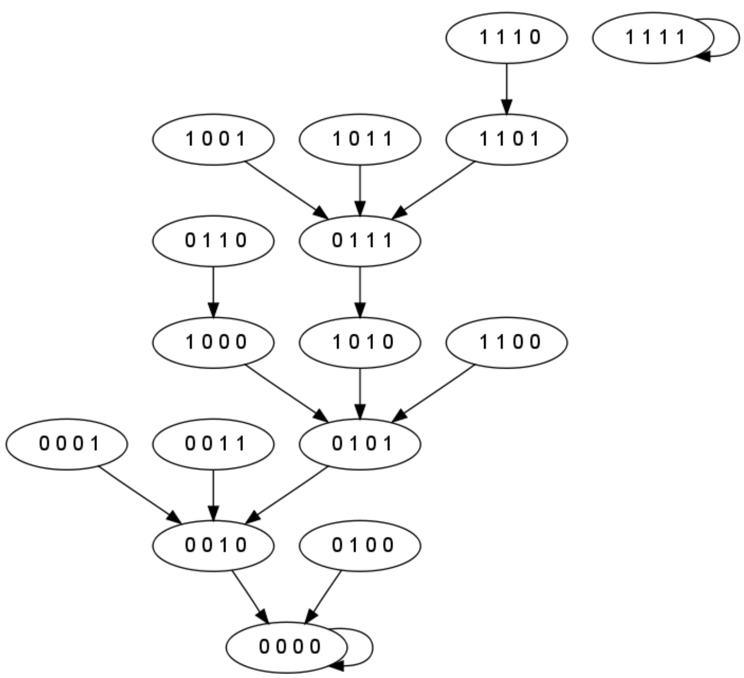


Figura 1.3. Espacio de estados de $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_1): Z_2^4 \rightarrow Z_2^4$.

En la Figura 1.3. Podemos ver que el espacio estado del SDF (Z_2^4, f), donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_1): Z_2^4 \to Z_2^4$, contiene dos ciclos triviales basados en $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,1)$ y tiempo de transición de $S(f)$ es 6.

Lo siguiente es una breve reseña de los resultados existentes sobre SDF.

Para todo sistema lineal sobre un cuerpo finito, podemos representar el sistema como una matriz A, entonces la estructura de espacio de estados de f puede determinarse a partir de la factorización del polinomio característico de la matriz A. Por otra parte los resultados de Bollman-Cólon, en [6], establecen que si f es una función lineal, $f: Z_q^n \longrightarrow Z_q^n$ entonces f es un sistema de punto fijo si, y sólo si el polinomio característico de a matriz que representa f se puede escribir en la forma $x^{n_0}(x-1)^m$ y polinomio mínimo $x^s(x-1)^m$, $m \in \{0,1\}$.

Para sistemas no lineales en [2], Colón et. al. describe un sistema no lineal sobre Z_2 a través de tipos especiales de polinomios, es decir monomios. Ellos consideran un sistema (Z_2^n, f) donde $f = (f_1, \dots, f_n)$, tal que cada f_i es un polinomio de la forma $x_{i_1}^{\epsilon_{i1}} x_{i_2}^{\epsilon_{i2}} \dots x_{i_r}^{\epsilon_{ir}}$ con $\epsilon_{ij} \in \{0,1\}$ o una constante igual a 0 ó 1. A este sistema de polinomios le asocian un grafo de dependencia (dígrafo), denotado por $\mathcal{X}_f$, cuyos vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ corresponden a $f_1, f_2, \dots, f_n$. Existe un eje dirigido $v_i \longrightarrow v_j$ si x_j aparece en f_i, esto es v_j divide a f_i. Para sistemas monomiales booleanos el grafo de dependencia permite la reconstrucción exacta del sistema. El resultado principal de [2], demuestra que la estructura de los ciclos del estado de estados $S(f)$ se puede determinar exclusivamente desde el grafo de dependencia $\mathcal{X}_f$, esto es: desde la estructura de los f_i. El rol principal es ejercido por un invariante asociado a un grafo fuertemente conexo, esto es, un grafo en el cual existe un camino dirigido entre dos vértices cualesquiera. Para tal grafo definen el "número de bucle" como el mínimo de las distancias entre dos caminos distintos desde un vértice a él mismo. Resulta que el grafo de dependencia de un sistema monomial puede ser descompuesto en componentes fuertemente conexos cuyo número de bucle determina la estructura los ciclos limites. El resultado de O. Colón en [2], establece que si el número de bucle de cada componente fuertemente conexo es 1, entonces f es un sistema de punto fijo.

Además en [5], L. Pérez define la operación puente entre grafos fuertemente conexos, el cual genera un sistema dinámico monomial. Para el sistema generado establece condiciones suficientes para que este sea uno de punto fijo. También caracteriza algunas familias para distintos k-puentes, usando un método de linealización donde obtiene una matriz de funciones y por resultados de Hernández-Toledo ver [6], determina una cota para el tiempo de transición calculando el polinomio característico del sistema lineal resultante para dicho sistema.

El tiempo de transición de sistemas lineales se puede determinar a partir de la factorización del polinomio en factores irreducibles. Para sistemas no lineales nuestra contribución es la primera para determinar tiempo de transición.

En el presente trabajo determinamos el tiempo de transición para sistemas dinámicos monomiales que son generados bajo las condiciones establecidas por la operación cuña, para sistemas de punto fijo estudiados por Pérez, ver [5]. Además relacionamos la matriz de adyacencia con los grafos de dependencia (dígrafos) de estos sistemas y establecemos condiciones bajo las cuales se determina el tiempo de transición.

Nota: Los espacios de estados en este trabajo fueron creados con el software de DVD desarrollado por el Grupo de Matemática Aplicada Discreta en el Instituto de Bioinformática de Virginia (http://dvd.vbi.vt.edu). Los gráficos de dependencia, los cuales se utilizan fueron creados mediante el programa Graphviz desarrollado por AT & T (http://graphviz.org).

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos Booleanos Monomiales

En este capítulo tratamos con sistemas dinámicos monomiales sobre un cuerpo finito con dos elementos i.e. $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. En [2], O. Colón, et. al., proveen condiciones suficientes y necesarias para que un sistema dinámico monomial booleano sea un sistema de punto fijo. El rol fundamental es desempeñado por un invariante llamado el "número de bucle", que está asociado con el grafo de dependencia de f. En Colón et. al., se asocia un grafo dirigido llamado el grafo de dependencia de f y que se centra en los componentes fuertemente conexos del grafo de dependencia. Por componentes fuertemente conexos nos referimos a un subgrafo en el que siempre podemos encontrar un camino dirigido entre dos vértices.

En [5], Pérez define la operación k-puente entre grafos fuertemente conexos, el cual genera un sistema dinámico monomial. El sistema generado por dicha operación define un grafo de dependencia que es fuertemente conexo. Además establece condiciones suficientes para que algunas familias de distintos k-puentes sean de punto fijo.

2.1 Sistemas Dinámicos Booleanos Finitos y Grafo de Dependencia.

Definición 2.1.1 Un sistema dinámico booleano es una función f, $f: X \longrightarrow X$, donde $X = \mathbb{F}_2^n$.

Puesto que hay una cantidad finita de estados en $\mathbb{F}_2^n$, es fácil de observar que f puede ser representado como $f = (f_1, \ldots, f_n)$ con cada $f_i \in \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$. Cada f_i representa un monomio libre de cuadrado ver [7], que puede ser representado como una función booleana. En otras palabras, para cada i, $f_i = x_1^{\epsilon_{1i}} \ldots x_n^{\epsilon_{ni}}$, donde $\epsilon_{ji} \in \{0,1\}$. Veamos dos casos triviales.

Si $\alpha_i = 0$ para cada i entonces $f = 0$. También, si $\alpha_i = 1$ y $\epsilon_{ji} = 0$ para cada i, j , entonces $f = 1$. Ambos casos son ejemplos de sistemas dinámicos finito booleanos monomial constante y por lo cual no consideramos en este trabajo.

Para el resto de esta capitulo cuando se habla de sistemas nos referimos a sistemas dinámico booleano monomial es decir SDMB.

Definición 2.1.2 La composición de f consigo mismo r-veces, $f^r = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{r-veces}$ es denotado como la dinámica de f y se puede representar por un grafo dirigido, llamado el espacio de estados (o grafo de estados), denotado por $\mathcal{S}(f)$. El grafo está construido de manera tal que exista un eje dirigido del estado a hacia el estado b, es decir: $a \to b$ si $f(a) = b$.

Note por definición $f^r = (f_1^r, f_2^r, \ldots, f_n^r)$ y $f_i^r = \alpha_i (f_1^{r-1})^{\epsilon_{1i}} (f_2^{r-1})^{\epsilon_{2i}} \ldots (f_n^{r-1})^{\epsilon_{ni}}$, donde $\alpha_i \in \{0,1\}$ y $\epsilon_{ji} \in \{0,1\}$.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el SDF $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3)$. Determinemos algunas composiciones y observemos el comportamiento de sus funciones coordenadas.

En efecto:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, donde $f_1 = x_1x_2$, $f_2 = x_3$, $f_3 = x_2$, $f_4 = x_1x_3$. Para determinar f^2, por definición tenemos que $f^2 = (f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2)$ con $f_1^2 = (f_1)(f_2) = x_1x_2x_3$, hacemos el mismo análisis para determinar las demás funciones coordenadas de donde se obtiene:

$$f^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2x_3, x_2, x_3, x_1x_2)$$

Se sigue el mismo proceso para poder determinar las potencias sucesivas.

$$f^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2x_3, x_3, x_2, x_1x_2x_3).$$

Sea $a \in \mathbb{F}_2^n$, existen enteros l, r tal que $f^{l+r}(a) = f^r(a)$, con $l \geq 1$. Si asumimos que l y r son minimales con respecto a tal propiedad. Decimos que el entero l es el periodo de a. cuando $r = 0$, se tiene que $f^l(a) = a$ entonces a se encuentra en un ciclo de longitud l; si $l = 1$; a es un punto fijo de f que llamaremos un bucle. El mínimo número r de las composiciones de f necesarios para acceder a un ciclo es llamado tiempo de transición de f con respecto a tal ciclo. Este número, tiempo de transición no necesariamente es el mismo para cada ciclo de f, especialmente en el caso no lineal.

Observemos algunos ejemplos que ilustren lo enunciado en la parte superior.

Ejemplo 2.1.4 Consideremos el SDF $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde:
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3)$. La dinámica de f es representada en la figura 2.1

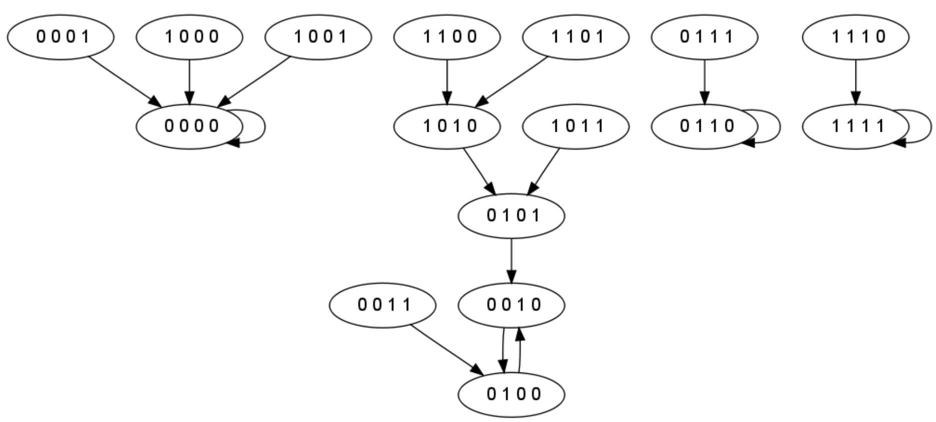


Figura 2.1: Estado fase de $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3)$.

Podemos observar el espacio de estados de $f = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3)$: $\mathbb{F}_2^4 \longrightarrow \mathbb{F}_2^4$, en la figura 2.1 contiene un ciclo de longitud 2 y tres ciclos triviales basados en (0,0,0,0), (0,1,1,0) y (1,1,1,1).

Dado que la composición de funciones se puede realizar una cantidad infinita de veces, ahora definimos formalmente lo que significa para un sistema llegar a un estado de equilibrio.

Definición 2.1.5 Un sistema dinámico finito booleano $(\mathbb{F}_2^n, f)$, es un sistema de punto fijo si cada ciclo tiene longitud 1.

Ejemplo 2.1.6 Consideremos el SDFBM $(\mathbb{F}_2^3, f)$, donde: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_3, x_1)$. La dinámica de f es representado en la figura 2.2.

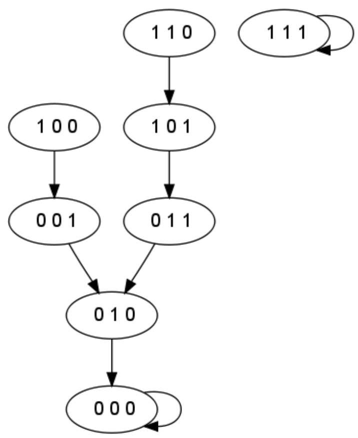


Figura 2.2: Estado fase del SDFBM $(\mathbb{F}_2^3, f)$, donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_3, x_1)$.

En la figura 2.2 el estado fase representa un sistema de punto fijo el cual contiene dos ciclos triviales y el estado que más tarda en llegar a un punto fijo tiene una altura de 4.

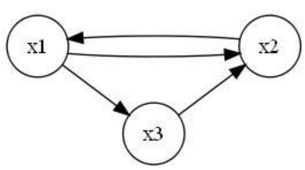
Para estudiar la dinámica de nuestro sistema asociaremos otro grafo a f, un dígrafo $\mathcal{X}_f$ con vértices que corresponden a las variables de f.

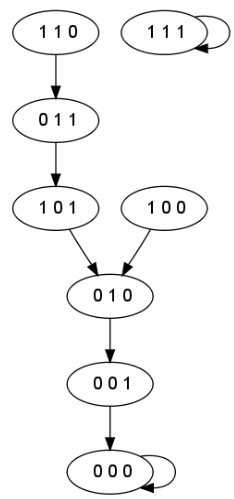
Definición 2.1.7 Sea $(\mathbb{F}_2^n, f)$ un SDFBM. Entonces a $(\mathbb{F}_2^n, f)$ le asociamos un grafo dirigido "$\mathcal{X}_f$" llamado el grafo de dependencia con conjunto de vértices $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \varepsilon\}$. Existe un eje dirigido de a_i a a_j si x_j es un factor de f_i. También existe un eje dirigido de a_i a ε si $\alpha_i = 0$; es decir $f_i = 0$.

Observe que los ciclos $a_i \longrightarrow a_i$ son permitidos, esto ocurre si f_i tiene un factor x_i. Si existe un eje de $a_i \longrightarrow \varepsilon$ ($f_i = 0$), entonces no existe eje de $a_i \longrightarrow a_j$ para todo j. Es evidente que el sistema monomial f es completamente descrito por el grafo de dependencia $\mathcal{X}_f$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.8 Consideremos el SDFBM $(\mathbb{F}_2^3, f)$, donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2x_3, x_1, x_2)$ tiene el siguiente grafo de dependencia de la figura 2.3 (a) y el estado fase dado en la figura 2.3 (b).

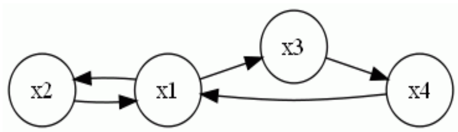


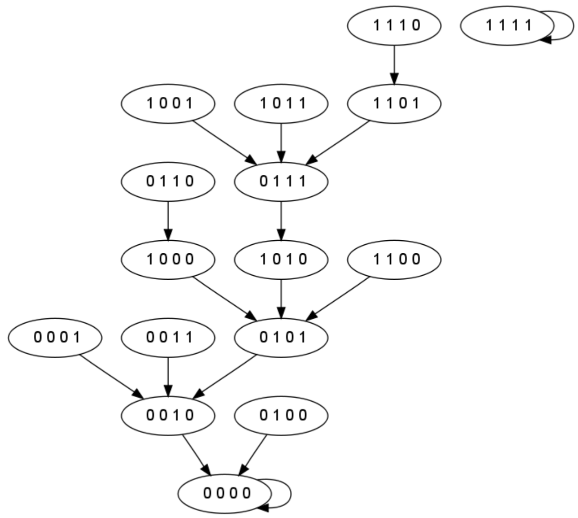


(a) Grafo de dependencia. (b) Estado fase.

Figura 2.3: Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{F}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2x_3, x_1, x_2)$.

Ejemplo 2.1.9 Consideremos el SDFBM $(\mathbb{F}_2^4, f)$, donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_1)$ tiene el siguiente grafo de dependencia de la figura 2.4 (a) y estado fase en la figura 2.4 (b).





(a) Grafo de dependencia (b) Estado fase.

Figura 2.4: Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_1)$.

El siguiente resultado fue probado por O. Colón, para más detalles ver [3].

Proposición 2.1.10 Sea $\mathcal{X}$ el grafo de dependencia de f y asumir $f_i^m \neq 0$. Existe un camino $p: a_i \longrightarrow a_j$ de longitud m en $\mathcal{X}$ si y solo si f_i^m contiene el factor x_j.

La proposición 2.1.10 es de suma importancia ya que establece una relación entre los factores de los monomios f_i^m y caminos de ciertas longitudes entre los vértices en el grafo de dependencia de f.

En el capítulo 3 nos ayudará a demostrar y determinar el tiempo de transición de un cierto sistema dinámico discreto (SDD).

Ejemplo 2.1.11 Consideremos el mapa $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_4, x_1x_5, x_2, x_4x_5, x_2)$ con grafo de dependencia mostrado en la figura 2.5.

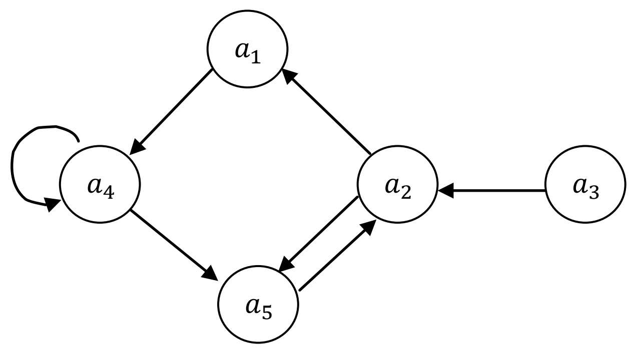


Figura 2.5 : Grafo de dependencia de $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_1x_4, x_4, x_1): \mathbb{F}_2^4 \longrightarrow \mathbb{F}_2^4$.

Por la proposición 2.1.10 existen caminos $p: a_3 \longrightarrow a_2$ y $q: a_3 \longrightarrow a_4$ de largo 3, esto es, porque $f_3^3 = x_2x_4$ tiene como factores a x_2 y x_4.

Ejemplo 2.1.12 Consideremos $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_1x_4, x_4, x_1)$ con grafo de dependencia mostrado en la figura 2.6.

