

Diseño de gráfico EWMA para la dispersión del proceso usando la transformación de la normal inversa

por

Orlando José Mézquita Fabián

Tesis sometida en cumplimiento completo de los requisitos para el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS
en
INGENIERÍA INDUSTRIAL

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ
2011

Aprobado por:

Héctor J. Carlo, PhD
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Mercedes Ferrer-Alameda, ME
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Noel Artiles-León, PhD
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Maria Amador Dumais, PhD
Representante, Estudios Graduados

Fecha

Viviana I. Cesaní, PhD
Directora del Departamento

Fecha

Abstract

In this thesis two control charts for monitoring the dispersion of a variable are designed and compared. Both charts are based on an Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) and the inverse normal transformation is used to improve the ability of the charts for detecting a change in the variability of the variable that is being monitored.

A control chart with two control limits was introduced to monitor increases and decreases in the dispersion of the process and a control chart with one control limit was introduced to monitor increases in process dispersion. The Average Run Length (ARL) of the charts was obtained using Markov Chains and the design of the charts was made possible through regression functions that provide optimal values for parameters λ and K .

When comparing the charts, we determined that the control chart with two control limits detects changes in process dispersion faster than the EWMA chart based on a logarithmic transformation, and faster than the control charts R and S for less than 50 percent increase in process dispersion. For the case of the control chart with one control limit, the performance was similar to the control chart based on a logarithmic transformation introduced by Crowder and Hamilton (1992) but have a better performance than charts R and S.

Resumen

En esta tesis se diseñan y comparan dos gráficos de control, basados en el “Exponentially Weighted Moving Average” (EWMA), para monitorear la dispersión de una variable. En ambos casos, se le aplica la transformación de la normal inversa al estadístico EWMA para mejorar la habilidad de los gráficos para detectar cambios en la variabilidad de la variable que se monitorea.

Se construyó un gráfico de control con dos límites para monitorear incrementos y disminuciones en la dispersión del proceso y otro con un límite de control para monitorear incrementos en la dispersión del proceso. El largo de corrida promedio (ARL) de los gráficos se calculó con cadenas de Markov y el diseño se hizo posible usando funciones de regresión que producen los valores óptimos de los parámetros λ y K .

Al hacer las comparaciones, se determinó que el gráfico con dos límites de control supera consistentemente al gráfico EWMA con una transformación logarítmica y a los gráficos R y S para incrementos menores a un 50 por ciento en la dispersión del proceso. En el caso del gráfico con un límite de control, el desempeño fue similar al gráfico con una transformación logarítmica introducido por Crowder y Hamilton (1992) pero supera los gráficos R y S.

© Orlando José Mézquita Fabián - 2011

A mis padres, por los sacrificios que hicieron y por darle siempre prioridad a mi educación.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi consejero de tesis el Prof. Noel Artiles-León por toda la ayuda brindada durante el desarrollo de esta tesis. Gracias por ayudarme sólo cuando era estrictamente necesario ya que esto me permitió desarrollarme más y por las largas conversaciones que tuvimos que de una u otra forma terminaban en alguna discusión de estadística. Me siento orgulloso y agradecido de haber trabajado con usted.

También quiero agradecer a los miembros de mi comité los profesores Héctor Carlo y Mercedes Ferrer por sus acertadas recomendaciones. Al Departamento de Ingeniería Industrial por el apoyo económico brindado. A todos los profesores del Departamento de Ingeniería Industrial que aportaron por lo menos un granito de arena en mi formación. Al Prof. Mauricio Cabrera por ser un jefe excepcional, un ejemplo de cómo se trabaja organizadamente y por no dudar en recomendarme en diferentes ocasiones; también quisiera agradecer a Mayra Colón y Marjorie Pratts por su eficiente trabajo y por la ayuda que brindan a los estudiantes graduados de Ing. Industrial; también quiero agradecer. Gracias a los graduados del Departamento que con sus preguntas me ayudaban a mantener mis conocimientos frescos y en algunas ocasiones a aprender cosas nuevas. Pasé muy buenos momentos junto a ustedes y espero que los lazos de amistad que se crearon durante mis estudios no se desaten nunca.

A mis padres Cesarina, José Orlando y mi hermano José Andrés por su apoyo incondicional y por celebrar los logros que he alcanzado a nivel personal, profesional y académico. A mis tías Ada y María por el apoyo brindado. A mi novia Marioly por estar junto a mí todos estos años y mantener su amor por mí aunque estábamos separados físicamente, gracias por ser mi confidente, mejor amiga y cómplice en todo.

Tabla de Contenido

1	Introducción	1
1.1	Motivación y Propósito General	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Revisión de Literatura	3
1.3.1	Cálculos de ARL	3
1.3.2	Gráficos de control para la dispersión de una característica de calidad	7
1.3.3	Gráficos de control para monitoreo conjunto de la media y la dispersión del proceso	8
1.3.4	Gráficos de control para monitorear la dispersión usando transformaciones	9
2	Descripción del Problema	11
2.1	Transformación de la normal inversa	13
2.2	Cálculo del ARL del gráfico $P\sigma$ EWMA	15
2.3	Diseño del gráfico EWMA	15
3	Metodología	19
3.1	Cálculo de ARL del gráfico EWMA	19
3.1.1	Cadenas de Markov	19
3.1.2	Obtención de distribución acumulada de estadístico $P\sigma$	24
3.2	Gráficos EWMA con un límite de control y reset	32
3.3	Método de diseño de gráficos EWMA basado en funciones	37
3.4	Creación de funciones aproximadas	38
3.4.1	Estadísticos de Ajuste	39
3.5	Validación de capacidad de interpolación de funciones obtenidas	41
3.6	Comparación con otros gráficos usados para controlar la dispersión.	42
3.7	Contribuciones	42
4	Análisis y Resultados	44
4.1	Comparaciones de desempeño	44
4.1.1	Comparación del gráfico $P\sigma$ EWMA con otros gráficos para controlar la dispersión	44
4.1.2	Comparación entre gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control y otros gráficos para controlar la dispersión	46
4.2	Tablas con parámetros óptimos y curvas de ARL	48
4.3	Funciones de regresión	53
4.3.1	Funciones de regresión para el gráfico $P\sigma$ EWMA	53

4.3.2	Ecuaciones de regresión para el gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control.....	58
5	Conclusiones e Investigación Futura	65
5.1	Conclusiones	65
5.2	Investigación Futura.....	67
Apéndice A: Resultados.....		68
Apéndice B: Programas MatLab (R2008b)		82
Apéndice C: Guía para implementar los gráficos de control desarrollados.....		91
Referencias.....		94

Lista de Figuras

Figura 1. λ óptimo vs Incremento en la desviación estándar (Crowder y Hamilton(1992))	17
Figura 2. K vs Lambda. (Crowder y Hamilton (1992))	18
Figura 3. “Discretización” del EWMA con dos límites de control. (Artiles-León(2009))	20
Figura 4. ARL vs Media - EWMA para la media	24
Figura 5. Evaluación de función acumulada de $P\sigma$ en MathCad 14	26
Figura 6. Evaluación de función acumulada de $P\sigma$ en MatLab R2008b.....	26
Figura 7. Evaluación de función acumulada de $P\sigma$ en Mathematica 7	26
Figura 8. Error entre aproximación de MatLab para función acumulada inversa de distribución χ^2_{n-1} y de Johnson y Kotz.....	27
Figura 9. Error entre F_p con la aproximación de MatLab y con la de Johnson y Kotz	29
Figura 10. Evaluación de Ecuación 3.14 en MathCad 14	30
Figura 11. Evaluación de Ecuación 3.14 en MatLab R2008b.....	31
Figura 12. Evaluación de Ecuación 3.14 en Mathematica 7	31
Figura 13. Función acumulada de $P\sigma$ para varios tamaños de muestra	32
Figura 14. “Discretización” del EWMA con un límite de control y “reset”	33
Figura 15. Curvas de cocientes de ARL $P\sigma$ EWMA	46
Figura 16. Curvas de cocientes de ARL de gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control	48
Figura 17. Curvas de ARL gráficos $P\sigma$ EWMA optimizados para $\sigma/\sigma_0=1.25$ (n=5)	49
Figura 18. Curvas ARL gráficos $P\sigma$ EWMA1 optimizados para $\sigma=1.20$ (n=5)	50
Figura 19. Error relativo entre ARL_1 óptimo y ARL_1 calculado a partir de λ y K predichos gráfico $P\sigma$ EWMA.....	56
Figura 20. Error relativo entre el ARL_1 óptimo y el ARL_1 predicho por la Ec. 4.3.....	57
Figura 21. Error porcentual entre ARL_0 real y el ARL_0 obtenido con λ y K predichos.....	58
Figura 22. Error porcentual entre ARL_1 y ARL_1 con λ y K predichos.....	62

Figura 23. Error relativo entre ARL_1 y ARL_1 estimado mediante función de regresión	63
Figura 24. Error relativo entre ARL_0 y ARL_0 con $\hat{\lambda}$ y K predichos	64

Lista de Tablas

Tabla 1. Comparación de ARL de $P\sigma$ EWMA con otros gráficos para controlar la dispersión	45
Tabla 2. Comparación de ARL de $P\sigma$ EWMA con un límite de control con otros gráficos para controlar la dispersión	47
Tabla 3. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(200, 370, 500, 800, 1000)$ y $n(5, 15, 25)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím	51
Tabla 4. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(200, 370, 500, 800, 1000)$ y $n(5, 15, 25)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím	52
Tabla 5. Coeficientes para ecuación de λ gráfico $P\sigma$ EWMA.....	53
Tabla 6. Ajuste de ecuaciones de λ gráfico $P\sigma$ EWMA.....	54
Tabla 7. Coeficientes para ecuación de K gráfico $P\sigma$ EWMA.....	54
Tabla 8. Ajuste de ecuaciones de K gráfico $P\sigma$ EWMA.....	54
Tabla 9. Coeficientes para ecuación de ARL_1 gráfico $P\sigma$ EWMA	55
Tabla 10. Ajuste de ecuaciones de ARL_1 gráfico $P\sigma$ EWMA.....	55
Tabla 11. Coeficientes para λ gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control	59
Tabla 12. Ajuste de ecuaciones de λ gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control.....	59
Tabla 13. Coeficientes para K gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control	60
Tabla 14. Ajuste de ecuaciones de K gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control.....	60
Tabla 15. Coeficientes para ARL_1 gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control	61
Tabla 16. Ajuste de ecuaciones de ARL_1 gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control	61
Tabla 17. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100, 200, 370, 500, 600)$ y $n(5, 7, 9)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím.....	68
Tabla 18. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700, 800, 900, 1000)$ y $n(5, 7, 9)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím.....	69
Tabla 19. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100, 200, 370, 500, 600)$ y $n(11, 13, 15)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím.....	70
Tabla 20. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700, 800, 900, 1000)$ y $n(11, 13, 15)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím.....	71
Tabla 21. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100, 200, 370, 500, 600)$ y $n(17, 20, 25)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím.....	72
Tabla 22. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700, 800, 900, 1000)$ y $n(17, 20, 25)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím	73
Tabla 23. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100, 200, 370, 500, 600)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím.....	74

Tabla 24. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím.....	74
Tabla 25. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(5,7,9)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	75
Tabla 26. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(5,7,9)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	76
Tabla 27. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(11,13,15)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	77
Tabla 28. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(11,13,15)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	78
Tabla 29. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(17,20,25)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	79
Tabla 30. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(17,20,25)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	80
Tabla 31. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	81
Tabla 32. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím.....	81

1 Introducción

1.1 Motivación y Propósito General

Al monitorear una característica de un proceso es importante tomar en cuenta tanto la tendencia central como la dispersión de la misma. Los gráficos de control son herramientas estadísticas que permiten identificar si se ha producido un cambio en la característica que se está monitoreando. Por esta razón, se le ha prestado atención a la construcción de gráficos de control que sirvan para darle seguimiento al comportamiento de la media y la variabilidad de una característica de calidad.

Los gráficos de control más populares son el \bar{X} , R y S, creados por Shewhart en 1931. No obstante, éstos presentan el inconveniente de que son más lentos en detectar cambios pequeños en el proceso que otros gráficos tales como el de suma acumulada (CUSUM) introducido por Page (1954) o el de promedios móviles ponderados exponencialmente (EWMA) introducido por Roberts (1959).

Partiendo de la importancia de controlar la dispersión de los procesos y de la superioridad de los gráficos CUSUM y EWMA frente a los de Shewhart bajo esquemas de control simples, Chen et al. (2001) desarrollaron un gráfico EWMA que monitorea conjuntamente la media y la varianza del proceso. En este gráfico se estandarizan los promedios y se le aplica la transformación propuesta por Quesenberry (1995) a la varianza para normalizarla. Esta transformación es conocida en la literatura como transformación de la normal inversa.

De Vargas et al. (2004) hicieron una comparación de desempeño entre los gráficos CUSUM y EWMA y demostraron que para detectar cambios menores de 1 desviación estándar

en la media, el gráfico EWMA tiene un mejor desempeño que el CUSUM; mientras que para cambios que se encuentren entre 1 y 1.5 desviaciones estándar, el CUSUM es superior. Acosta-Mejía et al. (1999) demostraron que el gráfico CUSUM usando la transformación de la normal inversa detecta con más rapidez incrementos de un 20% en la desviación estándar que los gráficos Shewhart S, Shewhart R, EWMA del $\ln(S^2)$, CUSUM del $\ln(S^2)$, CUSUM R y $X-CUSUM\left(CUSUM\ de\ \sqrt[3]{\chi_{n-1}^2}\right)$. No obstante, el desempeño del gráfico EWMA usando la transformación de la normal inversa es desconocido.

La intención de esta tesis es diseñar un gráfico EWMA para monitorear la varianza del proceso aplicando la transformación usada por Chen et al. (2001) con el fin de determinar si éste puede detectar cambios en la dispersión del proceso más rápido que otros gráficos, y proveer un modelo matemático con el cual el gráfico pueda ser calibrado para cumplir con ciertas especificaciones de desempeño. La importancia de investigar sobre la velocidad de detección de los gráficos de control radica en que mientras más lenta sea la detección de un aumento en la dispersión del proceso, habrá más unidades en peligro de salirse de las especificaciones y, por lo tanto, dependiendo de la capacidad del proceso la empresa podría tener pérdidas debido al aumento en el número de productos defectuosos.

1.2 Objetivos

Los objetivos de esta tesis son:

- 1) Comparar el ARL fuera de control del P_σ EWMA con dos límites de control y con un límite de control y “reset” contra el de otros gráficos para monitorear la dispersión.
- 2) Crear un modelo matemático sencillo (ecuaciones, curvas y tablas) para diseñar ambos gráficos P_σ EWMA.

1.3 Revisión de Literatura

1.3.1 Cálculos de ARL

Las comparaciones de desempeño de los gráficos de control se hacen a través del largo de corrida promedio (ARL, por sus siglas en inglés). El largo de corrida es una variable aleatoria que representa el número de subgrupos requeridos antes de que el gráfico de control emita una señal de que el proceso está fuera de control. El ARL es el valor esperado del largo de corrida.

Para calcular el ARL de un gráfico EWMA se han utilizado tres métodos: ecuaciones integrales, cadenas de Markov y simulación. Crowder (1987) demostró que el ARL de un gráfico EWMA, para el caso en el que los promedios de muestras tomadas de forma sucesiva son independientes, puede ser expresado como la solución de una ecuación integral. Si $L(\mu)$ es el ARL, dado que el EWMA inicia en μ , es decir, $EWMA_0 = \mu$, el fundamento es que si la primera observación es tal que $|(1 - \lambda)\mu + \lambda x_1| > h$, entonces una señal de fuera de control es emitida, de lo contrario la corrida continúa desde $(1 - \lambda)\mu + \lambda x_1$ con largo de corrida esperado adicional de $L((1 - \lambda)\mu + \lambda x_1)$ con $0 < \lambda \leq 1$, en otras palabras:

$$L(\mu) = Pr[|(1 - \lambda)\mu + \lambda x_1| > h] + \int_R \left(1 + L((1 - \lambda)\mu + \lambda x)\right) \cdot f(x) dx \quad (1.1)$$

$$R = \{x: |(1 - \lambda)\mu + \lambda x| \leq h\}$$

$$L(\mu) = 1 + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{LCI}^{LCS} L(y) f\left(\frac{y - (1 - \lambda) \cdot \mu}{\lambda}\right) dy \quad (1.2)$$

En donde LCI y LCS son los límites de control inferior y superior, respectivamente, y $f(x)$ es la función de densidad $N(\mu, \sigma^2/n)$. La constante μ representa la media del proceso, σ^2 es la varianza en control del proceso y n es el tamaño de los subgrupos para los cuales se calcularán los promedios. Calzada y Scariano (2003) destacan el hecho de que el fundamento implícitamente impone la propiedad markoviana a la Ec. 1.2.

La formulación de la ecuación integral para calcular el ARL del gráfico EWMA de alguna estadística depende de la distribución de dicha estadística y de los límites de control del gráfico, por ejemplo, la ecuación integral para calcular el ARL del EWMA de $\ln(S^2)$ propuesto por Crowder y Hamilton(1992) es la siguiente:

$$L(\mu) = 1 + L(0) \cdot F\left(\frac{-(1-\lambda)\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{LCS} L(y) \cdot f\left(\frac{y - (1-\lambda)\mu}{\lambda}\right) dy \quad (1.3)$$

en donde LCS es el límite de control superior, $F(x)$ y $f(x)$ son la función de distribución acumulada y la función de densidad de la distribución log-gamma respectivamente. La diferencia entre la Ec. 1.2 y la Ec. 1.3 es debida a que el EWMA de $\ln(S^2)$ no emite una señal cuando $EWMA_t$ cae por debajo de cero, sino que se reinicializa en cero y la corrida continúa.

Calzada y Scariano (2003) mencionan que el método de las ecuaciones integrales produce ARLs de forma rápida y precisa cuando los datos provienen de un proceso normalmente distribuido. No obstante, algunos investigadores han intentado aplicar este método a datos que provienen de distribuciones cuyo dominio no es el conjunto de los números reales (\mathbb{R}) y el mismo ha presentado inestabilidades numéricas y en algunas ocasiones problemas de desbordamiento (“overflow”). Para manejar esta dificultad se podría considerar una

transformación de forma que se obtenga una distribución cuyo dominio sea \mathbb{R} , por ejemplo, la transformación logarítmica usada por Crowder y Hamilton (1992) para monitorear la dispersión del proceso con un EWMA.

