PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE MARCOS FINITOS Y AJUSTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT DE DIMENSIÓN FINITA

Por

Fabian Seoanes Correa

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS PURAS

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2012

Aprobada por:

Arturo Portnoy, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Krzysztof Rozga, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Juan Romero, Ph.D Presidente, Comité Graduado	Fecha
Andrés Calderón, Ph.D Representante de Estudios Graduados	Fecha
Omar Colón, Ph.D Director del Departamento	Fecha

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE MARCOS FINITOS Y AJUSTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT DE DIMENSIÓN FINITA

Por

Fabian Seoanes Correa

2012

Consejero: Juan Romero
Departamento: Ciencias Matemáticas

En el presente trabajo se estudian conceptos de la teoría de marcos en espacios de Hilbert de dimensión finita. Esta teoría tiene sus origen en el trabajo de Duffin y Schaeffer en la década de los años 50 [1]. Se presenta la perspectiva analítica de los marcos finitos, propuesta por Benedetto y Fickus [2]. Mas concretamente se estudian los marcos ajustados de $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{C}^d$, los cuales se caracterizan como los minimizadores del marco potencial. Esto también se puede ver como un problema de distribución de puntos sobre la esfera. Además se estudia el grupo simétrico de un marco, definido por Waldron et al [3]. Este grupo revela la riqueza geométrica de estos sistemas. Se estudia la relación entre ambas teorías y damos la siguiente conjetura: "Todo mínimo del potencial de Coulomb es un marco ajustado normalizado". Presentamos alguna evidencia a favor de la conjetura.

Abstract of Dissertation Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Sciences

GEOMETRIC PROPERTIES OF FINITE TIGHT FRAMES IN FINITE DIMENSIONAL HILBERT SPACES

By

Fabian Seoanes Correa

December 2012

Chair: Juan Romero
Major Department: Mathematical Sciences

In this work we study the concepts of frame theory in finite dimensional Hilbert space, which has its origins in the work of Duffin and Schaeffer in the decade of the 50s [1]. We present an analytical perspective of the finite frames, proposed by Benedetto and Fickus [2]. More specifically, we study the tight frames in $\mathbb{K}^d$, which are characterized as the minimizer of the frame potential. This is a problem of distribution of points on the sphere. Furthermore, we explore the symmetric group of a finite frame, defined by Waldron et al [3]. This group will reveal the geometric richness of these systems. We will study the relationship between the two theories and give the following conjecture: " Every Coulomb potential minimum is a finite normalized tight frame." We present evidence in favor of the conjecture.

Copyright © 2012

por

Fabian Seoanes Correa

A mi madre, se lo debo todo a ella.

A mi hermana y tíos..

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por conducirme por la vida con mucho amor, sin ellos el pasar por esta experiencia hubiera sido muy difícil. Gracias por su amor incondicional, su soporte y la enseñanzas brindadas para poder enfrentar la vida con coraje y valentía.

Al Departamento de Ciencias Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez, por brindarme la oportunidad de realizar mi maestría.

A mi director de tesis y amigo, Juan Romero, por los importantes aportes e ideas en la ejecución de este trabajo.

A los profesores Rozga y Portnoy que formaron parte de mi comité graduado, gracias por sus valiosas apreciaciones para la versión final de este trabajo.

A los profesores de la maestría en matemáticas, gratitud eterna por sus valiosas enseñanzas .

A los profesores de la Universidad del Atlántico en especial a Rafael Ahumada y Oswaldo Dede, por motivarme a realizar estudios en el extranjero.

A mi novia Neysha Marie por todo el amor brindado a lo largo de este proceso, gracias por creer en mi.

A mis amigos en Puerto Rico y Colombia en especial a personas que se convirtieron como mi familia, Roberto, Charly, Shirley, Velcy, John, Sindy, Lucho, Daiver, Einstein, Jose Gregorio, Willy y William.

Índice general

página

RESUMEN EN ESPAÑOL II

ABSTRACT ENGLISH III

AGRADECIMIENTOS VI

Índice de figuras IX

LISTA DE ABREVIATURAS X

LISTA DE SÍMBOLOS XI

1. INTRODUCCIÓN 1

2. MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT 4

2.1. Bases en espacios vectoriales 4
2.2. Marcos en general 6
2.3. Operador marco 8
2.4. Marcos finitos 9
2.5. Marcos finitos ajustados y normalizados 15
2.6. Interpretaciones físicas 22
2.6.1. Fuerza central 23
2.6.2. Energía potencial 23
2.6.3. Equilibrio 24
2.6.4. Conjuntos críticos 24

3. LA FUERZA DE MARCO Y EL POTENCIAL DE MARCO 27

3.1. La fuerza de marco 27
3.2. El marco potencial 30
3.3. Clasificación de los MFANs 34

4. GRUPO SIMETRICO DE UN MARCO 37

4.1. El grupo simétrico de una sucesión de vectores 37
4.2. Simetrías de combinaciones de marcos 41
4.3. Marco partición 44
4.4. Marcos ajustados equiangulares 46
4.5. Sistema Mercedes Benz 51
4.6. Marcos armónicos 55

4.7. Geometría de un sistema de vectores que minimizan el PM en $\mathbb{R}^3$ 57

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS 63

5.1. Conclusiones 63
5.2. Trabajos futuros 64

Índice de figuras

Figura página

2–1. Podemos observar las relaciones de equivalencia para un marco en $\mathbb{R}^2$ con $N = 3$. (a)Marco ajustado de Mercedes Benz. (b)Rotación de $\frac{\pi}{4}$ del marco. (c)Reflexión del marco alrededor del eje vertical. (d)Negación del vector f_1 20

2–2. Marco en $\mathbb{R}^3$ representado por los vértices de un cubo. 21

2–3. Sólidos platónicos e Icosaedro Truncado(pelota de soccer), los vértice de estas figuras determinan un $MFAN$ para $\mathbb{R}^3$. 22

4–1. El $(2, 2, 2)$-marco partición, representado por los vértices de un octaedro. . 47

4–2. Representación MAE 48

4–3. Proyección de la BON para $\mathbb{R}^3$ al complemento ortogonal del vector $[1, 1, 1]$ generando el marco Mercedes Benz(2-simplex). 49

4–4. MAE determinado por los vértices de un Icosaedro. 50

4–5. Grafos para el marco Mercedes Benz 55

4–6. Configuración de los minimizadores para el potencial de Coulomb y el Potencial de marco, para cierto N en $\mathbb{R}^3$. 62

LISTA DE ABREVIATURAS

BON	Bases Ortonormales.
MAP	Marco Ajustado de Parseval.
MAN	Marco Ajustado y Normalizado.
MAE	Marco Ajustado Equiangular.
MFAN	Marco Finito Ajustado y Normalizado.
MF	Marco Fuerza.
MP	Marco Potencial.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$\mathbb{K}$	Conjunto de los $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
I	Conjunto Contable.
$l^2(I)$	Espacio de las sucesiones $\{c_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{C}$ tal que $\sum_{i\in I} \lvert c_i\rvert^2 < \infty$.
$\mathcal{H}$	Espacio de Hilbert.
$span\,(\mathcal{H})$	Denota el conjunto de todas las combinaciones lineales de elemento en $\mathcal{H}$.
T	Operador pre-marco o síntesis.
T^*	Operador adjunto de T, llamado operador análisis.
S	Operador marco.
G	Operador Grammian.
S_J	Grupo simétrico.
D_n	Grupo diedral.
$\mathcal{GL}(\mathcal{H})$	Grupo de todas las transformaciones lineales invertibles.
$\mathcal{U}(\mathcal{H})$	Subgrupo de las trasformaciones lineales unitárias.
$Sym(\Phi)$	Grupo simétrico del marco Φ, con elementos en S_J.
$sym(\Phi)$	Grupo simétrico del marco Φ, con elementos en $\mathcal{GL}(\mathcal{H})$.
χ	Función característica.

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

La teoría de Marcos tiene sus orígenes en los años 50, cuando Duffin y Schaeffer [1] buscaban propiedades generatrices de sistemas del tipo $\left\{e^{i\lambda_n x} : n \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq L^2(-\pi, \pi)$. A las expansiones del tipo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n x}, \ \ \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

se les conoce como Series de Fourier no Armónicas y la idea principal es encontrar condiciones necesarias y suficientes en la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ para que el sistema $\left\{e^{i\lambda_n x}\right\}_n$ genere todo $L^2(-\pi, \pi)$.

En general, una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definida en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se dice que es un *marco* si la siguiente generalización de la desigualdad de Parseval se satisface: Existen $0 < A \leq B < \infty$ tal que

$$A \left\|f\right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle f, f_k\rangle\right|^2 \leq B \left\|f\right\|^2, \ \forall f \in \mathcal{H} \tag{1.2}$$

Si (1.2) se satisface, entonces todo $f \in \mathcal{H}$ se puede representar en términos de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \tilde{f}_n \right\rangle f_n, \text{ en } \mathcal{H} \text{ (converge incondicionalmente)} \tag{1.3}$$

donde $\left\{\tilde{f}_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la sucesión (o marco) dual de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

La ventaja de (1.3) sobre una expansión en término de una base ortonormal es su robustez con respeto al ruido, convirtiendo a los marcos en una herramienta muy útil en el análisis tiempo-frecuencia(tiempo-espacio) de señales y el procesamiento de

imágenes (ver [4], [5] entre otros); sobre todo con el estudio de marcos de construcción sencilla, como los denominados marcos de Gabor, que consisten en traslaciones en tiempo y frecuencia de una sola señal(o ventana) $\left\{e^{2\pi imbx}g(x-na)\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$; o los marcos ondículas(wavelets), que consisten en dilataciones y traslaciones de una señal $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (esto es $\left\{\frac{1}{a^{j/2}}\psi\left(\frac{x}{a^j}-kb\right)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$).

Una de las ventajas que se tiene trabajando con marcos en lugar de bases ortonormales es la escasa rigidez estructural que un marco presenta a diferencia de una base ortonormal; basta notar que el número de elementos de un marco ajustado normalizado (esto es, con vectores de norma uno y cotas de marco iguales) en $\mathbb{C}^d$ puede ser cualquier $p > d$. Esta libertad permite adecuar el marco a emplear a las características estructurales que la aplicación requiera.

Siguiendo la idea de Benedetto y Fickus, queremos estudiar sistemas en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, en particular establecer vínculos entre la geometría y sus propiedades generatrices en $\mathbb{R}^n$. Como se plantea en [2] un marco finito ajustado y normalizado (MFANs) en $\mathbb{R}^3$, se puede encontrar buscando un conjunto el cual generalice la regularidad geométrica de las raíces de la unidad para tres dimensiones, como ocurre en los vértices de un poliedro regular. Estos marcos frecuentemente poseen un alto grado de simetría, por eso la importancia de estudiarla. Vale y Waldron [3] proponen la definición de grupo simétrico para un marco finito. En general, los marcos finitos son de gran importancia en problemas discretos como la computación cuántica, codificación de antena múltiple, teoría de muestreo, esquemas $\Sigma - \Delta$, entre otros.
La tesis está organizada como sigue: en el Capitulo 2 se discuten algunos conceptos preliminares referentes a la teoría de marcos, como también algunos conceptos físicos que servirán de apoyo para definir el potencial de marco PM. En el Capitulo 3 se estudia la caracterización de los $MFAN$ por medio del marco potencial. En el

Capitulo 4 se define el concepto de grupo simétrico para un marco, y se determina la simetría de algunos marcos de fácil construcción para $\mathbb{K}^d$. Se establece la relación entre los minimizadores del potencial de Coulomb y los del marco potencial. Por ultimo, se presentan algunas conclusiones en el Capitulo 5.

Capítulo 2
MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT

En este capítulo estudiaremos algunos conceptos preliminares de bases en espacios vectoriales. Exploraremos los conceptos mas relevantes de la teoría de marcos en general, centrando nuestro estudio en los marcos finitos y ajustados en espacios de Hilbert finitos dimensionales representada por la sucesión $\{f_k\}_{k\in I}$, miraremos una interpretación por la regularidad geométrica determinada por los vértices de $\{f_k\}_{k\in I}$, después daremos algunos conceptos físicos para tratar de generalizar esta noción.

2.1. Bases en espacios vectoriales

Comencemos con las definiciones de producto interno y espacio de Hilbert, como sigue.

Definición 2.1. *Un producto interior sobre un espacio vectorial complejo X, es un mapa $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ para el cual*

i. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle , \quad \forall x, y, z \in X \ y \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

ii. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in X$

iii. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \ y \ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donde se define una norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Un espacio vectorial X con respecto a la norma inducida por el producto interior, que es completo, se le llama ***Espacio de Hilbert*** *denotado por* $\mathcal{H}$

En cualquier espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se cumple la **desigualdad de Cauchy-Schwartz**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, . \tag{2.1}$$

Definición 2.2. *Sea $V \neq \{0\}$ espacio vectorial finito dimensional. Una sucesión $\{e_k\}_{k=1}^m$ en V es una **base** para V, si:*

i. $V = span\, \{e_k\}_{k=1}^m$

ii. $\{e_k\}_{k=1}^m$ *es linealmente independiente.*

Es decir, para cada $f \in V$; existen coeficientes escalares únicos $\{c_k\}_{k=1}^m$ tal que

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k$$

Se dice que $\{e_k\}_{k=1}^m$ es una **base ortonormal**; si es una base la cual cumple que

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = j \\ 0 \text{ si } k \neq j \end{cases}$$

Entonces si $\{e_k\}_{k=1}^m$ es una base ortonormal, los coeficientes $\{c_k\}_{k=1}^m$ son

$$\langle f, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} c_k \langle e_k, e_j \rangle = c_j$$

Por lo tanto,

$$f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, e_j \rangle \, e_k \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *Para un sistema ortonormal $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i. $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *es una base ortonormal.*

ii. $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle \, f_k$, $\forall f \in \mathcal{H}$

iii. $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle f, f_k \rangle \, \langle f_k, g \rangle$, $\forall f, g \in \mathcal{H}$

iv. $\sum_{k=1}^\infty |\langle f, f_k \rangle|^2 = \|f\|^2$, $\forall f \in \mathcal{H}$

v. $\overline{span}\,\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$

vi. Si $\langle f, f_k\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0$

A *iv* se le da el nombre de *ecuación de Parseval.*

Definición 2.3. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una* ***base de Riesz*** *para* $\mathcal{H}$*, si y solo si existen constantes* $0 \leq A \leq B$ *tal que para toda sucesión* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$*,*

$$A\sum_k |c_k|^2 \leq \left\|\sum_k c_k f_k\right\|^2 \leq B\sum_k |c_k|^2 . \tag{2.3}$$

2.2. Marcos en general

Definición 2.4. *Una sucesión de elementos* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H} \neq \{0\}$ *es un marco para* $\mathcal{H}$*, si existen constantes* $A, B > 0$ *tal que*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H} \tag{2.4}$$

Los numeros A y B son llamados cotas de marco.

De la definición se tiene que si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un marco para $\mathcal{H}$, entonces

$$\overline{span}\,\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H} \tag{2.5}$$

Para probar este hecho consideremos el siguiente lema.

Lema 1. *Para una sucesión* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es completo; esto es,* $\overline{span}\,\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$

ii. Si $\langle f, f_k\rangle = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, entonces* $f = 0$*.*

Por lo tanto, si $\langle f, f_k\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces por la definición de marco tenemos que $f = 0$. Luego, por el lema anterior se cumple este hecho.

Definición 2.5. *Una sucesión* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en* $\mathcal{H}$ *es* ***un marco ajustado****, si existe un numero* $A > 0$ *tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 = A \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H} \tag{2.6}$$

Si $A = 1$ *se le da el nombre de* ***marco de Parseval****.*

Un marco ajustado el cual es normalizado; esto es, si $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in I$, se denota como (MAN). Los $MANs$ son usualmente interpretados como generalizaciones de $BONs$.