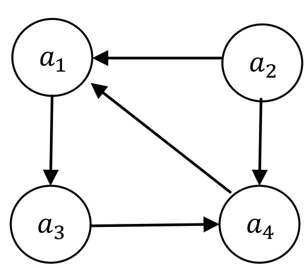


Figura 2.6: Grafo de dependencia de $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_1x_4, x_4, x_1): \mathbb{F}_2^4 \longrightarrow \mathbb{F}_2^4$.

En la figura 2.6 nosotros podemos encontrar caminos de largo 2 y 3 de a_2 en a_3. Notemos que esto se debe a $f_2^2 = x_1x_3$ y $f_2^3 = x_3x_4$ son divididos por x_3.

Corolario 2.1.13 f_i^r es el producto de todas las funciones f_j^{r-s} para todos los caminos $p: a_i \longrightarrow a_j$ de longitud $s \leq r$.

Demostración. Esto se deduce por inducción, como en el proposición 2.1.10.

Como se muestra en el ejemplo 2.1.12, hay una relación entre los caminos del grafo de dependencia y la composición de la función f.

2.2 Componente Fuertemente Conectados.

Sea (X, f) un SDF, con grafo de dependencia $\mathcal{X}$, en esta parte introducimos algunas definiciones que relacionan los elementos de $\mathcal{X}$ (en vista que $\mathcal{X}$ es un dígrafo asociado al SDF (X, f)). Intuitivamente, un grafo dirigido (dígrafo) es formado por vértices conectados por ejes dirigidos.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos el dígrafo mostrado en la figura 2.7.

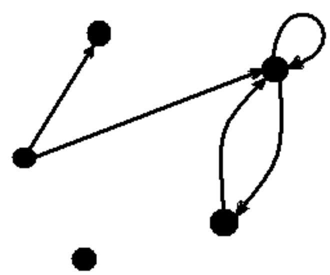


Figura 2.7 Grafo dirigido.

Definición 2.2.2 Un camino p de largo k en un grafo es una sucesión de vértices $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ donde cada (v_{j-1}, v_j), $j = 1, \dots, k$ está conectado por un eje $f(v_{j-1}) = v_j$. Denotamos el camino p por $p: v_j \longrightarrow v_i$ y la longitud de p por $|p| = k$. Si el camino inicia y termina sobre un mismo vértice es llamado un camino cerrado.

Es importante observar la relación sobre los vértices del dígrafo. Dos vértices están conectados si existe un camino de un vértice hacia el otro. Un conjunto de vértices V con la propiedad que para dos vértices $v, w \in V$, existe un camino $v \longrightarrow w$ es llamado componente fuertemente conectado (CFC) de un grafo.

Definición 2.2.3 Sea $\mathcal{X}$ el grafo de dependencia de f.

(1) Escribimos $a \in \mathcal{X}$ para $a \in V_{\mathcal{X}} \backslash \{\varepsilon\}$.

(2) Para los vértices $a, b \in \mathcal{X}$, decimos que a y b están fuertemente conectados, y escribimos $a \sim b$, si, y solo si, existe un camino $p: a \longrightarrow b$ y un camino de $q: b \longrightarrow a$. Observe que siempre existe un camino de longitud cero (un camino vacio) de a hacia a. entonces $a \sim b$ es una relación de equivalencia sobre $V_{\mathcal{X}} \backslash \{\varepsilon\}$, llamada equivalencia fuerte.

(3) Las clases de equivalencia de $a \in \mathcal{X}$, se llama un componente (fuertemente) conectado y es denotado por $\bar{a}$. Consideremos $E(\mathcal{X})$ el conjunto de las clases de equivalencia.

(4) Un vértice a con un eje $a \longrightarrow \varepsilon$ es llamado cero.

(5) Para $a, b \in \mathcal{X}$, sea $p: a \longrightarrow b$ un camino. Denotamos la longitud del camino p por $|p|$.

Los componentes más pequeños fuertemente conectados se describen a continuación. Si $a_i \in \mathcal{X}$ es un vértice con $f_i = 1$, entonces por definición no existe un eje originado en a_i , así a_i define un elemento de componente fuertemente conectado que solo contiene el camino vacio. Lo mismo se cumple en el caso $f_i = 0$, excepto que existe un eje $a_i \longrightarrow \varepsilon$, pero existe solo un camino, el camino vacio de a_i hacia a_i. Si $f_i = x_i$, entonces a_i define también a un elemento de componente fuertemente conectado, ya que no existe eje de $a_i \longrightarrow a_j$ para $j \neq i$. Sin embargo hay infinidad de caminos cerrados $p_j: a_i \longrightarrow a_i$, uno para cada longitud $|p_j| = j \in \mathbb{N}$.

2.3 Número de Bucle.

Para esta sección y de aquí en adelante asumimos que $\mathcal{X}$ es fuertemente conectado y excluimos los casos $f(x) = 1$ y $f(x) = 0$. En particular, si $\mathcal{X}_f$ es conectado fuertemente, entonces este nos representa una sola clase de equivalencia.

La definición que se presenta a continuación nos ayuda a simplificar el análisis a determinar si un SDF es de punto fijo.

Definición 2.3.1 Sea "$\mathcal{X}_f$" un grafo de dependencia de un SDFBM. El número de bucle de un vértice $a \in \mathcal{X}_f$ es el mínimo de todos los números $t \geq 1$ con $t = |p| - |q|$, para todo camino cerrado $p, q: a \longrightarrow a$. Si no existe un camino cerrado de a a a entonces el número de bucle es cero. Este último caso ocurre solo si $\bar{a} = \{a\}$ y no existe ni un eje a hacia a. (i.e. $f = 0,1$, los cuales quedan excluidos).

Observación 2.3.2 Note que si existe un bucle $p: a \longrightarrow a$, entonces el número de bucle de a es 1.

Un bucle (o ciclo de largo 1) es un camino de un vértice en sí mismo. Para la observación 2.3.2 consideremos dos caminos: $p*: a \longrightarrow a$ de largo $|p*| = 2$ y $q*: a \longrightarrow a$ de largo $|q*| = 1$, entonces por definición de número de bucle se tiene $t = |p*| - |q*| = 1$.

Por tanto concluimos que el número de bucle de a es 1.

Ejemplo 2.3.4 Consideremos el SDFBM $(\mathbb{F}_2^5, f)$, donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2x_3, x_3, x_4, x_5, x_1)$ y tiene grafo de dependencia en la figura 2.4 y cuyo número de bucle es igual a 1.

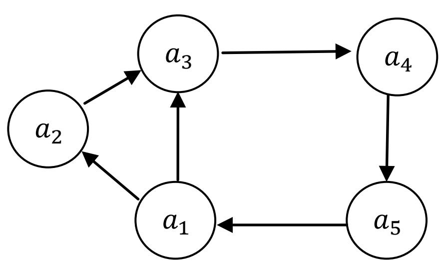


Figura 2.8: Grafo de dependencia SDFBM $(\mathbb{F}_2^5, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2x_3, x_3, x_4, x_5, x_1)$ con número de bucle es igual a 1.

Consideremos los caminos $p: a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_4 \longrightarrow a_5 \longrightarrow a_1$ y el camino $q: a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_4 \longrightarrow a_5 \longrightarrow a_1$. Entonces $|p| - |q| = 5 - 4 = 1$.

Si elegimos $a, b \in \mathcal{X}$. Vamos a mostrar que el número de bucle es invariante bajo la elección de a y b, i.e. el número de bucle de a y b son iguales, si $\mathcal{X}$ es conectado fuertemente.

Lema 2.3.5 El número de bucle es invariante con respecto al vértice en cualquier grafo fuertemente conexo $\mathcal{X}$, i.e. número de bucle es bien definido.

Demostración.

Sean $a, b \in \mathcal{X}$ y supongamos que el número de bucle de $\mathcal{X}$ es t, es decir que existen caminos $p, q: a \longrightarrow a$ tal que $|p| - |q| = t$. Queremos ver que el número de bucle está bien definido. Para ello sean $p': a \longrightarrow b$ y $q': b \longrightarrow a$ dos caminos. Entonces $p'pq, p'pq': b \longrightarrow b$ son caminos cerrados con $|p'pq| - |p'pq'| = t$.

Así el número de bucle de b es menor o igual que el número de bucle de a. Por simetría el número de bucle es constante en $\mathcal{X}$. ■

En el siguiente lema se establece una relación entre el número de bucle y la longitud de los caminos sobre $\mathcal{X}$.

Lema 2.3.6 Sea t el número de bucle de $\mathcal{X}$. Sea $p': a_i \longrightarrow a_j$ y $q': a_i \longrightarrow a_j$ caminos. Entonces $|p'| - |q'| \in (t) \subseteq \mathbb{Z}$.

Demostración.

Supongamos que $|p'| > |q'|$ y sea $|p'| - |q'| = rt + s$ con $0 \leq s < t$. Queremos demostrar que $s = 0$.

Sean $p, q: a_i \longrightarrow a_i$ tal que $|q| - |p| = t$. Hacemos $r \geq 0$. Entonces:

$$|p'p| - |q'q| = |p'| + |p| - (|q'| + |q|)$$
$$|p'p| - |q'q| = (|p'| - |q'|) - (|q| - |p|)$$
$$|p'p| - |q'q| = rt + s - t$$
$$|p'p| - |q'q| = (r-1)t + s$$

Por lo tanto, existen caminos $p'', q'': a_i \longrightarrow a_j$ con $|p''| - |q''| = s$. Sea $p^*: a_i \longrightarrow a_j$ un camino. Entonces $|p^*p''| - |p^*q''| = |p''| - |q''| = s = 0$. Esto debido a la minimalidad del número de bucle t. Por tanto $|p'| - |q'| \in (t)$. ■

Corolario 2.3.7 Sea el número de bucle de $\mathcal{X}$ igual a t y sea $p: a \longrightarrow a$ un camino cerrado. Entonces $|p| \in (t)$.

Demostración.

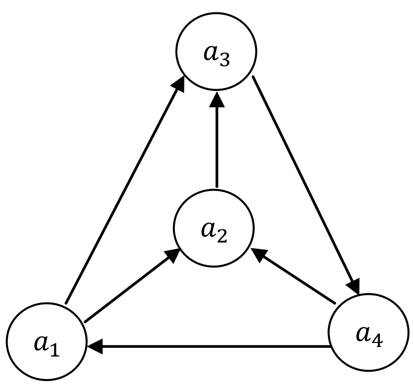
En el lema 2.3.6 anterior tomamos $p' = p$ y $q' = pp$. ■

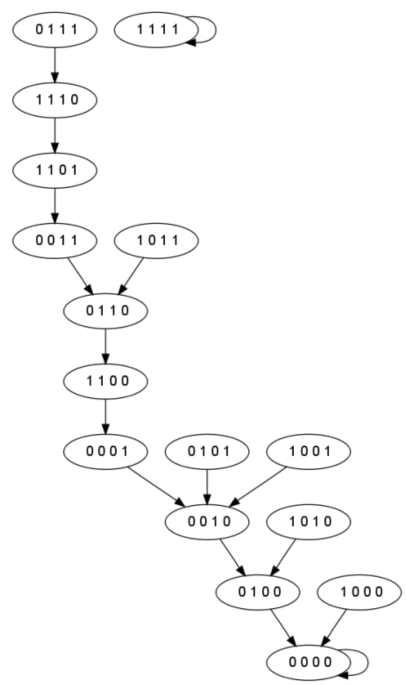
El resultado a continuación fue publicado en [2].

Teorema 2.3.8 Sea $(\mathbb{F}_2^n, f)$ un SDFBM. Entonces f es un sistema de punto fijo, si y solo si, el número de bucle de todos los componentes fuertemente conexos de $\mathcal{X}_f$ es 1.

Mostraremos algunos ejemplos que ilustran los resultados del teorema.

Ejemplo 2.3.9 Consideremos el SDFBM $(\mathbb{F}_2^4, f)$, donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_3, x_4, x_2x_1)$. El grafo de dependencia $\mathcal{X}_f$, está representado en la figura 2.9 (a) y estado fase en 2.9 (b).





(a) Grafo de dependencia (b) Estado fase

Figura 2.9: Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_3, x_4, x_2x_1)$.

Observemos que el número de bucle de $\mathcal{X}_f$ es 1 y por el teorema 2.3.8 f es un sistema de punto fijo el cual es representado en la figura 2.9 (b).

A continuación se discutirán las operaciones de puente entre grafos fuertemente conexos el cual genera un sistema dinámico no lineal.

2.4 Operaciones de Puente Definición y Ejemplos

En esta sección presentamos la definición de la operación puente entre dos grafos fuertemente conexos el cual genera un sistema dinámico no lineal y algunos resultados obtenidos por Pérez en [5] el cual nos brindan condiciones para estudiar el tiempo de transición que lo presentamos en el capítulo 3.

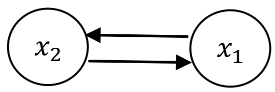
Definición 2.4.1 Sean $\mathcal{X}_f = \{V_f, E_f\}$ y $\mathcal{X}_g = \{V_g, E_g\}$ dos grafos fuertemente conexos donde $V_f = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, $V_g = \{b_1, b_2, \dots, b_{\hat{s}}\}$ son los conjuntos de vértices de $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ respectivamente y $E_f = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$, $E_g = \{w_1, w_2, \dots, w_{\hat{r}}\}$ son el conjunto de ejes de $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ respectivamente. Entonces se define el k-puente $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g = \left\{V_{f\overset{k}{\nabla}g}, E_{f\overset{k}{\nabla}g}\right\}$ donde:

$V_{f\overset{k}{\nabla}g} = \left\{c_1, c_2, \dots, c_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots, a_s, b_{k+2,} b_{k+3}, \dots, b_{\hat{s}}\right\}$ y $E_{f\overset{k}{\nabla}g} = \{\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \dots, \widetilde{e_{\tilde{r}}}\}$ son el conjunto de vértices y el conjunto de ejes de $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ respectivamente con:

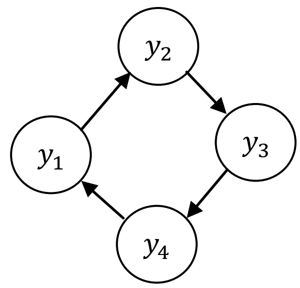
$$\widetilde{e_l} = \begin{cases} (a_i, a_j); & si\ (a_i, a_j) \in \mathcal{X}_f\ y\ i, j > k \\ (b_i, b_j); & si\ (b_i, b_j) \in \mathcal{X}_g\ y\ i, j > k \\ (c_i, c_j); & si\ (a_i, a_j) \in \mathcal{X}_f\ y\ (b_i, b_j) \in \mathcal{X}_g \\ (c_i, a_j); & si\ (a_i, a_j) \in \mathcal{X}_f \\ (a_j, c_i); & si\ (a_j, a_i) \in \mathcal{X}_f \\ (c_i, b_j); & si\ (b_i, b_j) \in \mathcal{X}_g \\ (b_j, c_i); & si\ (b_j, b_i) \in \mathcal{X}_g \end{cases}.$$

Note que $\mathcal{X}_f \vee \mathcal{X}_g$ induce un sistema dinámico monomial. Mas aún $\mathcal{X}_f \vee \mathcal{X}_g$ induce el caso mas simple no lineal, idóneo para estudiar el tiempo de transición.

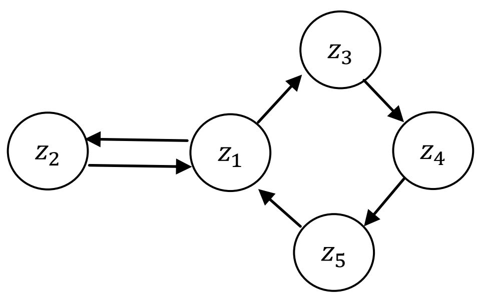
Ejemplo 2.4.2. Consideremos $\mathcal{X}_f$ un 2-ágono de la figura 2.10 (a) que define el sistema $(\mathbb{F}_2^2, f)$ donde $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, $\mathcal{X}_g$ un 4-ágono de la figura 2.10 (b) que define el sistema $(\mathbb{F}_2^4, g)$ donde $g(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2, y_3, y_4, y_1)$ y el 0-puente que se muestra en la figura 2.10 (c) que define el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^5, h)$ donde $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (z_2 z_3, z_1, z_4, z_5, z_1)$.



(a) $\mathcal{X}_f$ un 2-ágono



(b) $\mathcal{X}_g$ un 4-ágono



(c) $\mathcal{X}_f \vee \mathcal{X}_g$ 0-puente de $\mathcal{X}_f$ un 2-ágono y $\mathcal{X}_g$ un 4-ágono

Figura 2.10: 0-puente de $\mathcal{X}_f$ un 2-ágono y $\mathcal{X}_g$ un 4-ágono.

Observación 2.4.3

1. El 0-puente se hace entre vértices y el k-puente con $k > 0$ se hace entre los ejes de los grafos.
2. El grafo generado por el k-puente de dos grafos es el grafo de dependencia definido en 2.1.7 que induce un sistema dinámico monomial.

El siguiente resultado establece que el k-puente de dos grafos fuertemente conexos es un grafo fuertemente conexo.

Lema 2.4.4 Sean $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos y sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces $\mathcal{X}_f \overset{k}{\bigvee} \mathcal{X}_g$ es un grafo fuertemente conexo.

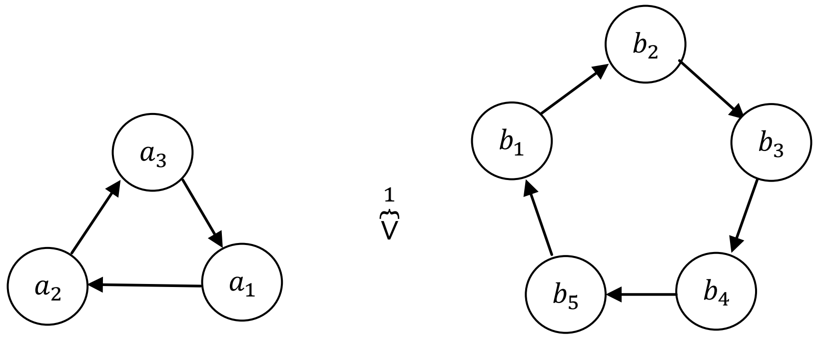
Demostración.

Consideremos los grafos de dependencia $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos y sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Por demostrar que $\mathcal{X}_f \overset{k}{\bigvee} \mathcal{X}_g$ sea un grafo fuertemente conexo. Para ello, sean a y b vértices en $\mathcal{X}_f \overset{k}{\bigvee} \mathcal{X}_g$ y sea c_i un vértice arbitrario en el k-puente de $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$.