No obstante, aún bajo una distribución con dominio \mathbb{R} , Crowder (1987) advierte a los usuarios de su programa que la selección de valores de λ muy cercanos a cero puede resultar en desbordamiento numérico causando inexactitud en los ARLs calculados. Calzada y Scariano (2003), explican que debido a estas dificultades algunos investigadores han decidido dejar de lado el método de las ecuaciones integrales en favor de otras técnicas para calcular el ARL de EWMA tales como las cadenas de Markov. Champ y Rigdon (1991) y Calzada y Scariano (2003) concuerdan en que estas dificultades pueden eliminarse usando otros métodos numéricos que no sea el método de la cuadratura para resolver las ecuaciones integrales.

Según Fu et al. (2002), las cadenas de Markov es uno de los métodos más efectivos para calcular el ARL de los gráficos EWMA y CUSUM en donde las propiedades de la distribución del largo de corrida no son fáciles de manejar en forma cerrada (explícita). Este procedimiento sólo requiere que la distribución del estadístico que se monitorea, $f(x)$, sea especificada para que se pueda construir la matriz de transición de la cadena de Markov.

Las cadenas de Markov fueron usadas por primera vez para calcular el ARL de un gráfico de control por Brook y Evans (1972), quienes las usaron en el gráfico CUSUM. Lucas y Saccucci (1990) aplicaron el método propuesto por Brook y Evans (1972) al gráfico EWMA y demostraron que el ARL de un gráfico EWMA puede ser aproximado “discretizando” el EWMA representándolo como una cadena de Markov discreta. La idea básica de este método es tratar los m valores discretos que el estadístico puede tomar dentro de los límites de control como los

estados transitorios de una cadena de Markov y los valores fuera de los límites como un estado absorbente, ver detalles del procedimiento en la Sección 3.1.1.

Entre los autores que han estudiado las propiedades del uso de cadenas de Markov para calcular el ARL de un gráfico de control o las han aplicado en algún gráfico se encuentran: Brook y Evans (1972), Lucas y Crosier (1982), Champ y Woodall (1987), Lucas y Saccucci (1990), Champ y Rigdon (1991), Artiles-León et al. (1996), Acosta-Mejía et al. (1999), Fu et al. (2001), Fu et al. (2003), Calzada y Scariano (2003), Shu y Jiang (2008) y Serel (2009).

Calzada & Scariano (2003) mostraron que, a pesar de que el método de las cadenas de Markov y las ecuaciones integrales parecen ser distintos, se obtienen resultados bastante similares con ambos.

Para calcular el ARL tanto con ecuaciones integrales como con cadenas de Markov es necesario conocer la distribución del estadístico que se está monitoreando. Cuando es difícil obtener una forma cerrada de dicha distribución los ARLs en control (ARL_0) y fuera de control (ARL_1) pueden estimarse usando simulación. Para el ARL_0 se generan muestras provenientes de una distribución con los parámetros en control y se calcula la cantidad de puntos requeridos antes de que el gráfico emita una señal de fuera de control (largo de corrida), se repite este proceso múltiples veces (réplicas) y se calcula el promedio de los largos de corrida. Para el ARL fuera de control el procedimiento es el mismo pero las muestras se generan de una distribución con parámetros distintos a los parámetros en control.

1.3.2 Gráficos de control para la dispersión de una característica de calidad

Los primeros gráficos usados para controlar la dispersión de un proceso fueron el Shewhart S y el Shewhart R, los cuales como mencionamos anteriormente, son más rápidos en detectar cambios grandes pero reaccionan más lento ante cambios pequeños en la dispersión.

Como consecuencia de esta detección lenta de cambios pequeños, se han sugerido varios gráficos alternativos para controlar la dispersión del proceso. Page (1963) aplicó el CUSUM al rango de los subgrupos y el Shewhart R con límites de precaución para monitorear incrementos en la dispersión del proceso. Tuprah y Ncube (1987) extendieron la investigación de Page (1963) aplicando el CUSUM a la desviación estándar de los subgrupos. Nelson(1990) sugirió reglas de corridas para el Shewhart R para detectar disminuciones en la desviación estándar, pero no evaluó el desempeño de estas reglas. McGregor y Harris (1993) desarrollaron el gráfico de varianzas móviles ponderadas exponencialmente (EWMV, por sus siglas en inglés) para monitorear varios tipos de variación en procesos continuos. Lowry et al. (1995) sugirieron reglas de corridas para detectar tanto incrementos como disminuciones de la dispersión del proceso en los gráficos S y R de Shewhart.

Srivastava (1997) propuso gráficos CUSUM basados en la prueba del cociente de verosimilitud para detectar incrementos y disminuciones en la desviación estándar (σ). Acosta-Mejia (1998) sugirió el CUSUM del rango para detectar disminuciones en σ y evaluó el desempeño de las reglas propuestas por Nelson (1990). Riaz (2008) propuso un gráfico basado en el rango intercuartílico para monitorear cambios pronunciados y moderados en la dispersión del proceso.

1.3.3 Gráficos de control para monitoreo conjunto de la media y la dispersión del proceso

Además de los gráficos mencionados, también se han creado algunos para monitorear de forma conjunta la media y la dispersión del proceso. McGregor y Harris (1993) desarrollaron el gráfico de la desviación media ponderada exponencialmente (EWMS, por sus siglas en inglés). Gan (1995) sugirió un proceso para diseñar una combinación de un gráfico EWMA para detectar incrementos y disminuciones de la media y dos gráficos, uno para detectar incrementos y otro para las disminuciones en la varianza, para monitorear la variabilidad del proceso. Amin et al. (1999) desarrollaron un gráfico EWMA MaxMin con buenas propiedades de ARL para detectar de forma simultánea cambios en la media y la desviación estándar. El EWMA MaxMin consiste en trabajar con un gráfico EWMA para la observación más grande de cada subgrupo y con otro gráfico EWMA para la observación más pequeña. Chen et al. (2001) introdujeron el gráfico MaxEWMA, el cual monitorea la media y la varianza del proceso de forma simultánea. En éste cada punto graficado representa el máximo entre el EWMA del promedio estandarizado del subgrupo y el EWMA de la varianza normalizada del subgrupo. Los creadores del MaxEWMA explican cómo debe identificarse un punto fuera de los límites de control de forma tal que el gráfico pueda indicar la fuente y la dirección en la que se produce el desplazamiento. Stemann y Weihs (2001) introdujeron el EWMA $\bar{X} - S$ y demostraron que es superior al Shewhart $\bar{X} - S$ para detectar cambios pequeños en el proceso. Reynolds y Stoumbos (2004), investigaron la aplicación de gráficos EWMA basados en \bar{X} y $(\bar{X} - \mu)^2$ para detectar incrementos en la media y la varianza. Gan et al. (2004) introdujeron un gráfico en el que en vez de graficar puntos se grafican intervalos, en este gráfico la ubicación de los puntos centrales de cada intervalo sirve para controlar la media del proceso y el largo del intervalo sirve para controlar la dispersión. Khoo y Yap (2005) desarrollaron un gráfico de promedios móviles que monitorea conjuntamente

la media y la varianza y usaron la misma metodología que Chen et al. (2001) para indicar la fuente y la dirección del desplazamiento.

1.3.4 Gráficos de control para monitorear la dispersión usando transformaciones

Por el teorema del límite central (TLC) se sabe que el promedio de un conjunto de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita tenderá a ser normal en la medida en que promediamos más observaciones, independientemente de la distribución que tengan las mismas. Al construir un gráfico de control para la media podemos aprovecharnos de las bondades de la distribución normal apoyados en el TLC. No obstante, esto no sucede con la varianza, ya que en el mejor de los casos, la característica que se mide estaría normalmente distribuida con media μ y varianza σ^2 y la varianza muestral tendría distribución $\sigma^2 \chi_{n-1}^2 / (n - 1)$. Debido a esto, en las últimas décadas se le ha prestado atención a la aplicación de una función monótona a la varianza muestral con el fin de transformarla en una variable aleatoria con distribución normal o aproximadamente normal (Shu y Jiang, 2008).

Los primeros en utilizar el gráfico EWMA para la varianza normalizada fueron Crowder y Hamilton (1992) a través de la transformación $Y_t = \ln(S_t^2 / \sigma_0^2)$, donde σ_0^2 es la varianza en control del proceso, para detectar incrementos en la varianza del proceso. Además, propusieron sustituir los estadísticos EWMA negativos por cero con el fin de mejorar el desempeño del gráfico. Chang y Gan (1995) evaluaron el desempeño del gráfico CUSUM cuando se normaliza la varianza utilizando la transformación propuesta por Crowder y Hamilton (1992) y descubrieron que el desempeño de este gráfico es similar al gráfico EWMA desarrollado por Crowder y Hamilton (1992).

Chen et al. (2001) presentaron un gráfico EWMA nuevo que sirve para detectar incrementos y disminuciones en la media y/o en la variabilidad. En este gráfico la varianza es normalizada utilizando la transformación de la normal inversa introducida por Quesenberry (1995). Castagliola (2005a) aplicó el gráfico EWMA a una transformación logarítmica de la varianza y demostró que con ésta se obtiene un gráfico con un desempeño superior al Shewart R, CUSUM R y EWMA $\ln(S^2)$ calibrado para detectar de forma óptima incrementos en un 20% y un 40% en la varianza. Castagliola (2005b) aplicó la misma transformación al rango para controlar la dispersión del proceso. El autor de esta publicación demostró la superioridad de su gráfico sobre los gráficos R y S, especialmente en el caso de una disminución en la desviación estándar del proceso. Shu y Jiang (2008) propusieron una extensión del gráfico introducido por Crowder y Hamilton (1992) al que denominaron NEWMA, usando la misma transformación que ellos pero en vez de sustituir los estadísticos EWMA negativos por cero sustituyeron las transformaciones negativas por cero. Shu y Jiang (2008) demostraron que el gráfico NEWMA detecta con mayor rapidez un incremento en la dispersión del proceso que el propuesto por Crowder y Hamilton (1992).

2 Descripción del Problema

Este capítulo describe en detalle el problema del diseño y la creación de ecuaciones aproximadas para el diseño de gráficos EWMA, así como algunos conceptos básicos necesarios para entender el problema. Inicialmente se describe en qué consiste el gráfico EWMA y la transformación de la normal inversa, luego se expone el problema del cálculo del ARL fuera de control del gráfico P_σ EWMA y finalmente se explica la forma en la que se crearán las ecuaciones aproximadas que permitirán el diseño del gráfico P_σ EWMA.

Desde el punto de vista estadístico, el diseño óptimo de un gráfico de control EWMA consiste en hallar los parámetros del gráfico que para un ARL en control (ARL_0) y desplazamiento dados produzcan el ARL fuera de control (ARL_1) más pequeño posible. Para diseñar un gráfico EWMA es necesario contar con alguna herramienta o método que permita hallar la combinación óptima de los parámetros λ (importancia de la observación actual) y K (distancia entre los límites de control y el valor esperado), según el ARL_0 y desplazamiento establecidos.

En los gráficos de Shewhart se grafica directamente la variable que se está monitoreando (\bar{X} , R , S), por ende, se le da un 100% de importancia a la observación o subgrupo actual. Esta asignación de importancia a la observación actual hace que el gráfico de Shewhart sea bueno para detectar cambios grandes en la variable que se está monitoreando pero hace que detecte lentamente cambios pequeños en la misma.

Por otro lado, en el gráfico EWMA se le da una importancia λ a la observación actual y una importancia $(1 - \lambda)$ a las observaciones anteriores, $(0 < \lambda \leq 1)$, en otras palabras, en vez de graficar X_t se grafica:

$$Z_t = (1 - \lambda) \cdot Z_{t-1} + \lambda \cdot X_t \quad (2.1)$$

donde X_t es el valor actual de la variable que se está monitoreando.

Los límites de este gráfico están dados por (Roberts, 1959):

$$LCI = E(X) - K \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) \cdot V(X)} \quad (2.2)$$

$$LCS = E(X) + K \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) \cdot V(X)} \quad (2.3)$$

donde LCI, LCS, $E(X)$, $V(X)$ y K , son el límite de control inferior, el límite de control superior, el valor esperado, la varianza y la distancia entre los límites de control y el valor esperado, respectivamente.

La ventaja de usar el gráfico EWMA es que se puede regular su capacidad para detectar los cambios a través del peso (λ), a menor λ más rápido detectará cambios pequeños y a mayor λ detectará cambios grandes en menos tiempo. Para monitorear la variabilidad, se pudiera diseñar un gráfico Shewhart para la varianza o bien se pudiera diseñar un gráfico EWMA para una transformación normalizada de la misma. Crowder y Hamilton(1992) demostraron que el gráfico EWMA de la transformación logarítmica de la varianza tiene mejores propiedades de ARL que los gráficos R y S^2 de Shewhart.

Acosta-Mejía et al. (1999), demostraron que el gráfico CUSUM de la transformación de la normal inversa de la varianza tiene mejores propiedades de ARL que los gráficos R, S, S con límites de precaución, EWMA $\ln(S^2)$ y CUSUM $\ln(S^2)$. No obstante, el desempeño del gráfico EWMA de la transformación de la normal inversa es desconocido.

2.1 Transformación de la normal inversa

La transformación de la normal inversa para gráficos de control propuesta por Quesenberry (1995) consiste en lo siguiente: Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables normales i.i.d. con varianza σ^2 y S^2 es la varianza muestral de los subgrupos y:

$$P_{\sigma_t} = \Phi^{-1} \left\{ F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{(n-1) \cdot S_t^2}{\sigma_0^2} \right) \right\} \quad (2.4)$$

donde F es la función de distribución acumulada (CDF) de la distribución χ_{n-1}^2 y Φ^{-1} es la inversa de la distribución normal estándar. Entonces cuando el proceso está en control, es decir que $\sigma = \sigma_0$, el estadístico quedaría de la forma siguiente:

$$P_{\sigma_t} = \Phi^{-1} \{ F_{\chi_{n-1}^2} (\chi_{n-1}^2) \}$$

De esta ecuación podemos ver que si el proceso está en control el estadístico P_{σ} tiene distribución normal estándar. Esto es debido a los siguientes teoremas:

Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad $F_X(x)$. Entonces,

- A. La función de la variable aleatoria X, $U = F_X(X)$, tiene una distribución uniforme en $[0,1]$, o sea que $F_U(u) = u$, $0 \leq u \leq 1$, ya que

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \Pr(U \leq u) = \Pr(F_X(X) \leq u) = \Pr(F_X^{-1}[F_X(X)] \leq F_X^{-1}(u)) \\ &= \Pr(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u \end{aligned}$$

B. Similarmente, si U es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[0,1]$, entonces la función de la variable aleatoria U , $Y = F_X^{-1}(U)$, tiene la misma distribución de X , o sea que $Pr(Y \leq y) = F_X(y)$, ya que

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= Pr(Y \leq y) \\
 &= Pr(F_X^{-1}(U) \leq y) \\
 &= Pr(F_X[F_X^{-1}(U)] \leq F_X(y)) \\
 &= Pr(U \leq F_X(y)) \\
 &= F_U(F_X(y))
 \end{aligned}$$

Por tanto, sabiendo que $F_U(a) = a$, queda:

$$= F_X(y)$$

Entonces, por la proposición **[A]**, al aplicarle la distribución acumulada de una χ_{n-1}^2 a una variable χ_{n-1}^2 se obtiene una variable uniforme en $[0,1]$. Por la proposición **[B]**, al aplicarle la inversa de la normal estándar a una variable uniforme en $[0,1]$ se obtiene una variable normal estándar. En otras palabras, por la transformación definida por la Ec. 2.4 se está pasando de una distribución asimétrica como la χ^2 a una distribución simétrica como la normal.

Para usar un gráfico EWMA aplicando la transformación de la normal inversa sería necesario graficar:

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda P_{\sigma_t} \quad (2.5)$$

Usando límites de control:

$$LCI = -K \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (2.6)$$

$$LCS = K \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (2.7)$$

donde LCI y LCS son los límites de control inferior y superior respectivamente.

2.2 Cálculo del ARL del gráfico P_σ EWMA

El cálculo del ARL de un gráfico EWMA tanto por el método de las ecuaciones integrales como por cadenas de Markov (ver Sección 3.1.1) requiere que se conozca la distribución de probabilidad del estadístico que se está monitoreando. En general, el estadístico P_σ puede definirse como:

$$P_{\sigma_t} = \Phi^{-1}\{F_{\chi^2_{n-1}}(\tau \cdot \chi^2_{n-1})\} \quad (2.8)$$

en donde $\tau = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$, si $\tau = 1$ el proceso estará en control y P_σ tendrá distribución normal estándar, pero si $\tau < 1$ (disminución de la desviación del proceso) o si $\tau > 1$ (aumento de la desviación del proceso) P_σ no seguiría una distribución normal estándar.

Debido a esto el ARL_0 puede ser fácilmente obtenido mediante el método de las cadenas de Markov usando la distribución normal estándar, pero para el caso del ARL_1 es necesario determinar cuál es la distribución acumulada del estadístico P_σ cuando se da el cambio en la desviación del proceso. La obtención de la distribución acumulada de P_σ es mostrada en la Sección 3.1.2.

2.3 Diseño del gráfico EWMA

Una vez se tiene la forma de calcular el ARL en control y fuera de control se presenta la pregunta, ¿cómo se puede diseñar este gráfico de forma tal que para un ARL en control dado se minimice el ARL fuera de control?

Algunos autores que han propuesto gráficos EWMA, crean tablas con varias combinaciones de λ y K donde se muestran los ARL_0 y ARL_1 para dichas combinaciones con el

objetivo de que al momento de diseñar el gráfico se elija la combinación de parámetros más conveniente. No obstante, las tablas presentan el inconveniente de que son limitadas en la cantidad de combinaciones que contienen para un ARL_0 en específico. Por esta razón, Crowder (1989) propuso un método de diseño de gráficos EWMA basado en curvas. Crowder propone el uso de dos gráficos, uno denominado “Gráfico de λ óptimo” en donde se grafique el peso óptimo vs el desplazamiento a evaluar para distintos ARL_0 (Figura 1) y otro donde se grafique K vs λ para distintos ARL_0 (Figura 2).