Teorema 2.2. *Sea* $\{f_k\}_{k\in I}$ *un* $A - MAN$*. Luego* $A \geq 1$*, y además* $A = 1$ *si y solo si* $\{f_k\}_{k\in I}$ *es una base ortonormal para* $\mathcal{H}$*.*

Demostración: Observemos que, para todo $m \in I$

$$A = A\|f_m\|^2 = \sum_n |\langle f_m, f_n\rangle|^2 = 1 + \sum_{n\neq m} |\langle f_m, f_n\rangle|^2$$

y entonces $A \geq 1$. En consecuencia, $A = 1$ si y solo si, $\langle f_m, f_k\rangle = 0$, $\forall k \neq m$. □

Ejemplo 2.2.1. *Sea* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una base ortonormal para* $L^2(\Omega)$*,* Ω *un compacto en* $\mathbb{R}^n$ *y* $f \in L^2(\Omega)$*. Definamos* $P(f) := \chi_K f$*,* $K \subset \Omega$*; entonces* $\{P(e_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *es un marco para* $L^2(K)$*. Probemos este hecho.*

Note que $P^2 = P$*; es decir,* P *es un operador proyección. Luego,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, P(e_k)\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Pf, e_k\rangle|^2 = \|Pf\|^2$$

Además,

$$\begin{aligned}\|Pf\|^2 &= \int_\Omega |Pf|^2 \, d\mu = \int_{K\cup(\Omega-K)} |Pf|^2 \, d\mu \\ &= \int_K |Pf|^2 \, d\mu + \int_{\Omega-K} |Pf|^2 \, d\mu = \int_K \left|\chi_K f\right|^2 d\mu \\ &= \int_K |f|^2 \, d\mu = \|f\|^2_{L^2(K)}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, P(e_k)\rangle|^2 = \|f\|^2_{L^2(K)}$$

Es decir, $\{P(e_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *es un marco para* $L^2(K)$.

Ejemplo 2.2.2. *Sea* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una base ortonormal para* $\mathcal{H}$. *Consideremos*

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_1, e_1, e_2, e_2, e_2, e_2, ...\}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} 4\,|\langle f, e_k\rangle|^2 \\ &= 4\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \\ &= 4\,\|f\|^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *en un marco ajustado con cota de marco* $A = 4$.

2.3. Operador marco

Definición 2.6. *Una sucesión* $\{f_k\}_{k\in I}$ *en* $\mathcal{H}$, *donde* I *es un conjunto contable de índices; es llamada una* ***sucesión de Bessel****, si existe una constante* $B > 0$ *tal que*

$$\sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\,\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H} \tag{2.7}$$

Dada una sucesión de Bessel $\{f_k\}_{k\in I}$ el operador acotado

$$T : \ell^2(I) \to \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k\in I} = \sum_{k\in I} c_k f_k \tag{2.8}$$

es llamado el *operador pre-marco* o el *operador síntesis*. El operador adjunto está dado por

$$T^* : \mathcal{H} \to \ell^2(I), \quad T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in I} \tag{2.9}$$

T^* es llamado el *operador análisis*. El ***operador marco*** se define como:

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad Sf = TT^* = \sum_{k\in I} \langle f, f_k\rangle f_k \tag{2.10}$$

El operador S está bien definido debido a que $\{f_k\}_{k\in I}$ es una sucesión de Bessel, por consiguiente la serie definida en S converge incondicionalmente. El *operador Grammian* es el mapa $G : \ell^2(I) \to \ell^2(I)$ definido como:

$$G = T^*T = \left[\langle f_k, f_j\rangle\right]_{j,k\in I}. \tag{2.11}$$

Note que

$$\sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 = \left\|\{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in I}\right\|^2 = \|T^* f\|^2 = \langle T^* f, T^* f\rangle = \langle Sf, f\rangle \tag{2.12}$$

Ahora podemos escribir la condición de marco como sigue,

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\|f\|^2 \tag{2.13}$$

2.4. Marcos finitos

Consideremos un marco $\{f_k\}_{k=1}^m$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ real o complejo N-dimensional, y $\ell^2(I)$ con $I = \{1, 2, ..., m\}$.

Sean $\{\epsilon_k\}_{k=1}^m$ y $\{e_k\}_{k=1}^N$, las bases canónicas ortonormales para $\ell^2(I)$ y $\mathcal{H}$ respectivamente. Las **representaciones matriciales** del operador síntesis y el operador análisis son:

$$T = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{1N} & f_{2N} & \cdots & f_{mN} \end{bmatrix}, \quad T^* = \begin{bmatrix} \overline{f_{11}} & \overline{f_{12}} & \cdots & \overline{f_{1N}} \\ \overline{f_{21}} & \overline{f_{22}} & \cdots & \overline{f_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{f_{m1}} & \overline{f_{m2}} & \cdots & \overline{f_{mN}} \end{bmatrix}$$

Note que la definición 2.4 nos dice que un marco tiene mas elementos que los necesarios para ser una base. Un marco que no es un base es llamado **redundante**. En el próximo teorema se establece la descomposición de cada elemento en $\mathcal{H}$, por medio del marco y su respectivo marco dual. En [6] aparecen estos resultados, daremos una prueba mas detallada a este teorema.

Teorema 2.3. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un marco para $\mathcal{H}$ con operador marco S.*

i. S es invertible, lineal, acotado y auto-adjunto.

ii. Cada $f \in \mathcal{H}$ puede ser representado como:

$$f = \sum_{k=1}^{m} \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle f_k = \sum_{k=1}^{m} \left\langle f, f_k \right\rangle S^{-1} f_k \tag{2.14}$$

iii. si $f \in \mathcal{H}$ también tiene una representación $f = \sum_{k=1}^m c_k f_k$ para algún coeficiente escalar $\{c_k\}_{k=1}^m$, luego

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left|\left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle\right|^2 + \sum_{k=1}^{m} \left|c_k - \left\langle f, S^{-1} f_k \right\rangle\right|^2 .$$

Demostración:

i. Es claro que S es lineal. Además es acotado debido a que es la composición de dos operadores acotados.

Note que $S = TT^* = (T^*)^* T^* = (TT^*)^* = S^*$, por lo tanto S es auto-adjunto.

Para probar que S es inyectiva, probemos que $Ker(S) = \{0\}$. Sea $Sf = 0$, entonces

$$0 = \langle Sf, f\rangle = \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2$$

Como $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un marco, entonces $\|f\| = 0$.

Por lo tanto,

$$Ker(S) = \{0\}.$$

Además $Dim(ImS) = Dim\mathcal{H}$, entonces S es sobreyectiva. Por lo tanto, S es invertible.

ii. Sea $f \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} f &= SS^{-1}f \\ &= TT^*S^{-1}f \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left\langle S^{-1}f, f_k\right\rangle f_k \end{aligned}$$

Pero S es autoadjunto($(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$). Luego,

$$\sum_{k=1}^{m} \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle f_k$$

iii. Dado $f \in \mathcal{H}$, supongamos que tiene la siguiente representación $f = \sum_{k=1}^m c_k f_k$. Sabemos que

$$\{c_k\}_{k=1}^m = \{c_k\}_{k=1}^m - \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m + \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m$$

Por la parte $(ii.)$ tenemos que

$$0 = f - f = \sum_{k=1}^{m} \left(c_k - \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right) f_k$$

Es decir, $\{c_k\}_{k=1}^m - \{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^m \in Ker(T) = Im^{\perp}(T^*)$; notemos también que, $\{\langle f, S^{-1}f_k\rangle\}_{k=1}^m \in Im(T^*)$.

Esto implica que

$$\left\langle \{c_k\}_{k=1}^m - \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m, \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m \right\rangle = 0$$

Utilizando ese hecho, nos resulta lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m |c_k|^2 &= \left\| \{c_k\}_{k=1}^m - \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m + \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m \right\|^2 \\ &= \left\| \{c_k\}_{k=1}^m - \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m \right\|^2 + \left\| \left\{\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right\}_{k=1}^m \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \left|\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right|^2 + \sum_{k=1}^m \left|c_k - \left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

□

La parte (iii) nos garantiza que entre todas las sucesiones $\{c_k\}_{k=1}^m$, para el cual $f = \sum_{k=1}^m c_k f_k$, los coeficientes que tienen la mínima norma ℓ^2 son

$$\left\langle f, S^{-1}f_k\right\rangle, \quad k = 1, ..., m$$

Son llamados *coeficientes de marco*. Además el teorema 2.3 nos garantiza que $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^m$ es un marco, debido a que el $span\,\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^m = \mathcal{H}$.

A la sucesión $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^m$ se le da el nombre de **marco dual canónico** de $\{f_k\}_{k=1}^m$.

Si consideramos marcos que no son una base, se puede encontrar marcos $\{g_k\}_{k=1}^m \neq \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^m$ tal que

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, g_k\rangle f_k$$

A estos marcos se le da el nombre de **marco dual**.

Proposición 1. *$\{f_k\}_{k=1}^m$ es un marco ajustado para $\mathcal{H}$ con cota de marco A, si y solo si $S = AI$ (I denota el operador identidad sobre $\mathcal{H}$), y*

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^m \langle f, f_k\rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H} \tag{2.15}$$

Demostración:

$\Rightarrow$]Sea $\{f_k\}_{k=1}^m$ un marco ajustado, entonces para todo $f \in \mathcal{H}$.

$$\langle Sf, f\rangle = \langle AIf, f\rangle$$

$$\langle Sf - AIf, f\rangle = 0$$

Como $S - AI$ es autoadjunto, se tiene que $S - AI = 0$. Por lo tanto, $S = AI$. Es decir,

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k\rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

[$\Leftarrow$ Se tiene que $S = AI$, entonces si $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} A\|f\|^2 &= \langle Af, f\rangle \\ &= \langle Sf, f\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{f_k\}_{k=1}^m$ es un marco A-ajustado. $\square$

Si $A = 1$ se le llama **Marco ajustado de Parseval**(MAP). Una sucesión de vectores son un MAP (para su span), si y solo si su matriz de Grammian P es una matriz proyección ortogonal, esto es $P^2 = P$ y $P = P^*$.

Los Marcos $\{f_k\}_{k\in I}$ y $\{g_k\}_{k\in I}$ son **unitariamente equivalentes** , si $\exists U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ con

$$\{g_k\}_{k\in I} := \{Uf_k\}_{k\in I}$$

Esto es $g_k = Uf_k$ para todo $k \in I$; y son **similares** si $\exists Q \in \mathcal{GL}(\mathcal{H})$ tal que

$$\{g_k\}_{k\in I} := \{Qf_k\}_{k\in I}$$

Definimos el **marco ajustado canónico** de $\{f_k\}_{k\in I}$, como

$$f_k^{can} = S^{-\frac{1}{2}} f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

Se puede demostrar que este tipo de marco es un MAP.

Con lo anterior los marco son similares si $G\left(\{f_k^{can}\}_{k\in I}\right) = G\left(\{g_k^{can}\}_{k\in I}\right)$; y unitariamente equivalentes si $G\left(\{f_k\}_{k\in I}\right) = G\left(\{g_k\}_{k\in I}\right)$. Decimos que los marcos son **complementarios** si,

$$G\left(\{f_k^{can}\}_{k\in I}\right) + G\left(\{g_k^{can}\}_{k\in I}\right) = I \tag{2.16}$$

Si $\{f_k\}_{k\in I}$ es un MAP de n vectores con $G = P$ en un espacio d dimensional , su marco complementario es un MAP con $G = I - P$ para un espacio $n-d$ dimensional.

Algunos Resultados encontrados a partir de las anteriores definiciones son:

Teorema 2.4. *Si Φ y Ψ marcos de Parseval similares, entonces Φ y Ψ son unitariamente equivalentes.*

Demostración: Sean Φ y Ψ marcos de Parseval similares, nuestro objetivo es encontrar $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $\Psi = U\Phi$ con $U^*U = UU^* = I$. En Efecto; sea $f \in \mathcal{H}$, entonces $f = \sum_{k\in J} \langle f, f_k\rangle f_k$ y $f_k = Qg_k$ con $Q \in \mathcal{GL}(\mathcal{H})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k\in J} \langle f, Qg_k\rangle Qg_k \\ &= Q\sum_{k\in J} \langle Q^*f, g_k\rangle g_k \\ &= QQ^*f \end{aligned}$$

Pero f es arbitrario. Por lo tanto $I = QQ^* = Q^*Q$. Es decir, $U = Q \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. □

Corolario 2.1. *Si Φ y Ψ son marcos ajustados similares, entonces $\exists\lambda > 0$ y $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $\Phi = \lambda U\Psi$.*

Demostración: Dado que Φ y Ψ son marcos ajustados, con cotas de marcos A y B respectivamente podemos re-escalar los para obtener un marco de Parseval. Note que $\frac{1}{\sqrt{A}}\Phi$ y $\frac{1}{\sqrt{B}}\Psi$ son marcos ajustados de Parseval similares. Aplicando la proposición anterior se tiene que estos marcos son unitariamente equivalentes. Es

decir, existe $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\Phi = U\frac{1}{\sqrt{B}}\Psi.$$

Por lo tanto, $\Phi = \lambda U\Psi$ donde $\lambda = \sqrt{A/B}$. □

2.5. Marcos finitos ajustados y normalizados

Estos tipos de marcos finitos poseen una estructura recientemente estudiada. Una observación importante es que existe solo una selección para la constante de marco de un $MFAN$ de N elementos para un espacio de Hilbert d-dimensional. Los siguientes teoremas son encontrados en [2].

Teorema 2.5. *Si $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un $A - MFAN$ para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ d-dimensional, luego $A = N/d$.*

Demostración: Sea $\{e_k\}_{k=1}^d$ una base ortonormal para $\mathcal{H}$

$$Ad = \sum_{j=1}^{d} A\left\|e_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{d}\sum_{m=1}^{N}\left|\langle e_j, f_m\rangle\right|^2 = \sum_{m=1}^{N}\sum_{j=1}^{d}\left|\langle e_j, f_m\rangle\right|^2 = \sum_{m=1}^{N}\left\|f_m\right\|^2 = N$$

Por lo tanto, $A = N/d$. □

Teorema 2.6. *Dado cualquier d y $N \geq d$, luego existe un $MFAN$ para K^d de N elementos.*

Se puede observar la demostración en [7]. Los siguientes teoremas aparecen sin demostración, se dará una prueba a estos resultados. Estos teoremas caracterizan los $MFAN$ en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.7. *La sucesión $\{f_k = (cos\alpha_k, sin\alpha_k)\}_{k=1}^N$ es un marco ajustado y normalizado para $\mathbb{R}^2$, si y solo si*

$$\sum_{k=1}^{N} z_k^2 = 0,$$

donde $z_k = e^{i\alpha_k} \in \mathbb{C}$ para $k = 1, 2, ..., N$

Demostración:

$\Rightarrow$]Supongamos que la sucesión $\{f_k = (cos\alpha_k, sin\alpha_k)\}_{k=1}^{N}$ es un MAN para $\mathbb{R}^2$, entonces por la proposición 1 y el teorema 2.5 se tiene que

$$S = TT^* = \frac{N}{2}I$$

Luego,

$$T^* = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_N \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \cdots & \sin\alpha_N \end{bmatrix}$$

De modo que,

$$S = TT^* = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_N \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \cdots & \sin\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_N & \sin\alpha_N \end{bmatrix} = \frac{N}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2\alpha_k = \frac{N}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{N} \cos^2\alpha_k = \frac{N}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{N} \sin\alpha_k \cos\alpha_k = 0$$

Luego como $z_k = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k$, entonces

$$\sum_{k=1}^{N} z_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \cos^2\alpha_k + 2i\sum_{k=1}^{N} \sin\alpha_k\cos\alpha_k - \sum_{k=1}^{N} \sin^2\alpha_k$$
$$\sum_{k=1}^{N} z_k^2 = \frac{N}{2} - \frac{N}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{N} z_k^2 = 0$$

[$\Leftarrow$ Por la proposición 1, basta probar que $S = AI$ para algún $0 < A < \infty$. En efecto, note que

$$S = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} \cos^2 \alpha_k & \sum_{k=1}^{N} \sin \alpha_k \cos \alpha_k \\ \sum_{k=1}^{N} \sin \alpha_k \cos \alpha_k & \sum_{k=1}^{N} \sin^2 \alpha_k \end{bmatrix}$$

Por hipótesis $\sum_{k=1}^{N} z_k^2 = 0$, esto quiere decir que

$$\sum_{k=1}^{N} \cos^2 \alpha_k - \sum_{k=1}^{N} \sin^2 \alpha_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin \alpha_k \cos \alpha_k = 0$$

Pero $\sum_{k=1}^{N} 1 - \sin^2 \alpha_k - \sum_{k=1}^{N} \sin^2 \alpha_k = 0$, en consecuencia

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2 \alpha_k = \frac{N}{2}$$

Por lo tanto,

$$S = \frac{N}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es, $S = \frac{N}{2} I$. □

Una técnica similar puede ser usada para encontrar ecuaciones que caractericen los $MFANs$ para $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.8. *La sucesión* $\{f_k = (\sin \theta_k \cos \varphi_k, \sin \theta_k \sin \varphi_k, \cos \theta_k)\}_{k=1}^{N}$ *es un marco ajustado y normalizado para* $\mathbb{R}^3$*, si y solo si*

$$\sum_{k=1}^{N} |z_k|^2 = \frac{2N}{3}, \quad \sum_{k=1}^{N} z_k^2 = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} z_k \sqrt{1 - |z_k|^2} = 0$$

donde $z_k = \sin \theta_k e^{i\varphi_k} \in \mathbb{C}$ *y* $|z_k| \leq 1$*, para* $k = 1, 2, ..., N$