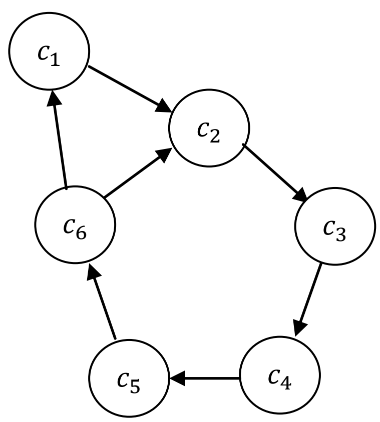
Si a y b son ambos vértices en $\mathcal{X}_f$ o en $\mathcal{X}_g$ ahí no hay nada que probar. Así que suponemos que a es un vértice en $\mathcal{X}_f$ y que b es un vértice en $\mathcal{X}_g$. Ahora como $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ son dos grafos fuertemente conexos y c_i es un vértice de $\mathcal{X}_f \overset{k}{\bigvee} \mathcal{X}_g$, existen caminos $p: a \longrightarrow c_i$ y $q: c_i \longrightarrow b$ de $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ respectivamente. Entonces $r = pq$ es un camino desde a hasta b. Por lo tanto $\mathcal{X}_f \overset{k}{\bigvee} \mathcal{X}_g$ es un grafo fuertemente conexo. ∎

El resultado lema lo ilustramos mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.5 Consideremos, $\mathcal{X}_f$ un 3-ágono y $\mathcal{X}_g$ un 5-ágono los cuales vienen representados en la figura 2.11 (a) y 2.11 (b). $\mathcal{X}_f \overset{1}{\widetilde{\nabla}} \mathcal{X}_g$ representa el 1-puente y es ilustrado en la figura 2.11 (c) que define el sistema $(\mathbb{F}_2^6, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1 x_2): \mathbb{F}_2^6 \longrightarrow \mathbb{F}_2^6$ el cual es de punto fijo como lo mostramos en la figura 2.12.



(a) $\mathcal{X}_f$ un 3-ágono. (b) $\mathcal{X}_g$ un 5-ágono.



(c) $\mathcal{X}_f \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_g$ 1-puente.

Figura 2.11: Grafo de dependencia de $\mathcal{X}_f$ un 3-ágono, $\mathcal{X}_g$ un 5-ágono y $\mathcal{X}_f \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_g$ 1-puente.

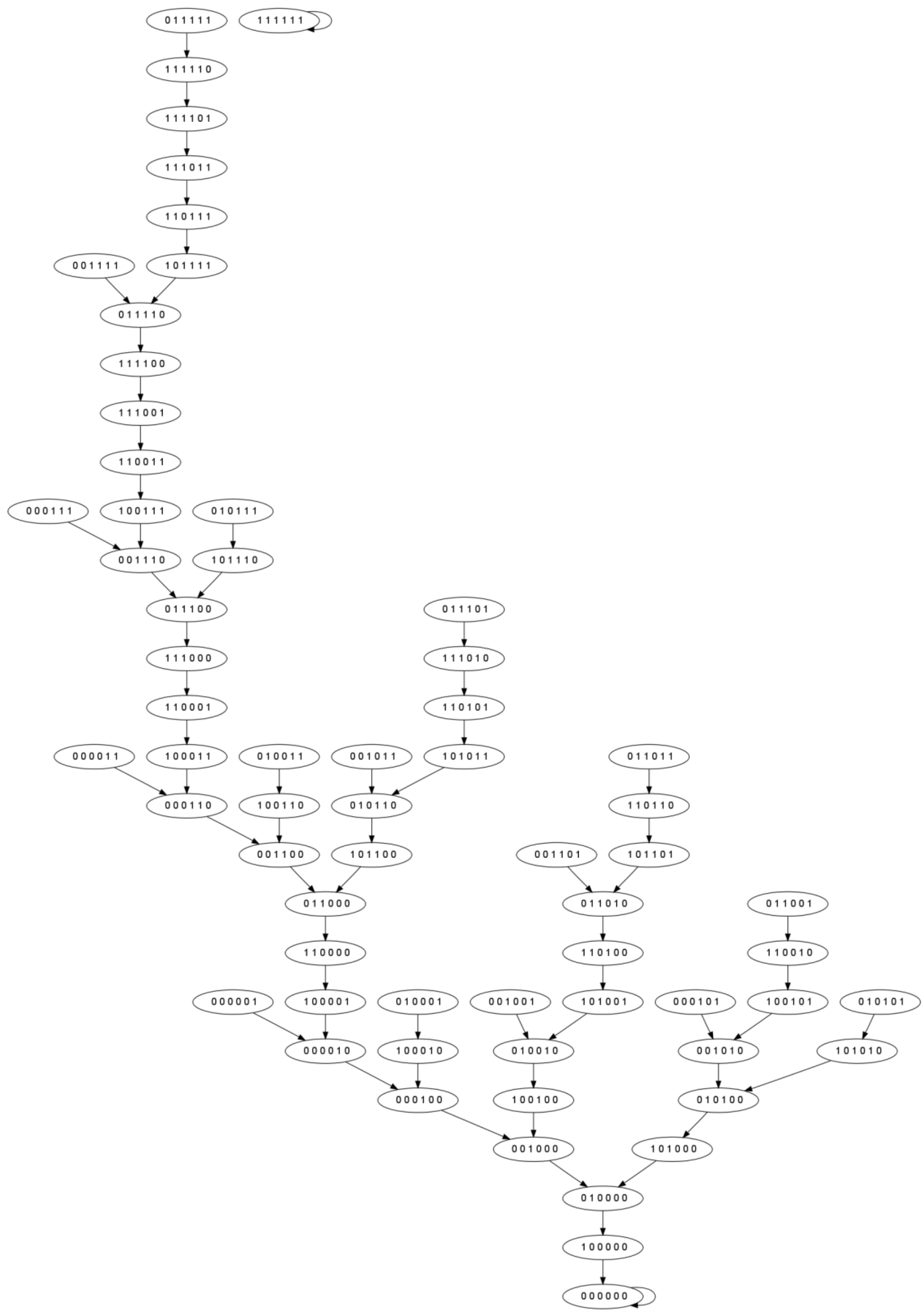


Figura 2.12: Estado fase.

El próximo resultado propone aplicar una permutación σ del grupo simétrico, S_n a un SDFBM donde los estados fases presentan un isomorfismo. Una consecuencia de este resultado es que la dinámica es invariante de la k-cara donde el k-puente se realice.

Teorema 2.4.6 Sea $\sigma \in S_n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n$ tal que $f_i = \alpha_i x_1^{\epsilon_{1i}} \dots x_n^{\epsilon_{ni}}$ donde $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\epsilon_{ji} \in \{0,1\}$ y sea $\mathcal{K} = \{f: \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n)/(\mathbb{F}_2^n, f)\ es\ SDFBM\ \}$. Entonces $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ donde $\phi_\sigma: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ es un mapa definido por:

$\phi_\sigma(f) = \left(f_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right), \dots, f_{\sigma^{-1}(n)}\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right)\right)$.

Demostración.

Sean $\sigma \in S_n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n$ tal que $f_i = \alpha_i x_1^{\epsilon_{1i}} \dots x_n^{\epsilon_{ni}}$ donde $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\epsilon_{ji} \in \{0,1\}$. Queremos mostrar que $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$.

Previamente veremos que el mapa ϕ_σ es bien definido y luego que exista una correspondencia uno a uno entre los vértices y que preserve los ejes, para esto, sean $f, g \in \mathcal{K}$ y supongamos que $f = g$, esto es que $f_i = g_i$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces:

$$\phi_\sigma(f) = \left(f_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right), \dots, f_{\sigma^{-1}(n)}\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right)\right)$$

$$\phi_\sigma(f) = \left(g_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right), \dots, g_{\sigma^{-1}(n)}\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right)\right)$$

$$\phi_\sigma(f) = \phi_\sigma(g)$$

Por consiguiente ϕ_σ está bien definida. Ahora para ver que existe una correspondencia uno a uno entre los vértices considere el mapa $\psi_\sigma: \mathcal{S}(f) \longrightarrow \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ definido por:

$\psi_\sigma\left((a_1, a_2, \dots, a_n)\right) = \left(a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)}\right)$.

Notemos que ψ_σ es un mapa uno a uno.

Si $\psi_\sigma\left((a_1, a_2, \dots, a_n)\right) = \psi_\sigma\left((b_1, b_2, \dots, b_n)\right)$, entonces

$\left(a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)}\right) = \left(b_{\sigma^{-1}(1)}, b_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}\right)$

y como $\left(a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)}\right)$, $\left(b_{\sigma^{-1}(1)}, b_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}\right) \in \mathbb{F}_2^n$ tenemos que $a_{\sigma^{-1}(i)} = b_{\sigma^{-1}(i)}$ para $i = 1, \dots, n$. Ahora como σ^{-1} es una biyección tenemos que $\sigma^{-1}(i) = j$ para $j = 1, \dots, n$; de ahí que $a_j = b_j$. Por tanto existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de $\mathcal{S}(f)$ y $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$. Para ver que los ejes son preservados, supongamos que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \longrightarrow (b_1, b_2, \dots, b_n)$ en $\mathcal{S}(f)$. Entonces por definición del estado fase tenemos que.

$f\big((a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = \big(f_1(a_1, a_2, \dots, a_n), \dots, f_n(a_1, a_2, \dots, a_n)\big)$

$f\big((a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

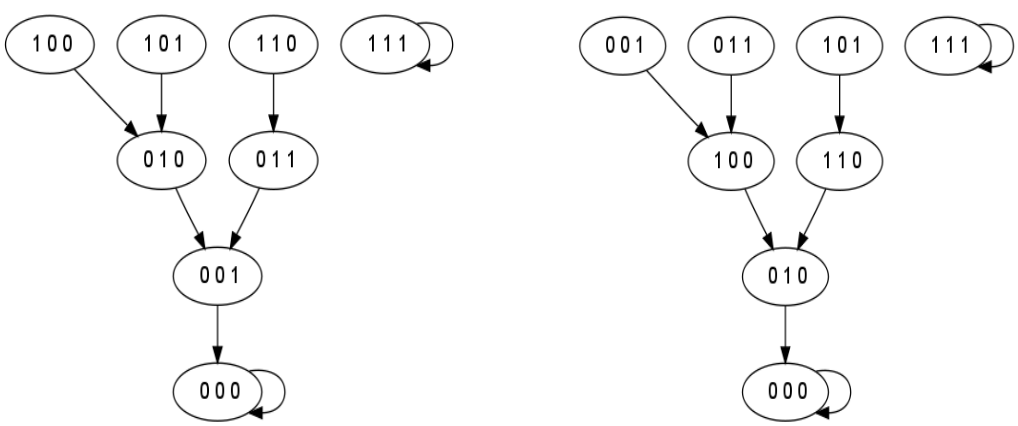
Por consiguiente;

$$\begin{aligned}
\phi_\sigma(\psi_\sigma(a_1, a_2, \dots, a_n)) &= \phi_\sigma\Big(\big(a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)}\big)\Big) \\
&= \Big(f_{\sigma^{-1}(1)}\big(a_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}, \dots, a_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}\big), \dots, f_{\sigma^{-1}(n)}\big(a_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}, \dots, a_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}\big)\Big) \\
&= \Big(f_{\sigma^{-1}(1)}(a_1, \dots, a_n), \dots, f_{\sigma^{-1}(n)}(a_1, \dots, a_n)\Big) \\
&= \big(b_{\sigma^{-1}(1)}, b_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}\big) \\
&= \psi_\sigma\big((b_1, b_2, \dots, b_n)\big).
\end{aligned}$$

Esto implica que $\psi_\sigma\big((a_1, a_2, \dots, a_n)\big) \longrightarrow \psi_\sigma\big((b_1, b_2, \dots, b_n)\big)$ en $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$. Por tanto el estado fase de f es isomorfo al estado fase de $\phi_\sigma(f)$. ■

Ejemplo 2.4.7 Consideremos el SDFBM $(\mathbb{F}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_1, x_2)$ y sea $\sigma = (3 \quad 1 \quad 2) \in S_3$. Entonces por el mapa ϕ_σ del teorema 2.4.6 se tiene que:

$\phi_\sigma(f) = \Big(f_{\sigma^{-1}(1)}\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\big), f_{\sigma^{-1}(2)}\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\big), f_{\sigma^{-1}(3)}\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\big)\Big)$ de donde tenemos que $\phi_\sigma(f) = (x_3, x_1, x_1x_2x_3)$. Por tanto por el teorema 2.4.6 se tiene que: $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ los cuales están representados en la figura 2.13 (a) y (b).



(a) Estado fase $\mathcal{S}(f)$ (b) Estado fase $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$

Figura 2.13: Estado fase de $\mathcal{S}(f)$, $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ del SDFBM $(\mathbb{F}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_1, x_2)$.

Ejemplo 2.4.8. Consideremos el 0-puente entre C_3 un 3-ágono y C_2 un 2-ágono mostrado en figura2.14 el cual define un SDFBM $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_1)$ y sea la permutación $\sigma = (2 \quad 1 \quad 3) \in S_3$. Entonces por el mapa ϕ_σ del teorema 2.4.6 se tiene que:

$\phi_\sigma(f) = \left(f_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}\right), \ldots, f_{\sigma^{-1}(4)}\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}\right)\right)$ de donde tenemos que $\phi_\sigma(f) = (x_3, x_4, x_1x_2, x_3)$. Por tanto por el teorema 2.4.6 se tiene que: $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ los cuales están representados en la figura 2.15 (a) y (b).

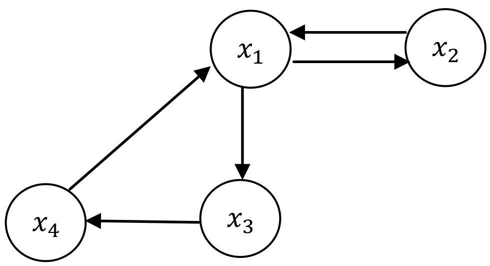
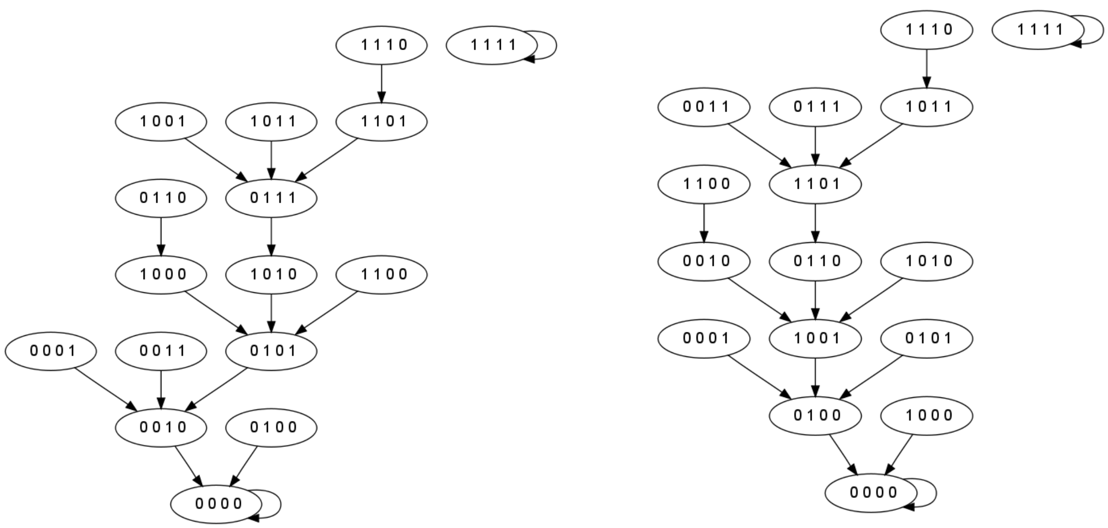


Figura 2.14: 0-puente entre C_3 un 3-ágono y C_2 un 2-ágono



(a) Estado fase $\mathcal{S}(f)$

(b) Estado fase $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$

Figura 2.15: Estado fase de $\mathcal{S}(f)$ y $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ del SDFBM $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_1)$.

Corolario 2.4.9 Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces el estado fase de la función h tal que $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es invariante respecto al k-puente.

Seguidamente se establece las condiciones necesarias y suficientes del sistema dinámico generado por el k-puente de dos grafos fuertemente conexos para que sea un sistema de punto fijo.

El siguiente teorema provee dicho criterio.

Teorema 2.4.10 Sean $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos con n y m vértices respectivamente tal que $gcd(n,m) = 1$. Si existe un camino $p: a \longrightarrow a$ en $\mathcal{X}_f$ y un camino $q: b \longrightarrow b$ en $\mathcal{X}_g$ tal que $|p| = n$ y $|q| = m$. Entonces $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un sistema de punto fijo.

Demostración.

Sean $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos con n y m respectivamente tal que $(n,m) = 1$ y supongamos que $L\left(\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g\right) = t$ y que existe un camino $p: a \longrightarrow a$ en $\mathcal{X}_f$ y un camino $q: b \longrightarrow b$ en $q: b \longrightarrow b$ tal que $|p| = n$ y $|q| = m$. Queremos ver que $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un sistema de punto fijo. Por el lema 2.3.4 $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un grafo fuertemente conexo, así que $L\left(\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g\right)$ es invariante por el lema 2.2.5. Ahora por el corolario 2.4.9 es invariante de donde se hizo el k-puente. Así que sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vértices en el k-puente tal que $a_i = a \vee b$ para $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Esto es que existe un camino $p: a_i \longrightarrow a_i$ y $q: a_i \longrightarrow a_i$ tal que se mueve por $\mathcal{X}_f$ y que se mueve por $\mathcal{X}_g$ con $|p| = n$ y $|q| = m$. Entonces por hipótesis $(|p|,|q|) = 1$, o sea que $1 = |p|x + |q|y$ donde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Ahora por el lema 2.2.6 tenemos que $|p| - |q| = tl$ donde $l \in \mathbb{Z}$, es decir $|p| = tl + |q|$. Por consiguiente:

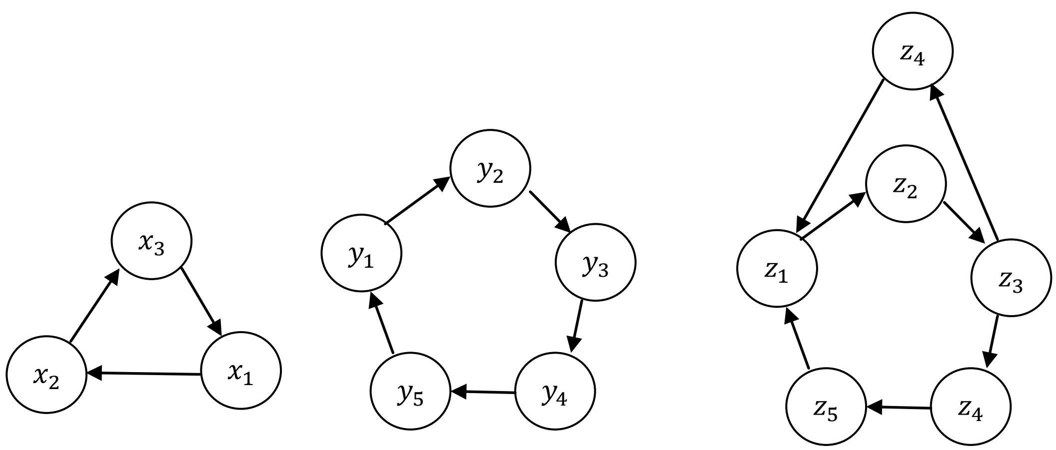
$$1 = (tl + |q|)x + |q|y$$

$$1 = tlx + |q|(x + y)$$

Esto implica que $1 = (t, |q|)$ y por el corolario 2.3.7, $|q| \in (t)$, así que $t = 1$. Por consiguiente $\mathcal{X}_f \overset{k}{\bigvee} \mathcal{X}_g$ es un sistema de punto fijo por el corolario 2.3.8. ∎

Corolario 2.4.11 Sea C_n un n-ágono y C_m un m-ágono tal que $gcd(n, m) = 1$ y sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces $C_n \overset{k}{\bigvee} C_m$ es un sistema de punto fijo.