Un método más fácil de aplicar que el de Crowder (1989) sería el método utilizado por Artiles-León et al. (1996) basado en ecuaciones aproximadas obtenidas mediante regresión múltiple. La aplicación de este método al gráfico EWMA consiste en proveer ecuaciones aproximadas con las que se pueda obtener los valores de λ y K que, para un ARL_0 y desplazamiento dados, produzcan el ARL_1 más pequeño posible. Este método se explica con más detalle en la Sección 3.3.

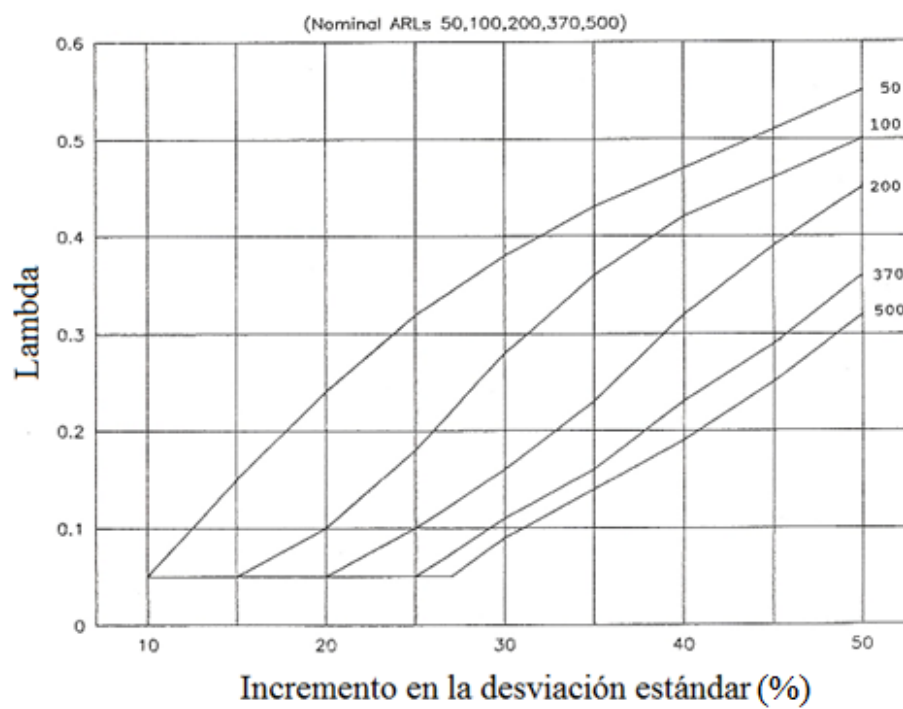


Figura 1. Lambda óptimo vs Incremento en la desviación estándar (Crowder y Hamilton(1992))

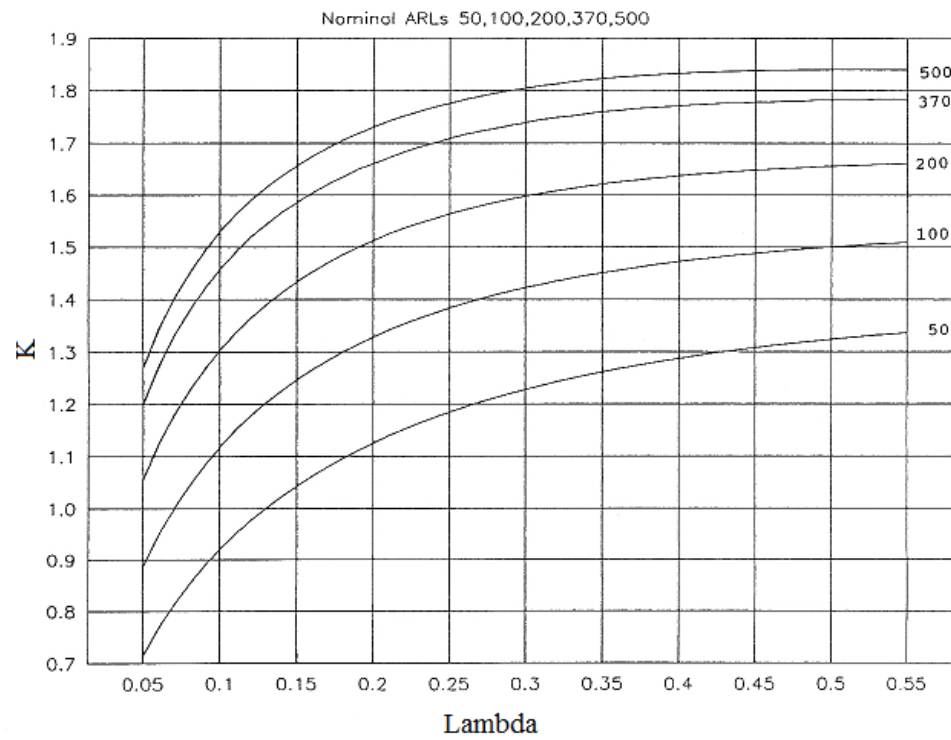


Figura 2. K vs Lambda. (Crowder y Hamilton (1992))

3 Metodología

En esta investigación, se hace posible el diseño del gráfico EWMA usando la transformación de la normal inversa y se compara su desempeño con el de otros gráficos usados para monitorear la dispersión del proceso. Este capítulo discute la metodología y los conceptos requeridos para explicar los pasos a seguir.

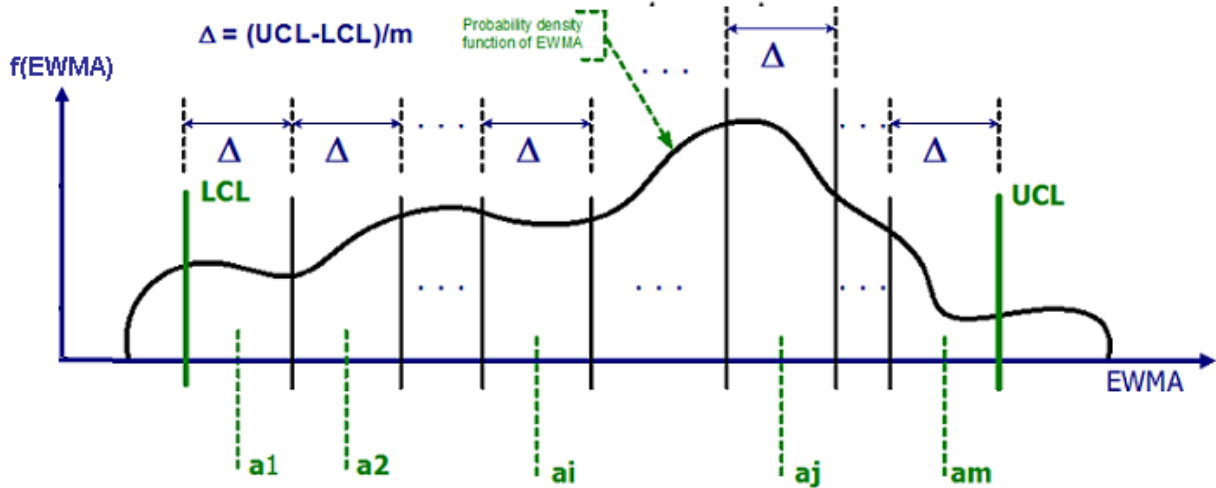
En la primera parte se explica el método de las cadenas de Markov para el cálculo del ARL del gráfico EWMA y la metodología basada en ecuaciones aproximadas de regresión para el diseño de gráficos EWMA. En la segunda parte se explica el desarrollo y validación de las ecuaciones aproximadas para el diseño del gráfico y la comparación de desempeño del gráfico P_σ EWMA con otros gráficos de control.

3.1 Cálculo de ARL del gráfico EWMA

3.1.1 Cadenas de Markov

Tanto para crear las funciones de regresión como para comparar el desempeño de los gráficos de control es necesario tener un método para calcular el ARL del gráfico propuesto. Como se mencionó en la Sección 1.3.1, Lucas y Saccuci (1990) demostraron que el ARL del gráfico EWMA se puede aproximar sustituyendo el EWMA por una cadena de Markov discreta.

Esta “discretización” del EWMA se hace dividiendo el intervalo entre los límites de control superior e inferior en m sub-intervalos de ancho Δ , en donde m es un número impar, y sustituyendo los estadísticos EWMA por el punto medio de cada sub-intervalo. Este concepto se puede ver mejor en la Figura 3.



Fuente: Material didáctico provisto por el Dr. Noel Artiles-León

Figura 3. “Discretización” del EWMA con dos límites de control. (Artiles-León(2009))

En la Figura 3, provista por el Dr. Artiles, LCI y LCS representan los límites de control inferior y superior respectivamente y el centro del intervalo k es $a_k = LCI + (k - 0.5)\Delta$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Con estos valores “discretizados” se construye una cadena de Markov en donde caer en cualquiera de los intervalos que se encuentran entre los límites de control representa estados transitorios mientras que caer fuera de esos límites representa un estado absorbente.

En un gráfico EWMA usado para monitorear una variable cualquiera X (Media, Rango, Desviación Estándar,...), las probabilidades de transición, es decir, la probabilidad de moverse de un estado i a un estado j , P_{ij} , en la cadena de Markov corresponde a la probabilidad de que el EWMA caiga en el intervalo j dado que estaba en el intervalo i (Ec. 3.1)

$$P_{ij} = Pr \left[a_j - \frac{\Delta}{2} \leq EWMA \leq a_j + \frac{\Delta}{2} \right] \quad (3.1)$$

Sustituyendo $EWMA = (1 - \lambda)a_i + \lambda X$ en la Ec. 3.1

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= Pr \left[a_j - \frac{\Delta}{2} \leq (1 - \lambda)a_i + \lambda X \leq a_j + \frac{\Delta}{2} \right] \\
 P_{ij} &= Pr \left[a_j - \frac{\Delta}{2} - (1 - \lambda)a_i \leq \lambda X \leq a_j + \frac{\Delta}{2} - (1 - \lambda)a_i \right] \\
 P_{ij} &= Pr \left[a_j - a_i - \frac{\Delta}{2} + \lambda a_i \leq \lambda X \leq a_j - a_i + \frac{\Delta}{2} + \lambda a_i \right] \\
 P_{ij} &= Pr \left[(j - i)\Delta - \frac{\Delta}{2} + \lambda a_i \leq \lambda X \leq (j - i)\Delta + \frac{\Delta}{2} + \lambda a_i \right] \\
 P_{ij} &= Pr \left[(j - i)\frac{\Delta}{\lambda} - \frac{\Delta}{2\lambda} + a_i \leq X \leq (j - i)\frac{\Delta}{\lambda} + \frac{\Delta}{2\lambda} + a_i \right] \\
 P_{ij} &= F \left[a_i + \left(j - i + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \right] - F \left[a_i + \left(j - i - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \right] \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

En la Ec. 3.2, F es la distribución acumulada de la variable que se esté monitoreando (X), lo que indica que, para poder calcular las probabilidades de transición de la cadena de Markov, sólo es necesario conocer la distribución acumulada de X .

En una cadena de Markov absorbente, donde Q es la matriz de probabilidades de transición entre los estados transitorios, I es una matriz identidad y $\vec{1}$ es un vector columna de unos, el elemento i -ésimo del vector $(I - Q)^{-1} \cdot \vec{1}$ representa la cantidad de pasos en promedio por los que debe pasar la cadena antes de ser absorbida dado que inició en el estado i . Aplicando el concepto anterior a los gráficos de control, el ARL correspondería a la cantidad de “pasos” en promedio (número promedio de puntos graficados) necesarios para que la cadena sea absorbida dado que inició en control, es decir, que inició en el valor nominal del estadístico que se esté monitoreando. En un gráfico EWMA el valor nominal se encontraría justo en el centro de los

límites de control, por tanto el estado correspondiente al valor nominal es el que se encuentra en la posición $(m+1)/2$.

Para ilustrar mejor estos conceptos se utiliza un ejemplo del cálculo del ARL de un gráfico EWMA usado para monitorear la media de un proceso. Para fines de poder mostrar el ejemplo se “discretizará” el EWMA en 5 valores, no obstante, para fines reales debe tomarse una cantidad mucho mayor ya que a medida que la cantidad de estados aumenta, el ARL calculado converge al ARL asintótico.

Cálculo del ARL en control de un gráfico EWMA para la media:

$\mu_0 = 10$	Media en control
$\sigma_{\bar{x}} = 1$	Desviación de la media
$\lambda = 0.15$	Peso de media muestral
$K=2.7$	Posición de los límites en términos de errores estándares
$m=5$	Número de estados transitorios

Se grafica $EWMA_t = (1 - \lambda)EWMA_{t-1} + \lambda\bar{X}_t$, con límites de control

$$LCS = \mu_0 + K\sigma_{\bar{x}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 10.769 \quad (3.3)$$

$$LCI = \mu_0 - K\sigma_{\bar{x}}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 9.231 \quad (3.4)$$

$$\Delta = \frac{(LCS - LCI)}{m} = 0.308 \quad (3.5)$$

Cálculo de puntos a usar en la “discretización” de EWMA_t:

$$i = 1, 2, \dots, m \quad a_i = LCI + (i - 0.5)\Delta \quad a = \begin{pmatrix} 9.385 \\ 9.692 \\ 10 \\ 10.308 \\ 10.615 \end{pmatrix}$$

Las probabilidades de transición se calculan con la Ec. 3.2 y en este caso la distribución de la variable aleatoria que se está monitoreando, \bar{x} , es normal con media $\mu=10$ y con desviación $\sigma_{\bar{x}} = 1$. Por tanto, las probabilidades de transición para $i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, m$ son

$$Q_{ij} = \Phi \left[\frac{a_i + \left(j - i + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Delta}{\lambda} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \right] - \Phi \left[\frac{a_i + \left(j - i - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Delta}{\lambda} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \right] \quad (3.6)$$

en donde Φ es la función acumulada de la normal estándar. Por lo tanto,

$$Q = \begin{pmatrix} 0.60862 & 0.33395 & 0.00694 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.09097 & 0.67216 & 0.23369 & 0.00282 & 0.00000 \\ 0.00105 & 0.15161 & 0.69468 & 0.15161 & 0.00105 \\ 0.00000 & 0.00282 & 0.23369 & 0.67216 & 0.09097 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00694 & 0.33395 & 0.60862 \end{pmatrix}$$

Entonces el ARL se obtiene

$$\overrightarrow{ARL} = (I - Q)^{-1} \cdot \vec{1} = \begin{pmatrix} 144.72 \\ 163.16 \\ 166.30 \\ 163.16 \\ 144.72 \end{pmatrix}, \quad ARL_{\frac{m+1}{2}} = 166.30 \quad (3.7)$$

Dado que en la Ec. 3.6 se utilizó μ_0 , ARL=166.30 corresponde al ARL en control. Para calcular el ARL fuera de control para un desplazamiento δ de la media se sustituye μ_0 por $(\mu_0 + \delta)$ en la Ec. 3.6.

La curva de ARL para este gráfico es la siguiente:

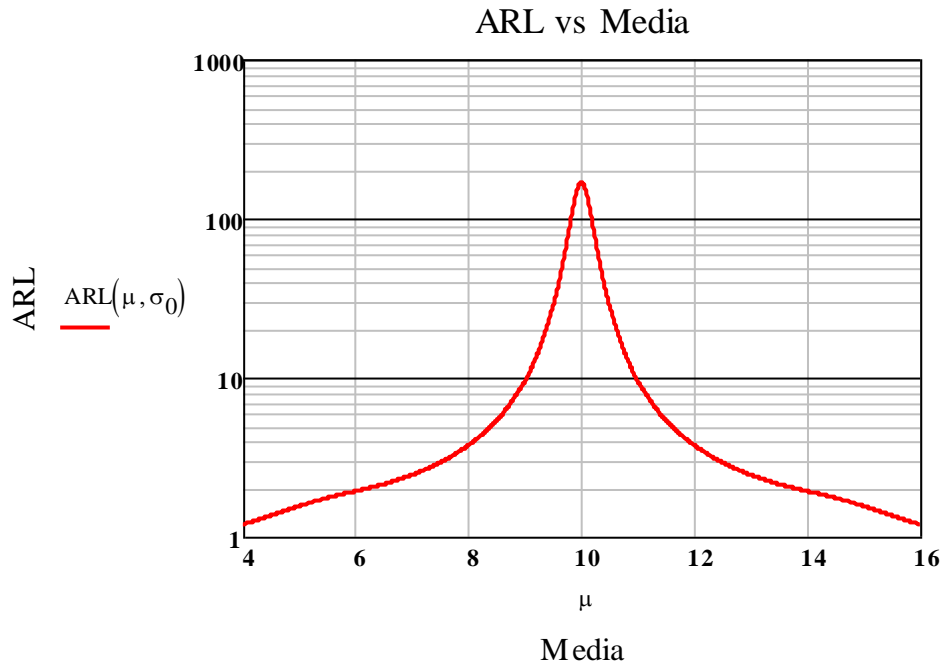


Figura 4. ARL vs Media - EWMA para la media

3.1.2 Obtención de distribución acumulada de estadístico P_σ

Como se vio en la Sección 3.1.1, para calcular el ARL de un gráfico EWMA usando cadenas de Markov es necesario conocer la distribución acumulada del estadístico que se está monitoreando.