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea $\{f_k = (\sin\theta_k \cos\varphi_k, \sin\theta_k \sin\varphi_k, \cos\theta_k)\}_{k=1}^{N}$ un MAN, entonces por la proposición 1 y el teorema 2.5

$$S = TT^* = \frac{N}{3} I$$

De modo que,

$$S = TT^* = \begin{bmatrix} \sin\theta_1\cos\varphi_1 & \cdots & \sin\theta_N\cos\varphi_N \\ \sin\theta_1\sin\varphi_1 & \cdots & \sin\theta_N\sin\varphi_N \\ \cos\theta_1 & \cdots & \cos\theta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta_1\cos\varphi_1 & \sin\theta_1\sin\varphi_1 & \cos\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin\theta_N\cos\varphi_N & \sin\theta_N\sin\varphi_N & \cos\theta_N \end{bmatrix}$$

$$= \frac{N}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \cos^2\varphi_k = \sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \sin^2\varphi_k = \sum_{k=1}^{N} \cos^2\theta_k = \frac{N}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \sin\varphi_k \cos\varphi_k = \sum_{k=1}^{N} \sin\theta_k \cos\varphi_k \cos\theta_k = \sum_{k=1}^{N} \sin\theta_k \sin\varphi_k \cos\theta_k = 0$$

Si $z_k = \sin\theta_k e^{i\varphi_k}$, entonces $|z_k| = |\sin\theta_k| \leq 1$ y

$$\sum_{k=1}^{N} z_k^2 = \frac{N}{3} - \frac{N}{3} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{N} 1 - \cos^2\theta_k = N - \frac{N}{3} = \frac{2N}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{N} z_k \sqrt{1 - |z_k|^2} = \sum_{k=1}^{N} \cos\theta_k \sin\theta_k \cos\varphi_k + i \sum_{k=1}^{N} \cos\theta_k \sin\theta_k \sin\varphi_k = 0$$

[$\Leftarrow$ Se puede concluir de la hipótesis que:

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \cos^2\varphi_k - \sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \sin^2\varphi_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \sin\varphi_k \cos\varphi_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos\theta_k \sin\theta_k \cos\varphi_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos\theta_k \sin\theta_k \sin\varphi_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos^2\theta_k = \frac{N}{3}$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \cos^2\varphi_k - \sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k + \sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \cos^2\varphi_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k \cos^2\varphi_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \sin^2\theta_k = \frac{N}{3}$$

Luego,

$$S = \frac{N}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En conclusión $S = \frac{N}{3}I$; luego por la proposición 1 $\{f_k\}_{k=1}^{N}$ es un MAN. □

Dado un marco $\{f_k\}_{k=1}^{N}$ ajustado; la sucesión que representa la rotación, reflexión, y negación de algunos vectores, es un marco. En efecto, definamos

$$\{g_k\}_{k=1}^{N} := \{\sigma_k U f_k\}_{k=1}^{N}$$

Donde $\sigma_k = \pm 1$ y $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |\langle f, \sigma_k U f_k\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{N} |\langle f, U f_k\rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left|\left\langle U^{-1} f, f_k\right\rangle\right|^2 \\ &= A \left\|U^{-1} f\right\|^2 \\ &= A \|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}\end{aligned}$$

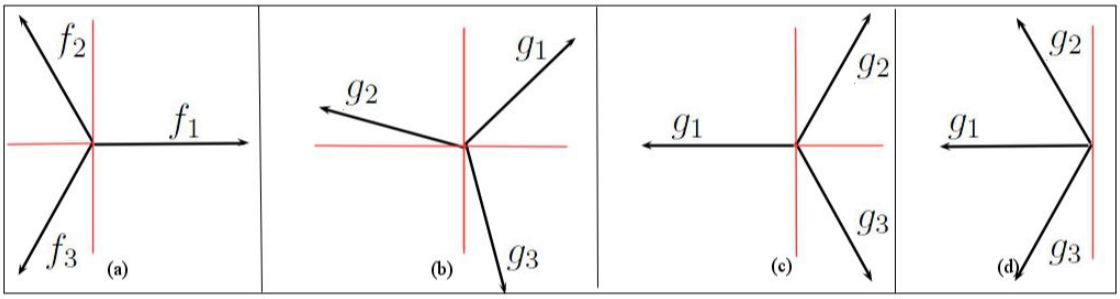


Figura 2–1: Podemos observar las relaciones de equivalencia para un marco en $\mathbb{R}^2$ con $N = 3$. (a)Marco ajustado de Mercedes Benz. (b)Rotación de $\frac{\pi}{4}$ del marco. (c)Reflexión del marco alrededor del eje vertical. (d)Negación del vector f_1

Ejemplo 2.5.1. *Consideremos en el teorema anterior* $N = 3$ *y los ángulos* $\alpha_k = \frac{2\pi k}{3}$ *para* $k = 1, 2, 3$. *Se puede probar que* $\sum_{k=1}^{3} z_k^2 = 0$, *entonces* $\{f_k = (cos\alpha_k, sin\alpha_k)\}_{k=1}^{3}$ *es un* MAN, *a este marco se le llama Mercedes-Benz (ver figura 2–1).*

En General, para $N > 2$ los N vectores en $\mathbb{R}^2$ representados por las N-raíces de la unidad, son un $MFAN$ (teorema2.7). Debido a que la suma del cuadrado de las N-raíces de la unidad es 0. Estas N-raíces de la unidad representan los vértices de un polígono de N-lados. Para los $MFANs$ en $\mathbb{R}^3$, podemos encontrarlos mirando el conjunto el cual generalize la regularidad geométrica de las raíces de la unidad.

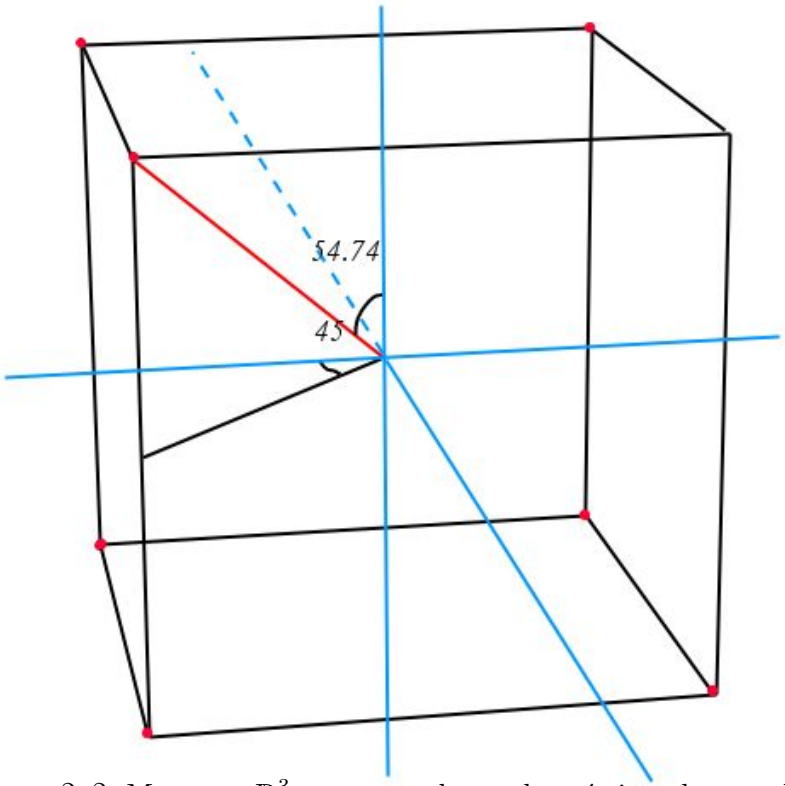


Figura 2–2: Marco en $\mathbb{R}^3$ representado por los vértices de un cubo.

Ejemplo 2.5.2. *En el Teorema 2.8 consideremos la siguiente sucesión finita:*

$$\theta_k = \begin{cases} 54.735610317^o \ si\ k = 1, ..., 4 \\ 125.264389683^o \ si\ k = 4, ..., 8 \end{cases} \qquad \varphi_k = 45^o + 90^o(k-1) \quad k = 1, .., 8$$

Se puede probar que la sucesión $\{f_k = (\sin\theta_k \cos\varphi_k, \sin\theta_k \sin\varphi_k, \cos\theta_k)\}_{k=1}^{8}$, *determina un marco para* $\mathbb{R}^3$. *Estos vectores determinan los vértices de un cubo (ver figura2–2)*

En general, la colección de todos los vértices de cualquier sólido platónico; y otra colección de vértices tales como los del icosaedro truncado, determinan un $MFAN$ para $\mathbb{R}^3$. Un método concreto para la construcción de tales marcos, se puede encontrar en [8]. Por el hecho de que hay solo cinco sólidos platónicos, nos lleva a pensar que cualquier caracterización general de $MFAN$, no será escrita en términos de la regularidad geométrica.

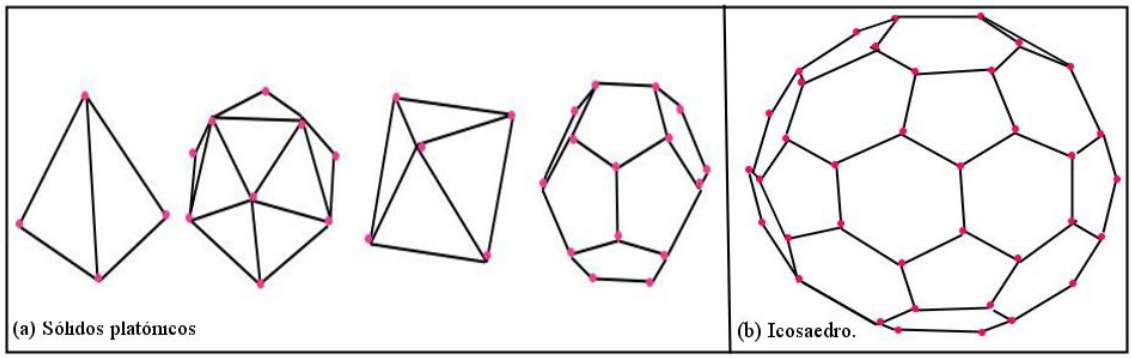


Figura 2–3: Sólidos platónicos e Icosaedro Truncado(pelota de soccer), los vértice de estas figuras determinan un $MFAN$ para $\mathbb{R}^3$.

2.6. Interpretaciones físicas

En vista de la dificultad de expresar construcciones de $MFANs$ por la regularidad geométrica, nos centramos en el estudio de equidistribución esférica, es decir encontrar la forma óptima de colocar N puntos sobre la esfera $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ tal que los puntos estén lo mas lejos posibles uno del otro. En el caso de S^1 es una rotación del conjunto de N raíces de la unidad. Para S^2 existen diferentes formulaciones que apuntan a la misma configuración óptima cuando el numero de puntos es grande. Pero para un numero pequeño se obtiene diferentes conjuntos equidistribuidos óptimos.

Imaginemos N electrones en un conductor de capa esférica sin la presencia de fuerza externa, los electrones se empujaran uno a otro de acuerdo a la **ley de Coulomb**; esto es, dados $a, b \in S^2$

$$F(a,b) = \frac{a-b}{\|a-b\|^3}$$

Es posible pensar conjuntos equidistribuidos como conjuntos que están en **equilibrio** bajo la presencia de una cierta fuerza. Mirando la dinámica, los electrones tratarán de re-arreglarse en si mismos tal que la distribución resultante contendrá la menor energía potencial posible. Sin embargo existirá la idea intuitiva de un minimizador global; es decir, un arreglo el cual distribuya los electrones de la forma mas

uniformemente posible bajo la ley de Coulomb.

Para la ley de Coulomb, la energía potencial entre los puntos a y b es $\frac{1}{\|a-b\|}$. El **potencial** para una sucesión de puntos $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ es:

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{k\neq m}^{N}\frac{1}{\|x_k - x_m\|}$$

Deseamos Minimizarlo. Técnicas de calculo son permitidas, pero el numero de mínimos locales crece geométricamente a medida que tenemos mas puntos. Definiremos conceptos para formalizar el equilibrio.

2.6.1. Fuerza central

Una fuerza entre cualquier dos puntos sobre la esfera es una función:

$$F : S^{d-1} \times S^{d-1}\backslash D \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

donde $D = \left\{(x,x) : x \in S^{d-1}\right\}$. Sea $f : (0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, se define **fuerza central** a:

$$F(a,b) = f(\|a-b\|)(a-b) \tag{2.17}$$

para todo $a, b \in S^{d-1}$, $a \neq b$.

2.6.2. Energía potencial

Sea F una fuerza central, el **potencial** correspondiente a F es una función:

$$P : S^{d-1} \times S^{d-1}\backslash D \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

Definida por

$$P(a,b) = p(\|a-b\|)$$

donde $p : (0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface que $p'(x) = -xf(x)$.

Sea b fijo, luego es posible probar que cada fuerza central es un campo vectorial

conservativo. Esto es, $\nabla_a P(a,b) = -F(a,b)$. En efecto

$$\begin{aligned}\nabla_a P(a,b) &= \nabla_a p\left(\|a-b\|\right) \\ &= \frac{(a-b)}{\|a-b\|} p'\left(\|a-b\|\right) \\ &= -\frac{(a-b)}{\|a-b\|}\|a-b\| f\left(\|a-b\|\right) \\ &= -(a-b) f\left(\|a-b\|\right) = -F(a,b)\end{aligned}$$

La función **potencial total** es:

$$PT : \underbrace{S^{d-1} \times ... \times S^{d-1}}_{N-veces} \backslash D_N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\{x_k\}_{k=1}^N \longrightarrow \sum_{m=1}^{N} \sum_{k \neq m}^{N} P\left(x_m, x_k\right)$$

donde D_N es la diagonal generalizada de $\left(S^{d-1}\right)^N$

2.6.3. Equilibrio

Un conjunto de puntos está en equilibrio si permanece constante a través del tiempo. En el caso que este presente pequeños disturbios, eventualmente retornará a su posición original.

Un conjunto de puntos está en **equilibrio** bajo una fuerza central, si es un minimizador local de la función potencial total asociada.

2.6.4. Conjuntos críticos

Cuando se buscan los minimizadores de una función diferenciable, nos remitimos a encontrar los puntos críticos.

Como el potencial total es una función diferenciable; los conjuntos los cuales están en equilibrio satisfacen cierto conjunto de ecuaciones de Lagrange.

Teorema 2.9. *Sean $d, N \in \mathbb{N}$ dados y F una fuerza central, si $\{x_k\}_{k=1}^N$ es un minimizador local para la función potencial total asociada, entonces*

$$\forall m = 1, ..., N, \exists c_m \in \mathbb{R} : c_m x_m = \sum_{k \neq m} F(x_m, x_k) \tag{2.18}$$

Demostración: Definamos la siguiente función:

$$PT_l : S^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow PT\left(\{x_1, ..., x, ..., x_N\}\right) = 2\sum_{k \neq l} P(x, x_k) + \sum_{m \neq l} \sum_{k \neq m,l} P(x_m, x_k)$$

para todo $l = 1, ..., N$; esta función mantiene constante todos las coordenadas excepto la $l-esima$. Por hipótesis $\{x_k\}_{k=1}^N$ es un minimizador local para PT, luego $x = x_l$ es un minimizador local para PT_l. Además $x \in S^{d-1}$, entonces PT está sujeta a la restricción $\|x\|^2 = 1$. Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange tenemos que $\exists c_l \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\nabla PT_l(x) = c_l \nabla \|x\|^2 = 2c_l x$$

pero $x = x_l$ es un minimizador. Luego,

$$\nabla PT_l(x_l) = 2c_l x_l$$

Por otro lado, por el hecho de que el campo de fuerza central es conservativo se tiene que:

$$\nabla PT_l(x) = 2\nabla \sum_{k \neq l} P(x, x_k) = -2\sum_{k \neq l} F(x, x_k)$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k \neq l} F(x_l, x_k) = -c_l x_l$$

esto para todo $l = 1, ..., N$. □

Cualquier conjunto de vectores normalizados distintos en $\mathbb{R}^d$; se dice **conjunto crítico** para una fuerza central F, si satisface 2.18. Para un $MFAN$ $\{f_k\}_{k=1}^N$ recuerde

que el operador marco es $S = AI$, luego para todo m

$$Af_m = Sf_m = \sum_k \langle f_m, f_k \rangle f_k \tag{2.19}$$

Entonces, si consideramos a $F(f_m, f_k) = \langle f_m, f_k \rangle f_k$ se satisface la ecuación 2.18, es decir la sucesión es un conjunto crítico.