Ejemplo 2.4.12 Consideremos, C_3 un 3- ágono y C_5 un 5-ágono los cuales vienen representados en la figura 2.16 (a) y 2.16 (b). $C_3 \vee C_5$ representa el 2-puente y es ilustrado en la figura 2.16 (c) donde el sistema $(\mathbb{F}_2^6, f)$ es definido $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_2, x_3, x_4x_5, x_1, x_6, x_1): \mathbb{F}_2^6 \longrightarrow \mathbb{F}_2^6$. Donde aplicando el corolario 2.4.11 tenemos que $(\mathbb{F}_2^6, f)$ es un sistema de punto fijo.



(a) C_3 3- ágono (b) C_5 5- ágono (c) $C_3 \vee C_5$ 2-puente C_3 y C_5.

Figura 2.16: 2-puente de C_3 un 3- ágono y C_5 un 5- ágono.

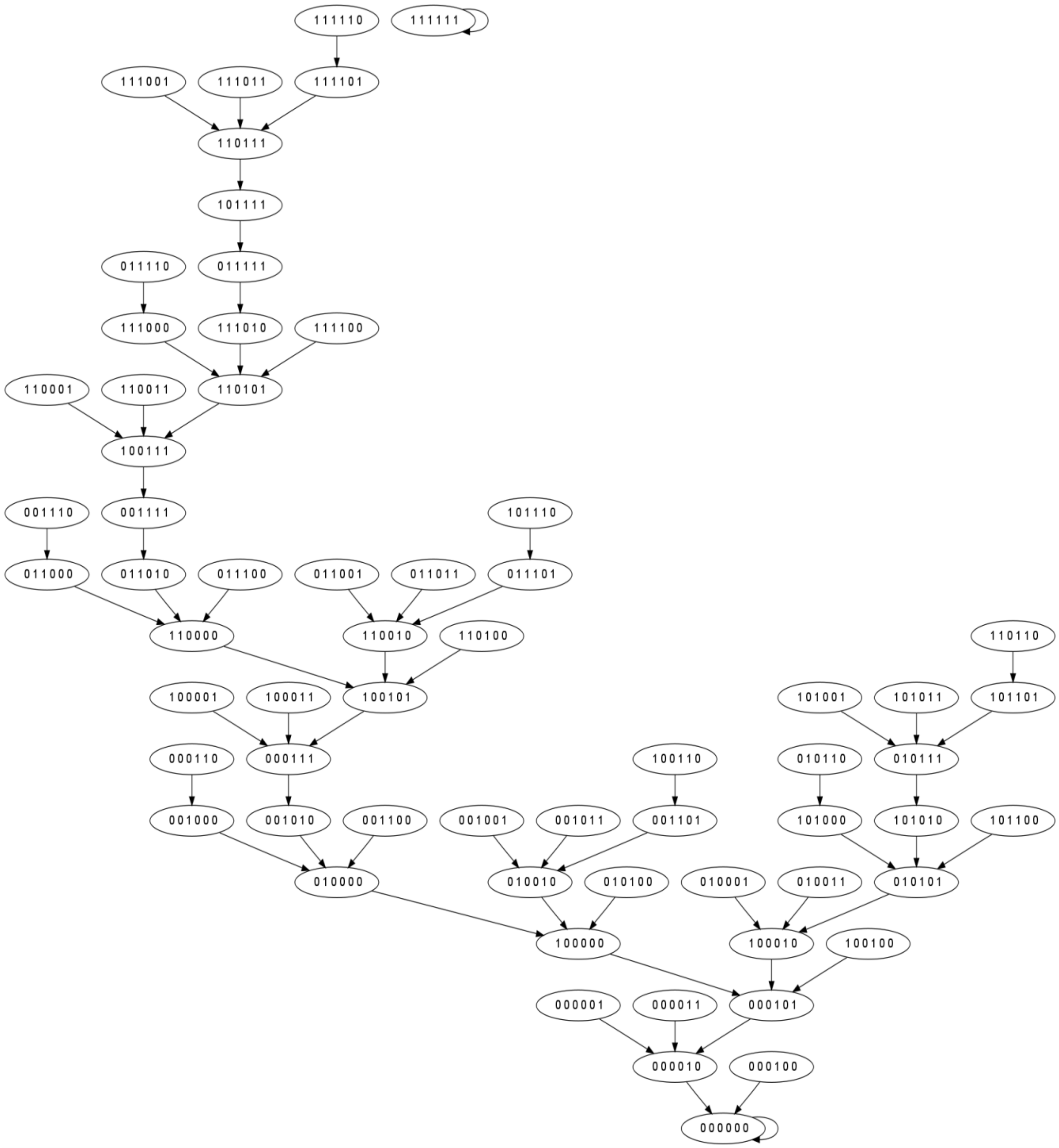


Figura 2.15. Estado fase del sistema:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_2, x_3, x_4x_5, x_1, x_6, x_1): \mathbb{F}_2^6 \longrightarrow \mathbb{F}_2^6$

Capítulo **3**

Cuñas en Sistemas Dinámicos

En el presente capítulo introduciremos la operación cuña que viene a ser una particularización de la operación k-puente entre grafos fuertemente conexos. Dicha operación viene a ser el 0-puente. El grafo obtenido por esta operación nos define un SDFBM sobre el cuerpo $\mathbb{F}_2$ y mapa $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n$, tal que $f_i = x_1^{\epsilon_{1i}} x_2^{\epsilon_{2i}} \dots x_n^{\epsilon_{ni}} \in \mathbb{F}_2[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Particularmente estudiaremos y estableceremos el tiempo de transición del SDFBM cuyo grafo de dependencia es determinado por la operación cuña entre un polígono de n lados, C_n, y un polígono de m lados, llamado C_m, donde m y n son co-primos.

3.1. Definición y Ejemplos

El estado fase del sistema inducido por la cuña de los polígonos antes mencionado está compuesto de dos ciclos triviales y arboles conexos adjunto a uno de los vértices del ciclo. Para cualquier elemento $x \in \mathbb{F}_2^n$ al iterar f se tiene: $f^0(x) = x$ y $f^{n+1}(x) = f\big(f^n(x)\big)$, para cada $n \geq 0$. La órbita de x es el conjunto $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x): n \geq 0\}$. La dinámica del sistema $(\mathbb{F}_2^n, f)$ es la descripción de todas las posibles órbitas. Debido a que la órbita de x es un conjunto finito, existen enteros m, r tal que $f^{m+r}(x) = f^m(x)$, con $r \geq 1$. Si asumimos que m y r son minimales con respecto a esta propiedad, decimos que el entero r es el periodo de x y también de su órbita. Cuando $m = 0$, se tiene que $f^r(x) = x$ y la orbita de x es un ciclo de longitud r; si $r = 1$; x es un punto fijo de f que lo llamaremos ciclo de un bucle. Cuando $m \geq 0$, la parte de la órbita constituida de $x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)$ se llama la parte de transición de la órbita, $f^{m}(x)$ sería el primer elemento de la órbita de x que representa el final del ciclo. El máximo número m de las composiciones de f necesarios para acceder a un ciclo se llama tiempo de transición de $S(f)$ con respecto al ciclo.

Definición 3.1.1. Dado $f: \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n$ y $a \in \mathbb{F}_2^n$. La órbita de x se puede escribir como: $\mathfrak{S}(x) = \{a, f(a), \dots, f^{t_a}(a), f^{t_a+1}(a), \dots, f^{t_a+r_a-1}(a), f^{t_a+r_a}(a) = f^{t_a}(a)\}$. Para mínimos t_a y r_a.

Definición 3.1.2. Dado un cuerpo $\mathbb{F}_2^n$, una función. $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2^n$, donde $f_i \in \mathbb{F}_2[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $f_i = x_1^{\epsilon_{1i}} x_2^{\epsilon_{2i}} \dots x_n^{\epsilon_{ni}}$, $\epsilon_{ji} \in \{0,1\}$. Definimos el tiempo de transición de un vector $a \in \mathbb{F}_2^n$ como el mínimo entero no negativo t_a tal que $f^{t_a}(a) = b$; para algún $b \in \mathbb{F}_2^n$ tal que $b = f^{t_a}(a) = f^{t_a+r_a}(a) \in \mathbb{F}_2^n$; r_a-longitud del ciclo (i.e. $b \in \mathbb{F}_2^n$ es elemento terminal que se encuentra en un ciclo de largo r_a).

En particular el tiempo de transición de un elemento terminal de un sistema de punto fijo será cero. El tiempo de transición de un SDFBM $(\mathbb{F}_2^n, f)$ es el máximo de los tiempos de transición de sus elementos.

Nota. El tiempo de transición de los estados del sistema no necesariamente tiene que ser el mismo.

Ejemplo 3.1.3. Consideremos el SDF $(\mathbb{F}_2^5, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 x_3, x_1, x_4, x_5, x_1)$. El espacio estado de f se muestra en la figura 3.1.

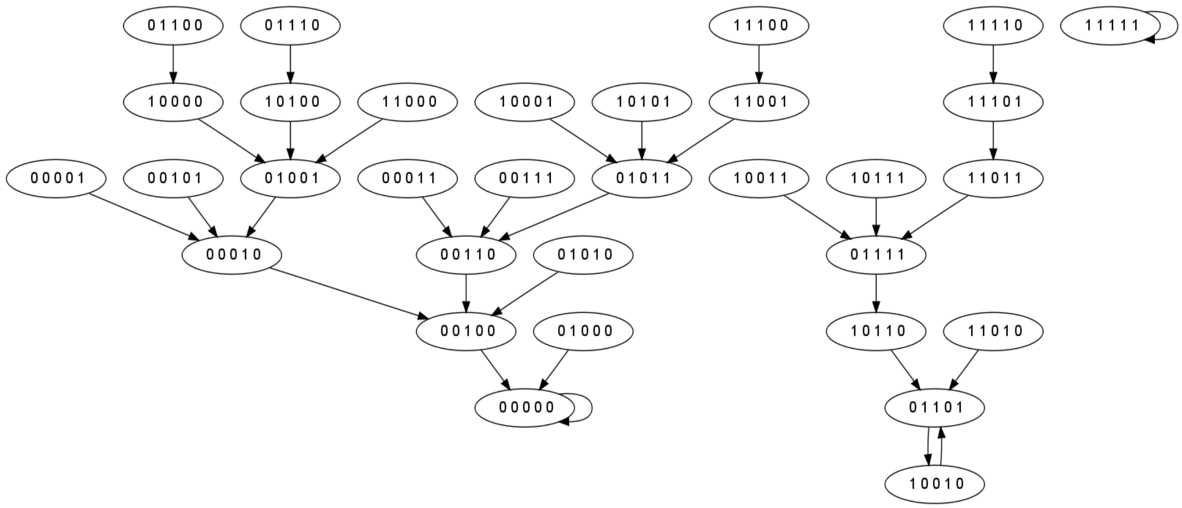


Figura 3.1. Espacio estado de $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2x_3, x_1, x_4, x_5, x_1): \mathbb{F}_2^5 \longrightarrow \mathbb{F}_2^5$.

Note que del estado fase de SDF $(\mathbb{F}_2^5, f)$ representada en la figura 3.1 se observa los diferentes tiempos de transición de los vectores de estado $t_{(01000)} = 1$, $t_{(01010)} = 2$, $t_{(00111)} = 3$, $t_{(10101)} = 4$ y $t_{(11100)} = 5$ etc. De donde obtenemos que el tiempo de transición del sistema $(\mathbb{F}_2^5, f)$ es 5.

Definición 3.1.4. Sean C_n un n-ágono y C_m un m-ágono, Entonces se define la operación cuña entre C_n y C_m como el grafo $C_n \vee C_m$ donde su conjunto de vértices es

$\{c_1, c_2, \dots, c_{n+m-1}\}$ y existe un eje dirigido $c_i \rightarrow c_{i+1}$ para $1 \leq i < n + m - 1$. También

existe un eje $c_n \rightarrow c_1$ & $c_{n+m-1} \rightarrow c_n$.

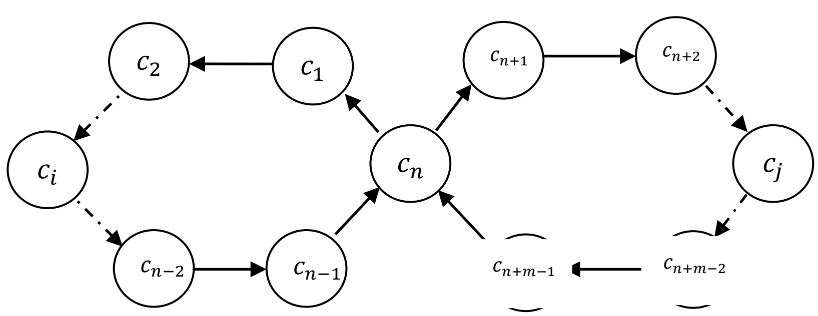
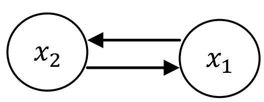


Figura 3.2: cuña entre C_n y C_m

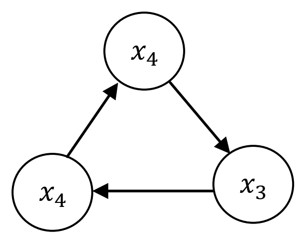
Observación 3.1.5. La operación cuña representa una particularización de la operación k-puente, esto es el 0-puente.

Observación 3.1.6. El grafo de dependencia resultante mediante la operación cuña describe un sistema dinámico booleano monomial. Para que este sea de punto fijo debe satisfacer que el máximo común divisor de los vértices del C_n un n-ágono y C_m un m-ágono es 1 (esto es que $gcd(n,m) = 1$). Para más detalles ver [5].

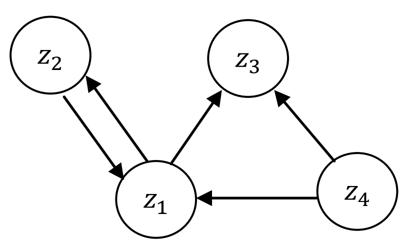
Ejemplo 3.1.7. Consideremos el 2-ágono de la figura 3.2 (a) que define el sistema $(\mathbb{F}_2^2, f)$ donde $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ y el 3-ágono de la figura 3.2 (b) que define el sistema $(\mathbb{F}_2^3, f)$ donde $g(y_1, y_2, y_3) = (y_2, y_3, y_1)$. La operación cuña esta dada en la figura 3.2 (c) que define el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_2 z_3, z_1, z_4, z_1)$.



(a) C_2 un 2-ágono



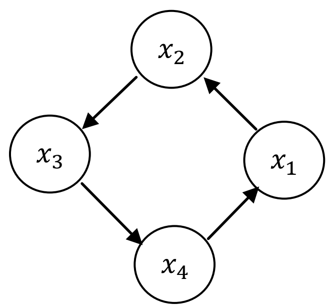
(b) C_3 un 3-ágono



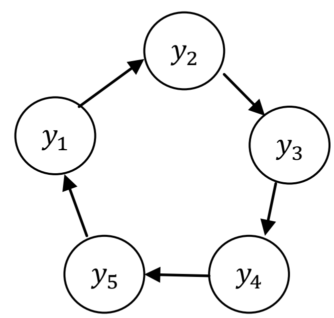
(c) $C_2 \vee C_3$ cuña de C_2 y C_3

Figura 3.3 : cuña de un 2-ágono y un 3-ágono.

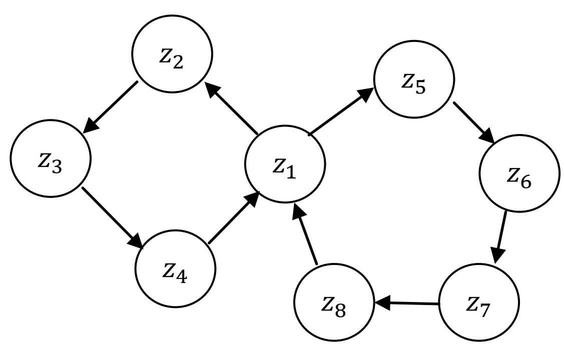
Ejemplo 3.1.8. Consideremos C_4 un 4-ágono para el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, x_1)$ y el C_5 un 5-ágono para el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^5, g)$ donde $g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (y_2, y_3, y_4, y_5, y_1)$ los cuales vienen representados en la figura 3.3 (a) y (b). $C_4 \vee C_5$ representa la cuña de estos y es ilustrado en la figura 3.3 (c), por el corolario 2.4.11 el sistema $(\mathbb{F}_2^9, h)$ es de punto fijo donde $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = (z_2 z_5, z_3, z_4, z_1, z_6, z_7, z_8, z_1)$.



(a) C_4 un 4-ágono



(b) C_5 un 5-ágono



(c) $C_4 \vee C_5$

Figura 3.4: Cuña entre C_4 un 4-ágono y C_5 un 5-ágono ($C_4 \vee C_5$).

En vista de que al sistema $(\mathbb{F}_2^n, f)$ se le asoció un grafo dirigido $\mathcal{X}_f$ al cual se le denomina grafo de dependencia, damos a continuación algunas definiciones que nos relacione los vértices y eje de $\mathcal{X}_f$.

Definición 3.1.9. Sea $\mathcal{X}$ un dígrafo. Dos vértices $a, b \in V_{\mathcal{X}}$ se llaman conectados si existe un $t \in \mathbb{N}$ y vértices $v_1, v_2, \dots, v_t \in V_{\mathcal{X}}$ (no necesariamente distintos) talque:

$$a \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_t \longrightarrow b$$

en esta situación escribimos $a \rightsquigarrow_s b$. Donde s es el número de ejes dirigidos que participan en la secuencia de a hacia b (en este caso $s = t + 1$).

Dos secuencias $a \rightsquigarrow_s b$ de la misma longitud son considerados diferentes si los ejes dirigidos implicados son diferentes y el orden en el que ellos aparecen son diferentes, incluso si los vértices visitados son los mismos. Por convenio, un solo vértice $a \in V_{\mathcal{X}}$ esta siempre conectado así mismo $a \rightsquigarrow_0 a$ por una secuencia de longitud 0.

Definición 3.1.10. Sea $\mathcal{X}$ un dígrafo y $a, b \in V_{\mathcal{X}}$ dos vértices. Una secuencia $a \rightsquigarrow_s b$

$$a \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_t \longrightarrow b$$

se llama un camino, si ningún vértice v_i es visitado más que una vez. Si $a = b$, pero no hay otro vértice más de una vez, $a \rightsquigarrow_s b$ se llama camino cerrado.