La distribución del estadístico P_σ , para un valor cualquiera del parámetro σ , puede obtenerse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 Pr[P_\sigma \leq x|\sigma] &= Pr \left[\Phi^{-1} \left\{ F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{(n-1)S_t^2}{\sigma_0^2} \right) \right\} \leq x \right] \\
 &= Pr \left[F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{(n-1)S_t^2}{\sigma_0^2} \right) \leq \Phi(x) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Pr \left[\left(\frac{(n-1)S_t^2}{\sigma_0^2} \right) \leq F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)] \right] \\
&= Pr \left[\left(\frac{(n-1)S_t^2}{\sigma_0^2} \right) \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2} \right) \leq F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)] \right] \\
&= Pr \left[\left(\frac{(n-1)S_t^2}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \right) \leq F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)] \right] \\
&= Pr \left[\left(\frac{(n-1)S_t^2}{\sigma^2} \right) \leq \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)] \right]
\end{aligned}$$

Si S_t^2 proviene de una distribución normal con varianza σ_1^2 entonces:

$$\begin{aligned}
&= Pr \left[\chi_{n-1}^2 \leq \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)] \right] \\
Pr[P_\sigma \leq x|\sigma] &= F_{\chi_{n-1}^2} \left[\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)] \right] \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Al evaluar la función acumulada de P_σ usando MathCad 14, MatLab R2008b y Mathematica 7 se presentan problemas debido a que para valores de x que se encuentran a muchas desviaciones estándar de cero, digamos $x > 8$ desviaciones, el valor de $\Phi(x)$ tenderá a 1 y por tanto $F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)]$ tenderá a infinito.

En las Figuras 5, 6 y 7 se ilustra el problema que se presenta al evaluar la función acumulada de P_σ , $F_p(x, n, \sigma_0, \sigma)$. Esta dificultad es debida a que $F_{\chi_{n-1}^2}^{-1} [\Phi(x)]$ no puede ser obtenida correctamente por los paquetes matemáticos mencionados por lo que se hace necesario hallar una aproximación para obtenerla.

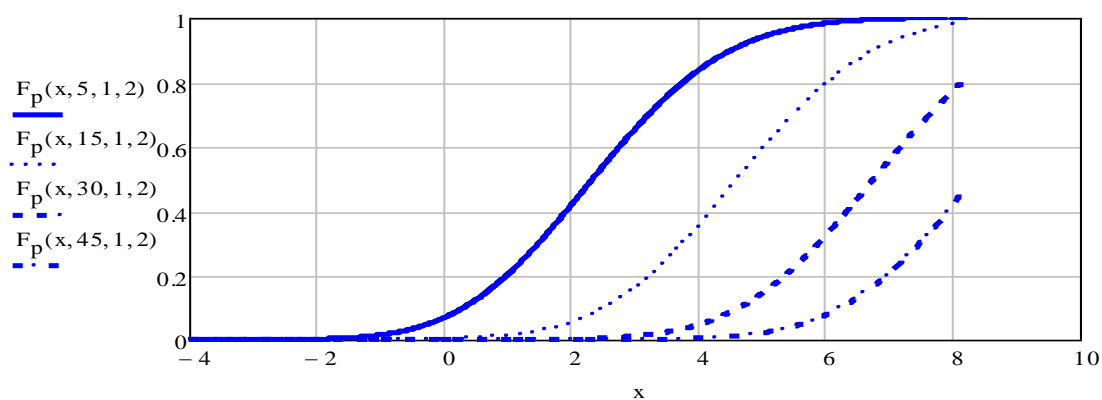


Figura 5. Evaluación de función acumulada de $P\sigma$ en MathCad 14

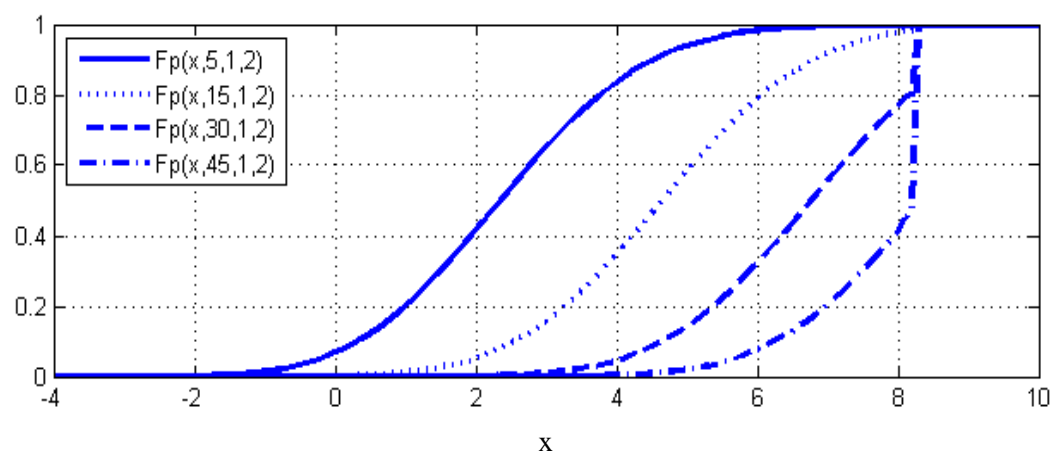


Figura 6. Evaluación de función acumulada de $P\sigma$ en MatLab R2008b

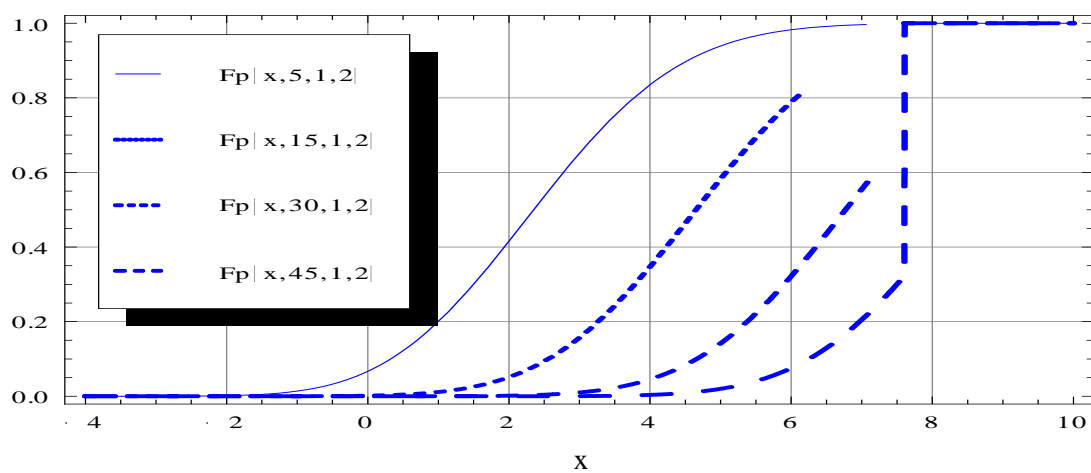


Figura 7. Evaluación de función acumulada de $P\sigma$ en Mathematica 7

De acuerdo con Johnson & Kotz (1970), la función acumulada inversa de la distribución χ^2_{n-1} puede aproximarse con:

$$\begin{aligned}
 F_{\chi^2_{n-1}}^{-1}(p, n) \approx & n - 1 + \sqrt{2 \cdot (n - 1)} \cdot \Phi^{-1}(p) + \frac{2}{3} [(\Phi^{-1}(p))^2 - 1] \\
 & + \frac{1}{9\sqrt{2(n-1)}} [(\Phi^{-1}(p))^3 - 7\Phi^{-1}(p)] \\
 & - \frac{1}{405(n-1)} [6(\Phi^{-1}(p))^4 + 14(\Phi^{-1}(p))^2 - 433] \\
 & + \frac{1}{4860\sqrt{2}} [9(\Phi^{-1}(p))^5 + 256(\Phi^{-1}(p))^3 \\
 & - 433\Phi^{-1}(p)] (n-1)^{-3/2}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si denotamos la función que usa MatLab R2008b para aproximar la función acumulada inversa de la distribución χ^2_{n-1} como $F_{ML}^{-1}(p, n)$ y la aproximación propuesta por Johnson y Kotz (1970) como $F_{JK}^{-1}(p, n)$, entonces el error entre ambas funciones $EINV(n, p)$ está dado por:

$$EINV(n, p) = |F_{ML}^{-1}(n, p) - F_{JK}^{-1}(n, p)| \tag{3.10}$$

En la Figura 8 se puede ver el error que hay entre la función acumulada inversa de la distribución χ^2_{n-1} para varios grados de libertad y la aproximación de Johnson y Kotz (1970).

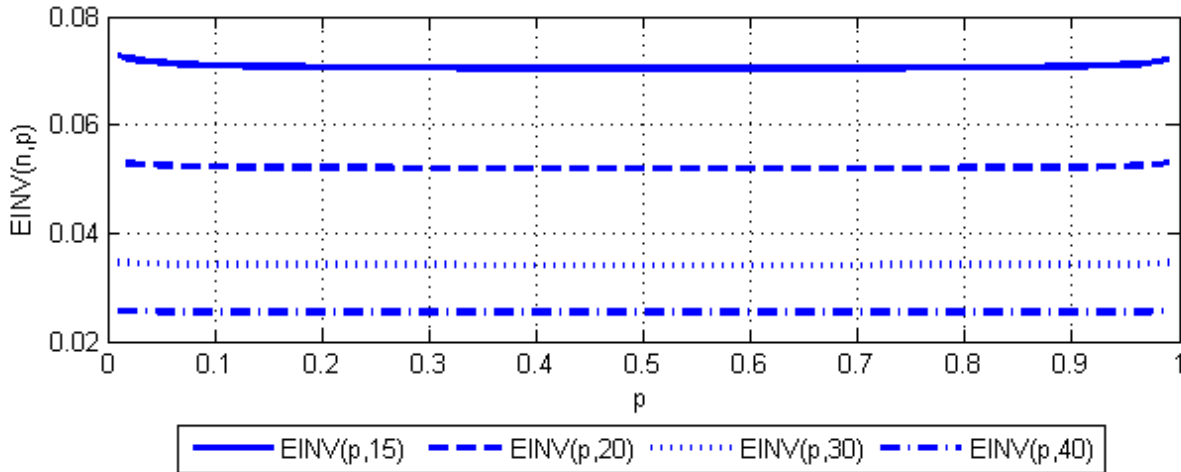


Figura 8. Error entre aproximación de MatLab para función acumulada inversa de distribución χ^2_{n-1} y de Johnson y Kotz

En la Figura 8 se puede observar que el error entre la aproximación de la inversa obtenida con MatLab y la inversa obtenida con la aproximación de Johnson y Kotz es bien pequeño; en este sentido es importante recordar que el valor esperado de la distribución χ^2 es igual a sus grados de libertad por tanto un error de 0.07 en una distribución con valor esperado de 15 es prácticamente despreciable.

Partiendo de la aproximación de la función acumulada inversa de la distribución χ_{n-1}^2 se puede obtener una aproximación para $F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}[\Phi(x)]$ dada por la Ecuación 3.11:

$$\begin{aligned}
 F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}(\Phi(x), n) &\approx n - 1 + \sqrt{2 \cdot (n - 1)} \cdot \Phi^{-1}(\Phi(x)) + \frac{2}{3} \left[\left(\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right)^2 - 1 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{9\sqrt{2(n-1)}} \left[\left(\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right)^3 - 7\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{405(n-1)} \left[6 \left(\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right)^4 + 14 \left(\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right)^2 - 433 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4860\sqrt{2}} \left[9 \left(\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right)^5 + 256 \left(\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right)^3 \right. \\
 &\quad \left. - 433\Phi^{-1}(\Phi(x)) \right] (n - 1)^{-3/2} \\
 F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}(\Phi(x), n) &\approx n - 1 + \sqrt{2 \cdot (n - 1)}x + \frac{2}{3}(x^2 - 1) \\
 &\quad + \frac{x^3 - 7x}{9\sqrt{2(n-1)}} - \frac{6x^4 + 14x^2 - 433}{405(n-1)} + \frac{9x^5 + 256x^3 - 433x}{4860\sqrt{2}(n-1)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Al introducir la Ecuación 3.10, denotada por $F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}(\Phi(x))^*$, en la Ecuación 3.8 se puede obtener una aproximación para la distribución acumulada de P_σ , dada por la Ecuación 3.12.

$$Pr[P_\sigma \leq x] = F_{\chi_{n-1}^2} \left[\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}(\Phi(x))^* \right]$$

$$Pr[P_\sigma \leq x] = F_{\chi_{n-1}^2} \left[\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) \left[n - 1 + \sqrt{2 \cdot (n-1)x} + \frac{2}{3}(x^2 - 1) + \frac{x^3 - 7x}{9\sqrt{2(n-1)}} - \frac{6x^4 + 14x^2 - 433}{405(n-1)} + \frac{9x^5 + 256x^3 - 433x}{4860\sqrt{2}(n-1)^{3/2}} \right] \right] \quad (3.12)$$

Dado que la función acumulada de P_σ se puede calcular para $x < 7.75$, es conveniente evaluar el error que existe entre la función de distribución acumulada de P_σ usando la aproximación de MatLab y usando la aproximación de Johnson y Kotz (1970). Si denotamos la función de distribución acumulada de P_σ usando la aproximación de MatLab como $F_{ML}(x, n, \sigma, \sigma_0)$ y la función de distribución acumulada de P_σ usando la aproximación de Johnson y Kotz (1970) como $F_{JK}(x, n, \sigma, \sigma_0)$, entonces el error entre ambas funciones está dado por

$$EPA(x, n, \sigma, \sigma_0) = |F_{ML}(x, n, \sigma, \sigma_0) - F_{JK}(x, n, \sigma, \sigma_0)| \quad (3.13)$$

En la Figura 9 se grafica la Ec. 3.13 para varios tamaños de muestra.

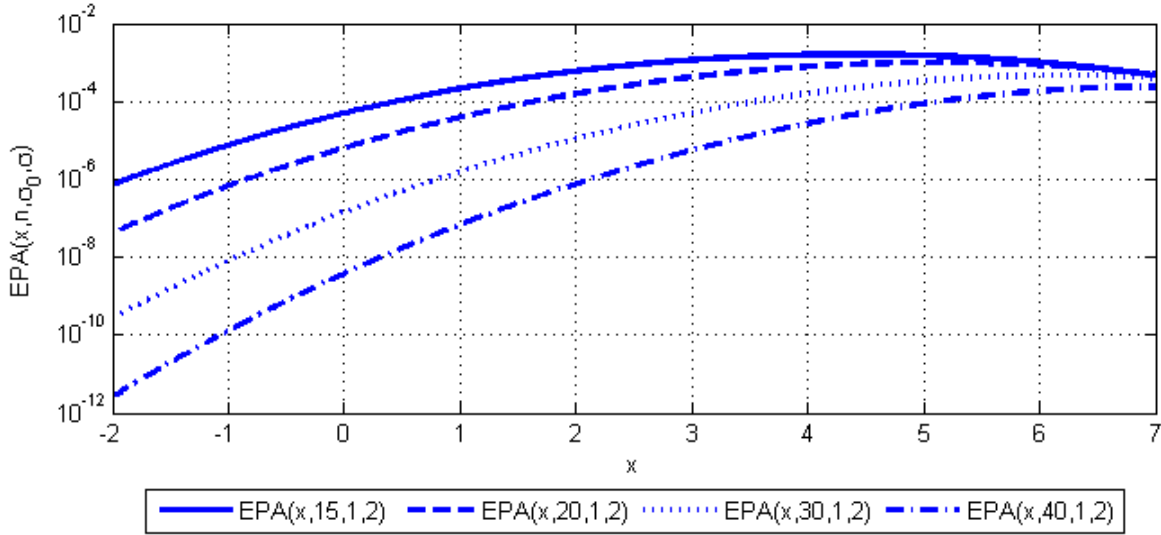


Figura 9. Error entre Fp con la aproximación de MatLab y con la de Johnson y Kotz

Dado que es posible calcular el valor “exacto” de la distribución acumulada de $P\sigma$ para valores menores a 7.75, la aproximación de la acumulada de $P\sigma$ se usará para valores mayores que 7.75. En otras palabras, la acumulada de $P\sigma$, F_p , puede expresarse como sigue:

$$F_p(x, n, \sigma_0, \sigma) = \begin{cases} F_{\chi^2_{n-1}} \left[\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) F_{\chi^2_{n-1}}^{-1} [\Phi(x)] \right], & \text{si } x < 7.75 \\ F_{\chi^2_{n-1}} \left[\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) + \frac{x^3 - 7x}{9\sqrt{2}(n-1)} - \frac{6x^4 + 14x^2 - 433}{405(n-1)} + \frac{9x^5 + 256x^3 - 433x}{4860\sqrt{2}(n-1)^{3/2}} \right], & \text{si } x \geq 7.75 \end{cases} \quad (3.14)$$

A continuación se muestra la gráfica de la Ec. 3.14 usando MathCad, MatLab y Mathematica respectivamente.