Capítulo 3
LA FUERZA DE MARCO Y EL POTENCIAL DE MARCO

En este capitulo se definirá el concepto de marco fuerza y marco potencial. Se determinará que los $MFANs$ de N vectores para $\mathbb{K}^d$, resultarán de la minimización del marco potencial. Lo cual garantiza la existencia y construcción de $MFANs$ para cada $N \geq d$. Estos resultados se deben a Benedeto y Fickus [2].

3.1. La fuerza de marco

Se define la fuerza de marco entre cualquier dos puntos de la esfera unitaria $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ como:

$$FM : S^{d-1} \times S^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$FM(a,b) = \langle a,b \rangle (a-b)$$

Determinemos una función continua f que cumple: $FM(a,b) = f(\|a-b\|)(a-b)$, esto con el objetivo de sintonizar esta definición, con el de fuerza central.
Sea $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. En efecto, consideremos $a, b \in S^{d-1}$

$$f(\|a-b\|) = 1 - \frac{\|a-b\|^2}{2}$$

$$= \langle a,b \rangle$$

Note que si $a = b$, entonces $FM(a, b) = 0$. Esto nos permite repetir algunos vectores.

El objetivo es caracterizar $MFANs$ en términos de la sucesión de puntos sobre la esfera los cuales están en equilibrio por acción de esta fuerza. Sea $\{f_k\}_{k=1}^N$ en equilibrio bajo la fuerza de marco, por definición es un conjunto crítico. Luego, para cualquier m, $\exists c_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} c_m f_m &= \sum_{k \neq m} F(f_m, f_k) = \sum_{k \neq m} \langle f_m, f_k \rangle (f_m - f_k) \\ &= \sum_{k \neq m} \langle f_m, f_k \rangle f_m - \sum_{k \neq m} \langle f_m, f_k \rangle f_k = f_m \sum_{k \neq m} \langle f_m, f_k \rangle - S f_m \end{aligned}$$

donde S es el operador marco. Luego,

$$S f_m = \left(\sum_{k \neq m} \langle f_m, f_k \rangle - c_m \right) f_m$$

Por lo tanto, $S f_m = \lambda_m f_m$ para algún $\lambda_m \in \mathbb{R}$.

Definición 3.1. *La sucesión $\{f_k\}_{k=1}^N \subset S^{d-1}$ es **FM-crítica**, si cada f_k es un autovector para el correspondiente operador marco S.*

Proposición 2. *Si la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un $MFAN$, entonces es una sucesión FM-crítica.*

Demostración: Sea $\{f_k\}_{k=1}^N$ un $MFAN$; luego $S = AI$, es decir cada vector es un autovector de S. □

El inverso no es cierto. Por lo tanto, la noción de FM-crítica no caracteriza los $MFANs$. En el próximo teorema se demuestra que aunque las sucesiones FM-crítica no son siempre $MFANs$, los dos conceptos están íntimamente relacionados.

Teorema 3.1. *Una sucesión finita de vectores unitarios $\{f_k\}_{k=1}^N$ es FM-crítica, si y solo si la sucesión puede ser particionada en una colección de sucesiones mutuamente ortogonales, cada uno de los cuales es un marco ajustado y normalizado para su span. Además, esta partición puede ser seleccionada como $\{E_\lambda\}$, donde*

$E_\lambda = \{f_k : Sf_k = \lambda f_k\}$. También, la cota de marco de E_λ es λ, y los Spans de la sucesión $\{E_\lambda\}$ son precisamente los autoespacios no cero de S.

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea $\{f_k\}_{k=1}^N$ una sucesión FM-crítica, definamos $E_\lambda = \{f_k : Sf_k = \lambda f_k\}$. Por hipótesis cada f_k pertenece a un E_λ, luego $\{E_\lambda\}$ es una partición de $\{f_k\}_{k=1}^N$. Mostremos que los miembros de la partición son mutuamente ortogonales. Consideremos f_r y f_s en E_{λ_r} y E_{λ_s} respectivamente. Dado que S es un operador auto-adjunto definido en un espacio real finito dimensional y $\lambda_r \neq \lambda_s$, entonces por un resultado de algebra lineal se tiene que $\langle f_r, f_s \rangle = 0$. Por lo tanto, esta sucesión puede ser particionada en conjuntos mutuamente ortogonales.

Probemos que E_{λ_r} es un $MFAN$ para el $spanE_{\lambda_r}$ con cota de marco λ_r, sea $y \in spanE_{\lambda_r}$ arbitrario. Luego, $y = \sum_{f_k \in E_{\lambda_r}} c_k f_k$ con $c_k \in \mathbb{R}$, entonces $Sy = \lambda_r y$. Esto quiere decir que $\langle y, f_k \rangle = 0$ para cualquier $f_k \notin E_{\lambda_r}$.

Luego, denotemos a S_{λ_r} como el operador marco para la sucesión de Bessel E_{λ_r}, entonces

$$S_{\lambda_r} y = \sum_{f_k \in E_{\lambda_r}} \langle y, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{N} \langle y, f_k \rangle f_k = Sy = \lambda_r y$$

Como y es arbitrario, se cumple para todo $y \in spanE_{\lambda_r}$. En conclusión, por la proposición 1 $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un $MFAN$ para $spanE_{\lambda_r}$.

[$\Leftarrow$ Sea $\{f_k\}_{k=1}^N$ una sucesión normalizada la cual está particionada en una colección de conjuntos mutuamente ortogonales, cada uno de los cuales es un marco ajustado y normalizado para su span. Sea $\{E_\gamma\}_{\gamma \in I}$, Donde I es un conjunto índices. Sea $f_m \in E_\gamma$, donde E_γ es un $MFAN$ para su *span* con cota de marco λ y operador marco S_γ. Entonces como $f_m \in spanE_\gamma$, y dado que $\langle f_m, f_k \rangle = 0$ para $f_k \notin E_\gamma$, tenemos que

$$\lambda f_m = S_\gamma f_m = \sum_{f_k \in E_\gamma} \langle f_m, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{N} \langle f_m, f_k \rangle f_k = Sf_m$$

Luego, cada f_m es un autovector para S, y por lo tanto $\{f_k\}_{k=1}^N$ es una sucesión FM-crítica. □

Viendo la estructura de las sucesiones las cuales están en equilibrio bajo la fuerza de marco procederemos ahora a minimizar el potencial asociado.

3.2. El marco potencial

Dada la fuerza central $FM(a,b) = f(\|a-b\|)(a-b)$, el potencial asociado entre dos puntos es $P(a,b) = p(\|a-b\|)$, donde $p'(x) = -xf(x)$. En el caso de la fuerza de marco tenemos que $f(x) = 1 - x^2/2$, y entonces $p'(x) = -x + x^3/2$. Por lo tanto, integrando se tiene que

$$p(x) = -\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

Usando el hecho de que $\|a-b\|^2 = 2(1 - \langle a,b\rangle)$, nos resulta que

$$P(a,b) = p(\|a-b\|) = -\frac{\|a-b\|^2}{2}\left(1 - \frac{\|a-b\|^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\langle a,b\rangle^2 - 1\right).$$

En consecuencia, el potencial total contenido dentro de una sucesión de puntos $\{f_k\}_{k=1}^N$ es:

$$PT\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = \sum_{m=1}^N \sum_{k\neq m} P(f_m, f_k) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle f_m, f_k\rangle^2 - \frac{N^2}{2}$$

Enfocaremos nuestro interés en los minimizadores de este potencial.

Ahora daremos paso a la definición de **marco potencial** de una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^N$ en $\mathbb{K}^d$ como:

$$PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N |\langle f_m, f_k\rangle|^2 \tag{3.1}$$

El marco potencial está bien definido para cualquier sucesión de vectores en $\mathbb{K}^d$, nos interesaremos solo en los de norma unitaria.

Sea $S\left(\mathbb{K}^d\right) = \left\{x \in \mathbb{K}^d : \|x\| = 1\right\}$ esfera unitaria en $\mathbb{K}^d$, luego el marco potencial es una función

$$PM : S\left(\mathbb{K}^d\right)^N = \underbrace{S\left(\mathbb{K}^d\right) \times ... \times S\left(\mathbb{K}^d\right)}_{N-veces} \longrightarrow [0, \infty)$$

Ahora estamos en condiciones para definir las sucesiones las cuales están en equilibrio bajo la fuerza de marco, que será el minimizador local del marco potencial 3.1. Buscamos caracterizar los $MFANs$ para $\mathbb{K}^d$ como los conjuntos los cuales están en equilibrio bajo la fuerza de marco. Nuestro propósito ahora es buscar cotas superiores e inferiores para PM. Recordemos que la traza de un operador $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ d-dimensional real o complejo es:

$$Tr\left(S\right) = \sum_{k=1}^{d} \langle Se_k, e_k \rangle$$

donde $\{e_k\}_{k=1}^d$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$.

Teorema 3.2. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^N$ una sucesión en $\mathbb{K}^d$ con operador marco asociado S, entonces $PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = Tr\left(S^2\right)$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} PM\left((f_k)_{k=1}^N\right) &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \langle f_m, f_k \rangle \langle f_k, f_m \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \left\langle f_m, \sum_{n=1}^{d} \langle f_k, e_n \rangle e_n \right\rangle \langle f_k, f_m \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{d} \langle f_m, \langle f_k, e_n \rangle e_n \rangle \langle f_k, f_m \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{d}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \langle \langle f_k, e_n\rangle f_k, \langle f_m, e_n\rangle f_m\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{d} \left\langle \sum_{k=1}^{N} \langle f_k, e_n\rangle f_k, \sum_{m=1}^{N} \langle f_m, e_n\rangle f_m \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{d} \langle Se_n, Se_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{d} \left\langle S^2 e_n, e_n\right\rangle = Tr\left(S^2\right)
\end{aligned}
$$

□

Gracias a este teorema podemos calcular el marco potencial para un $MFAN$.

Note que si $\{f_k\}_{k=1}^{N}$ es un $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$, el teorema 2.5 dice que $S = \frac{N}{d} I$. Por lo tanto,

$$PM\left(\{f_k\}_{k=1}^{N}\right) = Tr\left(\frac{N^2}{d^2} I\right) = \frac{N^2}{d^2}\left(\sum_{n=1}^{d} 1\right) = \frac{N^2}{d}$$

En conclusión, los $MFANs$ de N en $\mathbb{K}^d$ tiene el mismo marco potencial.

Teorema 3.3. *(Benedetto y Fickus [2]) Sea $\{f_k\}_{k=1}^{N} \subseteq S\left(K^d\right)$, d y N arbitrarios. Entonces,*

$$Nmax\left(1, \frac{N}{d}\right) \leq PM\left(\{f_k\}_{k=1}^{N}\right) \leq N^2$$

En particular, una cota inferior para el marco potencial es N, si $N \leq d$ y N^2/d, si $N \geq d$. Además, las cotas inferiores de N y N^2/d son alcanzadas, si y solo si $\{f_k\}_{k=1}^{N}$ es un conjunto ortonormal o un $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$, respectivamente.

Demostración: Determinemos la cota superior. Para ello apliquemos la desigualdad de Cauchy-Schwartz a PM, entonces

$$PM\left(\{f_k\}_{k=1}^{N}\right) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} |\langle f_m, f_k\rangle|^2 \leq \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \|f_m\|^2 \|f_k\|^2 = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} 1 = N^2$$

Luego,

$$PM\left(\{f_k\}_{k=1}^{N}\right) \leq N^2$$

Busquemos la cota inferior.

Sea $\{f_k\}_{k=1}^N$ sucesión normalizada, entonces

$$PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}|\langle f_m, f_k\rangle|^2 = N + \sum_{m=1}^{N}\sum_{k\neq m}|\langle f_m, f_k\rangle|^2 \geq N$$

la igualdad se obtiene, si y solo si

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{k\neq m}|\langle f_m, f_k\rangle|^2 = 0$$

Es decir, $\langle f_m, f_k\rangle = 0$ para todo m y todo $n \neq m$; esto es, cuando $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un conjunto ortonormal.

Por otro lado, sea S operador marco correspondiente a $\{f_k\}_{k=1}^N$, y sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^d$ los autovalores de S, aplicando el teorema 3.2 se tiene que:

$$PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = Tr\left(S^2\right) = \sum_{n=1}^{d}\lambda_n^2$$

Como S es un operador positivo, entonces $\{\lambda_n\}_{n=1}^d$ es una sucesión de numeros reales positivos. Recuerde que $\{f_k\}_{k=1}^N \subseteq S\left(K^d\right)$, luego $\langle f_k, f_k\rangle = 1$. Sea G la matriz $N\times N$ representando la matriz Grammian; con unos en la diagonal, entonces

$$\sum_{n=1}^{d}\lambda_n = Tr\left(S\right) = Tr\left(TT^*\right) = Tr\left(T^*T\right) = T\left(G\right) = \sum_{k=1}^{N}1 = N$$

Ahora minimizaremos la función $\sum_{n=1}^d \lambda_n^2$ sujeta a la restricción que $\{\lambda_n\}_{n=1}^d$ es un sucesión no negativa, donde sus valores suman N. Para resolverlo usaremos las correspondientes ecuaciones de Lagrange.

Resolviendo estas ecuaciones encontramos que todos los λ_n son iguales, por lo tanto gracias a la restricción los $\lambda_n = \frac{N}{d}\ \forall n$. Por consiguiente el mínimo valor es

$$\sum_{n=1}^{d}\lambda_n^2 = \sum_{n=1}^{d}\left(\frac{N}{d}\right)^2 = \frac{N^2}{d}$$

Recíprocamente, $PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = N^2/d$, entonces se puede probar de forma análoga aplicando las ecuaciones de Lagrange que todos los autovalores correspondientes a el operador marco S son todos iguales a N/d, y por lo tanto $S = (N/d)I$. Ahora por la proposición 1 $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$. En conclusión, juntando todo el proceso realizado anteriormente obtenemos la siguiente desigualdad

$$Nmax\left(1, \frac{N}{d}\right) = max\left(N, \frac{N^2}{d}\right) \leq PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) \leq N^2$$

con $PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = N$ si y solo si $\{f_k\}_{k=1}^N$ es ortonormal, y $PM\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right) = N^2/d$ si y solo si $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$. □

El teorema anterior sugiere que los $MFANs$, siempre y cuando existan, deben ser el minimizador global del marco potencial. Esta aseveración es cierta, la cual probaremos. También nos acercaremos los minimizadores locales.

3.3. Clasificación de los MFANs

Aquí daremos el resultado fundamental determinado por Benedetto y Fickus para clasificar los $MFANs$. Enunciemos primero lo siguiente.

Teorema 3.4. *Un minimizador local para el marco potencial es o un conjunto ortonormal, o un $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$.*

La demostración se puede ver en [2].

Teorema 3.5. *(Benedetto y Fickus [2]) Sea d y N dados, consideremos el potencial de marco*

$$\begin{aligned} PM : S\left(\mathbb{K}^d\right)^N &\longrightarrow [0, \infty) \\ \{f_k\}_{k=1}^N &\longrightarrow \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N |\langle f_m, f_k\rangle|^2 \end{aligned}$$

Entonces

(a) *Cada minimizador local del potencial de marco es también un minimizador global.*

(b) *Si $N \leq d$, el mínimo valor del potencial de marco es N, y los minimizadores son precisamente las sucesiones ortonormales en $\mathbb{K}^d$.*

(c) *Si $N \geq d$, el mínimo valor del potencial de marco es N^2/d, y los minimizadores son precisamente los $MFANs$ para $\mathbb{K}^d$.*

Demostración: Sean $d, N \in \mathbb{N}$ arbitrarios pero fijos, por el hecho de que el potencial de marco es una función continua sobre el conjunto compacto $S\left(\mathbb{K}^d\right)^N$, entonces existe $\{f_k\}_{k=1}^N \in S\left(\mathbb{K}^d\right)^N$ minimizador global de PM. Pero obviamente también es una minimizador local, luego por el teorema 3.4 $\{f_k\}_{k=1}^N$ es o un conjunto ortonormal, o un $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$.

Si $N \leq d$, probaremos que $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{K}^d$. En efecto, si $N < d$, entonces $\{f_k\}_{k=1}^N$ no genera a $\mathbb{K}^d$. Por lo tanto no es un $MFAN$, en consecuencia un conjunto ortonormal. Si $N = d$ tenemos o un conjunto ortonormal o un $MFAN$ con constante de marco $A = N/d = 1$, esto por el teorema 2.5. Ahora por el teorema 2.2 como $A = 1$, entonces $\{f_k\}_{k=1}^N$ es una base ortonormal para $\mathbb{K}^d$ y por lo tanto un sistema ortonormal. En este caso aplicando el teorema 3.3, la cota inferior N es alcanzada por el potencial de marco. En conclusión el mínimo valor del potencial de marco es N, y los minimizadores son precisamente las sucesiones ortonormales en $\mathbb{K}^d$.