Definición 3.1.11. Sea $\mathcal{X}$ un dígrafo. Dos vértices $a, b \in V_{\mathcal{X}}$ se llaman fuertemente conectados si existen números naturales s, $t \in \mathbb{N}$ talque

$$a \rightsquigarrow_s b \text{ y } b \rightsquigarrow_t a$$

En esta situación escribimos $a \rightleftharpoons b$.

Teorema (y definición) 3.1.12. Sea $\mathcal{X}$ un dígrafo. $\rightleftharpoons$ es una relación de equivalencia sobre $V_{\mathcal{X}}$ llamada equivalencia fuerte. Las clases de equivalencia de cualquier vértice $a \in V_{\mathcal{X}}$ es llamado componente fuertemente conectado y denotamos por $\overleftrightarrow{a} \subseteq V_{\mathcal{X}}$.

Demostración.

Debido a la convención $a \rightsquigarrow_0 a$ la relación $\rightleftharpoons$ es reflexiva. La simetría sigue trivialmente de la definición $\rightleftharpoons$. Transitividad se sigue de $a \rightleftharpoons b$ y $b \rightleftharpoons c$

$$\Longrightarrow (a \rightsquigarrow_s b \ \ y \ \ b \rightsquigarrow_t a\ ) \text{ y } (b \rightsquigarrow_u c \ \ y \ \ c \rightsquigarrow_v b\ )$$
$$\Longrightarrow a \rightsquigarrow_{s+u} c \ \ y \ \ c \rightsquigarrow_{v+t} a$$
$$\Longrightarrow a \rightleftharpoons c.$$

■

Definición 3.1.13. Sea $\mathcal{X}$ un dígrafo y $a \in V_{\mathcal{X}}$ uno de sus vértices. El componente fuertemente conectado $\overleftrightarrow{a} \subseteq V_{\mathcal{X}}$ es llamado trivial si, y solo si $\overleftrightarrow{a} = \{a\}$ y no hay ningún eje $a \longrightarrow a$ en $E_{\mathcal{X}}$.

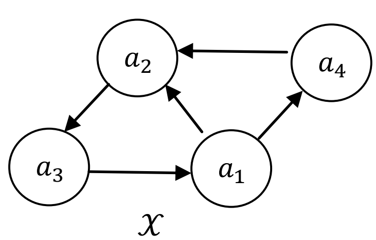
Definición 3.1.14. Sea $\mathcal{X}$ un dígrafo con un conjunto de vértices $V_{\mathcal{X}}$ de cardinalidad $|V_{\mathcal{X}}| = n$ y $V_{\mathcal{X}} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ una enumeración de los elementos de V_G. La matriz $A \in M(n \times n; \mathbb{N}_0)$ cuyas entradas son definidas como

$$A_{ij} = \begin{cases} el\ número\ de\ ejes\ de\ a_i\ hacia\ a_j\ si\ a_i \neq a_j \\ \quad el\ número\ de\ bucles\ en\ \ a_j\ si\ a_i = a_j \end{cases}$$

para $i, j = 1,2, \dots, n$ es llamado la matriz de adyacencia de $\mathcal{X}$ con la numeración a.

Por otra parte, sea $\mathcal{X}_f$ el grafo de dependencia de f y $V_f = \{a_1, \dots, a_n\}$ la numeración asociada de los elementos de V_f. Entonces según la definición del grafo de dependencia, $A \in M(n \times n, \mathbb{N}_0)$ es precisamente la matriz de adyacencia de $\mathcal{X}_f$ con la numeración en a.

Ejemplo 3.1.15. La matriz de adyacencia del grafo de dependencia en la figura 3.4 utilizando el orden de los vértices a_1, a_2, a_3, a_4 viene representado por $A_{\mathcal{X}}$.



$$A_{\mathcal{X}} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

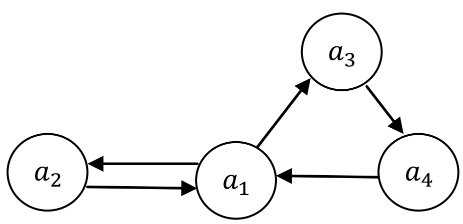
Figura 3.5: Grafo de dependencia y su matriz de adyacencia correspondiente.

El siguiente resultado es un clásico en la teoría de grafos (ver 15).

Teorema 3.1.16. Sea $\mathcal{X}$ un dígrafo con un conjunto de vértices $V_{\mathcal{X}}$ y de cardinalidad $|V_{\mathcal{X}}| = n$ y $V_{\mathcal{X}} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ una enumeración de los elementos de $V_{\mathcal{X}}$. Además sea A su matriz de adyacencia (con la numeración de a), m un número natural y $B = A^m$ la potencia m-ésima de A. Entonces $\forall i, j \in \{1,2, \dots, n\}$ la entrada B_{ij} de B es igual al número de diferentes secuencias $a_i \rightsquigarrow_m a_j$ de longitud m.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar el teorema.

Ejemplo 3.1.17. Consideremos el grafo de dependencia con su correspondiente matriz de adyacencia y orden de los vértices a_1, a_2, a_3, a_4.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.6: Grafo de dependencia $C_2 \vee C_3$ y su matriz de adyacencia.

Observe que las diferentes potencias de la matriz de adyacencia, según el teorema en el resultado de dichas potencias las entradas $[A^k]_{ij}$ nos indica el número de secuencias existentes del vértice a_i hacia a_j de longitud k.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}2&2&2&1\\2&1&1&1\\1&1&1&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}$$

En particular analizamos algunas de las entradas de la matriz potencia A^6, sean $[A^6]_{21}$ y $[A^6]_{33}$.

Para $[A^6]_{21} = 2$, entonces las secuencias son:

$$a_2 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_4 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_1$$

$$a_2 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_4 \longrightarrow a_1$$

Para $[A^6]_{33} = 1$, se tiene la siguiente secuencia:

$$a_3 \longrightarrow a_4 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_4 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_3$$

La matriz de adyacencia de un grafo de dependencia, posee toda la información para reconstruir el grafo veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.18. Consideremos la matriz de adyacencia de cierto dígrafo.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

Construimos el dígrafo de la matriz de adyacencia cogiendo el orden de los vértices 1,2,3,4,5, de donde se obtiene:

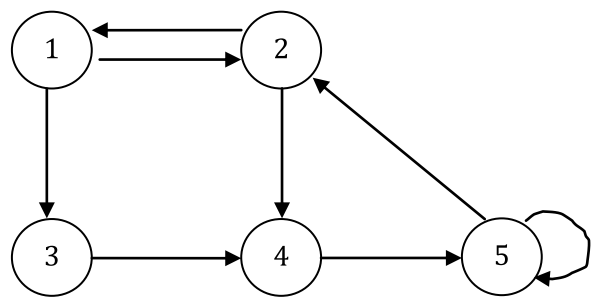


Figura 3.7: grafo de dependencia obtenida de su matriz de adyacencia.

Nota 3.1.19. Dos grafos dirigidos con la misma matriz de adyacencia, son isomorfos. Dos grafos dirigidos pueden tener distintas matrices de adyacencia si se permutan el orden de los vértices.

Consideremos el dígrafo del ejemplo anterior, determinaremos que las matrices de adyacencia con diferentes órdenes de los vértices nos representan la misma matriz si se permutamos el orden de los vértices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene orden en los vértices 1,2,3,4,5, mientras que la matriz B tiene orden en los vértices 3,2,1,5,4.

Para mayor claridad no importa el orden de los vértices para determinar la matriz de adyacencia, sin embargo existe una relación importante entre estas dos matrices. La lista de los vértices 3,2,1,5,4 es una permutación de la lista inicial 1,2,3,4,5. Además, la permutación 3,2,1,5,4, puede describirse diciendo que el 3 pasa a la posición 1, 2 pasa a la posición 2, 1 pasa a la posición 3, 5 a la posición 4 y finalmente 4 pasa a la posición 5. Esto podemos escribir como:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

De hecho, si nosotros primero permutamos las filas de la matriz A de acuerdo a esta permutación, y segundo permutamos las columnas de la matriz resultante de acuerdo a esta misma permutación, entonces obtenemos la matriz B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3,2,1,5,4]{\substack{permutar \\ filas}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3,2,1,5,4]{\substack{permutar \\ columnas}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Observación. Diferentes ordenamientos de los vértices pueden dar distintas matrices de adyacencia, sin embargo, cualquiera de las dos se diferencian solo por una permutación fija aplicada tanto a las filas y a las columnas ($PAP^T = B$).

Una observación es de rigor. Si m & n son co primos entonces el sistema dinámico f con grafo de dependencia la cuña de un n-ágono y un m-ágono es uno de punto fijo. Por lo tanto sus únicos puntos fijos son (0,0,…,0) y (1,1,….,1). Esto quiere decir que existe un valor r, tal que $f^r(v) = (0, \dots, 0)$ para toda $v \neq (1,1, \dots, 1)$. Esto ocurre solamente si para cada f_i^r, donde $f = (f_1, \dots, f_{n+m-1})$ es un monomio en las variables $x_1, x_2, \dots, x_{n+m-1}$.

Pero por resultado 2.1.10 esto equivale a que todo vértice en el grafo de dependencia esta unido por un camino de largo r. Por teorema 3.1.15, si hallamos la mínima potencia r' de la matriz de adyacencia de f tal que todas las entradas son distintas de cero entonces r' es el tiempo de transición de f. Debido a que no pudimos demostrar que la matriz de adyacencia tiene entradas todas distintas de cero a la potencia mínima $(n+1)(m-1)$, tuvimos que recurrir a la teoría de ecuaciones diofantinas para probar nuestra conjetura.

3.2. Tiempo de Transición de un Sistema Dinámico Finito de Punto Fijo definido por la Cuña.

En esta sección se establecerán las condiciones necesarias y suficientes para determinar el tiempo de transición de un SDF generado por la operación cuña de C_n un n-ágono y C_m un m-ágono el cual nos defina un sistemas de punto fijo. El corolario 2.4.11 nos garantiza, para que ello ocurra se debe de cumplir que $gcd(n,m) = 1$, esto quiere decir que n y m deben ser co-primos.

Ecuaciones Diofantinas 3.2.1

Una ecuación diofántica es cualquier ecuación algebraica, generalmente de varias variables, planteada sobre los números enteros o sobre los números naturales ℕ, es decir, se trata de ecuaciones cuyas soluciones son números enteros.

Ejemplo 3.2.2 La ecuación $x + y = 5$ es un ejemplo de ecuación diofántica. Esta ecuación tiene infinitas soluciones sobre los números reales. Como regla general, sin embargo, las ecuaciones que aparecen en los problemas tienen restricciones que nos ayudan a limitar a un pequeño número de casos e incluso a una única solución.
Si en nuestra ecuación restringimos los posibles valores de x e y a los enteros positivos, tenemos 4 posibles soluciones los cuales son: $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$ y $(4,1)$.

Una ecuación diofántica lineal $ax + by = c$ o identidad de Bézout tiene solución si, y sólo si $d = \text{gcd}\,(a, b)$ (máximo común divisor de a y b) es un divisor de c. Para encontrar una solución particular se hizo uso de la identidad de Bézout y el algoritmo de Euclides, para mas detalles ver [10,14].

Un problema muy interesante ligado a la ecuación diofántica se presenta en encontrar el número de Frobenius.

El siguiente teorema trata del "Problema de Diofántico Frobenius" considerando números enteros positivos primos relativos $a_1, a_2, \dots, a_s$ encontrar el número natural más grande (llamado el número de frobenius y denotado por $g(a_1, a_2, \dots, a_s)$) que no es representable como una combinación lineal de estos números $a_1, a_2, \dots, a_s$. Es decir como una suma;

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_sk_s$$

donde $k_1, k_2, \dots, k_s$ son números enteros no negativos.

Por ejemplo, la cantidad más grande que no puede ser obtenida usando sólo las monedas de 3 y 5 unidades es 7 unidades. La solución a este problema para un determinado conjunto de denominaciones de monedas se llama el número de Frobenius de la serie.

En particular nos interesa el caso cuando $s = 2$.

Teorema 3.2.3 (número de frobenius para $s = 2$)
Sean n y m enteros no negativos primos entre sí. Entonces

$$g(n, m) = nm - n - m.$$

Demostración.
Sea $T = n\mathbb{N} + m\mathbb{N} = \{nx + my/x, y \in \mathbb{N}\}$.
Supongamos que $nm - n - m = nr_1 + mr_2$, con $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$.
Asi;

$$nm - n - nr_1 = mr_2 + m$$

$$n(m - r_1 - 1) = m(r_2 + 1)$$

y puesto que $gcd(n,m) = 1$, entonces $m|(m - r_1 - 1)$ así $m - r_1 - 1 = sm \geq m$ lo cual es imposible. Por lo tanto $nm - n - m \notin T$. Ahora, sea

$$c = nm - n - m \qquad (1)$$

podemos demostrar que $c + i \in T$ para cualquier entero $i \geq 1$. Por el teorema de Bérzout, siempre existen enteros positivos r_1 y r_2, $0 \leq r_1 < m$ tal que $nr_1 + mr_2 = 1$ y así:

$$nir_1 + mir_2 = i \qquad (2)$$

luego sumando (1) y (2) obtenemos: $c + i = nm - n - m + nir_1 + mir_2$

$$c + i = (m - 1 - ir_1)n + (ir_2 - 1)m \qquad (3)$$

podemos escribir este último resultado como $c + i = v_1 n + v_2 m$ con $0 \leq v_2 < n$.

Ahora, desde que:

$$-i = c - v_1 n - v_2 m$$
$$-i = nm - n - m - v_1 n - v_2 m$$
$$-i = (-1 - v_1)n + (n - 1 - v_2)m$$

no pertenece a T y como $n - 1 - v_2 \geq 0$ entonces debemos tener $-1 - v_2 < 0$ implicando que $v_2 > -1$, entonces, $v_2 \geq 0$. Así $c + i \in T$. ■

Ejemplo 3.2.4. Consideremos la cuña entre C_3 3-ágono y C_5 5-ágono con su correspondiente matriz adyacente que se muestra en la figura 3.7

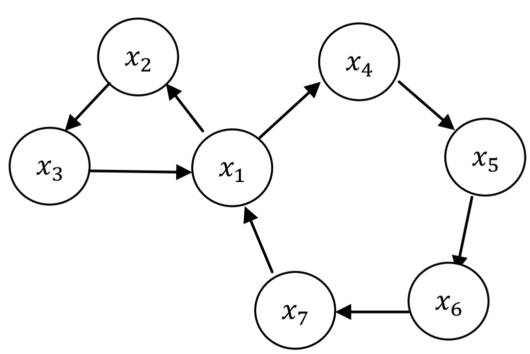


Figura 3.8: Cuña $C_3 \vee C_5$

Para la construcción de la matriz adyacente tomamos el siguiente orden entre sus vértices, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde A representa la matriz de adyacencia del grafo de dependencia de la cuña $C_3 \vee C_5$, luego determinamos algunas potencias de la matriz y observamos sus entradas.

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{16} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver la matriz de mínima potencia el cual tiene todas las entradas diferentes de cero es A^{16} , este hecho por los teoremas mencionados nos garantiza que existen caminos entre sus vértices de longitud 16.

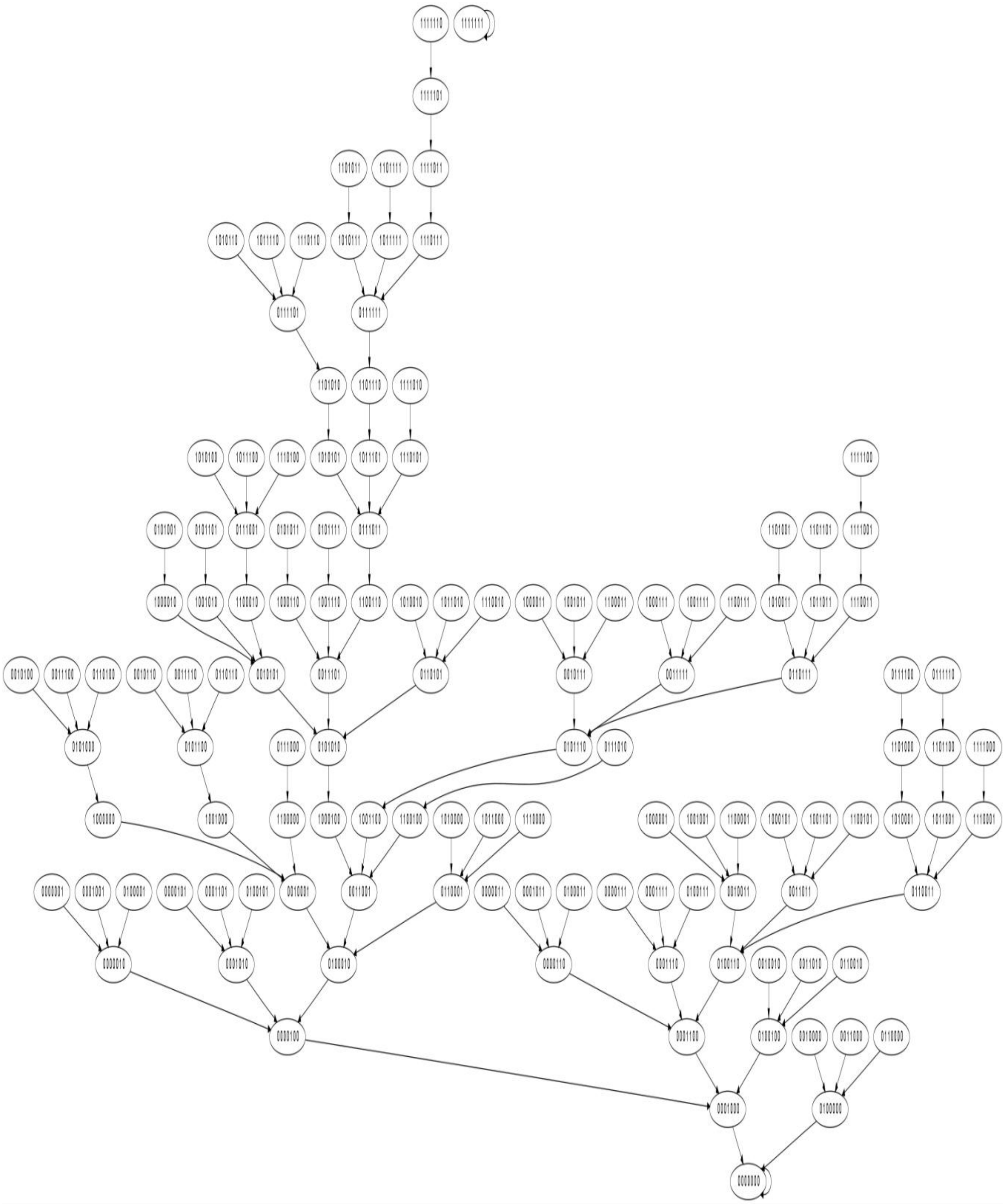


Figura 3.9: Espacio fase de la cuña entre C_3 3-ágono y C_5 5-ágono.