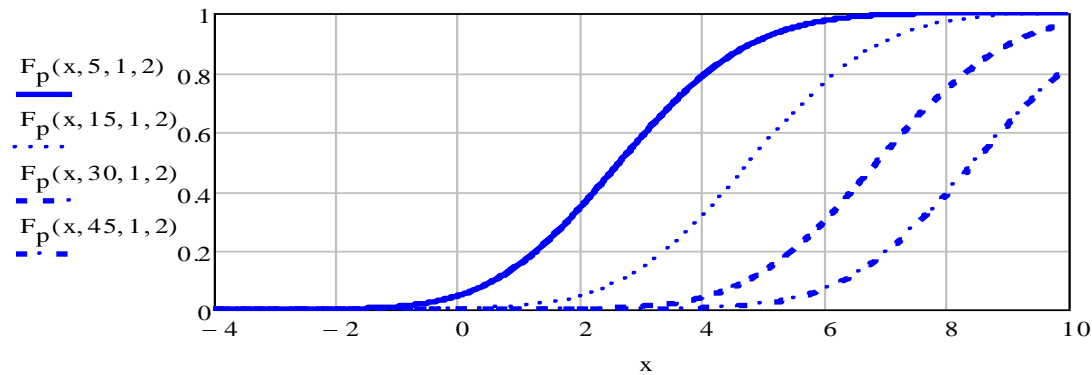


Figura 10. Evaluación de Ecuación 3.14 en MathCad 14

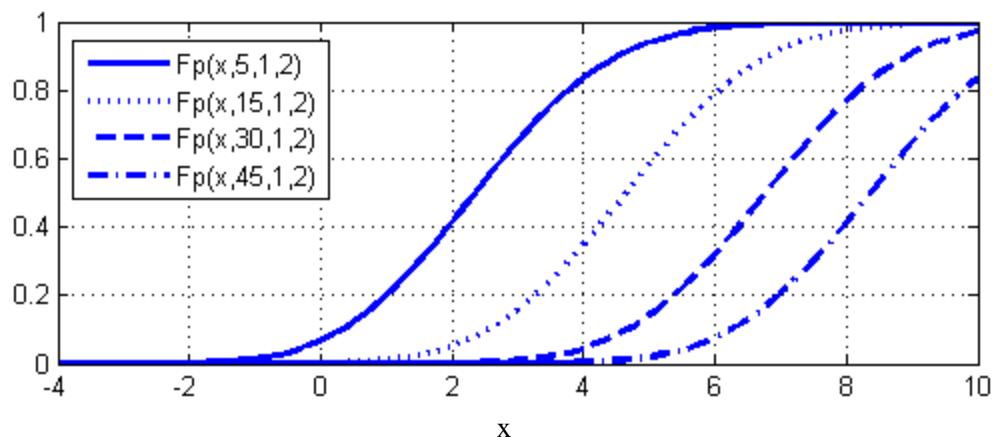


Figura 11. Evaluación de Ecuación 3.14 en MatLab R2008b

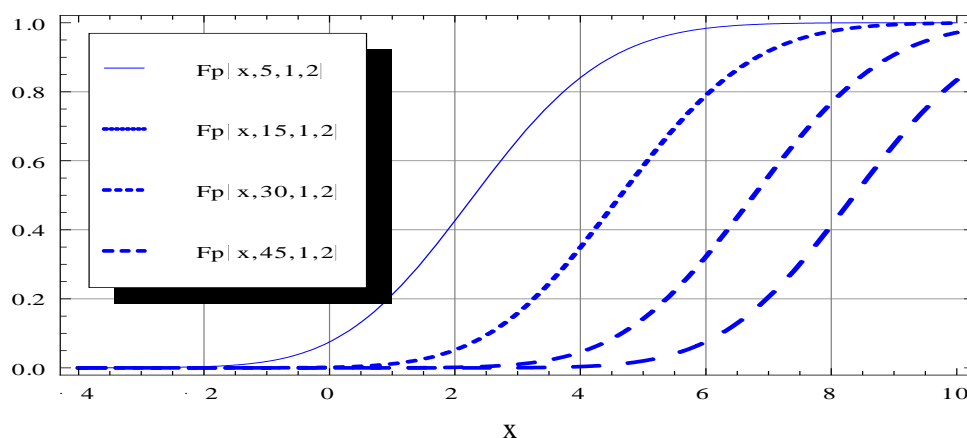


Figura 12. Evaluación de Ecuación 3.14 en Mathematica 7

En las Figuras 10, 11 y 12 se puede observar que al incluir la aproximación de Johnson y Kotz la acumulada de la función $P\sigma$ puede calcularse en los tres programas.

La Ecuación 3.14 es una función definida a trozos y por tanto es necesario demostrar que la misma es continua en el punto de partición del dominio ($x=7.75$). En la Figura 13 se muestra la continuidad de la Ecuación 3.14 para varios valores del tamaño de muestra.

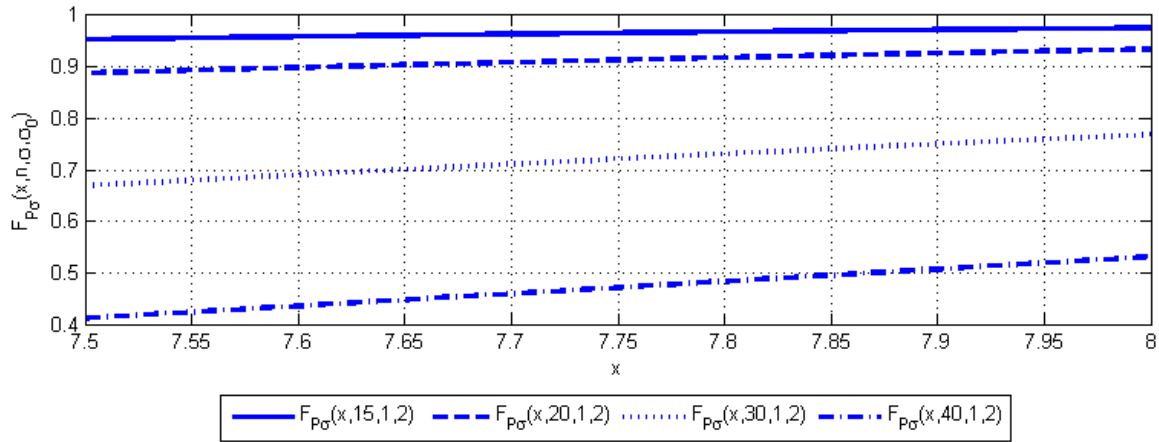


Figura 13. Función acumulada de $P\sigma$ para varios tamaños de muestra

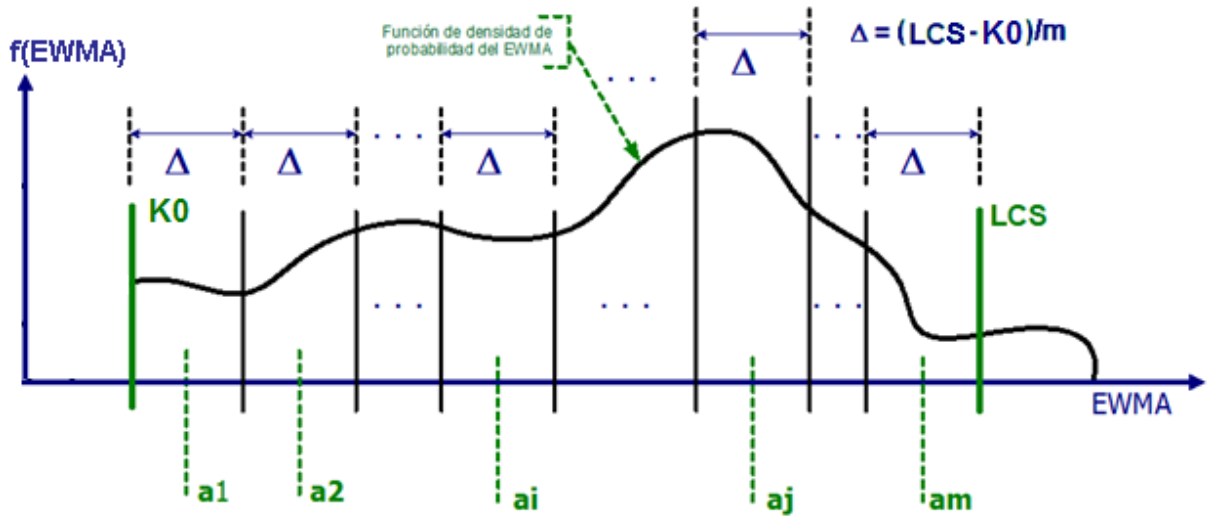
Como se puede observar en la Figura 10,

$$\lim_{x \rightarrow 7.75^-} F_p(x, n, \sigma, \sigma_0) = \lim_{x \rightarrow 7.75^+} F_p(x, n, \sigma, \sigma_0)$$

, por tanto la Ecuación 3.14 es continua en el punto de partición del dominio

3.2 Gráficos EWMA con un límite de control y reset

En caso de que se desee un gráfico EWMA que sirva para detectar únicamente incrementos en la dispersión del proceso, se pueden sustituir los estadísticos EWMA que caigan por debajo de un valor de “reset” K_0 por dicho valor, en otras palabras, $EWMA_t = \max\{EWMA_t, K_0\}$. Esta “reinicialización” del estadístico se traduce en un aumento de la velocidad de detección de incrementos en la dispersión del proceso debido a que en el EWMA no se acumulan valores hacia el lado contrario del incremento en la dispersión. En la Figura 14 se ilustra la “discretización” de la función de densidad de probabilidad del estadístico EWMA con reset en K_0 .



Fuente: Material didáctico provisto por el Dr. Noel Artiles-León

Figura 14. “Discretización” del EWMA con un límite de control y “reset”

Crowder & Hamilton (1992) introdujeron un gráfico EWMA para controlar la dispersión del proceso definiendo el estadístico $EWMA_t = (1 - \lambda) \cdot EWMA_{t-1} + \lambda \cdot \ln(S_t^2/\sigma_0^2)$ y sustituyendo por cero los EWMA que caían por debajo de cero. El cero corresponde a una aproximación de primer orden del valor esperado de $\ln\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)$ cuando la dispersión del proceso está en su valor nominal.

$$K_0 = E\left[\ln\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)\right] \approx \ln\left(\frac{E[S^2]}{\sigma_0^2}\right) = \ln\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right) = 0$$

En el caso del estadístico P_σ no es necesario aplicar esta aproximación para determinar su valor esperado, ya que cuando el proceso está en control, P_σ tiene distribución normal estándar y por tanto su valor esperado exacto es cero.

Para calcular el ARL del gráfico EWMA con un límite de control y “reset” con el método de las cadenas de Markov es necesario obtener expresiones para determinar las probabilidades de

transición entre estados transitorios. A continuación se muestra la deducción de dichas expresiones:

Si K_0 es el valor de “reset” y el estadístico EWMA se define como $EWMA_t = \max\{K_0, \lambda \cdot EWMA_{t-1} + (1 - \lambda) \cdot X_t\}$ entonces,

$$P_{i,j} = Pr\left\{a_j - \frac{\Delta}{2} \leq \max\{K_0, (1 - \lambda)a_i + \lambda X\} \leq a_j + \frac{\Delta}{2}\right\} \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

Dado que $\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$P_{i,j} = Pr\left\{a_j - \frac{\Delta}{2} \leq \frac{1}{2}[K_0 + (1 - \lambda)a_i + \lambda X + |K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X|] \leq a_j + \frac{\Delta}{2}\right\}$$

$$P_{i,j} = Pr\{2a_j - \Delta \leq K_0 + (1 - \lambda)a_i + \lambda X + |K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X| \leq 2a_j + \Delta\}$$

$$P_{i,j} = Pr\{-K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j - \Delta \leq |K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X| \leq -K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j + \Delta\}$$

Operando con el lado derecho de la desigualdad

$$|K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X| \leq -K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j + \Delta$$

Partiendo de que $|x| \leq \xi$ es equivalente a $-\xi \leq x \leq \xi$

$$\begin{aligned} -(-K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j + \Delta) &\leq K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X \\ &\leq -K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j + \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_0 + (1 - \lambda)a_i + \lambda X - 2a_j - \Delta &\leq K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X \\ &\leq -K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j + \Delta \end{aligned}$$

$$2(1 - \lambda)a_i + 2\lambda X - 2a_j - \Delta \leq 0 \leq -2K_0 + 2a_j + \Delta$$

Dado que $K_0 \leq a_j + \frac{\Delta}{2}, \forall j$ (ver Figura 14) entonces la expresión $0 \leq -2K_0 + 2a_j + \Delta$ siempre es cierta, entonces sólo queda:

$$2(1 - \lambda)a_i + 2\lambda X - 2a_j - \Delta \leq 0$$

$$2\lambda X \leq -2(1 - \lambda)a_i + 2a_j + \Delta$$

$$X \leq \frac{-2(1 - \lambda)a_i + 2a_j + \Delta}{2\lambda}$$

$$X \leq \frac{a_j - a_i + \lambda a_i + \Delta/2}{\lambda} \quad (3.15)$$

Operando en el lado izquierdo de la desigualdad

$$-K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j - \Delta \leq |K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X|$$

$$|K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X| \geq -K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j - \Delta$$

Dado que $|x| \geq \xi$ es equivalente a $x \geq \xi$ o $x \leq -\xi$, debemos considerar dos casos:

$$K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X \geq -K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j - \Delta$$

$$2K_0 \geq 2a_j - \Delta$$

$$K_0 \geq a_j - \frac{\Delta}{2}$$

Dado que $K_0 \leq a_j - \frac{\Delta}{2}, \forall j$, la expresión $K_0 \geq a_j - \frac{\Delta}{2}$ es falsa, por tanto solo queda:

$$K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X \leq -(-K_0 - (1 - \lambda)a_i - \lambda X + 2a_j - \Delta)$$

$$-2(1 - \lambda)a_i \leq -2a_j + \Delta + 2\lambda X$$

$$2\lambda X \geq -2(1 - \lambda)a_i + 2a_j - \Delta$$

$$\lambda X \geq a_j - a_i + \lambda a_i - \Delta/2$$

$$X \geq \frac{a_j - a_i + \lambda a_i - \Delta/2}{\lambda} \quad (3.16)$$

Combinando las ecuaciones 3.15 y 3.16 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j} &= Pr\left\{a_j - \frac{\Delta}{2} \leq \frac{1}{2}[K_0 + (1-\lambda)a_i + \lambda X + |K_0 - (1-\lambda)a_i - \lambda X|] \leq a_j + \frac{\Delta}{2}\right\} \\
 P_{i,j} &= Pr\left\{\frac{a_j - a_i + \lambda a_i - \Delta/2}{\lambda} \leq X \leq \frac{a_j - a_i + \lambda a_i + \Delta/2}{\lambda}\right\} \\
 P_{i,j} &= Pr\left\{(j-i)\frac{\Delta}{\lambda} + a_i - \frac{\Delta}{2\lambda} \leq X \leq (j-i)\frac{\Delta}{\lambda} + a_i + \frac{\Delta}{2\lambda}\right\} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Las probabilidades de transición entre el estado correspondiente al valor de “reset” y los demás estados transitorios se obtienen de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 P_{0,j} &= Pr\{EWMA_{t+1} = a_j | EWMA_t = K_0\} \quad j = 1, 2, \dots, m \\
 &= Pr\left\{a_j - \frac{\Delta}{2} \leq (1-\lambda)K_0 + \lambda X \leq a_j + \frac{\Delta}{2}\right\} \\
 &= Pr\left\{a_j - \frac{\Delta}{2} - (1-\lambda)K_0 \leq \lambda X \leq a_j + \frac{\Delta}{2} - (1-\lambda)K_0\right\} \\
 &= Pr\left\{\frac{a_j - \frac{\Delta}{2} - (1-\lambda)K_0}{\lambda} \leq X \leq \frac{a_j + \frac{\Delta}{2} - (1-\lambda)K_0}{\lambda}\right\} \quad (3.18) \\
 P_{i,0} &= Pr\{EWMA_{t+1} = K_0 | EWMA_t = a_j\} \quad i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Pr\{(1-\lambda)a_i + \lambda X \leq K_0\} \\
 &= Pr\left\{X \leq \frac{K_0 - (1-\lambda)a_i}{\lambda}\right\} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{0,0} &= Pr\{EWMA_{t+1} = K_0 | EWMA_t = K_0\} \\
 &= Pr\{(1-\lambda)K_0 + \lambda X \leq K_0\} \\
 &= Pr\{X \leq K_0\} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

En resumen, las ecuaciones para calcular las probabilidades de transición para el gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control y reset (estado 0) son las siguientes:

Para $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,m$

$$P_{i,j} = Pr \left\{ (j-i) \frac{\Delta}{\lambda} + a_i - \frac{\Delta}{2\lambda} \leq X \leq (j-i) \frac{\Delta}{\lambda} + a_i + \frac{\Delta}{2\lambda} \right\}$$

$$P_{0,j} = Pr \left\{ \frac{a_j - \frac{\Delta}{2} - (1-\lambda)K_0}{\lambda} \leq X \leq \frac{a_j + \frac{\Delta}{2} - (1-\lambda)K_0}{\lambda} \right\}$$

$$P_{i,0} = Pr \left\{ X \leq \frac{K_0 - (1-\lambda)a_i}{\lambda} \right\}$$

$$P_{0,0} = Pr\{X \leq K_0\}$$

Partiendo de las Ecuaciones 3.17-3.20 se puede formar la matriz de transición con $m+1$ estados para calcular el ARL del gráfico EWMA con un límite de control y “reset”.

3.3 Método de diseño de gráficos EWMA basado en funciones

Artiles-León et al. (1996) proveyeron ecuaciones aproximadas para la posición óptima de los límites de control y precaución en gráficos de control Shewhart para la media para dos esquemas distintos: (1) dos de los últimos tres puntos entre los límites de control y precaución y (2) tres de los últimos cuatro puntos entre los límites de control y precaución. La estrategia de diseño del gráfico EWMA utilizando este método consiste en usar funciones aproximadas para obtener valores de λ y K que produzcan un ARL_0 dado y el ARL_1 mínimo.

3.4 Creación de funciones aproximadas

Para que sea posible diseñar el gráfico P_σ EWMA usando el método de las funciones aproximadas es necesario que el usuario cuente con 3 funciones aproximadas que relacionen los valores óptimos de los parámetros λ^* y K^* y el ARL fuera de control, con el ARL en control y el tamaño de muestra. Para generar dichas funciones aproximadas se puede seguir los siguientes pasos:

Para ARL en control de $ARL_0 = 100, 200, 370, 500, 600, 700, 800, 900, 1000$.

Para un tamaño de muestra de $n = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 25, 30$.

Para situación fuera de control $\sigma_1 = 1.25\sigma_0, 1.5\sigma_0, 1.75\sigma_0, 2.0\sigma_0, 2.25\sigma_0$.

Resolver

$$\begin{array}{l} \text{Min } ARL(\lambda, K; n, \sigma_1) \\ \lambda, K \end{array}$$

Sujeto a

$$ARL(\lambda, K; n, \sigma_0) = ARL_0$$

$$0 < \lambda \leq 1$$

$$0 < K \leq 10$$

Tabular los valores de $ARL_0, ARL_1, \lambda^*, K^*, n, \sigma_1$.

Para cada σ_1 ajustar funciones aproximadas para ARL_1, λ^* y K^* que dependan de ARL_0 y n .

Las optimizaciones se harán usando MatLab y las funciones aproximadas serán obtenidas usando el programa TableCurve 3D. TableCurve 3D es un programa capaz de ajustar 36,000

funciones de tipo polinomial, logarítmico, exponencial, racional, entre otros y ordenar las mismas de acuerdo a alguno de los estadísticos de ajuste que se explicarán en la Sección 3.4.1. Para seleccionar la función con la que se va a predecir los valores óptimos de ARL_1 , λ^* y K^* se ajustarán dichas funciones aproximadas, se ordenarán de acuerdo al error estándar (Ver Sección 3.4.1) y entre aquellas que tengan menor error se elegirá la función que tenga menos términos.