Si $N \geq d$ probaremos que $\{f_k\}_{k=1}^N$ es un $MFAN$ en $\mathbb{K}^d$. Si $N > d$, entonces $\{f_k\}_{k=1}^N$ no es un conjunto ortonormal. En consecuencia esta sucesión es un $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$. Si $N = d$ tenemos o un $MFAN$, o un conjunto ortonormal de d vectores en $\mathbb{K}^d$. Por lo tanto un base ortonormal para $\mathbb{K}^d$, y en conclusión un $MFAN$. En este caso aplicando el teorema 3.3, la cota inferior N^2/d es alcanzada por el potencial de marco. En conclusión el mínimo valor del potencial de marco es N^2/d, y los minimizadores son precisamente los $MFAN$ para $\mathbb{K}^d$.

Por los resultados anteriores combinados con el teorema 3.3, se demuestra que los

minimizadores locales alcanzan la cota inferior global para el potencial de marco. □

Este resultado quiere decir que:

1. Minimimizar el potencial de marco equivale a encontrar una sucesión cuyos elementos son "tan ortogonales" a cualquier otro como sea posible.
2. Los $MFANs$ son una extensión natural de las $BONs$, esto es, el teorema formaliza la noción intuitiva que los $MFANs$ son una generalización de las $BONs$.
3. Las $BONs$ y los $MFANs$ son el resultado de la minimización del potencial de marco.

Capítulo 4
GRUPO SIMETRICO DE UN MARCO

En este capitulo se definirá el concepto de grupo simétrico para un marco, propiedades referentes a esta definición y algunos ejemplos de marcos ajustados con su simetría. Tomados del trabajo de Waldron y Vale en [3]. También se estudia los minimizadores del potencial de Coulomb y su relación con el PM.

4.1. El grupo simétrico de una sucesión de vectores

Sea $\Phi = \{f_k\}_{k\in J}$, los grupos simétricos de un marco finito Φ se definen como:

- $Sym(\Phi)$ el cual da una acción fiel sobre las sucesiones de vectores Φ.
- $sym(\Phi)$ el cual da una acción fiel sobre el conjunto de vectores en Φ.

Sea S_J el grupo simétrico sobre el conjunto J, representando el grupo de todas las biyecciones $\sigma : J \to J$ (permutaciones) bajo la operación composición. Si $J = \{1, ..., m\}$ la notación es S_m.

Definición 4.1. *Sea $\Phi = \{f_k\}_{k\in J}$ marco finito para $\mathcal{H}$, entonces el grupo simétrico para Φ es*

$$Sym\left(\Phi\right) := \{\sigma \in S_J : \exists L_\sigma \in \mathcal{GL}\left(\mathcal{H}\right) \ \ con\ L_\sigma f_k = f_{\sigma k}, \forall k \in J\}$$

Se puede probar que $Sym(\Phi)$ es un subgrupo de S_J. En efecto, sean $\sigma, \rho \in Sym(\Phi)$ definimos $L_{\sigma\rho} := L_\sigma L_\rho$. Entonces,

$$L_{\sigma\rho}(f_k) = L_\sigma(L_\rho f_k) = L_\sigma f_{\rho k} = f_{\sigma\rho k} \quad \forall k \in J$$

Por lo tanto, $\sigma\rho \in Sym(\Phi)$. También $Sym(\Phi)$ es cerrado con respecto a inversos, sea $\sigma \in Sym(\Phi)$ definimos $L_{\sigma^{-1}} := (L_\sigma)^{-1}$, entonces

$$L_{\sigma^{-1}}(f_k) = L_\sigma^{-1} f_{\sigma\sigma^{-1}k} = L_\sigma^{-1} L_\sigma f_{\sigma^{-1}k} = f_{\sigma^{-1}k}$$

Por lo tanto, $\sigma^{-1} \in Sym(\Phi)$. Probando entonces nuestra afirmación.
Nótese que el grupo $Sym(\Phi)$ actúa sobre el conjunto $\Lambda := \{f_1, f_2, ..., f_k\}$. Esto es

$$\begin{aligned} Sym(\Phi) \times \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ (\sigma, f_k) &\longrightarrow f_{\sigma k} \end{aligned}$$

Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} \pi_\Phi : Sym(\Phi) &\longrightarrow \mathcal{GL}(\mathcal{H}) \\ \sigma &\longmapsto L_\sigma \end{aligned}$$

es claro que está bien definido. Por otro lado,

$$L_{\sigma\rho} f_k = f_{\sigma\rho k} = L_\sigma f_{\rho k} = L_\sigma L_\rho f_k$$

Por lo tanto, π_Φ es un homomorfismo de grupo. Definamos

$$sym(\Phi) := \pi_\Phi(Sym(\Phi)) = \{L_\sigma : \sigma \in Sym(\Phi)\}$$

Notese que $\pi_\Phi(Sym(\Phi))$ denota un subgrupo de $\mathcal{GL}(\mathcal{H})$. Este es el grupo de transformaciones lineales invertibles el cual mapea el conjunto de vectores en Φ en si mismo. Además, π_Φ es inyectiva; si y solo si los vectores Φ son distintos. Supongamos que algunos vectores de Φ son iguales, digamos $f_1 = f_2$. Consideremos las permutaciones $\sigma = (1\ 2)$ y $\rho = (1)$, es claro que $\sigma \neq \rho$, pero $L_\sigma = L_\rho$. Por lo tanto por el camino de contradicción se demuestra que π_Φ es inyectiva. En este caso

tenemos un isomorfismo de grupos.

$$Sym(\Phi) \cong \pi_\Phi\left(Sym(\Phi)\right) := sym(\Phi)$$

Si Φ es un marco de m vectores, n de cuales son distintos, para un espacio de dimensión d. Además por el hecho de que $Sym(\phi) \preceq S_m$ y $|S_m| = m!$, aplicando el teorema de Lagrange se muestra que:

$$|sym(\Phi)| \mid |Sym(\Phi)| \mid m!, \quad |sym(\Phi)| \leq n(n-1)...(n-d+1)$$

Sea S_Φ operador marco relativo a Φ. Si $g \in \mathcal{GL}\left(\mathcal{H}\right)$, luego

$$S_\Phi = \left(g^*\right)^{-1} S_{g^*\Phi}(f), \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

En particular, si $g \in sym(\Phi)$ es unitaria, luego g conmuta con S_Φ, esto es

$$S_\Phi(gf) = gS_\Phi(f)$$

Esto debido a que $g^* = g^{-1}$ y además $g^{-1}\Phi = \Phi$.

Si Φ es un marco ajustado, entonces $sym(\Phi)$ es un grupo de transformaciones unitarias, y por lo tanto conmuta con el operador marco S_Φ. En efecto, sea $L_\sigma = g \in sym(\Phi)$ y Φ marco A-ajustado, luego $AI = T_{L_\sigma\Phi}T^*_{L_\sigma\Phi}$. Por otro lado,

$$T_{L_\sigma\Phi}(\{c_k\}) = \sum_{k=1}^{m} c_k L_\sigma f_k = L_\sigma \sum_{k=1}^{m} c_k f_k = L_\sigma T_\Phi(\{c_k\})$$

Por lo tanto, $T_{L_\sigma\Phi} = L_\sigma T_\Phi$ y $\left(T_{L_\sigma\Phi}\right)^* = T^*_\Phi L^*_\sigma$. Con esto se tiene que

$$AI = L_\sigma T_\Phi T^*_\Phi L^*_\sigma = L_\sigma AI L^*_\sigma = AL_\sigma L^*_\sigma$$

Por lo tanto, $L_\sigma L^*_\sigma = I$. En conclusión, g es una transformación unitaria. Probando entonces que si Φ es ajustado con vectores distintos, entonces $sym(\Phi)$ es un grupo simétrico de transformaciones unitarias. Para vectores repetidos se tiene que $Sym(\Phi)$ es mas grande que $sym(\Phi)$.

Ejemplo 4.1.1. *Sea* Φ *un marco ajustado representado por* n *vectores igualmente espaciados en* $\mathbb{R}^2$. *Luego,* $sym(\Phi)$ *es el grupo diedral de orden* $2n$, *esto es*

$$sym(\Phi) = D_n = \left\langle r, s : r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \right\rangle$$

donde r *es una rotación de* $\frac{2\pi}{n}$ *y* s *corresponde a una reflexión con respecto a una recta que pasa por el centro del polígono generado y el vértice* 0. *Dado que todas las transformaciones unitarias sobre* $\mathbb{R}^2$ *son productos de rotaciones y reflexiones, es evidente que este es el mas simétrico marco ajusto de* n *vectores distintos en* $\mathbb{R}^2$.

Los grupos simétricos de un marco solo dependen de su similaridad de clases.

Teorema 4.1. *Si* Φ *y* Ψ *son marcos finitos similares, es decir* $\Psi = Q\Phi$, *entonces*

$$Sym(\Psi) = Sym(\Phi), \quad sym(\Psi) = Qsym(\Phi)Q^{-1}$$

En particular, considerando a $\Phi^{can} := \{f_k^{can}\}_{k\in J}$ *y* $\hat{\Phi} := \{S^{-1}f_k\}_{k\in J}$

$$Sym(\Phi) = Sym(\Phi^{can}) = Sym(\hat{\Phi})$$

Demostración: Supongamos que $\Phi = \{f_k\}_{k\in J}$ es similar a $\Psi = \{g_k\}_{k\in J}$, luego existe $Q \in \mathcal{GL}(\mathcal{H})$ con $g_k = Qf_k$, $\forall k \in J$. Sea $\sigma \in Sum(\Phi)$, entonces

$$L_\sigma f_k = f_\sigma k$$
$$QL_\sigma Q^{-1} Qf_k = Qf_{\sigma k}$$
$$(QL_\sigma Q^{-1})g_k = g_{\sigma k}$$

para todo k, luego $\sigma \in Sym(\Psi)$. Por lo tanto,

$$Sym(\Phi) \subset Sym(\Psi) \text{ y } Qsym(\Phi)Q^{-1} \subset sym(\Psi).$$

Por otro lado como la similaridad entre marcos representa una relación de equivalencia, entonces Ψ es similar a Φ. Probando la otra contenencia. $\square$

Teorema 4.2. *Sean Φ y Ψ marcos finitos complementarios, es decir,*

$$Gram(\Phi^{can}) + Gram(\Psi^{can}) = I$$

entonces

$$Sym(\Phi) = Sym(\Psi)$$

Ver demostración en [3].

4.2. Simetrías de combinaciones de marcos

Sea $\Phi = \{f_j\}_{j\in J}$ y $\Psi = \{g_k\}_{k\in K}$ marcos finitos para $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente. El producto interno sobre la suma directa ortogonal $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ y el producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ están dados por

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2)\rangle := \langle f_1, f_2\rangle + \langle g_1, g_2\rangle, \quad \forall (f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$
$$\langle f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2\rangle := \langle f_1, f_2\rangle \langle g_1, g_2\rangle, \quad \forall f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2.$$

Definamos la **unión de marcos** $\Phi \cup \Psi$ con índice $J \cup K$, como sigue

$$\Phi \cup \Psi := \left\{ \begin{pmatrix} f_j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix} \right\}_{j\in J, k\in K}$$

este determina un marco para la suma directa ortogonal $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. En efecto, sea $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$

$$\begin{aligned}\sum_{p\in J\cup K} |\langle (h_1, h_2), \phi_p\rangle|^2 &= \sum_{j\in J} |\langle (h_1, h_2), (f_j, 0)\rangle|^2 + \sum_{k\in K} |\langle (h_1, h_2), (0, g_k)\rangle|^2 \\ &= \sum_{j\in J} |\langle h_1, f_j\rangle|^2 + \sum_{k\in K} |\langle h_2, g_k\rangle|^2\end{aligned}$$

Como Φ,Ψ son marcos finitos para $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$; se prueba que

$$A \left\|(h_1, h_2)\right\|^2 \leq \sum_{p \in J \cup K} \left|\langle (h_1, h_2), \phi_p \rangle\right|^2 \leq B \left\|(h_1, h_2)\right\|^2$$

donde $A = min\left\{A_1, A_2\right\}$ y $B = max\left\{B_1, B_2\right\}$.

Se dice que un marco está **balanceado** si sus vectores suman cero. Podemos encontrar dos nociones de suma de marcos.

- Si Φ o Ψ es balanceado, entonces la suma $\Phi \hat{+} \Psi$ con índice $J \times K$

$$\Phi \hat{+} \Psi := \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|K|}} f_j \\ \frac{1}{\sqrt{|J|}} g_k \end{pmatrix} \right\}_{j \in J, k \in K}$$

es un marco para $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. En efecto, sea $\sum_{k \in K} g_k$

$$\sum_{(j,k) \in J \times K} \left| \left\langle (h_1, h_2), (\frac{1}{|K|} f_j, \frac{1}{|J|} g_k) \right\rangle \right|^2 = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left| \left\langle h_1, \frac{1}{|K|} f_j \right\rangle + \left\langle h_2, \frac{1}{|J|} g_k \right\rangle \right|^2$$

$$= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left(\left\langle h_1, \frac{1}{|K|} f_j \right\rangle + \left\langle h_2, \frac{1}{|J|} g_k \right\rangle \right) \overline{\left(\left\langle h_1, \frac{1}{|K|} f_j \right\rangle + \left\langle h_2, \frac{1}{|J|} g_k \right\rangle \right)}$$

$$= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left| \left\langle h_1, \frac{1}{|K|} f_j \right\rangle \right|^2 + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left| \left\langle h_2, \frac{1}{|J|} g_k \right\rangle \right|^2 = \sum_{j \in J} \left|\langle h_1, f_j \rangle\right|^2 + \sum_{k \in K} \left|\langle h_2, g_k \rangle\right|^2$$

- Si $K = J$, y los marcos son disjuntos, esto es, satisface

$$\sum_{j \in J} \langle f, f_j \rangle \, g_j = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1 \Longleftrightarrow \sum_{j \in J} \langle g, g_j \rangle \, f_j = 0, \quad \forall g \in \mathcal{H}_2,$$

luego la **suma directa** $\Phi \oplus \Psi$ con índice J

$$\Phi \oplus \Psi := \left\{ \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} \right\}_{j \in J}$$

es un marco para $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

El **producto tensorial** $\Phi \otimes \Psi$ con índice $J \times K$ definido como sigue

$$\Phi \otimes \Psi := \left\{ f_j \otimes g_k \right\}_{j \in J, k \in K}$$

es un marco para el espacio de Hilbert producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. En efecto,

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} |\langle h_1 \otimes h_2, f_j \otimes g_k\rangle|^2 = \sum_{j\in J} |\langle h_1, f_j\rangle|^2 \sum_{k\in K} |\langle h_2, g_k\rangle|^2$$

Por lo tanto,

$$A_1A_2 \|h_1\|^2 \|h_2\|^2 \leq \sum_{(j,k)\in J\times K} |\langle h_1 \otimes h_2, f_j \otimes g_k\rangle|^2 \leq B_1B_2 \|h_1\|^2 \|h_2\|^2$$

$$A \|h_1 \otimes h_2\|^2 \leq \sum_{(j,k)\in J\times K} |\langle h_1 \otimes h_2, f_j \otimes g_k\rangle|^2 \leq B \|h_1 \otimes h_2\|^2$$

Proposición 3. *Los grupos simétricos de un marco finito satisfacen:*

1. $Sym(\Phi) \times Sym(\Psi) \subset Sym(\Phi \cup \Psi)$, $sym(\Phi) \oplus sym(\Psi) \subset sym(\Phi \cup \Psi)$
2. $Sym(\Phi) \times Sym(\Psi) \subset Sym(\Phi \hat{+} \Psi)$, $sym(\Phi) \oplus sym(\Psi) \subset sym(\Phi \hat{+} \Psi)$
3. $Sym(\Phi) \times Sym(\Psi) \subset Sym(\Phi \otimes \Psi)$, $sym(\Phi) \otimes sym(\Psi) \subset sym(\Phi \otimes \Psi)$
4. $Sym(\Phi) \cap Sym(\Psi) \subset Sym(\Phi \oplus \Psi)$

Demostración:

1. Sea $\sigma \in Sym(\Phi)$ y $\tau \in Sym(\Psi)$, entonces $L_\sigma \in \mathcal{GL}(\mathcal{H}_1)$ y $L_\tau \in \mathcal{GL}(\mathcal{H}_2)$. Sea $L_{(\sigma,\tau)} = L_\sigma \oplus L_\tau \in \mathcal{GL}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$, esto es

$$L_{(\sigma,\tau)} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} L_\sigma f \\ L_\tau g \end{pmatrix}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1, \forall g \in \mathcal{H}_2, \tag{4.1}$$

donde (σ, τ) es una permutación sobre $J \cup K$. Luego,

$$L_{(\sigma,\tau)} \begin{pmatrix} f_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\sigma f_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\sigma j} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_{(\sigma,\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_\tau g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\tau k} \end{pmatrix}$$

esto es, $(\sigma, \tau) \in Sym(\Phi \cup \Psi)$. Por lo tanto,

$$Sym(\Phi) \times Sym(\Psi) \subset Sym(\Phi \cup \Psi), \quad sym(\Phi) \oplus sym(\Psi) \subset sym(\Phi \cup \Psi)$$

2. Sea (σ, τ) una permutación sobre $J \times K$. Luego, aplicando la transformación lineal 4.1

$$L_{(\sigma,\tau)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|K|}} f_j \\ \frac{1}{\sqrt{|J|}} g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|K|}} f_{\sigma j} \\ \frac{1}{\sqrt{|J|}} g_{\tau k} \end{pmatrix} \in \Phi \hat{+} \Psi.$$

   Por lo tanto, $Sym(\Phi) \times Sym(\Psi) \subset Sym(\Phi \hat{+} \Psi)$ y $sym(\Phi) \oplus sym(\Psi) \subset sym(\Phi \hat{+} \Psi)$

3. Sea $L_{(\sigma,\tau)} = L_\sigma \otimes L_\tau \in \mathcal{GL}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$, entonces

$$L_{(\sigma,\tau)}(f_j \otimes g_k) = (L_\sigma f_j) \otimes (L_\tau g_k) = f_{\sigma j} \otimes g_{\tau k}$$

4. Se prueba directamente de la ecuación 4.1.

□

4.3. Marco partición

La Forma mas simple de obtener un marco de alta simetría es repetir los vectores de una base un numero de veces determinado. Por el teorema 4.2 su complemento es un marco de alta simetría, y resulta que consiste de vectores distintos, este recibe el nombre de **marco partición**.