Note por lo mencionado antes que si nuestra conjetura de que $(n+1)(m-1)$ es el tiempo de transición de estos sistemas, entonces todo par de vértices en el grafo de dependencia está conectado con un camino de largo 16. Como todo camino es de la forma $2+3x+5y+4$ queda ver si puedo escribir 10 como $3x+5y$. El siguiente teorema, nos garantiza que esto es posible. Con la ayuda del número de frobenius demostramos nuestro resultado más importante.

Teorema 3.2.5(+). Sean n y m enteros positivos co-primos, con $m > n$ y f un sistema dinámico monomial discreto sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $n+m-1$, tal que el grafo de dependencia de f es la cuña entre C_n n-ágono y C_m m-ágono. Entonces el tiempo de transición de f es $(n+1)(m-1)$.

Demostración. Consideremos la cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono el cual está representado en la Figura 3.9.

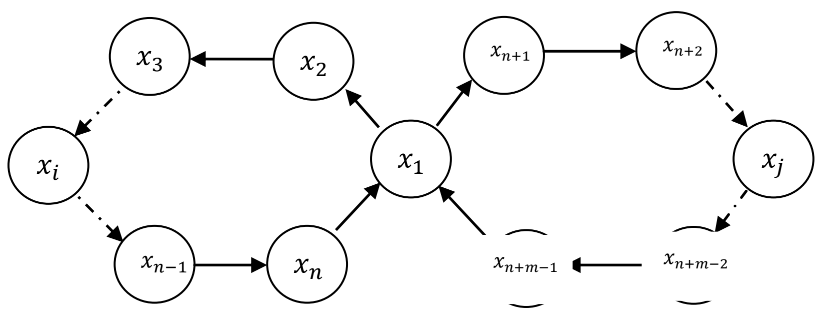


Figura 3.10: Cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono $(C_n \vee C_m)$.

Si n y m son coprimos, entonces f es un sistema de punto fijo, ver [2]. Debemos demostrar que para todo vector $v \neq (1,1,\dots,1)$ en $\mathbb{F}_2^{n+m-1}$, $(m-1)(n+1)$ es el entero más pequeño tal que:

$$f^{(m-1)(n+1)}(v) = (0,0,\dots,0).$$

Ahora, note que $f^{(m-1)(n+1)}(v) = (0,0,\dots,0)$ solamente si $f_i^{(m-1)(n+1)}$ es dividido por el monomio $x_1x_2 \dots x_{n+m-1}$ para toda $i \in \{1,2,\dots,n+m-1\}$. Esto equivale, por un resultado en [2], a que tenemos que demostrar que para cualquiera dos vértices a y b en el grafo de dependencia de f, éstos pueden ser unidos por un camino de largo $(m-1)(n+1)$.

Sea t el largo de un camino, para el cuál cualquiera 2 vértices en el grafo de dependencia de f pueden ser conectados. Entonces;

$$t = nx + my + j; \qquad 0 \leq j \leq 2m - 2 \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Note:

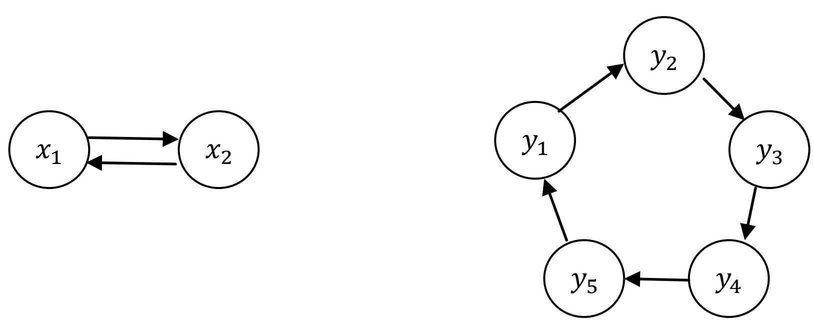
$$\Rightarrow t - j = nx + my$$
$$\Rightarrow t - j > nm - m - n \text{ (por Frobenius)}$$
$$\Rightarrow t - j \geq nm - m - n + 1$$
$$\Rightarrow t - (2m - 2) \geq nm - m - n + 1$$
$$\Rightarrow t \geq nm + m - n - 1$$
$$\Rightarrow t \geq (n + 1)(m - 1)$$

Por tanto por minimalidad,

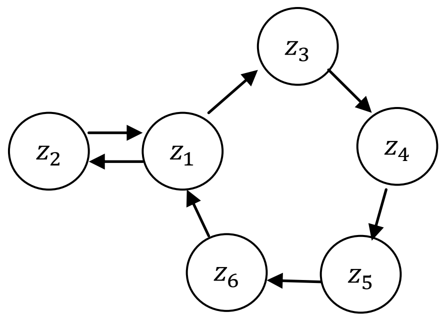
$$t = (n + 1)(m - 1) \blacksquare$$

Con este teorema hemos garantizado que el tiempo de transición de un SDF definido por la cuña de dos cualesquiera ágonos con las condiciones establecidas viene a ser $(n + 1)(m - 1)$ donde n representa el número de vértices de C_n y m representa el número de vértices de C_m.

Ejemplo 3.2.6. Consideremos C_2 un 2-ágono para el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^2, f)$ donde $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ y el C_5 un 5-ágono para el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^5, g)$ donde $g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (y_2, y_3, y_4, y_5, y_1)$. Entonces la cuña de estos $C_2 \vee C_5$ define el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^6, h)$ donde $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (z_2 z_3, z_1, z_4, z_5, z_6, z_1)$ los cuales vienen representados en las figuras 3.10 (a), (b) y (c).



(a) C_2 un 2-ágono (b) C_5 un 5-ágono



(c) cuña $C_2 \vee C_5$

Figura 3.11: Cuña entre C_2 un 2-ágono y C_5 un 5-ágono.

Por un resultado en [2,5], la cuña entre C_2 un 2-ágono y C_5 un 5-ágono define que el sistema $(\mathbb{F}_2^6, h)$ es de punto fijo y por los teoremas 3.2.5 y 3.2.6 el sistema tiene tiempo de transición $(n+1)(m-1) = (2+1)(5-1) = 12$, el cual podemos observar en el espacio de estados que se muestra en la figura 3.10. Es de recordar que el tiempo de transición de un sistema es el máximo de los tiempos de transición de los estados el espacio de estados.

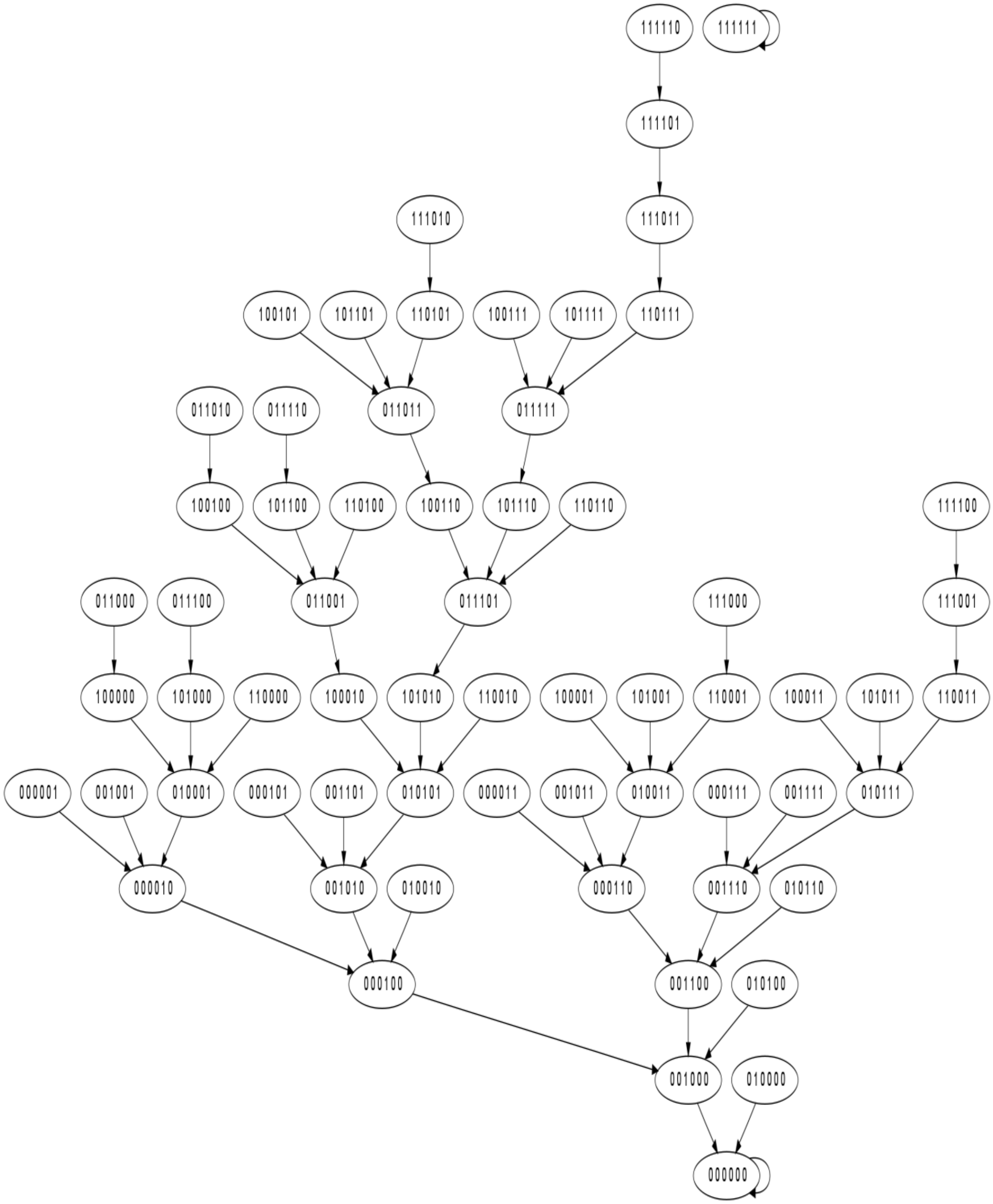
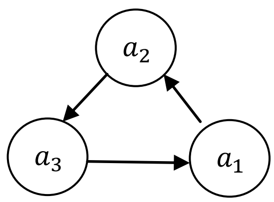
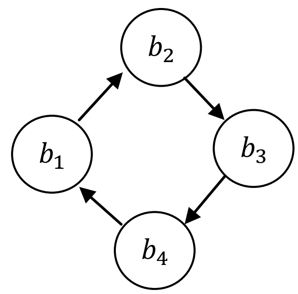


Figura 3.12: estado fase del sistema $(\mathbb{F}_2^6, f)$ donde $f \coloneqq (z_2 z_3, z_1, z_4, z_5, z_6, z_1)$.

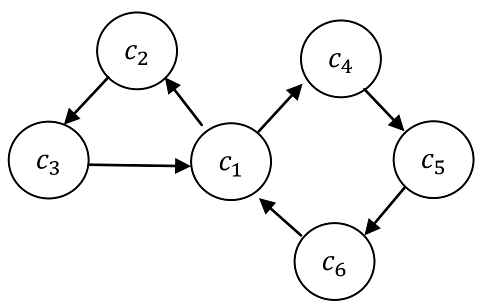
Ejemplo 3.2.7. Consideremos, C_3 un 3- ágono y C_4 un 4-ágono los cuales vienen representados en la figura 3.13 (a) y (b). $C_3 \vee C_4$ representa la cuña y es ilustrado en la figura 3.13 (c) donde el sistema $(\mathbb{F}_2^6, f)$ es definido $f := (x_2x_4, x_3, x_1, x_5, x_6, x_1): \mathbb{F}_2^6 \longrightarrow \mathbb{F}_2^6$. Donde aplicando el corolario 2.4.11 tenemos que $(\mathbb{F}_2^6, f)$ es un sistema de punto fijo.



(a) C_3 3- ágono



(b) C_4 4- ágono



(c) $C_3 \vee C_4$ (cuña entre C_3 y C_4).

Figura 3.13: cuña entre C_3 un 3- ágono y C_4 un 4- ágono.

Por el teorema 3.2.5 el sistema tiene tiempo de transición igual a 12, sin embargo esta largo guarda una relación entre los vértices del grafo de dependencia de la cuña entre C_3 un 3-ágono y C_4 un 4- ágono.

Esto es; $12 = (3+1)(4-1) = 3(x) + 4(y) + j$ para $0 \leq j \leq 2(4) - 2$. En la tabla presentamos la relación de los caminos de un cierto vértice con los demás y por resultados en [2] deducimos que;

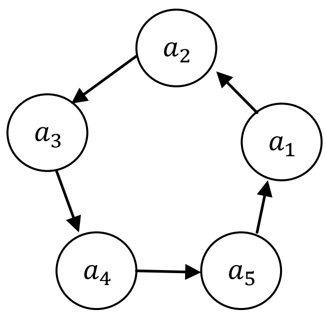
$$f^{12}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\prod_{i=1}^{6} x_i \, , \prod_{i=1}^{6} x_i \, , \prod_{i=1}^{6} x_i \, , \prod_{i=1}^{6} x_i \, , \prod_{i=1}^{6} x_i \, , \prod_{i=1}^{6} x_i \right)$$

$\boldsymbol{x_i \dashrightarrow x_k}$	$\boldsymbol{12 = 3(x) + 4(y) + j}$	$\boldsymbol{x_i \dashrightarrow x_k}$	$\boldsymbol{12 = 3(x) + 4(y) + j}$
$1 \dashrightarrow 1$	$12 = 3(4) + 4(0) + 0$	$2 \dashrightarrow 1$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$
$1 \dashrightarrow 2$	$12 = 3(1) + 4(2) + 1$	$2 \dashrightarrow 2$	$12 = 3(0) + 4(3) + 0$
$1 \dashrightarrow 3$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$	$2 \dashrightarrow 3$	$12 = 3(1) + 4(2) + 1$
$1 \dashrightarrow 4$	$12 = 3(1) + 4(2) + 1$	$2 \dashrightarrow 4$	$12 = 3(3) + 4(0) + 3$
$1 \dashrightarrow 5$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$	$2 \dashrightarrow 5$	$12 = 3(0) + 4(2) + 4$
$1 \dashrightarrow 6$	$12 = 3(3) + 4(0) + 3$	$2 \dashrightarrow 6$	$12 = 3(1) + 4(1) + 5$
$3 \dashrightarrow 1$	$12 = 3(1) + 4(2) + 1$	$4 \dashrightarrow 1$	$12 = 3(3) + 4(0) + 1$
$3 \dashrightarrow 2$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$	$4 \dashrightarrow 2$	$12 = 3(0) + 4(2) + 4$
$3 \dashrightarrow 3$	$12 = 3(3) + 4(0) + 0$	$4 \dashrightarrow 3$	$12 = 3(1) + 4(1) + 5$
$3 \dashrightarrow 4$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$	$4 \dashrightarrow 4$	$12 = 3(0) + 4(3) + 0$
$3 \dashrightarrow 5$	$12 = 3(3) + 4(0) + 3$	$4 \dashrightarrow 5$	$12 = 3(1) + 4(2) + 1$
$3 \dashrightarrow 6$	$12 = 3(0) + 4(2) + 4$	$4 \dashrightarrow 6$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$
$5 \dashrightarrow 1$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$	$6 \dashrightarrow 1$	$12 = 3(1) + 4(2) + 1$
$5 \dashrightarrow 2$	$12 = 3(3) + 4(0) + 3$	$6 \dashrightarrow 2$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$
$5 \dashrightarrow 3$	$12 = 3(0) + 4(2) + 4$	$6 \dashrightarrow 3$	$12 = 3(3) + 4(0) + 3$
$5 \dashrightarrow 4$	$12 = 3(3) + 4(0) + 3$	$6 \dashrightarrow 4$	$12 = 3(2) + 4(1) + 2$
$5 \dashrightarrow 5$	$12 = 3(0) + 4(3) + 0$	$6 \dashrightarrow 5$	$12 = 3(3) + 4(0) + 3$
$5 \dashrightarrow 6$	$12 = 3(1) + 4(2) + 1$	$6 \dashrightarrow 6$	$12 = 3(0) + 4(3) + 0$

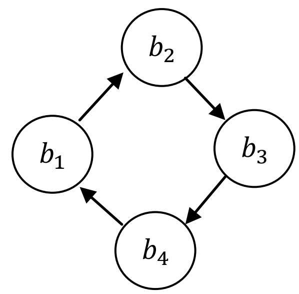
El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema 3.2.5.

Corolario 3.2.8. Sean n y m enteros positivos co-primos, f un sistema dinámico monomial discreto sobre $\mathbb{F}_2$ inducido por la cuña entre C_n un n- ágono y C_m un m- ágono. Entonces el tiempo de transición de f es $nm + |n - m| - 1$.

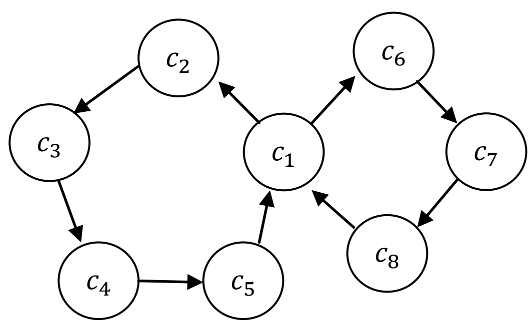
Ejemplo 3.2.9. Consideremos, C_5 un 5- ágono y C_4 un 4-ágono los cuales vienen representados en la figura 3.14 (a), (b) y la cuña $C_5 \vee C_4$ es ilustrado en la figura 3.14 (c)



(a) C_5 5- ágono



(b) C_4 4- ágono



(c) $C_5 \vee C_4$ (cuña entre C_5 y C_4).

Figura 3.14: cuña entre C_5 un 5- ágono y C_4 un 4- ágono.

El sistema $(\mathbb{F}_2^8, f)$ inducido por la cuña $C_5 \vee C_4$ viene definido por $f := (x_2x_6, x_3, x_4, x_5, x_1, x_7, x_8, x_1): \mathbb{F}_2^8 \longrightarrow \mathbb{F}_2^8$. Por el corolario 3.2.8. el tiempo de transición del sistema es 20.

Capítulo **4**

Discusión de resultados

4.1. Conclusiones

En el presente trabajo con la demostración del teorema 3.2.5 logramos establecer las condiciones para determinar el tiempo de transición de un sistema dinámico generado por la operación cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono.

Consideramos la cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono.

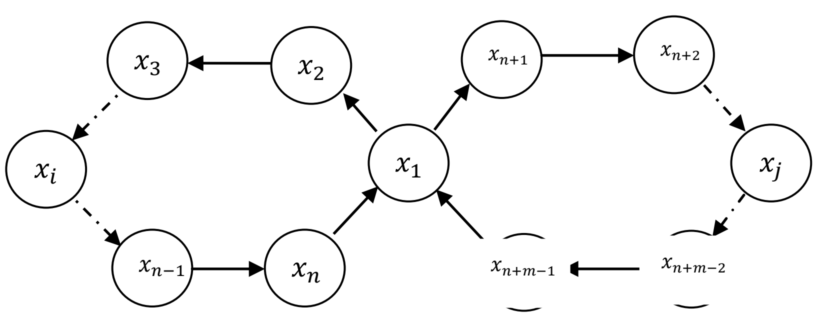


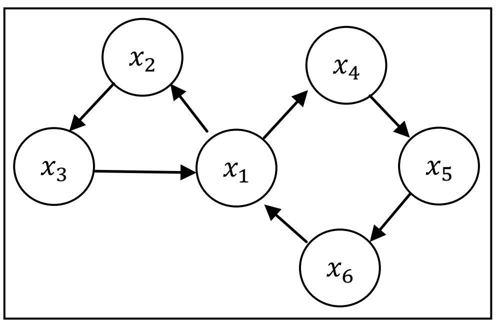
Figura 4.1: cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono.