3.4.1 Estadísticos de Ajuste

Además de generar las funciones aproximadas es necesario determinar qué tan bien se ajustan éstas a los datos reales. Para determinar qué tan bueno es el ajuste de una curva o superficie a un conjunto de datos pueden usarse varios estadísticos entre los que se encuentran el coeficiente de determinación(R^2), el R^2 ajustado y el error estándar.

El coeficiente de determinación(R^2) indica el porcentaje de la variabilidad de la variable respuesta que es explicada por el modelo. El R^2 puede obtenerse con la fórmula siguiente:

$$R^2 = \frac{\sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i^n (y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (3.21)$$

donde y es el valor real de la respuesta, \hat{y} es el valor de la respuesta predicho por el modelo y n es el número de datos ajustados. El R^2 puede tomar valores entre 0 y 1 donde 1 indica que el 100% de la variabilidad de la variable respuesta es explicada por el modelo. Mientras más variables tenga el modelo el R^2 será mayor.

El R^2 ajustado (Adj R^2) toma en cuenta los grados de libertad del error y del modelo de forma tal que a medida que se van agregando más variables llega un punto en el que éste empieza a decrecer. El R^2 ajustado puede obtenerse con la fórmula siguiente:

$$R^2_{adj} = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p} \right) (1 - R^2) \quad (3.22)$$

donde p es la cantidad de parámetros del modelo.

El error estándar es la raíz cuadrada de la varianza de los errores, mientras más pequeño es el error estándar mejor se ajusta el modelo a los datos. El error estándar puede obtenerse con la fórmula siguiente:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - p)} \quad (3.23)$$

Entre los modelos considerados se elegirán aquellos con error estándar más pequeño y que tengan menos cantidad de variables, esto se conoce como el criterio de parsimonia.

3.5 Validación de capacidad de interpolación de funciones obtenidas

Una vez se han obtenido las funciones es recomendable comprobar que los parámetros predichos por éstas producen valores cercanos al ARL_1 óptimo dado el ARL_0 y el tamaño de muestra especificado por el usuario del gráfico. Para validar las funciones seguiremos los siguientes pasos:

1) Seleccionar valores de ARL_0 y tamaños de muestra no considerados en la obtención de las funciones. Los valores de ARL_0 que usaremos son: 150, 350, 550, 750 y 950 y los tamaños de muestra son: 6, 8, 12, 14, 18, 22 y 26.

2) Obtener los valores óptimos de λ^* , K^* y ARL_1^* para cada una de las situaciones fuera de control consideradas en la Sección 3.4 y para los valores de ARL_0 y tamaños de muestra seleccionados en el paso 1. Estos valores óptimos se obtienen resolviendo el problema de optimización mostrado en la Sección 3.4.

3) Usando las funciones obtenidas en la Sección 3.4 predecir los valores óptimos de los parámetros y del ARL fuera de control ($\hat{\lambda}^*$, \hat{K}^* y $\widehat{ARL_1^*}$).

4) Calcular el ARL_1 correspondiente a $\hat{\lambda}^*$ y \hat{K}^* usando el método explicado en la Sección 3.1.1, a este ARL_1 le llamaremos $ARL_{1(p)}$.

5) Calcular el ARL_0 correspondiente a $\hat{\lambda}^*$ y \hat{K}^* usando el método explicado en Sección 3.1.1, a este ARL_0 le llamaremos $ARL_{0(p)}$.

6) Calcular y graficar los errores porcentuales $(ARL_1^* - \widehat{ARL_1^*})/ARL_1^*$ y $(ARL_1^* - ARL_{1(p)})/ARL_1^*$ y $(ARL_0 - ARL_{0(p)})/ARL_0$

3.6 Comparación con otros gráficos usados para controlar la dispersión.

Para determinar si es efectivo el uso del gráfico P_σ EWMA o del gráfico P_σ EWMA con un límite de control es necesario comparar su desempeño con el de otros gráficos para controlar la dispersión del proceso. Para hacer esta comparación es necesario calibrar los parámetros de los gráficos para que todos tengan el mismo ARL en control y luego comparar sus ARL fuera de control para distintos desplazamientos. El gráfico que tenga el ARL fuera de control más pequeño es el mejor para el desplazamiento que se esté analizando.

Los gráficos con los que se compararán los gráficos P_σ EWMA y P_σ EWMA con un límite de control serán los siguientes:

- S de Shewhart
- R de Shewhart
- EWMA de $\ln(S^2)$
- CUSUM de $\ln(S^2)$
- CUSUM P_σ

3.7 Contribuciones

Acosta-Mejía et al. (1999) investigaron el desempeño del gráfico CUSUM usando la transformación de la normal inversa. Chen et al. (2001) desarrollaron un gráfico EWMA de monitoreo conjunto de la media y la varianza, en donde la varianza se monitoreaba usando la transformación de la normal inversa y compararon el desempeño de éste con el de otros gráficos de monitoreo conjunto. No obstante, el desempeño del gráfico EWMA usando esta transformación es desconocido y no se cuenta con las herramientas para diseñar este gráfico de forma tal que tenga un desempeño específico.

En resumen, en esta tesis se pretende determinar qué tan bueno es el desempeño del gráfico EWMA usando la transformación de la normal inversa (P_{σ} EWMA). Además, se hará posible el diseño del gráfico P_{σ} EWMA a través de un método, que no es el tradicionalmente usado método gráfico de Crowder, basado en funciones aproximadas obtenidas mediante regresión. De esta forma, el usuario del gráfico podrá obtener los valores óptimos de λ y K para un ARL_0 e incremento específicos, sin necesidad de buscar éstos en curvas y tablas.

4 Análisis y Resultados

Una vez definida la metodología para el cálculo de ARL_0 y ARL_1 y descrito el procedimiento para crear y validar las funciones de regresión, se procedió a obtener dichas funciones, a validarlas y a comparar el desempeño de los gráficos P_σ EWMA y P_σ EWMA con un límite de control con el de otros gráficos usados para monitorear la dispersión del proceso.

En este capítulo se muestran las funciones obtenidas, su bondad de ajuste y la validación de las mismas, además se presenta la comparación de desempeño de los gráficos.

4.1 Comparaciones de desempeño

Tal y como se explicó en la Sección 3.6, la comparación de desempeño de gráficos de control consiste en calibrar los parámetros de los gráficos de forma tal que todos tengan el mismo ARL_0 y comparar sus ARL_1 para un desplazamiento en particular. En esta sección se compara el desempeño de los gráfico P_σ EWMA y P_σ EWMA con un límite de control con el de otros gráficos usados para monitorear la dispersión del proceso.

4.1.1 Comparación del gráfico P_σ EWMA con otros gráficos para controlar la dispersión

En la Tabla 1 se muestran los ARL para el gráfico R (Shew R), P_σ EWMA, EWMA $\ln(S^2)$ para distintos incrementos en la dispersión del proceso. Los gráficos fueron calibrados para tener un $ARL_0=200$ con un tamaño de muestra $n=5$ y para detectar de forma óptima un incremento de 20% en la desviación estándar del proceso, los mismos están organizados de acuerdo a su habilidad para detectar este incremento.

Tabla 1. Comparación de ARL de $P\sigma$ EWMA con otros gráficos para controlar la dispersión

σ_1/σ_0	Shew S^2	Shew R	EWMA $\ln(S^2)$	$P\sigma$ EWMA
	UCL=4.1060	UCL=4.8855	K=2.2106	K=2.3760
	LCL=0.0362	LCL=0	$\lambda=0.050$	$\lambda=0.078$
0.50	28.83	∞	5.18	5.30
0.60	56.43	∞	7.20	7.18
0.75	131.24	853	14.73	14.09
1.0	200.00	200.00	200.00	200.52
1.2	42.39	30.70	24.49	20.08
1.3	21.58	16.53	15.34	12.07
1.4	12.61	10.20	11.36	8.65
1.5	8.24	6.95	9.15	6.78
1.6	5.86	5.12	7.75	5.62
1.7	4.46	3.99	6.79	4.83
1.8	3.56	3.26	6.08	4.26
1.9	2.97	2.76	5.55	3.82
2.0	2.55	2.40	5.12	3.48

El gráfico EWMA $\ln(S^2)$ considerado en la Tabla 1 es un gráfico EWMA para el logaritmo natural de S^2 con dos límites de control y sin usar valor de reset.

Como se puede observar en la Tabla 1, el gráfico $P\sigma$ EWMA supera los gráficos R, S^2 y EWMA $\ln(S^2)$. Además de comparar los gráficos para incrementos puntuales, estos se pueden comparar mediante sus curvas de ARL. En la Figura 15 se muestra el cociente entre las curvas de ARL de los gráficos S^2 , R y EWMA $\ln(S^2)$ y el gráfico $P\sigma$ EWMA para incrementos en la dispersión del proceso.

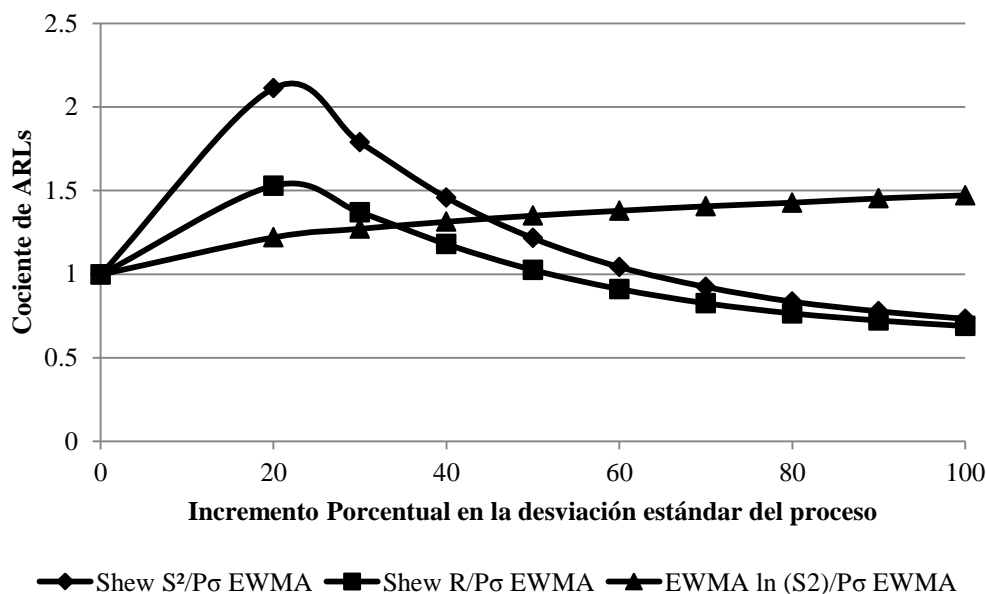


Figura 15. Curvas de cocientes de ARL $P\sigma$ EWMA

Como se puede observar en la Figura 15, para un incremento en la desviación estándar del proceso de 20% el gráfico $P\sigma$ EWMA supera a los otros 3 gráficos de control. También se observa que aunque los gráficos están optimizados para detectar incrementos de 20%, el gráfico $P\sigma$ EWMA supera consistentemente al gráfico EWMA $\ln(S^2)$. Es importante recalcar que la memoria del gráfico EWMA lo hace eficiente para detectar cambios pequeños pero afecta su desempeño al detectar cambios grandes, por esta razón se puede notar que para incrementos mayores a un 60%, los gráficos sin memoria (R y S^2) tiene mejor desempeño que el gráfico $P\sigma$ EWMA.

4.1.2 Comparación entre gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control y otros gráficos para controlar la dispersión

En la Tabla 2 se muestran los ARL para el gráfico R (Shew R), el gráfico S (Shew S), $P\sigma$ EWMA con un límite de control ($P\sigma$ EWMA1), EWMA $\ln(S^2)$ con un límite de control y reset (EWMA $\ln(S^2)$ 1 y CUSUM $\ln(S^2)$) para distintos incrementos en la dispersión del proceso. Los

gráficos fueron calibrados para tener un $ARL_0=200$ con tamaño de muestra $n=5$ y para detectar de forma óptima un incremento de 20% en la desviación estándar del proceso, los mismos están organizados de acuerdo a su habilidad para detectar este incremento.

Tabla 2. Comparación entre ARL de $P\sigma$ EWMA con un límite de control y otros gráficos para controlar la dispersión

σ_1/σ_0	Shew R	Shew S	EWMA $\ln(S^2)$ 1	CUSUM $\ln(S^2)$	$P\sigma$ EWMA1	CUSUM $P\sigma$
	UCL=4.88	UCL=1.93	K=1.06	K=0.068	K=2.4198	K=2.4198
			$\lambda=0.05$	h=2.66	$\lambda=0.1195$	h=4.28
1.0	200.18	200.10	200.00	199.93	200.07	201.00
1.2	30.72	28.30	18.10	18.07	17.41	17.15
1.3	16.55	15.10	11.00	10.75	10.51	10.21
1.4	10.20	9.20	7.60	7.81	7.52	7.24
1.5	6.96	6.30	6.00	5.98	5.89	5.65
2.0	2.40	2.40	3.20	3.18	3.03	2.98

Los ARLs que no corresponden al gráfico $P\sigma$ EWMA1 fueron tomados de Acosta-Mejía, Pignatiello, & Rao (1999).

Como se puede observar en la Tabla 2, el gráfico $P\sigma$ EWMA supera los gráficos R, S con un límite de control, el EWMA $\ln(S^2)$ 1 y el CUSUM $\ln(S^2)$, pero es ligeramente superado por el CUSUM de $P\sigma$. En caso de que sólo se desee detectar incrementos en la dispersión, se pueden usar los gráficos $P\sigma$ EWMA con un límite de control y CUSUM $P\sigma$ ya que detectan con mayor rapidez incrementos en la desviación estándar que los demás gráficos. En la Figura 16 se muestran los cocientes de ARL entre los gráficos R, S con un límite de control, EWMA $\ln(S^2)$ con un límite de control y reset y el gráfico $P\sigma$ EWMA.

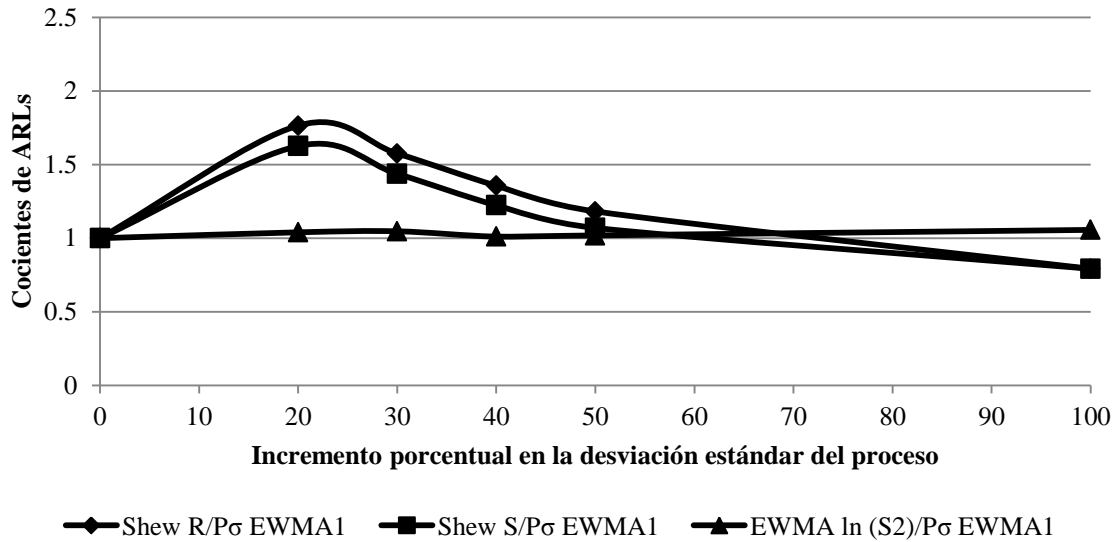


Figura 16. Curvas de cocientes de ARL de gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control

Como se puede observar en la Figura 16, la curva correspondiente al cociente entre las curvas de ARL de los gráficos EWMA $\ln(S^2)$ y $P\sigma$ EWMA con un límite de control está bien cercana a 1, lo que indica que cuando se diseña para un 20% de incremento en la desviación estándar no existe una diferencia importante en el desempeño de estos gráficos para ningún desplazamiento. En otras palabras, cuando se diseña para detectar óptimamente cambios de 20% en la desviación estándar del proceso se puede usar tanto el gráfico EWMA propuesto por Crowder & Hamilton(1992) como el gráfico $P\sigma$ EWMA1.

4.2 Tablas con parámetros óptimos y curvas de ARL

Además de hallar los valores óptimos de los parámetros para construir las tablas y gráficos de la Sección 4.1, también se obtuvieron los parámetros óptimos para detectar incrementos en la desviación estándar detallados en la Sección 3.4. En las figuras 17 y 18, se muestran las curvas de ARL de los gráficos $P\sigma$ EWMA y $P\sigma$ EWMA1 optimizados para $\sigma/\sigma_0 = 1.25$ y $\sigma/\sigma_0 = 1.20$ respectivamente, con tamaño de muestra 5 y $ARL_0 = 200, 500$ y 800.