Sea $\{e_j\}_{j=1}^k$ base ortonormal de $\mathbb{R}^k$.

Definición 4.2. *Sea $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{Z}^k$ una partición de n, esto es,*

$$n := \alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_k \quad 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k.$$

Luego el MAP de 'n' vectores el cual es complementario a el marco

$$(\underbrace{\frac{e_1}{\sqrt{\alpha_1}}, ..., \frac{e_1}{\sqrt{\alpha_1}}}_{\alpha_1}, ..., \underbrace{\frac{e_k}{\sqrt{\alpha_k}}, ..., \frac{e_k}{\sqrt{\alpha_k}}}_{\alpha_k}) \tag{4.2}$$

*para $\mathbb{R}^k$, es llamada el α-**marco partición** para $\mathbb{R}^d$ con $d = n - k$; y este es **propio** si $\alpha_1 \geq 2$.*

Determinamos por 2.16 que la matriz Grammian de la α-marco partición es la matriz $n \times n$ diagonal por bloques

$$P = \begin{bmatrix} B_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_k \end{bmatrix}, \qquad B_j = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j} & \frac{-1}{\alpha_j} & \frac{-1}{\alpha_j} & \cdots & \frac{-1}{\alpha_j} \\ \frac{-1}{\alpha_j} & \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j} & \frac{-1}{\alpha_j} & \cdots & \frac{-1}{\alpha_j} \\ \frac{-1}{\alpha_j} & \frac{-1}{\alpha_j} & \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j} & & \frac{-1}{\alpha_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{-1}{\alpha_j} \\ \frac{-1}{\alpha_j} & \frac{-1}{\alpha_j} & \cdots & \frac{-1}{\alpha_j} & \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

donde el B_j es una matriz proyección ortogonal $\alpha_j \times \alpha_j$ de rango $\alpha_j - 1$.

Proposición 4. *(Vale y Waldron [3]) Sea Φ un α-marco partición propio, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Entonces,*

(a) Φ es un MAP de $n := \alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_k$ vectores distintos para $\mathbb{R}^d$, $d := n - k$.

(b) Φ es un marco armónico (y un G-marco) si y solo si $\alpha_1 = ... = \alpha_k$.

(c) El grupo simétrico de Φ tiene orden

$$|Sym(\Phi)| = \prod_{m \in \alpha_j} m_{\#}!(m!)^{m_{\#}} > n, \qquad m_{\#} := |\{j : \alpha_j = m\}|. \tag{4.4}$$

Ver demostración en [3].

Aprovechando este resultado, proponemos las siguientes particiones la cual determinan α-marco particiones propias para $\mathbb{R}^d$. Se puede notar que $2k \leq n$, $n \geq d + 1$ y $k = n - d$. Luego, $d + 1 \leq n \leq 2d$. Los 'n' indica la cantidad de vectores con alta simetría para $\mathbb{R}^d$. Consideremos entonces las siguientes particiones para estos vectores:

Para $n = d + 1$,

$$\alpha = (d + 1).$$

Para $d+1 < n \leq 2d-1$,

$$\alpha = (\underbrace{2, 2, ..., 2}_{n-(1+d)-veces}, 2d+2-n).$$

Finalmente si $n = 2d$,

$$\alpha = (\underbrace{2, 2, ..., 2}_{d-veces})$$

Note que estas particiones son de $k = 1, ..., d$. Por otro lado también se puede calcular el orden del grupo simétrico determinado por estas particiones. Para los vectores $d+1 \leq n \leq 2d-1$,

$$|Sym\Phi_n| = (n-1-d)!2!^{n-1-d}(2d+2-n)!.$$

Para $n = 2d$,

$$|Sym\Phi| = d!2!^d.$$

Por la proposición anterior se tiene que estos α-marco particiones determinan $MAPs$ para $\mathbb{R}^d$.

A manera de ejemplo considérese a $\mathbb{R}^3$, según nuestra construcción tenemos marcos de $n = 4, 5, 6$ vectores con particiones: (4), $(2, 3)$, $(2, 2, 2)$. Además, el orden de simetría para sus α-marco particiones son, $|Sym\Phi_4| = 24$, $|Sym\Phi_5| = 12$ y $|Sym\Phi_6| = 48$.

Para $\alpha = (2, 2, 2)$, el α-marco partición se describe como los vértices de un octaedro.(figura 4–1).

4.4. Marcos ajustados equiangulares

El Siguiente teorema nos garantiza que todo Marco ajustado de Parseval puede ser realizado como la proyección de una BON de un espacio mas grande.

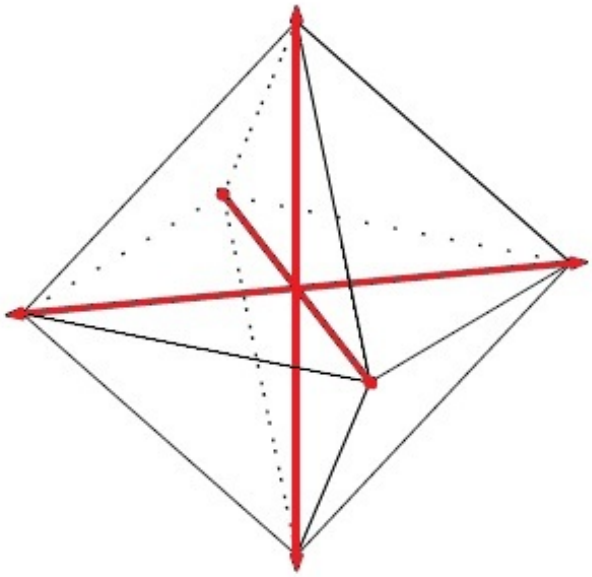


Figura 4–1: El $(2,2,2)$-marco partición, representado por los vértices de un octaedro.

Teorema 4.3. *(Teorema de Naimark, Han y Larson[9]) Una sucesión* $\Phi = \{f_j\}_{j=1}^{N}$ *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *es un marco ajustado de Parseval para* $\mathcal{H}$ *si y solo si existe un espacio de Hilbert* $\mathcal{K}$*, tal que* $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$*, y una BON* $\{e_j\}_{j=1}^{N}$ *para* $\mathcal{K}$ *tal que la proyección ortogonal* P *de* $\mathcal{K}$ *sobre* $\mathcal{H}$ *satisface que* $Pe_j = f_j$*, para todo* $j = 1, ..., N$*.*

Una demostración a este teorema las suministran Han y Larson en [9].

Definición 4.3. *Un marco ajustado* $\Phi = \{f_j\}_{j=1}^{N}$ *en* $\mathbb{K}^d$ *se dice* ***equiangular****, sii*

1. $|\langle f_j, f_k \rangle| = \mu \quad \forall j \neq k$*, donde* μ *es constante.*
2. $\|f_k\| = 1 \ \forall k$*.*

Los MAE son un objeto geométrico que puede ser visto como una colección de líneas que pasan a través del origen. El numero μ en la definición representa el coseno del ángulo agudo entre cada par de líneas. El marco de Mercedes Benz ilustra este hecho (figura 4–2).

Para todo par de (N, d) no es posible encontrar MAE. Algunos resultados de la existencia de MAE y aplicaciones pueden encontrarse en [10], [11].

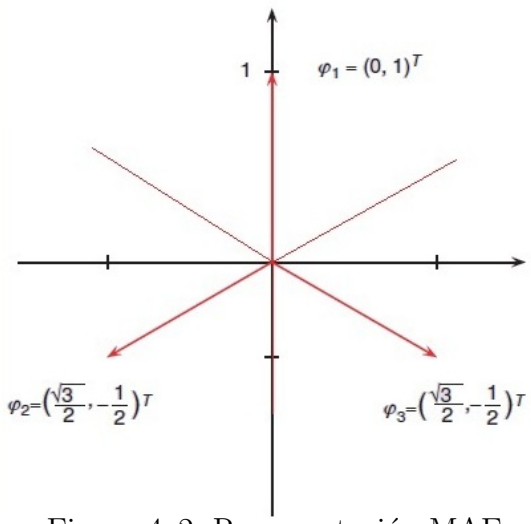


Figura 4–2: Representación MAE

Por el teorema 2.5 la cota de marco es $\frac{N}{d}$, entonces para j fijo se tiene que:

$$\frac{N}{d} = \sum_{k=1}^{N} |\langle f_j, f_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{k\neq j} |\langle f_j, f_k\rangle|^2 + 1 = (N-1)\,|\langle f_j, f_k\rangle|^2 + 1$$

Por lo tanto,

$$|\langle f_j, f_k\rangle| = \sqrt{\frac{N-d}{d(N-1)}}.$$

Es imposible construir una sucesión de vectores MAE tal que el producto interior sea inferior a ese valor.

Proposición 5. *Dado $d > 1$ fijo, y supongamos que $\Phi = \{f_j\}_{j=1}^{N}$ es una sucesión en $\mathbb{K}^d$ con norma unitaria. Entonces*

$$\max_{j\neq k} \{|\langle f_j, f_k\rangle|\} \geq \sqrt{\frac{N-d}{d(N-1)}} \tag{4.5}$$

Esta cota es alcanzada sii Φ es un MAE.

Esta desigualdad es debido a Welch [12]. Una prueba a esta proposición se consigue en [11].

Ejemplo 4.4.1. *Existen familias de MAEs que surgen para todo $d > 1$.*

a. ***Bases Ortonormales**. Cuando $N = d$, el único ejemplo son las matrices unitarias y ortogonales. Evidente mente el producto interno entre vectores diferentes es cero.*

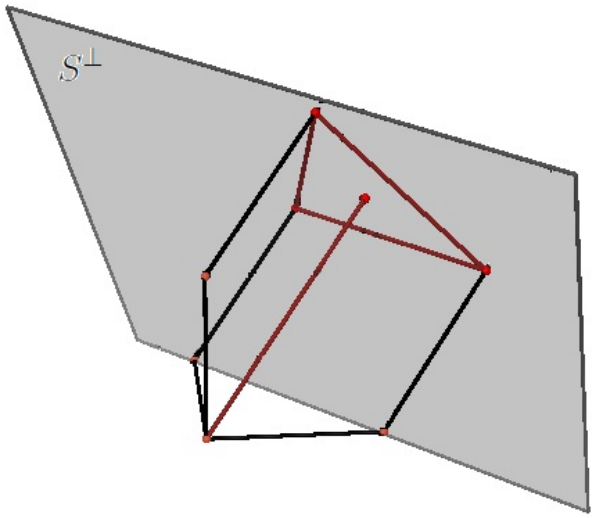


Figura 4–3: Proyección de la BON para $\mathbb{R}^3$ al complemento ortogonal del vector $[1,1,1]$ generando el marco Mercedes Benz(2-simplex).

b. ***Simpliciales.*** *Cuando $N = d+1$, cada MAE puede ser ilustrado como los vértices de un simplex regular centrado en el origen [11]. La forma mas fácil de obtener una configuración de este tipo es calculando la proyección ortogonal de una base estándar en $\mathbb{R}^{d+1}$ sobre el complemento ortogonal del vector $[1,1,...,1]^T \in \mathbb{R}^{d+1}$. Después los vectores proyectados son re-escalados a una norma unitaria. Esta configuración está en un subespacio d-dimensional. Esto es valido gracias a el teorema 4.3, aquí $\mu = 1/d$. Note que el complemento ortogonal de $[1,1,...,1]^T$ es:*

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1 + x_2 + \cdots + x_{d+1} = 0\right\} \\ &= \langle (1,0,...,0,-1), (0,1,...,0,-1), \cdots, (0,\cdots,0,1,-1)\rangle \cong \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

c. ***Marco Degenerado*** *Cuando $d = 1$, es un MAE el cual $|\langle f_j, f_k\rangle| = 1$ para todo $j,k \in 1,2,...,N$.*

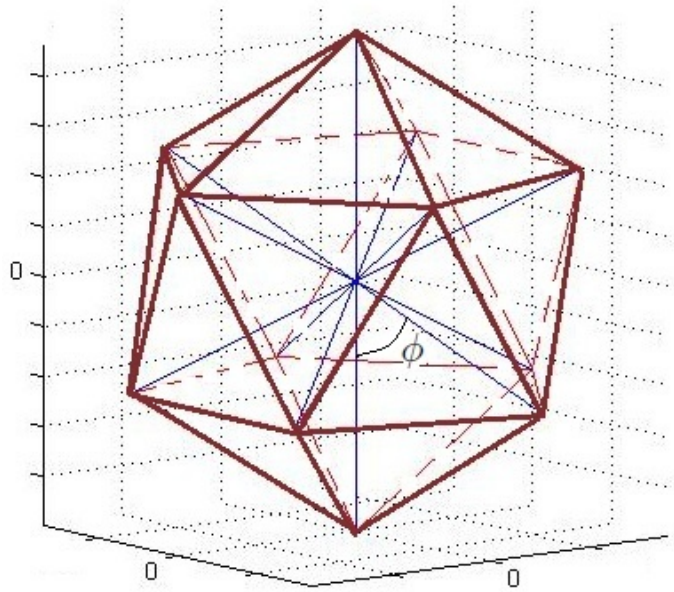


Figura 4–4: MAE determinado por los vértices de un Icosaedro.

Ejemplo 4.4.2. *Un claro ejemplo de un MAE real, consiste de seis vectores en* $\mathbb{R}^3$. *Este puede ser construido escogiendo seis vértices no-antipodales de un icosaedro(Figura4–4) centrado en el origen. Es decir,*

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \beta & -\beta \\ 1 & 1 & \beta & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{donde } \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Se puede probar que $S = TT^* = 2I$ *por lo tanto el conjunto de vectores determina un marco ajustado y normalizado para* $\mathbb{R}^3$. *Además* $|\langle f_j, f_k\rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ *para* $j \neq k$, *es decir es un MAE. Note que el ángulo entre las líneas es* $\phi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

El siguiente teorema presenta una clasificación de los MAE Reales. La prueba se puede encontrar en [13].

Teorema 4.4. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

I. El espacio $\mathbb{R}^d$ *tiene un marco ajustado equiangular de* N *con* $\mu = 1/\alpha$.

II. Tenemos

$$N = \frac{(\alpha^2-1)d}{\alpha^2-d}$$

y existe N *líneas equiangulares en* $\mathbb{R}^d$ *con* $\mu = 1/\alpha$. *Mas aún, en este caso se tiene:*

(1) $\alpha \leq d \leq \alpha^2 - 2$.

(2) $d = \alpha$ *si y solo si* $N = d + 1$.