Por la proposición 2.1.10 y el teorema 3.2.5 deducimos que la $(n+1)(m-1)$-veces composición del sistema definido por la cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono viene expresada como:

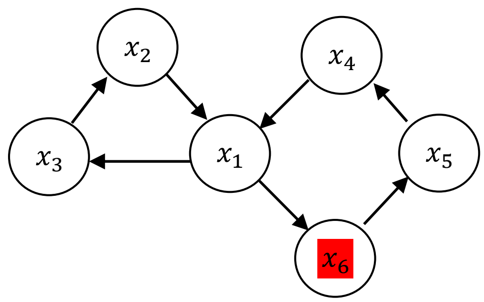
$$f^{(n+1)(m-1)}(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{m+n-1} x_i \,, \dots, \prod_{i=1}^{m+n-1} x_i}_{m+n-1\ ordenadas} \right)$$

Esto nos relaciona la existencia de caminos entre cualesquier par de vértices de largo $(n+1)(m-1)$.

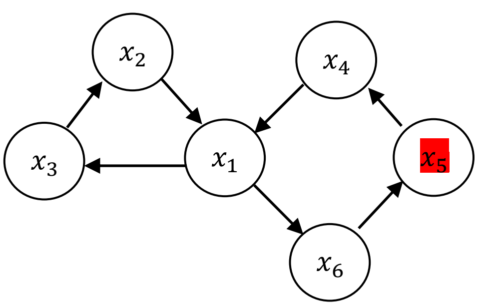
Consideremos el sistema dinámico $(\mathbb{F}_2^6, f)$ definida por la cuña entre C_3 un 3-ágono y C_4 un 4-ágono, donde $f \coloneqq (x_2x_3, x_3, x_1, x_5, x_6, x_1)$. En la figura 4.2 mostramos la iteración del estado que tarda más en llegar a un punto fijo. El espacio de estados se puede ver en el apéndice A.



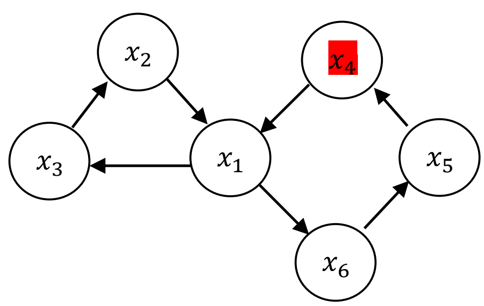
$f \coloneqq (x_2x_3, x_3, x_1, x_5, x_6, x_1)$



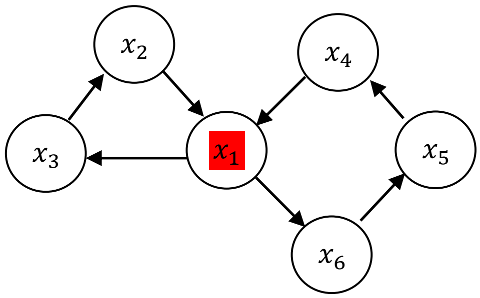
(1,1,1,1,1,0)



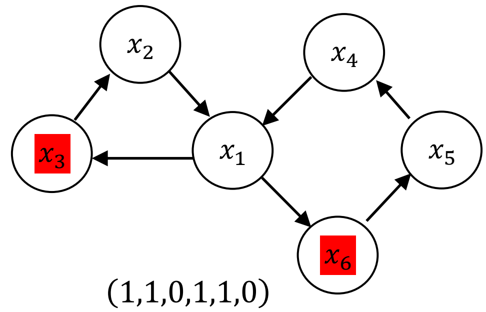
(1,1,1,1,0,1)



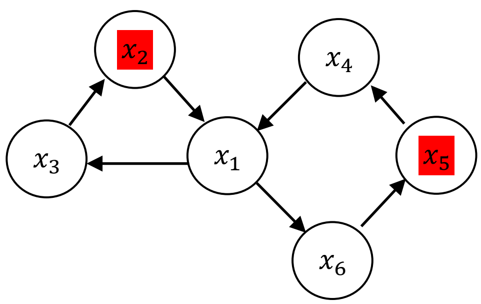
(1,1,1,0,1,1)



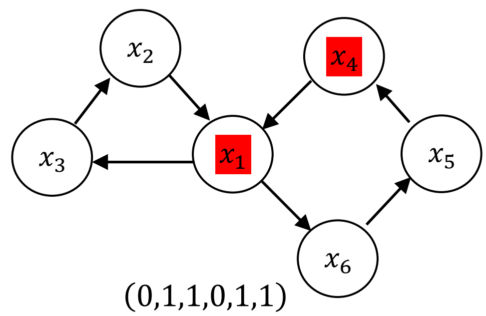
(0,1,1,1,1,1)



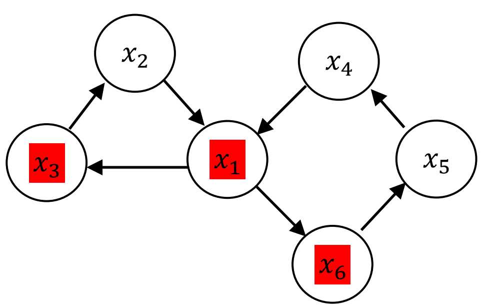
(1,1,0,1,1,0)



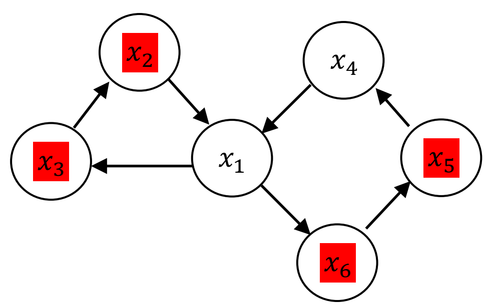
(1,0,1,1,0,1)



(0,1,1,0,1,1)



(0,1,0,1,1,0)



(1,0,0,1,0,0)

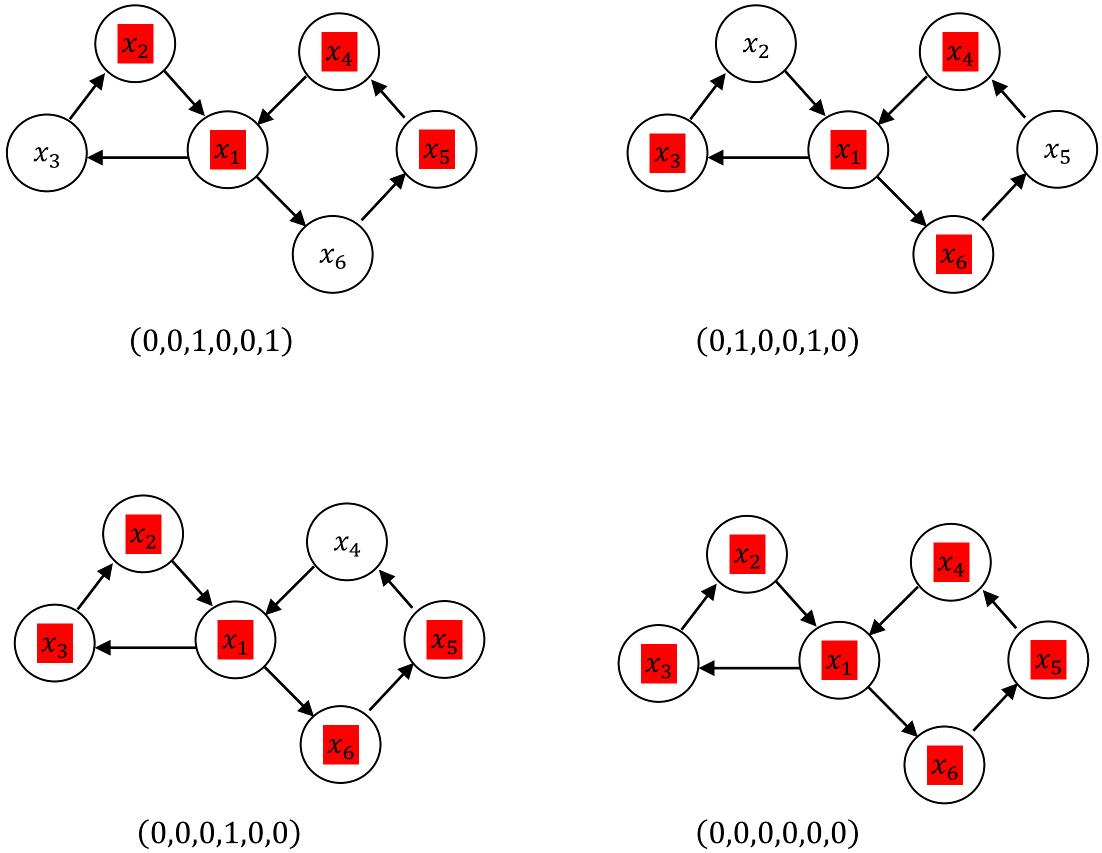


Figura 4.2: Iteración del estado $(1,1,1,1,1,0) \in \mathbb{F}_2^6$.

Además es de observar que las matrices de adyacencia están muy ligadas a la teoría de grafos tal como es el teorema 3.1.16. que nos brinda información de la existencia de secuencias (caminos) entre los vértices en un dígrafo de largo igual a la potencia al cual fue determinada la matriz de adyacencia y no solo eso sino también las entradas del resultado. La matriz potencia nos indica la cantidad de caminos.

De hecho hemos demostrado que hay una relación entre la operación cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono que induce un sistema dinámico bajo la condición de que n y m sean co-primos y su matriz de adyacencia correspondiente el cual nos permite determinar que el sistema es de punto fijo y además nos brinda información sobre el tiempo de transición del sistema.

Corolario 4.1.1. Sean n y m enteros positivos coprimos, con $m > n$ y grafo de dependencia la cuña entre C_n n-ágono y C_m m-ágono. Entonces la matriz adyacencia de mínima potencia que tiene entradas $(i,j) \neq 0$, para todo $i,j \in \{1,2,\dots,n+m-1\}$ es $A^{(n+1)(m-1)}$, donde A es la matriz adyacente al grafo de dependencia.

Ejemplo 4.1.2. Consideremos la cuña entre C_4 4-ágono y C_3 3-ágono

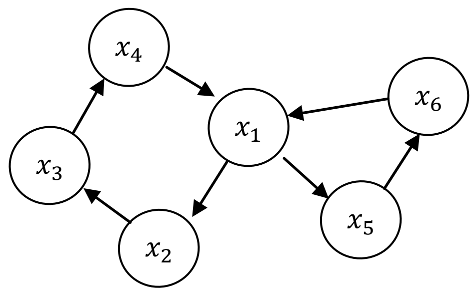


Figura 4.2: cuña entre C_4 4-ágono y C_3 3-ágono.

Este nos define un sistema de punto fijo resultado en [5], por el corolario 3.2.8. este sistema tiene tiempo de transición 12 y su matriz de adyacencia correspondiente definida con el siguiente orden entre los vértices $x_3, x_2, x_5, x_1, x_4, x_6$ viene definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir la matriz de adyacencia multiplicada 12 veces (donde 12 es el tiempo de transición t del sistema) es la mínima potencia en el que todas sus entradas son diferentes de cero.

Más aun si $\mathcal{X}_f = C_{\sigma(1)} \vee C_{\sigma(2)} \vee \ldots \vee C_{\sigma(r)}$ donde el $\gcd\big(\sigma(i), \sigma(j)\big) = 1$, $i \neq j$. Entonces todo camino que une cualquiera 2 vértices con largo t, es tal que

$$t = \sigma(1)\mathbb{N} + \sigma(2)\mathbb{N} + \cdots + \sigma(r)\mathbb{N} + b.$$

$\Rightarrow \quad t - b = \sigma(1)\mathbb{N} + \sigma(2)\mathbb{N} + \cdots + \sigma(r)\mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad t - b \geq \mathcal{F}(r) + 1$, donde $\mathcal{F}(r)$ es el número de frobenius, para el caso r.

Concluimos, entonces que hallar el tiempo de transición para estos sistemas es equivalente a hallar el número de frobenius. Para el caso mayor que 2, el número de frobenius es un problema abierto.

4.2. Trabajo futuro

Nos interesa generalizar nuestros resultados.

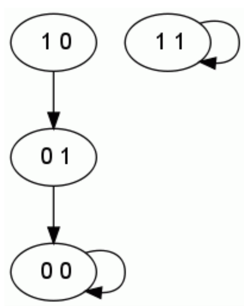
1. Por ejemplo queremos hallar el tiempo de transición de un sistema dinámico discreto cuyo $\mathcal{X}_f$ es la k-cuña de un n-gon y m-gon tal que $\gcd(n, m) = 1$.

2. Construir un algoritmo que nos permita determinar los factores de las componentes de cierta composición del sistema.

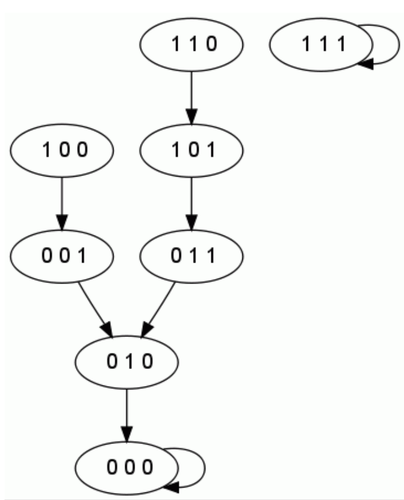
Apéndice

A continuación se muestra algunos espacios de estados generados por la operación cuña entre C_n un n-ágono y C_m un m-ágono para n y m co-primos.