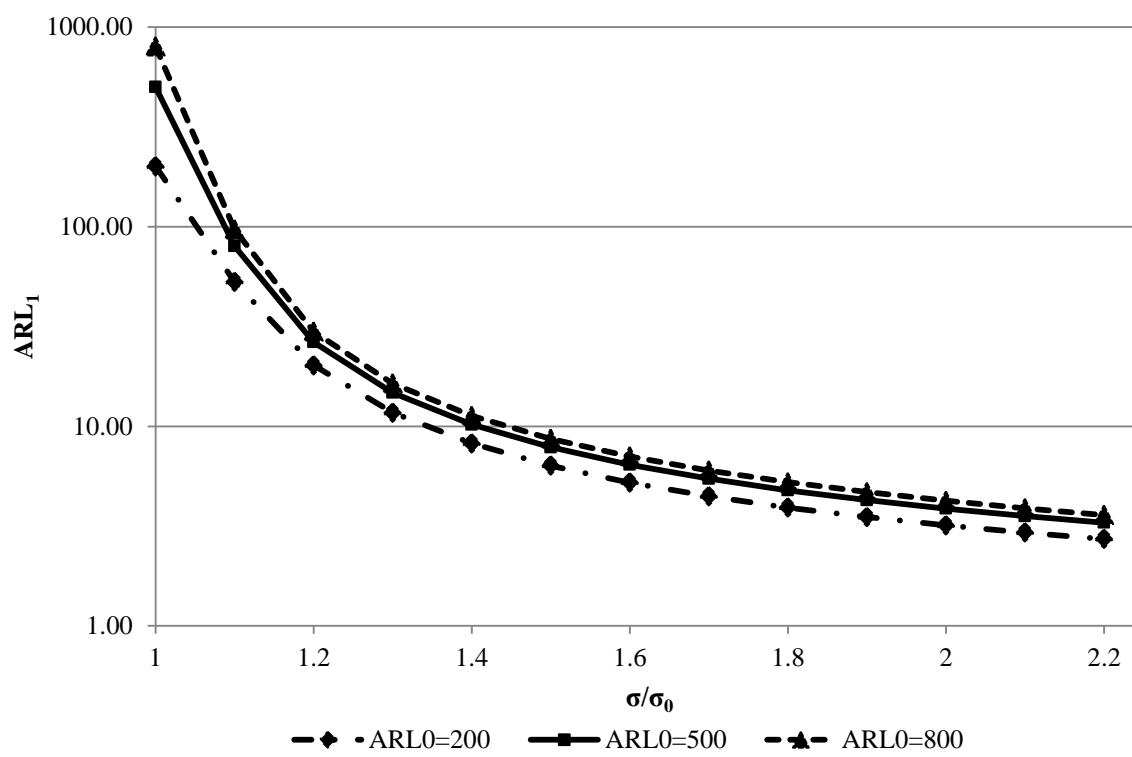


Figura 17. Curvas de ARL gráficos Pσ EWMA optimizados para $\sigma/\sigma_0 = 1.25$ (n=5)

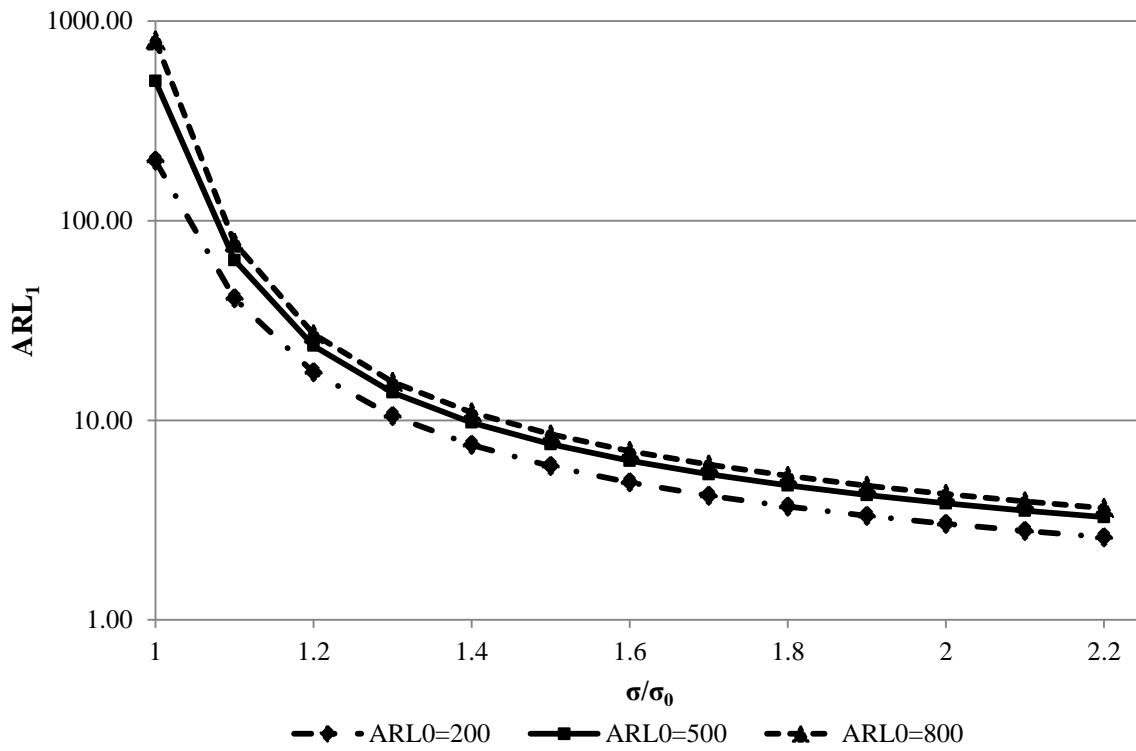


Figura 18. Curvas ARL gráficos $P\sigma$ EWMA1 optimizados para $\sigma=1.20$ ($n=5$)

En las Tablas 3 y 4, se muestran los valores de (λ, K) óptimos para el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control (Tabla 5) y para el gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control (Tabla 6), para valores de $ARL_0 = 200, 370, 500, 800, 1000$; tamaños de muestra $n=5, 15, 25$ y para incrementos porcentuales en la desviación del proceso de 25%, 50%, 75%, 100%, 125%.

En las Tablas 3 y 4 los valores óptimos se muestran de la forma siguiente:

$$\begin{matrix} (\lambda^*, K^*) \\ ARL_1^* \end{matrix}$$

Por ejemplo, si se desean obtener los valores óptimos de los parámetros en el gráfico $P\sigma$ EWMA con $ARL_0=200$, $\sigma=1.25$ y $n=5$, se busca en la Tabla 3 y se obtienen los parámetros óptimos: $\lambda^*=0.114$, $K^*=2.4938$ y $ARL_1^*=14.96$.

Tabla 3. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(200, 370, 500, 800, 1000)$ y $n(5, 15, 25)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

σ/σ_0	n	ARL ₀				
		200	370	500	800	1000
1.25	5	(0.114,2.4938) 14.96	(0.094,2.6854) 17.74	(0.087,2.7773) 19.15	(0.076,2.9175) 21.42	(0.072,2.9826) 22.52
1.50	5	(0.326,2.7256) 5.72	(0.279,2.9144) 6.51	(0.261,3.0043) 6.90	(0.236,3.1408) 7.52	(0.226,3.2040) 7.82
1.75	5	(0.515,2.7798) 3.33	(0.468,2.9726) 3.71	(0.446,3.0631) 3.89	(0.413,3.1999) 4.19	(0.399,3.2631) 4.33
2.00	5	(0.643,2.7953) 2.35	(0.607,2.9889) 2.56	(0.589,3.0798) 2.67	(0.561,3.2173) 2.84	(0.548,3.2808) 2.93
2.25	5	(0.729,2.8010) 1.86	(0.701,2.9944) 1.99	(0.687,3.0853) 2.06	(0.665,3.2228) 2.17	(0.654,3.2863) 2.22
1.25	15	(0.262,2.6893) 5.86	(0.231,2.8849) 6.65	(0.218,2.9771) 7.05	(0.200,3.1166) 7.68	(0.193,3.1810) 7.98
1.50	15	(0.611,2.7923) 2.26	(0.568,2.9855) 2.49	(0.547,3.0763) 2.60	(0.515,3.2134) 2.78	(0.500,3.2768) 2.87
1.75	15	(0.812,2.8044) 1.42	(0.787,2.9973) 1.51	(0.774,3.0880) 1.55	(0.753,3.2252) 1.63	(0.743,3.2886) 1.66
2.00	15	(0.914,2.8065) 1.15	(0.899,2.9992) 1.18	(0.891,3.0898) 1.20	(0.879,3.2268) 1.23	(0.873,3.2902) 1.25
2.25	15	(0.963,2.8069) 1.05	(0.955,2.9996) 1.07	(0.950,3.0901) 1.08	(0.944,3.2271) 1.09	(0.940,3.2905) 1.10
1.25	25	(0.368,2.7428) 3.94	(0.327,2.9360) 4.42	(0.310,3.0272) 4.66	(0.287,3.1655) 5.03	(0.278,3.2295) 5.20
1.50	25	(0.766,2.8028) 1.56	(0.734,2.9958) 1.68	(0.718,3.0865) 1.74	(0.693,3.2237) 1.85	(0.680,3.2871) 1.89
1.75	25	(0.930,2.8067) 1.11	(0.916,2.9994) 1.14	(0.908,3.0899) 1.16	(0.896,3.2269) 1.19	(0.890,3.2903) 1.20
2.00	25	(0.984,2.8070) 1.02	(0.979,2.9997) 1.03	(0.976,3.0902) 1.03	(0.972,3.2272) 1.04	(0.970,3.2905) 1.04
2.25	25	(0.997,2.8070) 1.00	(0.996,2.9997) 1.01	(0.995,3.0902) 1.01	(0.994,3.2272) 1.01	(0.993,3.2905) 1.01

Leyenda:

$$(\lambda^*, K^*)$$

$$ARL_1^*$$

Tabla 4. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(200, 370, 500, 800, 1000)$ y $n(5, 15, 25)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím

		ARL_0				
σ/σ_0	n	200	370	500	800	1000
1.25	5	(0.163,2.4943) 13.04	(0.127,2.6845) 15.81	(0.113,2.7751) 17.23	(0.097,2.9138) 19.50	(0.090,2.9785) 20.60
1.50	5	(0.404,2.6299) 5.14	(0.342,2.8340) 5.94	(0.315,2.9293) 6.34	(0.279,3.0727) 6.98	(0.264,3.1388) 7.28
1.75	5	(0.587,2.6479) 3.04	(0.533,2.8553) 3.42	(0.508,2.9521) 3.60	(0.471,3.0980) 3.90	(0.454,3.1652) 4.05
2.00	5	(0.721,2.6438) 2.18	(0.668,2.8540) 2.39	(0.645,2.9514) 2.50	(0.612,3.0976) 2.67	(0.597,3.1648) 2.75
2.25	5	(0.829,2.6297) 1.75	(0.774,2.8448) 1.88	(0.751,2.9438) 1.95	(0.718,3.0917) 2.05	(0.703,3.1595) 2.11
1.25	15	(0.315,2.6054) 5.36	(0.268,2.8102) 6.17	(0.250,2.9063) 6.58	(0.225,3.0516) 7.22	(0.215,3.1186) 7.53
1.50	15	(0.689,2.6460) 2.09	(0.631,2.8554) 2.32	(0.605,2.9526) 2.43	(0.567,3.0986) 2.61	(0.550,3.1658) 2.70
1.75	15	(0.960,2.5967) 1.34	(0.893,2.8226) 1.43	(0.865,2.9256) 1.47	(0.826,3.0783) 1.54	(0.809,3.1478) 1.58
2.00	15	(1.000,2.5823) 1.11	(1.000,2.7888) 1.15	(1.000,2.8854) 1.16	(1.000,3.0309) 1.19	(1.000,3.0980) 1.21
2.25	15	(1.000,2.5823) 1.04	(1.000,2.7888) 1.05	(1.000,2.8854) 1.06	(1.000,3.0309) 1.07	(1.000,3.0980) 1.08
1.25	25	(0.432,2.6349) 3.63	(0.377,2.8410) 4.12	(0.353,2.9375) 4.36	(0.322,3.0832) 4.74	(0.308,3.1503) 4.92
1.50	25	(0.885,2.6178) 1.46	(0.821,2.8378) 1.58	(0.793,2.9385) 1.64	(0.754,3.0883) 1.74	(0.736,3.1567) 1.79
1.75	25	(1.000,2.5823) 1.08	(1.000,2.7888) 1.11	(1.000,2.8854) 1.12	(1.000,3.0309) 1.15	(1.000,3.0980) 1.16
2.00	25	(1.000,2.5823) 1.01	(1.000,2.7888) 1.02	(1.000,2.8854) 1.02	(1.000,3.0309) 1.03	(1.000,3.0980) 1.03
2.25	25	(1.000,2.5823) 1.00	(1.000,2.7888) 1.00	(1.000,2.8854) 1.00	(1.000,3.0309) 1.01	(1.000,3.0980) 1.01

Leyenda:

$$(\lambda^*, K^*)$$

$$ARL_1^*$$

En el Apéndice A, se presentan los valores óptimos para todas las combinaciones de ARL_0 , n y σ mencionadas en la Sección 3.4 tanto para el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control como para el $P\sigma$ EWMA con un límite de control.

4.3 Funciones de regresión

En esta sección se mostrarán las funciones encontradas para estimar λ^* , K^* y ARL_1^* con sus respectivos coeficientes y estadísticos de adecuación para el gráfico P_σ EWMA y P_σ EWMA con un límite de control, además se presentará la validación de dichas funciones.

4.3.1 Funciones de regresión para el gráfico $P\sigma$ EWMA

Para estimar el valor óptimo de λ para un ARL_0 y n específicos la función con error estándar mínimo que cumplía con el criterio de parsimonia está dada por la Ecuación 4.1

$$\lambda = \frac{a + b \cdot \ln(ARL_0) + c \cdot \ln^2(ARL_0) + d \cdot \ln(n)}{1 + e \cdot \ln(ARL_0) + f \cdot \ln(n) + g \cdot \ln^2(n)} \quad (4.1)$$

Los coeficientes de la Ecuación 4.1 se muestran para cada una de las situaciones fuera de control consideradas en la Sección 3.4 en la Tabla 5:

Tabla 5. Coeficientes para ecuación de λ gráfico $P\sigma$ EWMA

σ_1/σ_0	a	b	c	d	e	f	g
1.25	0.2742	-0.0747	0.0043	0.0636	0.0305	-0.1883	0.0000
1.50	0.5086	-0.1126	0.0046	0.1037	-0.0469	-0.0813	0.0000
1.75	0.5038	-0.0771	0.0021	0.0423	-0.0512	-0.2427	0.0352
2.00	0.7157	-0.1458	0.0026	0.2314	-0.1160	0.1213	0.0000
2.25	0.6042	-0.0681	0.0008	0.0249	-0.0581	-0.2342	0.0393

En la Tabla 6 se muestra el ajuste de la Ecuación 4.1 para cada dispersión fuera de control.

Tabla 6. Ajuste de funciones de λ gráfico P σ EWMA

σ_1/σ_0	R^2	Adj R^2	Error Estándar	Error absoluto máximo
1.25	99.99%	99.98%	0.0011	0.0040
1.50	99.88%	99.87%	0.0058	0.0183
1.75	99.98%	99.98%	0.0021	0.0086
2.00	99.16%	99.10%	0.0120	0.0317
2.25	99.96%	99.96%	0.0020	0.0058

Para estimar el valor óptimo de K para un ARL_0 y n específicos la función con menor error y que cumplía con el criterio de parsimonia está dado por la Ecuación 4.2

$$K = a_1 + b_1 \cdot \ln(ARL_0) + c_1 \cdot \ln^2(ARL_0) + \frac{d_1}{n} + \frac{e_1}{n^2} + \frac{f_1}{n^3} \quad (4.2)$$

Los coeficientes de la Ecuación 4.2 se muestran para cada una de las situaciones fuera de control consideradas en la Sección 3.4 en la Tabla 7:

Tabla 7. Coeficientes para ecuación de K gráfico P σ EWMA

σ_1/σ_0	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1
1.25	0.7905	0.4492	-0.0118	-2.8400	10.9952	-27.1151
1.50	0.7194	0.4672	-0.0136	-0.1006	-3.4517	8.5533
1.75	0.7037	0.4699	-0.0138	0.0786	-1.6752	3.1152
2.00	0.7070	0.4689	-0.0138	0.0506	-0.7164	1.1042
2.25	0.7092	0.4684	-0.0137	0.0266	-0.3036	0.2939

El ajuste de la Ecuación 4.2 se muestra en la Tabla 8 para cada dispersión fuera de control

Tabla 8. Ajuste de funciones de K gráfico P σ EWMA

σ_1/σ_0	R^2	Adj R^2	Error Estándar	Error absoluto máximo
1.25	99.99%	99.99%	0.0020	0.0127
1.50	100.00%	100.00%	0.0012	0.0067
1.75	100.00%	100.00%	0.0005	0.0015
2.00	100.00%	100.00%	0.0005	0.0021
2.25	100.00%	100.00%	0.0004	0.0019

Para estimar el valor óptimo de ARL_1 para un ARL_0 y n específicos la ecuación con mejor ajuste fue la siguiente:

$$ARL_1 = \frac{a_2 + b_2 \cdot \ln(ARL_0) + c_2 \cdot \ln(n) + d_2 \cdot \ln^2(n) + e_2 \cdot \ln^3(n)}{1 + f_2 \cdot \ln(ARL_0) + g_2 \cdot \ln^2(ARL_0) + h_2 \cdot \ln(n)} \quad (4.3)$$

Los coeficientes de la Ecuación 4.3 se muestran para cada una de las situaciones fuera de control consideradas en la Sección 3.4 en la Tabla 9:

Tabla 9. Coeficientes para ecuación de ARL_1 gráfico $P\sigma$ EWMA

σ_1/σ_0	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2	h_2
1.25	12.0043	0.0084	-7.2970	1.8316	-0.1760	-0.2332	0.0141	0.0817
1.50	6.6994	-0.0394	-4.5007	1.2163	-0.1194	-0.1958	0.0110	0.0385
1.75	4.7630	-0.0639	-3.3741	0.9471	-0.0924	-0.1590	0.0080	-0.0379
2.00	3.8707	-0.0691	-2.7857	0.8159	-0.0826	-0.1336	0.0055	-0.0675
2.25	3.3183	-0.0735	-2.3682	0.7207	-0.0759	-0.1169	0.0037	-0.0761

En la Tabla 10 se muestra el ajuste de la Ecuación 4.3 para cada dispersión fuera de control.

Tabla 10. Ajuste de funciones de ARL_1 gráfico $P\sigma$ EWMA

σ_1/σ_0	R^2	Adj R^2	Error Estándar	Error absoluto máximo
1.25	99.99%	99.99%	0.0378	0.1419
1.50	99.99%	99.99%	0.0172	0.0385
1.75	99.97%	99.96%	0.0164	0.0398
2.00	99.94%	99.94%	0.0125	0.0369
2.25	99.93%	99.92%	0.0090	0.0249

Como se explicó en la Sección 3.5, luego de crear las funciones de regresión es necesario comprobar que verdaderamente estas pueden predecir los valores óptimos de los parámetros λ y K que producen el menor ARL_1 a un ARL_0 y n especificados por el usuario.