(3) $d = \alpha^2 - 2$ *si y solo si* $N = \frac{d(d+1)}{2}$

(4) $N = 2d$ *si y solo si* $\alpha^2 = 2d - 1 = a^2 + b^2$, a, b *enteros.*

Si $N \neq d + 1$, $2d$ *entonces:*

(5) α *es un entero impar.*

(6) N *es impar.*

(7) α *divide a* $N - 1$.

El teorema anterior nos da la ventaja que al descubrir el numero maximal N de líneas equiangulares con $\mu = 1/\alpha$, podemos inmediatamente descubrir los MAE derivados de esta.

4.5. Sistema Mercedes Benz

Miremos un tipo de MAEs que tiene $d+1$ vectores en $\mathbb{R}^d$, junto con la conexión con los grafos [14]. Recordemos que para el marco Mercedes Benz $\{f_k^2\}_{k=1}^3$ en $\mathbb{R}^2$, se tiene que $\langle f_j, f_k \rangle = -\frac{1}{2}$ para $k \neq j$.

En $\mathbb{R}$ solo se tiene los vectores $f_1^1 = 1$ y $f_2^1 = -1$ trivialmente es un marco ajustado y $\langle f_1, f_2 \rangle = -1$;a este se le denomina Marco Mercedes-Benz para $\mathbb{R}$. Consideremos la siguiente definición la cual nos permitirá generalizar la idea del marco de Mercedes Benz en $\mathbb{R}^d$; el cual tiene aplicaciones en comunicaciones, teoría de códigos y computación cuántica.

Definición 4.4. *Una sucesión* $\{f_k\}_{k=1}^{d+1}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *de vectores unitarios es llamada un sistema Mercedes-Benz si:*

$$\langle f_j, f_k \rangle = -\frac{1}{d} \text{ para } k \neq j, \text{ y } \sum_{k=1}^{d+1} f_k = 0.$$

Teorema 4.5. *(Mohammad and Najafi [14]) Un sistema Mercedes-Benz* $\left\{f_k^d\right\}_{k=1}^{d+1}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *es un MFAN.*

Demostración: Probemos este hecho por inducción sobre d. Para $d = 1$ y $d = 2$ es trivial, dado que $S_1 = 2I$ y $S_2 = \frac{3}{2}I$. Por inducción asumamos que se cumple para $d = n - 1$, sea $\left\{f_k^{n-1}\right\}_{k=1}^{n}$ en $\mathbb{R}^{n-1}$ un marco ajustado es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\left\langle f, f_k^{n-1}\right\rangle\right|^2 = \frac{n}{n-1}\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Probemos ahora para $d = n$.

Sea $f \in \mathbb{R}^n$ y $f = (f^{n-1}, g)^T$, en donde $g \in \mathbb{R}$. Sea $f_{n+1}^n = (0, 0, ..., 1)^T$ y $f_k^n = c_n(f_k^{n-1}, -h_n)^T$, en donde c_n y h_n son constantes reales, y $k = 1, ..., n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} |\langle f, f_k^n\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |\langle f, f_k^n\rangle|^2 + \left|\left\langle f, f_{n+1}^n\right\rangle\right|^2 \\
&= c_n^2 \sum_{k=1}^{n} \left|\left\langle f^{n-1}, f_k^{n-1}\right\rangle - g h_n\right|^2 + g^2 \\
&= c_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\left\langle f^{n-1}, f_k^{n-1}\right\rangle\right|^2 - 2gh_n \left\langle f^{n-1}, \sum_{k=1}^{n} f_k^{n-1} \right\rangle + n g^2 h_n^2 \right) + g^2 \\
&= c_n^2 \frac{n}{n-1} \left\|f^{n-1}\right\|^2 + \left(n c_n^2 h_n^2 + 1\right) g^2
\end{aligned}$$

Ahora determinemos las constantes c_n y h_n. Note que:

$$1 = \|f_k^n\|^2 = c_n^2(1 + h_n^2).$$

Además

$$-\frac{1}{n} = \left\langle f_n^n, f_{n+1}^n \right\rangle = -c_n h_n$$

Luego,

$$c_n h_n = \frac{1}{n} \text{ y } c_n^2 = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}|\langle f,f_k^n\rangle|^2 &= c_n^2\frac{n}{n-1}\left\|f^{n-1}\right\|^2+\left(nc_n^2h_n^2+1\right)g^2\\ &= \frac{n+1}{n}\left\|f^{n-1}\right\|^2+\frac{n+1}{n}g^2\\ &= \left(\frac{n+1}{n}\left\|f^{n-1}\right\|^2+g^2\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\|f\|^2\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\{f_k^n\}_{k=1}^{n+1}$ en un marco ajustado para $\mathbb{R}^n$. Por prueba de inducción se cumple para todo d natural, probando así este teorema. □ Con el sistema Mercedes Benz se tiene ventajas a la hora de hallar su matriz de Grammian. El Grammian de un marco equiangular $\{f_k\}_{k=1}^N$, tal que $|\langle f_j,f_k\rangle| = C > 0$ es el siguiente:

$$G=\begin{bmatrix}1 & Cz_{12} & Cz_{13} & \cdots & Cz_{1N}\\ C\overline{z_{21}} & 1 & Cz_{23} & \cdots & Cz_{2N}\\ C\overline{z_{31}} & C\overline{z_{32}} & 1 & \cdots & Cz_{3N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ C\overline{z_{N1}} & C\overline{z_{N2}} & C\overline{z_{N3}} & \cdots & 1\end{bmatrix}=I+CQ;\quad Q=\begin{bmatrix}0 & z_{12} & z_{13} & \cdots & z_{1N}\\ \overline{z_{21}} & 0 & z_{23} & \cdots & z_{2N}\\ \overline{z_{31}} & \overline{z_{32}} & 0 & \cdots & z_{3N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \overline{z_{N1}} & \overline{z_{N2}} & \overline{z_{N3}} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Donde $|z_{ij}| = \left|\frac{\langle f_j,f_k\rangle}{|\langle f_j,f_k\rangle|}\right| = 1$, y Q es la matriz Hermitiana $N\times N$ con diagonal cero y entradas de modulo 1, esta recibe el nombre de **matriz firma**. Esta matriz tiene una correspondencia 1-1 con los marcos equiangulares de N vectores. Además para marcos ajustados equiangular tenemos que Q tiene exactamente dos autovalores. Ver [15]. Consideremos ahora la matriz Q sobre $\mathbb{R}$, en este caso la matriz firma recibe el nombre de **matriz de Seidel**(1966).

Definición 4.5. *Dado un grafo G, una permutación σ de $V(G)$ es un automorfismo de G si para todo $u, v \in V(G)$*

$$uv \in E(G) \Longleftrightarrow \sigma(u)\sigma(v) \in E(G)$$

El conjunto de todos los automorfismos de un grafo G, bajo la operación de composición de funciones, forman un subgrupo del grupo simétrico sobre $V(G)$ llamado el grupo automorfismo de G, y se denota por $Aut(G)$.

Definición 4.6. *La matriz de Seidel o matriz adyacencia Q de un grafo G con N vértices es la matriz $N \times N$ con -1 en la (j,k)-entrada si los vértices j y k son adyacentes(conectados por una arista), un 1 si ellos son no-adyacentes, y 0 en la entrada diagonal.*

Los marcos equiangular de $n > d$ vectores para $\mathbb{R}^d$ están en correspondencia 1-1 con sus grafos determinados por la matriz de Seidel. Por lo tanto el grupo simétrico de tal marco real equiangular es el automorfismo correspondiente al grafo. Esta correspondencia $1-1$ ha sido estudiada recientemente en ([16],[17]).

Ejemplo 4.5.1. *Consideremos el sistema Mercedes Benz para $\mathbb{R}^d$, con matriz Gramian $(d+1) \times (d+1)$ como sigue:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1/d & -1/d & \cdots & -1/d \\ -1/d & 1 & -1/d & \cdots & -1/d \\ -1/d & -1/d & 1 & \cdots & -1/d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1/d & -1/d & -1/d & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I + \frac{1}{d}Q;$$

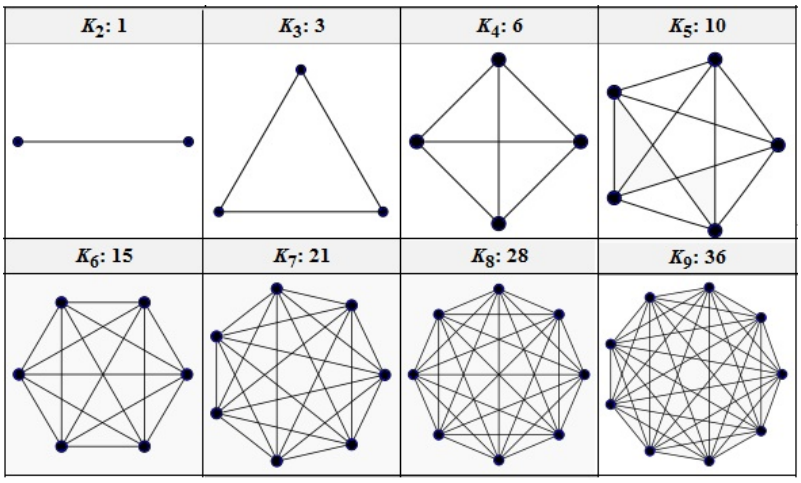


Figura 4–5: Grafos para el marco Mercedes Benz

Por lo tanto, la matriz de Seidel es:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Para $d = 1, ..., n$, el correspondiente grafo a Q es un grafo completo K_{d+1}. Con $Aut(K_{d+1}) = S_{d+1}$, es decir $|Aut(K_{d+1})| = (d+1)!$. Ver 4–5.

4.6. Marcos armónicos

Consideremos el siguiente conjunto de vectores en $\mathbb{C}^M$,

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{M}} \left(1, \omega^{(k-1)}, \omega^{2(k-1)}, ..., \omega^{(M-1)(k-1)}\right), \; k = 1, 2, ..., M$$

Donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{M}}$, la M-sima raíz de la unidad. Estos vectores determinan una base ortonormal para $\mathbb{C}^M$. A la matriz $M \times M$ que forman estos vectores recibe el nombre

de Transformada de Fourier Discreta(TFD).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{M-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{M-1} & \omega^{2(M-1)} & \ldots & \omega^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}$$

Por el teorema de Naimark, podemos tomar cualquier N filas con $N < M$, de la matriz anterior, para obtener un marco de Parseval con M vectores para $\mathbb{C}^N$; este recibe el nombre de **marco armónico** . Consideremos el siguiente ejemplo. Sea $f_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix}$, $f_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{bmatrix}$, $f_4 := \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^3 \\ \omega^6 \end{bmatrix}$, $f_5 := \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^4 \\ \omega^8 \end{bmatrix}$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ el marco ajustado para $\mathbb{C}^3$. Este marco posee simetrías determinadas por la matriz diagonal Unitaria $U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{bmatrix}$, la cual genera un grupo cíclico $G = \langle U \rangle \subset sym(\Phi = \{f_k\}_{k=1}^5)$ de orden 5. Cada uno de los vectores del marco Φ puede generarse del grupo cíclico G. Es decir, $\Phi = Gf$, $\forall f \in \Phi$ En general, para cualquier $N < M$ filas seleccionas de la matriz de Fourier de M columnas. Obtenemos un Marco con al menos M simetrías para $\mathbb{C}^N$, determinadas por un grupo cíclico de orden M generado por una matriz diagonal unitaria U [18]. Estos también reciben el nombre de Marcos Cíclicos. Si se desea estos marcos se pueden re-escalar para obtener marcos ajustados con norma unitaria, gozan de amplio uso debido a la sencillez de su construcción, ver [6].

4.7. Geometría de un sistema de vectores que minimizan el PM en $\mathbb{R}^3$

Para conseguir los vectores que son un MFAN es necesario minimizar el PM, pero esta tarea resulta complicada debido a que el número de mínimos locales crece geométricamente con el numero de vectores, deseamos construir una sucesión de vectores las cuales tengan propiedades geométricas muy particulares. Explorando la literatura se encontró que en 1904 el físico británico J.J. Thomson propuso el problema de encontrar la configuración de mínimo potencial de Coulomb para N electrones. Este problema ha sido estudiado extensivamente, hoy en día se tiene plenamente caracterizadas las primeras 400 configuraciones óptimas publicadas recientemente por David J. Wales and Sidika Ulker [19].

La idea es utilizar los N vectores hallados en [20],[21] productos de minimizar el potencial de Coulomb , y probar que minimizan el PM, es decir determinan un $MFAN$ por el teorema de Benedetto y Fickus. En [20] se encuentra un software en línea desarrollado por Mark Bowick, Cris Cecka.

Para darle , mayor solides a la anterior afirmación también se probó con la data conseguida que el operador marco $S = TT^* \approx \frac{N}{3} I$. A manera de ejemplo consideremos el caso de $N = 9$, luego se tiene que

$$T = \begin{bmatrix} -0.279 & 0.565 & -0.97 & 0.823 & -0.415 & 0.403 & -0.537 & 0.574 & -0.157 \\ 0.52 & -0.795 & 0.205 & 0.502 & -0.374 & -0.386 & -0.777 & 0.180 & 0.923 \\ -0.806 & 0.217 & 0.031 & -0.261 & 0.828 & -0.8293 & -0.327 & 0.798 & 0.349 \end{bmatrix}$$

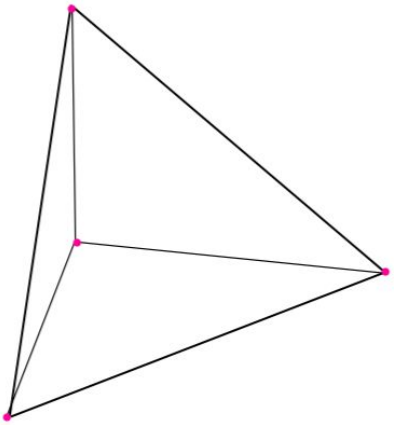
Se calcula entonces que:

$$S = \frac{9}{3} \begin{bmatrix} 1.0043 & -0.0024 & 0.0009 \\ -0.0024 & 0.9924 & 0.0045 \\ 0.0009 & 0.0045 & 1.0031 \end{bmatrix}$$

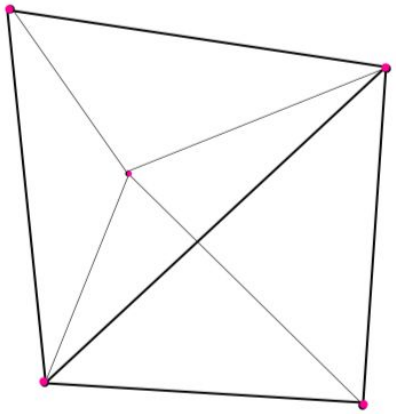
Por lo tanto planteamos la siguiente conjetura:

Todo mínimo del potencial de Coulomb es un marco ajustado normalizado.

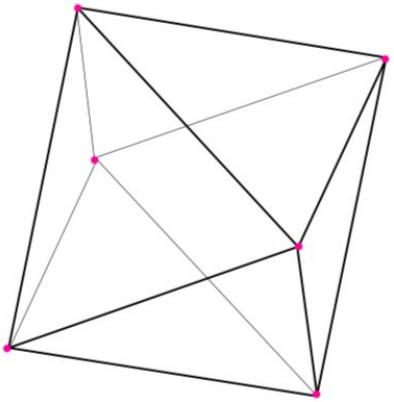
A continuación se dará una lista de gráficas determinadas por los vectores que son un $MFAN$ para algunos valores de N.