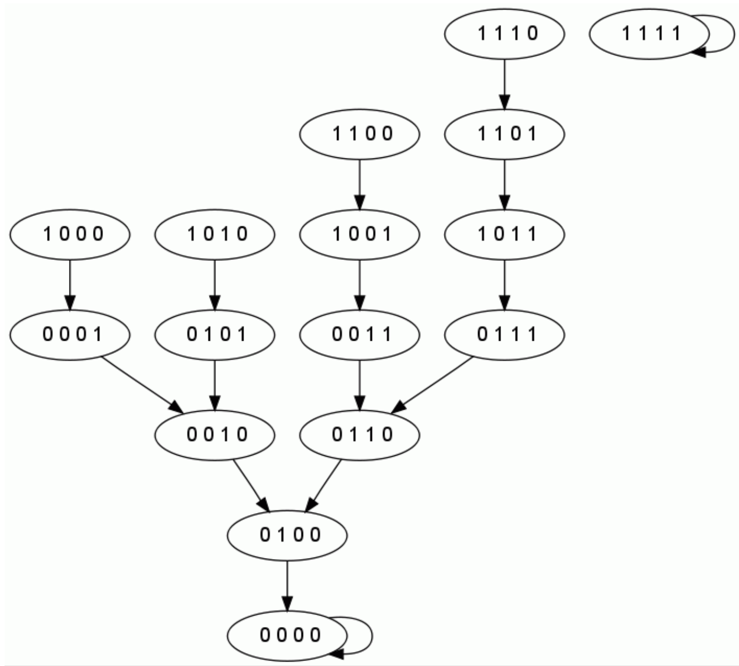
1. $C_1 \vee C_2$



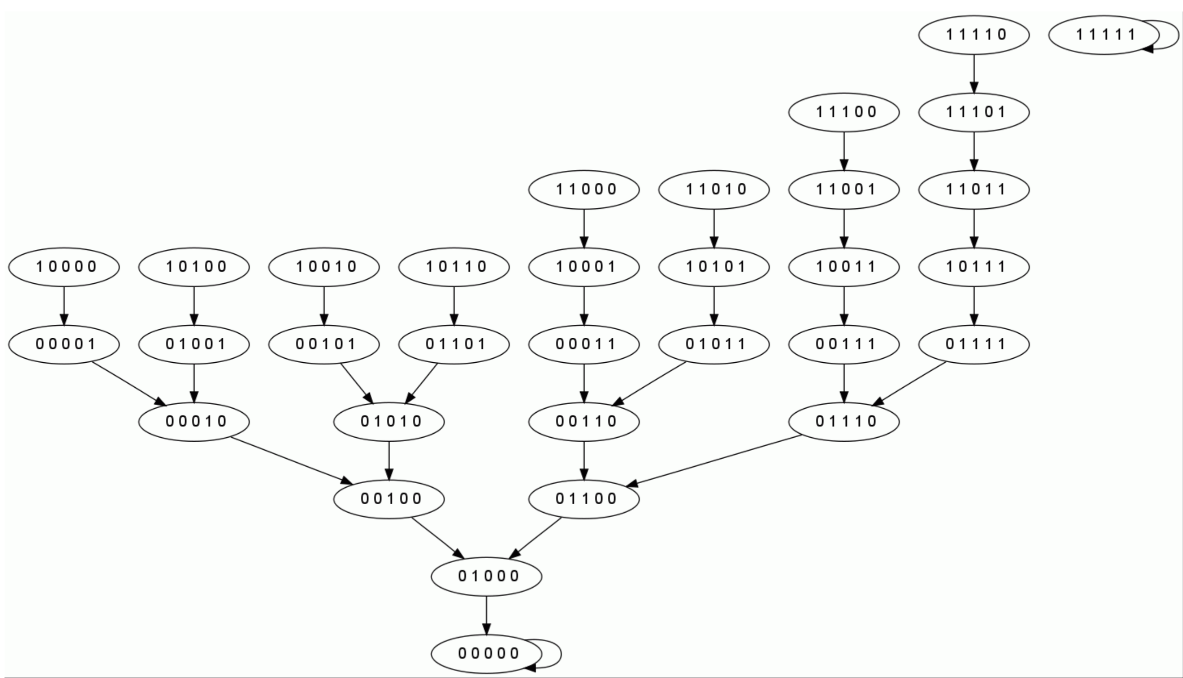
2. $C_1 \vee C_3$



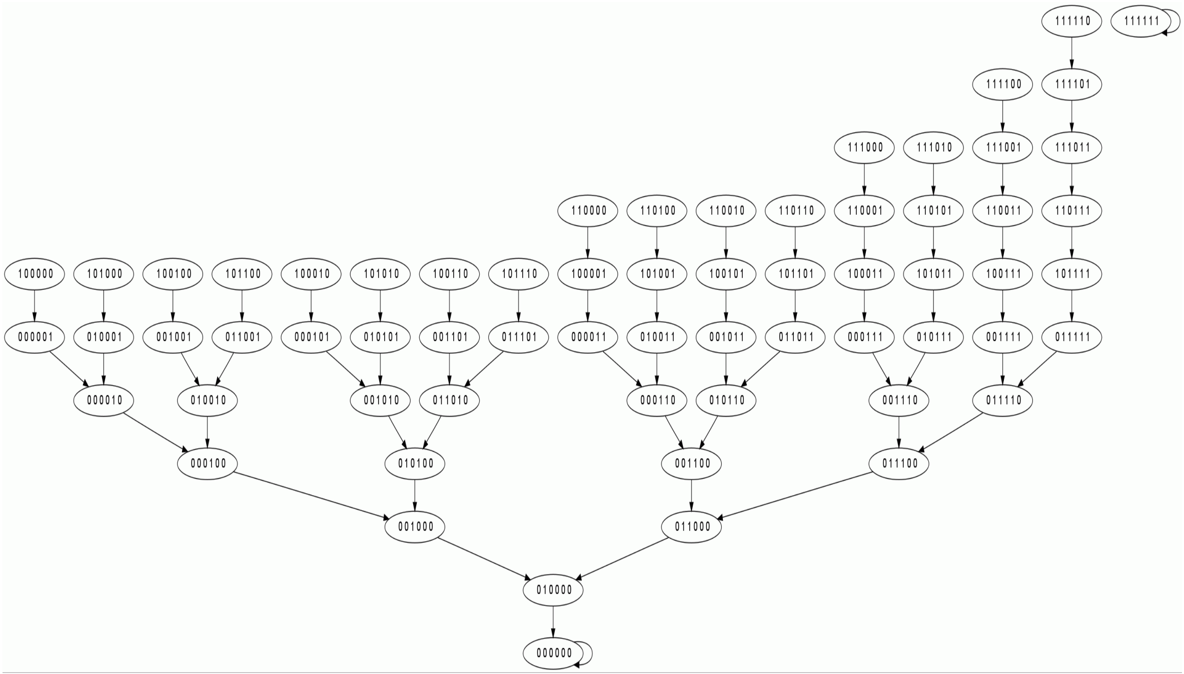
3. $C_1 \vee C_4$



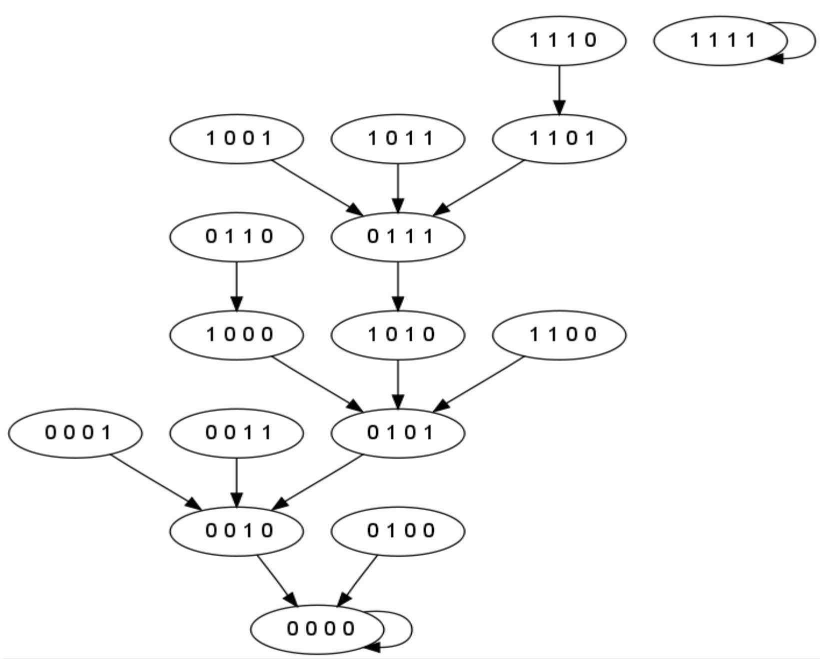
4. $C_1 \vee C_5$



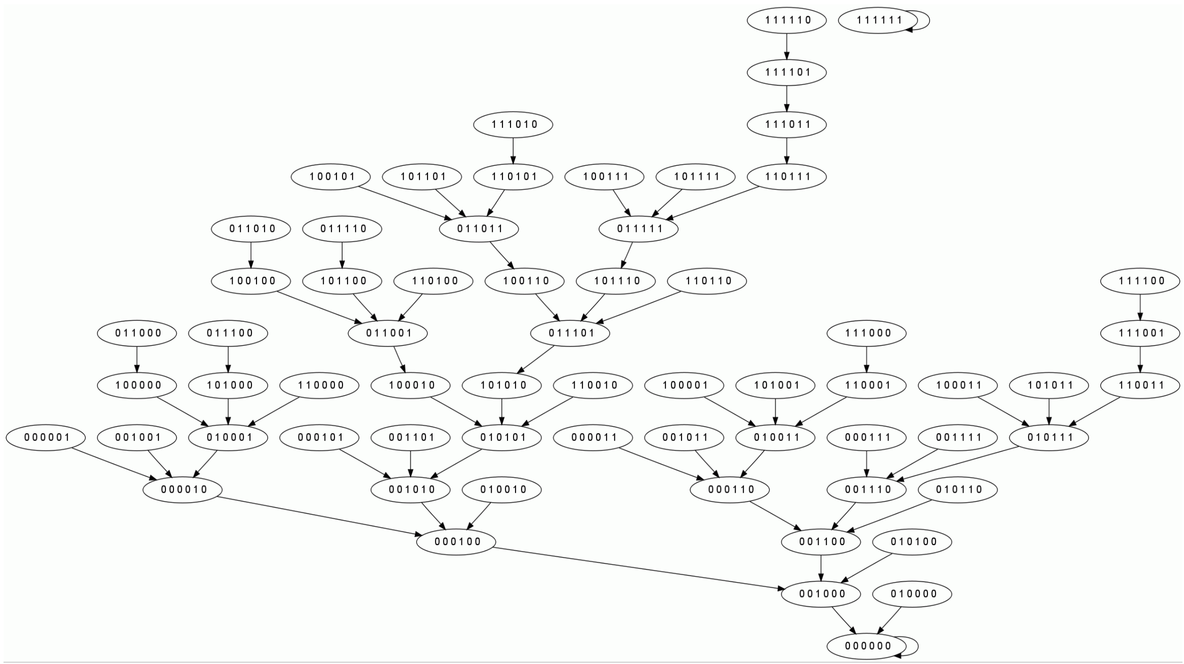
5. $C_1 \vee C_6$



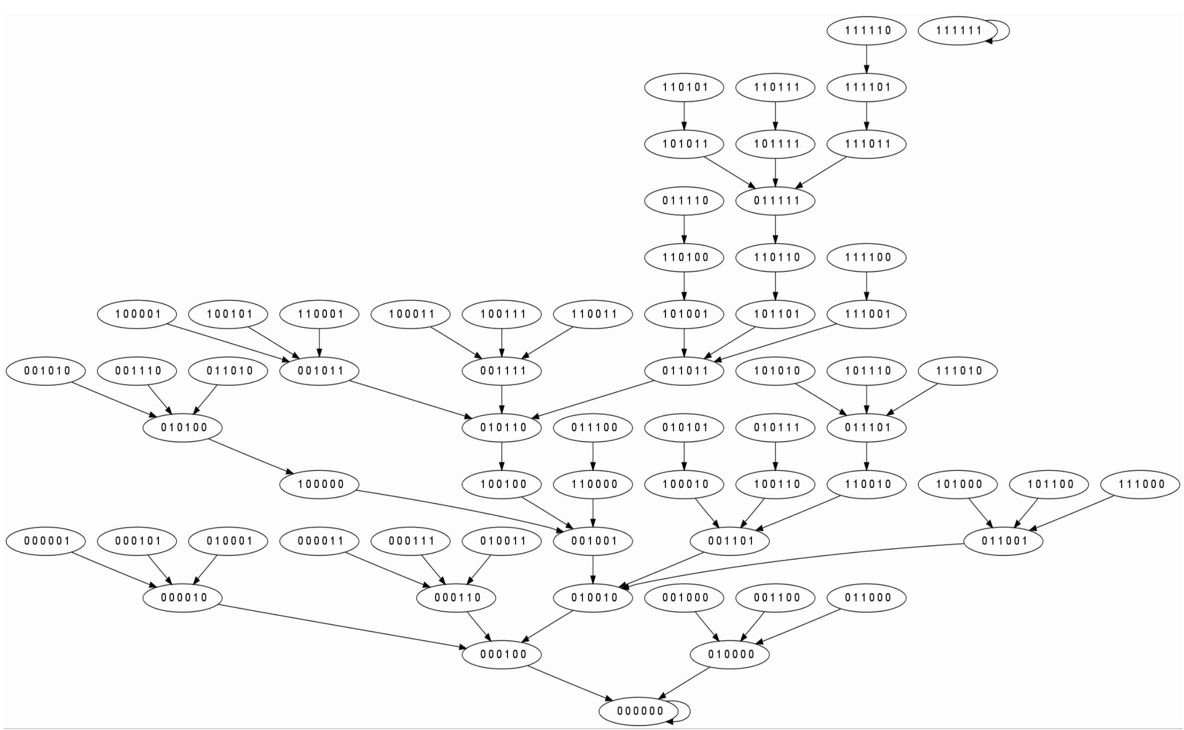
6. $C_2 \vee C_3$



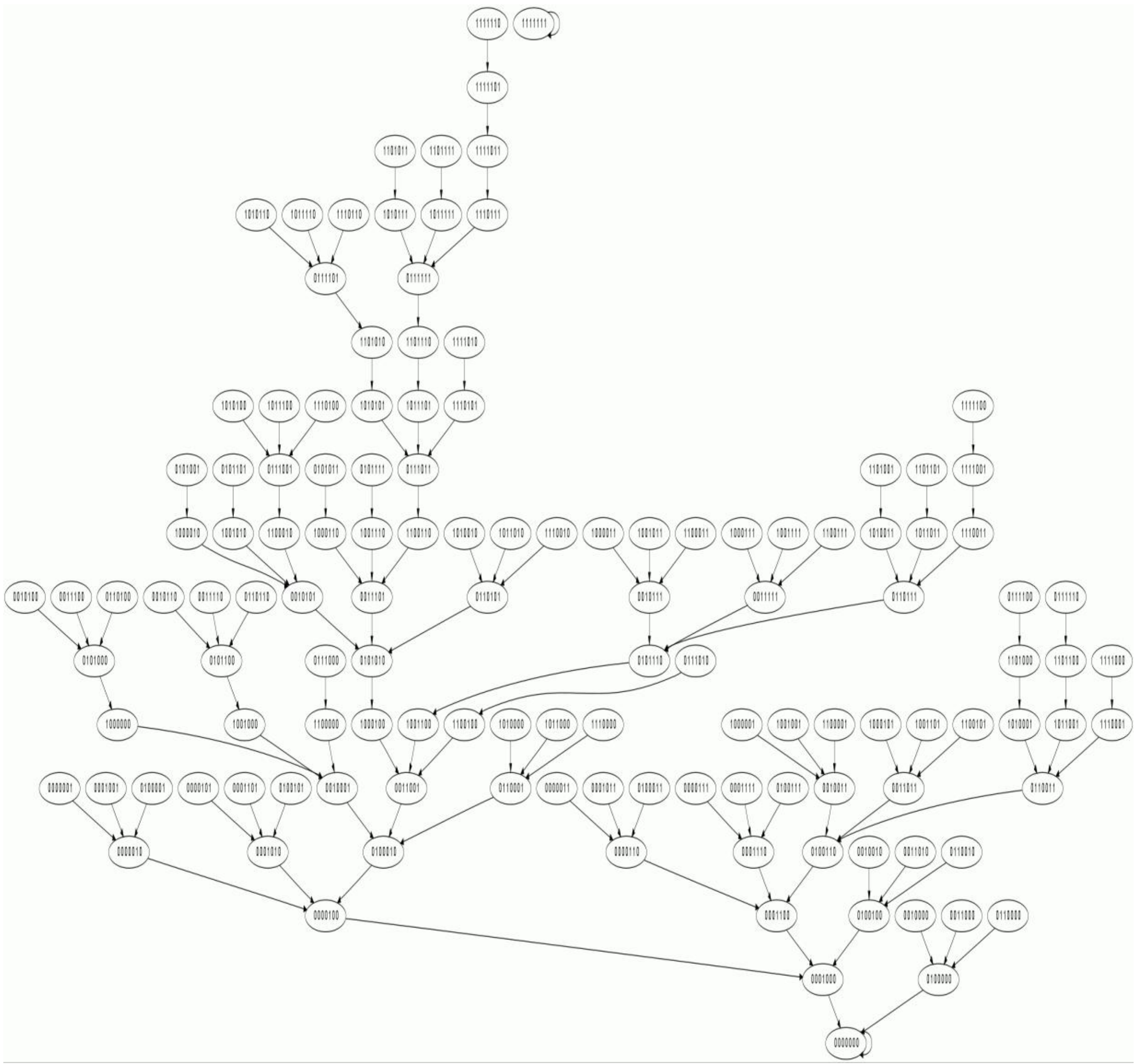
7. $C_2 \vee C_5$



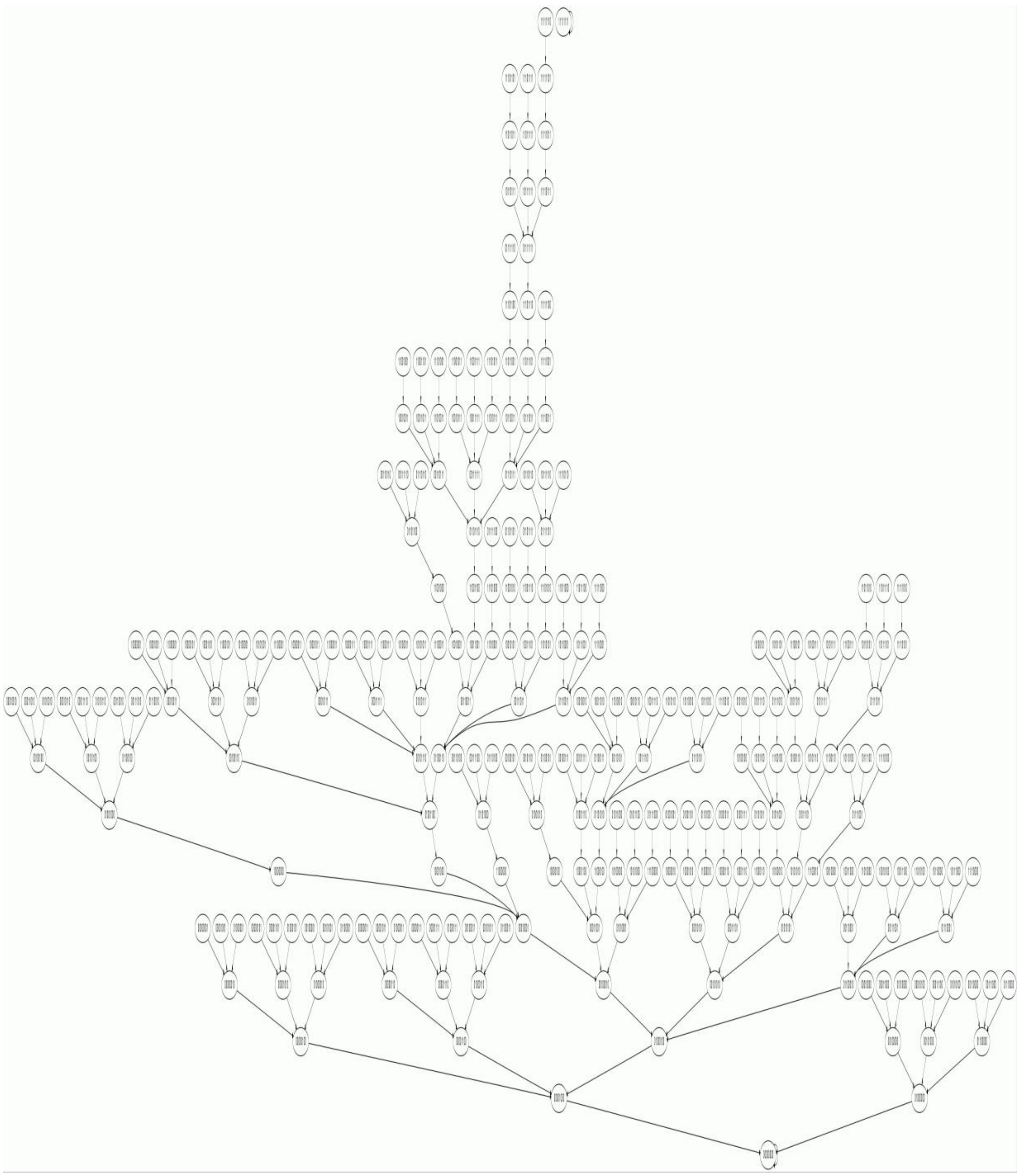
8. $C_3 \vee C_4$



9. $C_3 \vee C_5$



10. $C_4 \vee C_5$



Bibliografía

[1] Bollman Dorothy, Orosco Edusmildo, Colon-Reyes Omar. Fixed Point in Discret Models for Regulatory Genetic Networks, EURASIP Journal on Bioinformatics and Systems Biology, Vol 2007, pp.8, 2007.

[2] O. Colon-Reyes, R. Laubenbacher, B. Pareigis, Boolean Monomial Dynamical Systems, Annals of Combinatorics, Vol. 8, pp. 425-439, 2004.

[3] Elspas, Bernard, The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks, IRE Transactions on the Circuit Theory, CT-6, 1959, 45-60, 5

[4] O. Colon-Reyes, Monomial Dynamical Systems over Finite Fields, Thesis for Doctoral Degree in Pure Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and tate University, Blacksburg, Virginia, 2005.

[5] L. Pérez, Sistemas Dinámicos Booleanos y Operaciones de Puente, Tesis de Maestría en Matemáticas Puras, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, Mayagüez Puerto Rico, 2008.

[6] R. Hernandez, Linear Finite Dynamical Systems, Communications in Algebra, Vol. 33, pp. 2977-2989, 2005.

[7] Lidl, R. and Neiderreiter, H., Finite Fields Encyclopedia of Math and its Applications 20. Cambridge University Press, London, 1997.

[8] D. Bollman, O. Colon, E. Delgado, V. Ocasio y E. Orosco. A Control Theory For Boolean Finite Dinamical Sistems DRAFT 2008.

[9] Colon-Reyes O., Laubenbacher, R., Jarrah, A., Strumfelds, B., Monomial Dynamical Systems over Finite Fields, Complex Systems, 16 (2006), pp.333-342.

[10] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman., An Introduction to the Theory of Numbers,. John Wiley and Sons, Inc., New York,. 1966.

[11] Sylvester, James Joseph (1884) Question 7382. Mathematical Question from the Educational Times 37: 26.

[12] Jonathan Gross, Jay Yellen., Graph Theory and its Applications, The CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications. 1999.

[13] J. L. Ramírez Alfonsín, The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 30, Oxford University Press Inc., New York 2005.

[14] Andrews, George E. Number Theory, Dover Publications, Inc. New York, 1971.

[15] John M. Harris, Jeffry L. Hirst, Michael J. Mossinghoff. Combinatorics and Graph Theory. Springer Science, 2008.