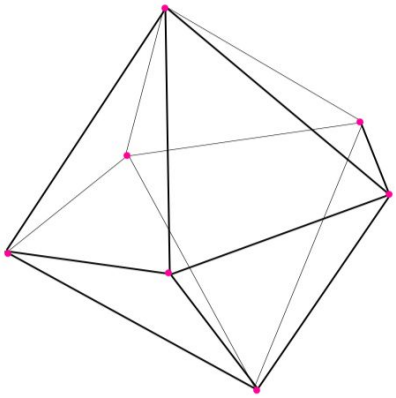
(a) $N = 4$, $|Sym(\Phi)| = 24$
$PM = 5.333$, $PM_{min} = 5.333$



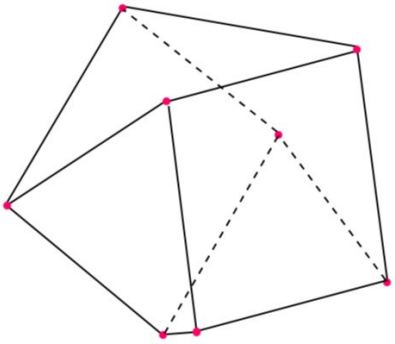
(b) $N = 5$, $|Sym(\Phi)| = 12$
$PM = 8.499$, $PM_{min} = 8.33$



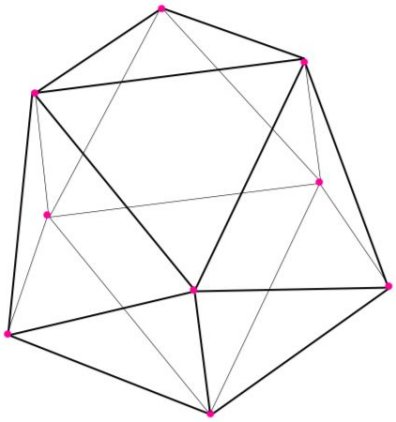
(c) $N = 6$, $|Sym(\Phi)| = 48$
$PM = 12$, $PM_{min} = 12$



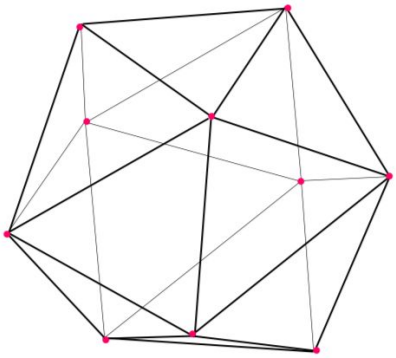
(d) $N = 7$, $|Sym(\Phi)| = 20$
$PM = 16.5$, $PM_{min} = 16.333$



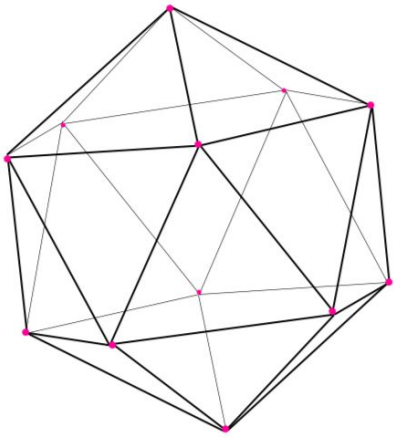
(e) $N = 8$, $|Sym(\Phi)| = 16$
$PM = 21.368$, $PM_{min} = 21.333$



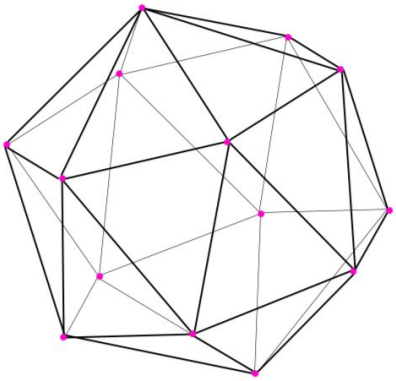
(f) $N = 9$, $|Sym(\Phi)| = 12$
$PM = 27.001$, $PM_{min} = 27$



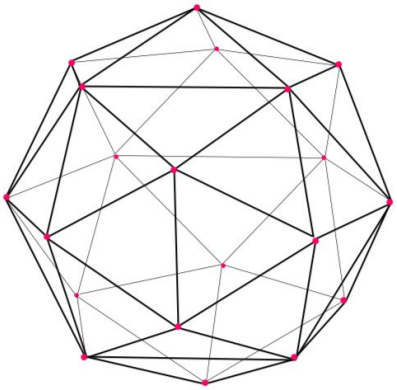
(a) $N = 10$, $|Sym(\Phi)| = 16$
$PM = 33.347$, $PM_{min} = 33.333$



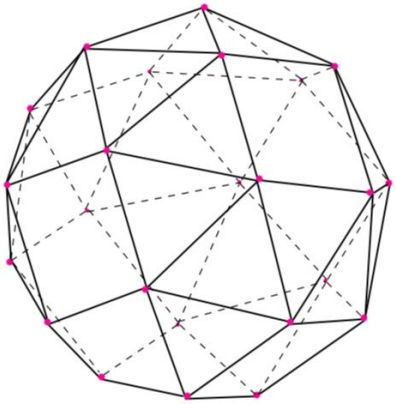
(b) $N = 12$, $|Sym(\Phi)| = 120$
$PM = 48$, $PM_{min} = 48$



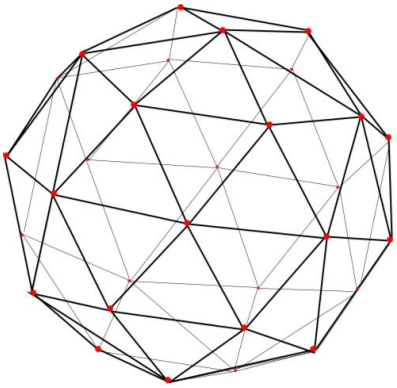
(c) $N = 14$, $|Sym(\Phi)| = 24$
$PM = 65.381$, $PM_{min} = 65.333$



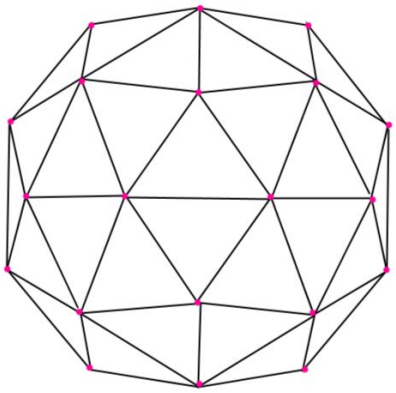
(d) $N = 20$, $|Sym(\Phi)| = 12$
$PM = 133.333$, $PM_{min} = 133.333$



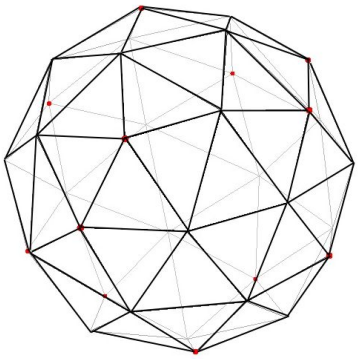
(e) $N = 24$, $|Sym(\Phi)| = 24$
$PM = 192$, $PM_{min} = 192$



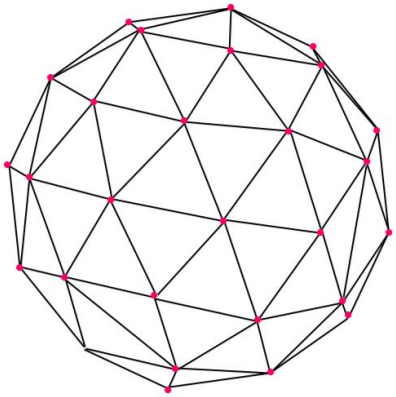
(f) $N = 30$, $|Sym(\Phi)| = 4$
$PM = 300.006$, $PM_{min} = 300$



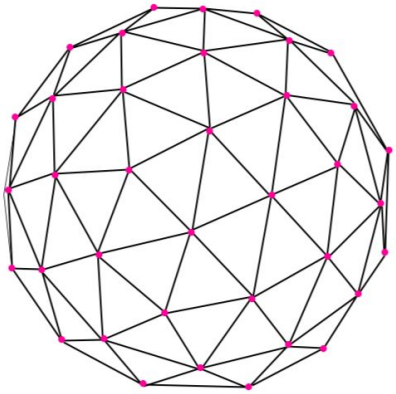
(a) $N = 32$, $|Sym(\Phi)| = 120$
$PM = 341.333$, $PM_{min} = 341.333$



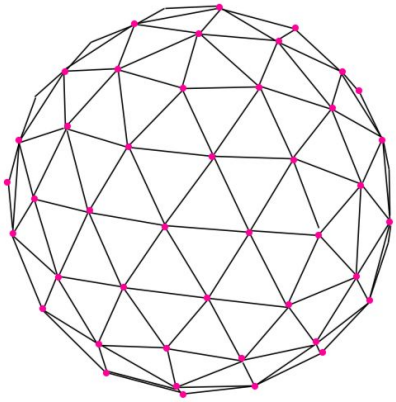
(b) $N = 35$, $|Sym(\Phi)| = 2$
$PM = 408.335$, $PM_{min} = 408.333$



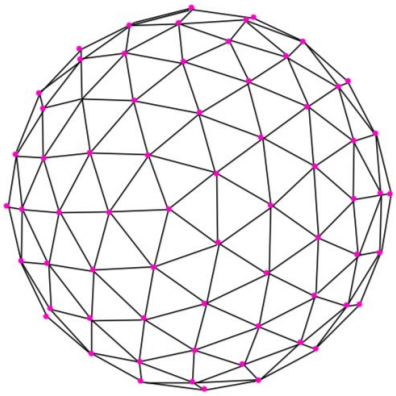
(c) $N = 44$, $|Sym(\Phi)| = 48$
$PM = 645.333$, $PM_{min} = 645.333$



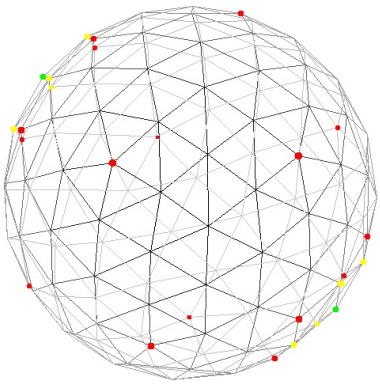
(d) $N = 62$, $|Sym(\Phi)| = 10$
$PM = 1281.334$, $PM_{min} = 1281.333$



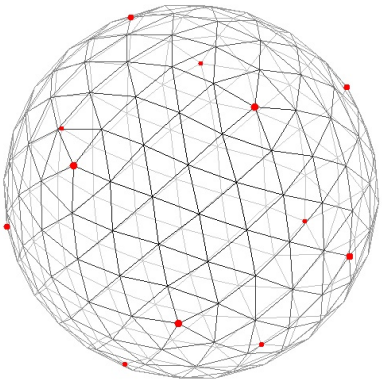
(e) $N = 77$, $|Sym(\Phi)| = 10$
$PM = 1976.335$, $PM_{min} = 1976.333$



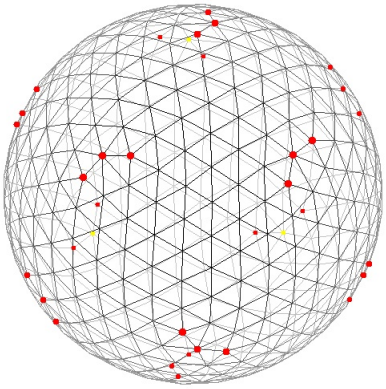
(f) $N = 122$, $|Sym(\Phi)| = 120$
$PM = 4961.333$, $PM_{min} = 4961.333$



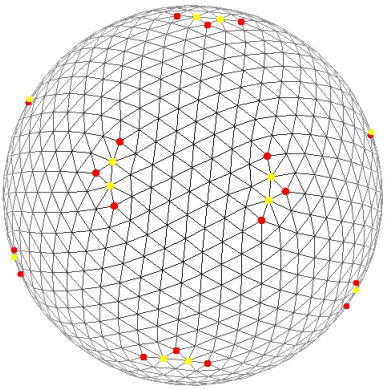
(a) $N = 126$, $|Sym(\Phi)| = 8$
$PM = 5292.001$, $PM_{min} = 5292$



(b) $N = 201$, $|Sym(\Phi)| = 1$
$PM = 13467.001$, $PM_{min} = 13467$



(c) $N = 470$, $|Sym(\Phi)| = 6$
$PM = 73633.335$, $PM_{min} = 73633.333$



(d) $N = 972$, $|Sym(\Phi)| = 24$
$PM = 314928$, $PM_{min} = 314928$

Figura 4–6: Configuración de los minimizadores para el potencial de Coulomb y el Potencial de marco, para cierto N en $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 5
CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

5.1. Conclusiones

1. Los marcos ajustados constituyen una herramienta poderosa para el análisis y la reconstrucción de vectores, y por su fácil construcción algorítmica.
2. La simetrías de un marco está íntimamente relacionada con su configuración geométrica. Como lo muestra el sistema de Mercedes Benz para $\mathbb{R}^d$ con $|sym(\Phi)| = (d+1)!$ simetrías, y los marcos Armónicos con $|sym(\Phi)| \geq N$ simetrías.
3. Minimizar el marco potencial en $\mathbb{R}^d$ nos debe brindar una receta para construir $MFANs$ para todo $N > d$. Además la evidencia sugiere que dichos minimizadores deben tener propiedades geométricas muy particulares.
4. La partición construida garantiza la existencia de marcos partición con orden de simetría alto.
5. La evidencia sugiere que todo mínimo del potencial de Coulomb, es a su vez mínimo del PM. Como habíamos conjeturado.
6. Se nota que existen muchas configuraciones con buena simetría las cuales son $MFANs$.

5.2. Trabajos futuros

Algunos trabajos futuros que podríamos considerar son los siguientes:

a) Encontrar analíticamente los vectores los cuales minimizan el marco potencial.

b) Probar bajo que condiciones los minimizadores del marco potencial PM satisfacen que $Sym(\Phi) \neq \{e\}$. Donde Φ es el marco producto de minimizar PM.

c) Definir un nuevo marco potencial, con ello se busca que los minimizadores tengas propiedades deseables. Entre estas que los marcos tengan alta simetría.

d) Construir marcos con simetrías específicas y determinar su relación si existe con lo grafos.

e) Caracterizar los marcos con alta simetría en $\mathbb{K}^d$.

Bibliografía

[1] R. J. Duffin and A.C Schaeffer. A class of nonharmonic fourier series. *Amer. Math. Soc*, 72:341–366, 1952.

[2] J.J. Benedetto and M Fickus. Finite normalized tight frames. *Adv. Comput. Math*, 18:357–385, 2003.

[3] R. Vale and S. Waldron. The symmetry group of a finite frame. *Linear Algebra and Its Applications*, 433:248–262, 2010.

[4] I. Daubechies. Ten lectures on wavelets. *SIAM Philadelphia*, 1992.

[5] P.G. Casazza and J. Kovacevic. Equal-norm tight frames with erasures. *Advances in Computational Mathematics, special issue on Frames*, 2002.

[6] Ole Christensen. *Frames and bases. An introductory course*. Birkhäuser Boston, first edition, 2008.

[7] Vivek Goyal; Jelena Kovacevic; Jonathan Kelner. Quantized frame expansions with erasures. *Appl. Comput. Harmon. Anal*, 10:203–233, 2001.

[8] Ahmad Safapour and Maryam Shafiee. Constructing finite frames via platonic solids. *Iranian journal of mathematics sciences and informatics*, 7:35–41, 2012.

[9] D. Han and D.R Larson. Frames, bases and group representations. *AMS American Mathematical Society, no. 697*, 2000.

[10] P. W. H. Lemmens and J.J Siedel. Equiangular lines. *J. Algebra*, 24:494–512, 1973.

[11] T. Strohmer and R. Heath. Grassmannian frames with applications to coding and communications. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 14:257–275, 2003.

[12] L. R Welch. Lower bounds on the maximum cross-correlation of signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20:397–399, 1974.

[13] P.G. Casazza and D. Redmond. Real equiangular frames. *Preprint.*

[14] Mohammad and Najafi. Type of equiangular tight frames with $n+1$ vectores in $\mathbb{R}^n$. *International Journal of Applied Mathematical*, 4:391–401, 2012.

[15] Shayne Waldron. On the construction of equiangular frames from graphs. *Linear Algebra Appl*, 431:2228–2242, 2009.

[16] B.G. Bodmann and V.I. Paulsen. Frames, graphs and erasures. *Linear Algebra Appl*, 404:118–146, 2005.

[17] M.A. Sustik; J.A. Tropp; I.S. Dhillon; R.W. Heath. On the existence of equiangular tight frames. *Linear Algebra Appl*, 426:619–635, 2007.

[18] R. Vale and S. Waldron. Tight frames and their symmetries. *Constr. Approx*, 21:83–112, 2005.

[19] David J. Wales and Sidika Ulker. Structure and dynamics of spherical crystals characterized for the thomson problem. *Phys. Rev. B*, 74:212101, 2006.

[20] Cris Cecka. http://thomson.phy.syr.edu. *Syracuse University.*

[21] EB. Saff and A.B.J. Kuijlaars. Distributing many points on a sphere. *The mathematical intelligencer*, 19:2–11, 1997.

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE MARCOS FINITOS Y AJUSTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT DE DIMENSIÓN FINITA

Fabian Seoanes Correa
fabian.seoanes@upr.edu
Departamento de Ciencias Matemáticas
Consejero: Juan Romero
Grado: Maestría en Ciencias
Fecha de Graduación:Diciembre 2012

En este trabajo se estudia los Marcos finitos y Ajustados bajo una perspectiva geométrica, se caracterizan los marcos mediante el concepto de marco potencial. Además se estudia el Grupo simétrico de un marco finito. Esto nos permitirá estudiar la riqueza geométrica que tiene estos sistemas.