Para crear los datos para validar se consideraron las situaciones fuera de control $\sigma_1/\sigma_0 = 1.25, 1.50, 1.75, 2.00$ y 2.25 , los tamaños de muestra $n = 6, 8, 12, 14, 18, 22$ y 26 y los largos de

corrida promedio en control $ARL_0 = 150, 350, 550, 750$ y 950 , lo que produjo un total de 175 problemas de optimización a resolver.

En la Figura 19 se muestra el error relativo entre el ARL_1 óptimo para la dispersión fuera de control, ARL_0 y el n usados para crear los datos de validación y el ARL_1 calculado a partir de los parámetros λ y K predichos por las funciones 4.1 y 4.2 respectivamente.

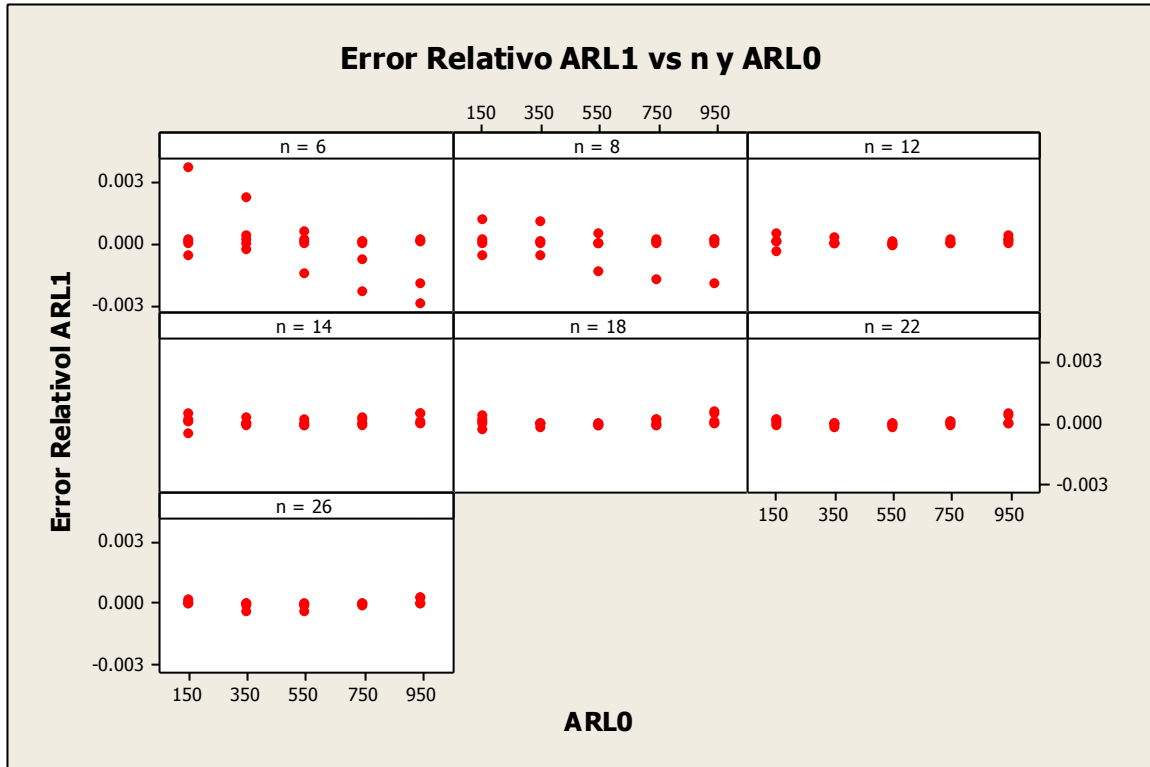


Figura 19. Error relativo entre ARL_1 óptimo y ARL_1 calculado a partir de λ y K predichos gráfico $P\sigma$ EWMA

Como se puede observar en la Figura 19, todos los errores se encuentran por debajo de 5% en términos absolutos, lo que indica que la predicción de los valores óptimos es excelente dado que prácticamente no hay diferencia entre el ARL óptimo con los valores de λ y K obtenidos resolviendo el problema de optimización no lineal con restricciones no lineales formulado en la Sección 3.4 y el ARL óptimo con los valores de λ y K obtenidos con las ecuaciones 4.1 y 4.2.

En la Figura 20 se muestra el error relativo entre el ARL_1 óptimo para la dispersión fuera de control, ARL_0 y el n usados para crear los datos de validación y el ARL_1 calculado a partir de la Ecuación 4.3.

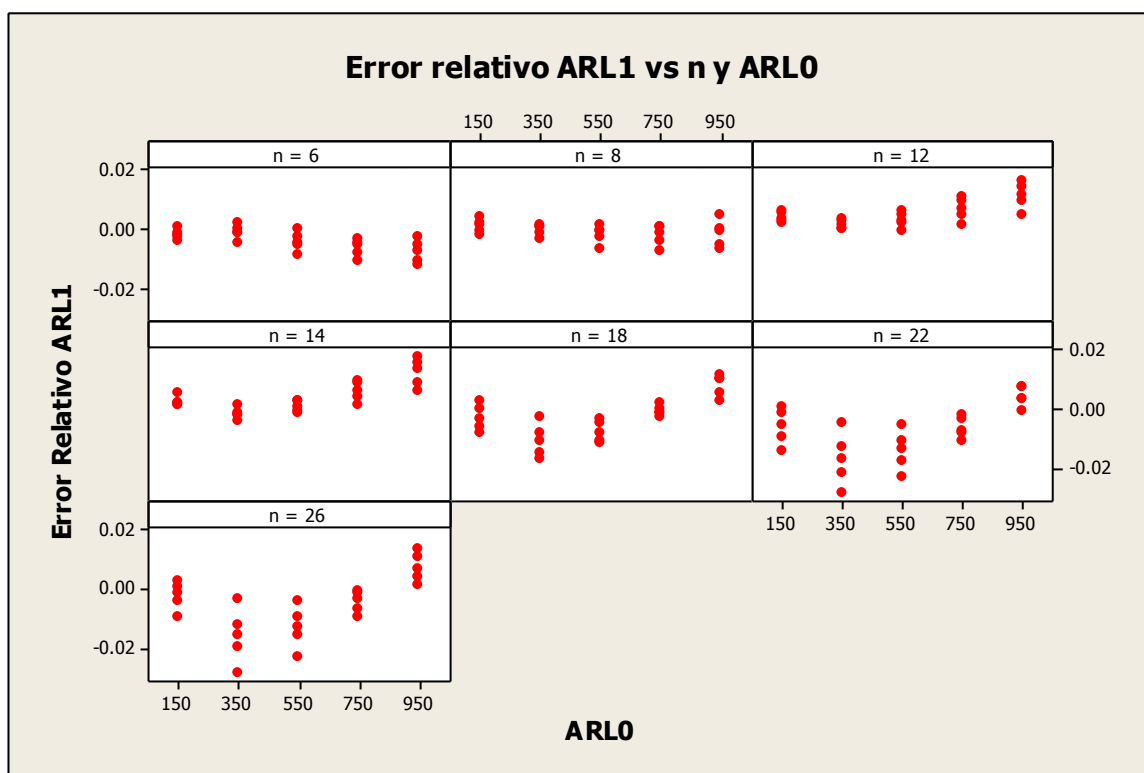


Figura 20. Error relativo entre el ARL_1 óptimo y el ARL_1 predicho por la Ec. 4.3

Como se puede observar en la Figura 20, todos los errores se encuentran por debajo de 5% en términos absolutos, lo que indica que la predicción del ARL_1 obtenida con la Ecuación 4.3 es prácticamente igual al ARL_1 obtenido con los parámetros resultantes de la solución del problema de optimización formulado en la Sección 3.4.

Dado que el diseño óptimo de un gráfico de control consiste en hallar los valores de los parámetros que minimizan el ARL_1 dado un ARL_0 , es necesario verificar el error entre el ARL_0 para el que se optimizó y el ARL_0 que se obtiene con las estimaciones de los parámetros óptimos.

En la Figura 2121 se muestra el error porcentual entre el ARL_0 real y el obtenido con los valores predichos para λ y K .

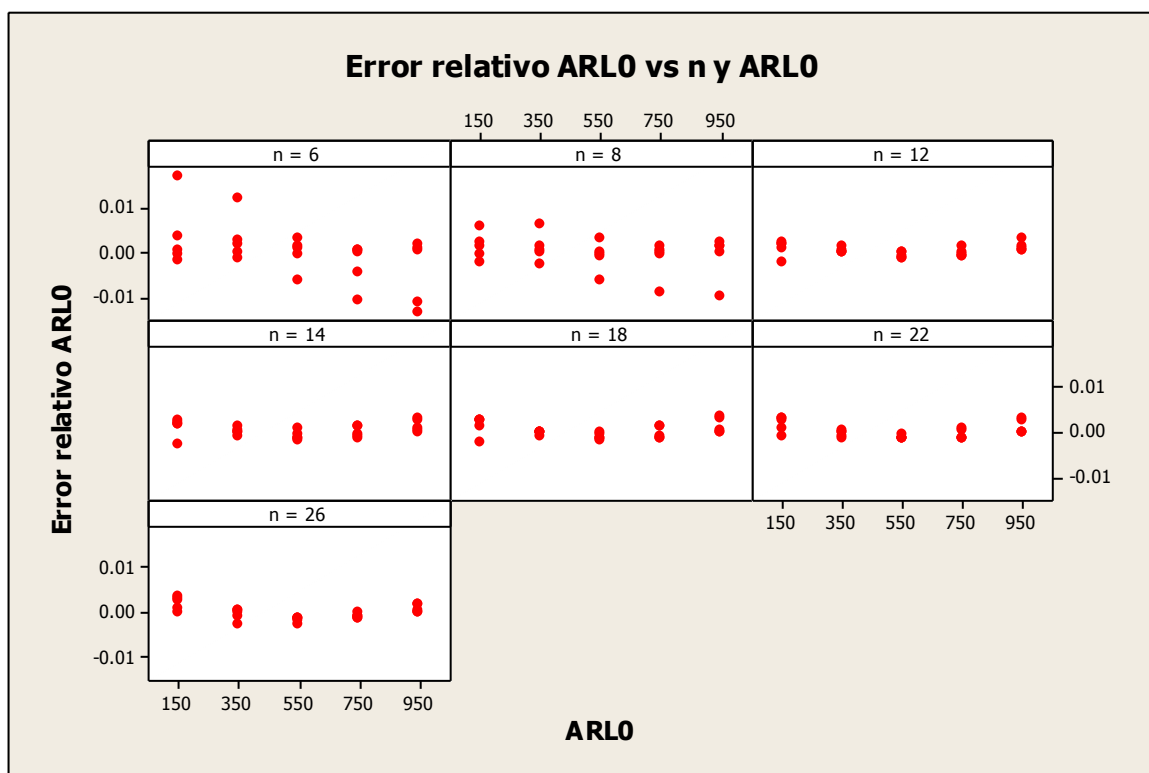


Figura 21. Error porcentual entre ARL_0 real y el ARL_0 obtenido con λ y K predichos

Como se puede observar en la Figura 2121, todos los errores se encuentran por debajo de 5% en términos absolutos, lo que indica que la diferencia entre el ARL_0 real y el obtenido con los valores predichos de los parámetros λ y K es mínima.

4.3.2 Ecuaciones de regresión para el gráfico P_σ EWMA con un límite de control

En esta sección se mostrarán las ecuaciones encontradas para estimar λ^* , K^* y ARL_1^* con sus respectivos coeficientes y estadísticos de adecuación para el gráfico P_σ EWMA, además se presentará la validación de dichas ecuaciones.

Para estimar el valor óptimo de λ para un ARL_0 y n específicos la función con error estándar mínimo que cumplía con el criterio de parsimonia está dada por la Ecuación 4.4

$$\lambda = \min \left\{ \max \left[a_3 + b_3 \cdot \ln(ARL_0) + c_3 \cdot n + d_3 \cdot \ln^2(ARL_0) + e_3 \cdot n^2 + f_3 \cdot n \cdot \ln(ARL_0), 0.01 \right], 1 \right\} \quad (4.4)$$

Los coeficientes de la Ecuación 4.4 se muestran para cada una de las situaciones fuera de control consideradas en la Sección 3.4 en la Tabla 11

Tabla 11. Coeficientes para λ gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control

σ_1/σ_0	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3
1.25	0.8615	-0.2263	0.0244	0.0151	-0.0001	-0.0014
1.50	1.0675	-0.2162	0.0395	0.0111	-0.0004	-0.0005
1.75	1.1857	-0.2270	0.0612	0.0128	-0.0008	-0.0015
2.00	1.2276	-0.2261	0.0847	0.0134	-0.0013	-0.0028
2.25	1.2599	-0.2275	0.1084	0.0139	-0.0018	-0.0042

En la Tabla 12 se muestra el ajuste de la Ecuación 4.3 para cada dispersión fuera de control.

Tabla 12. Ajuste de ecuaciones de λ gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control

σ_1/σ_0	R^2	Adj R^2	Error Estándar	Error absoluto máximo
1.25	99.96%	99.96%	0.0021	0.0070
1.50	99.93%	99.93%	0.0048	0.0092
1.75	99.97%	99.97%	0.0029	0.0085
2.00	99.99%	99.99%	0.0009	0.0036
2.25	100.00%	100.00%	0.0003	0.0017

Para estimar el valor óptimo de K para un ARL_0 y n específicos la función con error estándar mínimo que cumplía con el criterio de parsimonia está dada por la Ecuación 4.5

$$K = a_4 + b_4 \cdot \ln(ARL_0) + c_4 \cdot \ln(n) + d_4 \cdot \ln^2(ARL_0) + e_4 \cdot \ln^2(n) + f_4 \cdot \ln(ARL_0) \cdot \ln(n) \quad (4.5)$$

Los coeficientes de la Ecuación 4.5 se muestran para cada una de las situaciones fuera de control consideradas en la Sección 3.4 en la Tabla 13

Tabla 13. Coeficientes para K gráfico P σ EWMA con un límite de control

σ_1/σ_0	a_4	b_4	c_4	d_4	e_4	f_4
1.25	0.1438	0.4581	0.1889	-0.0142	-0.0345	0.0123
1.5	0.2258	0.5281	0.0771	-0.0197	-0.0343	0.0148
1.75	0.2046	0.5501	0.0490	-0.0181	-0.0190	0.0003
2.00	0.3322	0.5596	-0.0988	-0.0170	0.0231	-0.0096
2.25	0.4092	0.5470	-0.1522	-0.0161	0.0363	-0.0093

En la Tabla 14 se muestra el ajuste de la Ecuación 4.3 para cada dispersión fuera de control.

Tabla 14. Ajuste de ecuaciones de K gráfico P σ EWMA con un límite de control

σ_1/σ_0	R^2	Adj R^2	Error Estándar	Error absoluto máximo
1.25	99.99%	99.99%	0.0026	0.0009
1.50	99.98%	99.98%	0.0031	0.0129
1.75	99.88%	99.87%	0.0089	0.0166
2.00	99.89%	99.88%	0.0083	0.0108
2.25	99.93%	99.93%	0.0066	0.0262

Para estimar el valor óptimo del ARL_1 para un ARL_0 y n específicos la función con error estándar mínimo que cumplía con el criterio de parsimonia está dada por la Ecuación 4.6

$$ARL_1 = \frac{a_5 + b_5 \cdot \ln(ARL_0) + c_5 \cdot n + d_5 \cdot n^2}{1 + e_5 \cdot \ln(ARL_0) + f_5 \cdot n} \quad (4.6)$$

Los coeficientes de la Ecuación 4.6 se muestran para cada una de las situaciones fuera de control consideradas en la Sección 3.4 en la Tabla 15

Tabla 15. Coeficientes para ARL_1 gráfico P_σ EWMA con un límite de control

σ_1/σ_0	a_5	b_5	c_5	d_5	e_5	f_5
1.25	-18.6032	9.4416	0.8034	-0.0067	-0.1611	0.5134
1.50	1.4897	0.8987	0.0789	0.0005	-0.1486	0.2252
1.75	2.1032	-0.0332	-0.0116	0.0015	-0.1439	0.0867
2.00	1.7455	-0.1255	0.0157	0.0012	-0.1555	0.0824
2.25	1.4576	-0.1618	0.0380	0.0008	-0.1667	0.0780

En la Tabla 16 se muestra el ajuste de la Ecuación 4.3 para cada dispersión fuera de control.

Tabla 16. Ajuste de ecuaciones de ARL_1 gráfico P_σ EWMA con un límite de control

σ_1/σ_0	R^2	Adj R^2	Error Estándar	Error absoluto máximo
1.25	99.99%	99.99%	0.0333	0.1070
1.50	99.93%	99.93%	0.0400	0.1689
1.75	99.63%	99.60%	0.0488	4.2198
2.00	99.31%	99.26%	0.0395	0.1765
2.25	98.28%	98.16%	0.0395	2.3057

Como se puede observar en los ajustes de todas las ecuaciones, tanto en el gráfico P_σ EWMA como en el gráfico P_σ EWMA con un límite de control, el R^2 y el R^2 ajustado dieron por encima de 98%, lo que indica que las ecuaciones ajustan bastante bien los datos utilizados para crearlas.

Al igual que en el caso del gráfico P_σ EWMA, en el P_σ EWMA con un límite de control se comprobó el poder de interpolación de las ecuaciones obtenidas para predecir λ , K y ARL_1 . Se consideraron las situaciones fuera de control $\sigma_1/\sigma_0 = 1.25, 1.50, 1.75, 2.00$ y 2.25 , los tamaños de muestra $n = 6, 8, 12, 14, 18, 22$ y 26 y los largo de corrida promedio en control $ARL_0 = 150, 350, 550, 750$ y 950 , lo que produjo un total de 175 problemas de optimización a resolver.

En la Figura 2222 se muestra el error relativo entre el ARL_1 óptimo para la dispersión fuera de control, ARL_0 y el n usados para crear los datos de validación y el ARL_1 calculado a partir de los parámetros λ y K predichos por las ecuaciones 4.4 y 4.5 respectivamente.

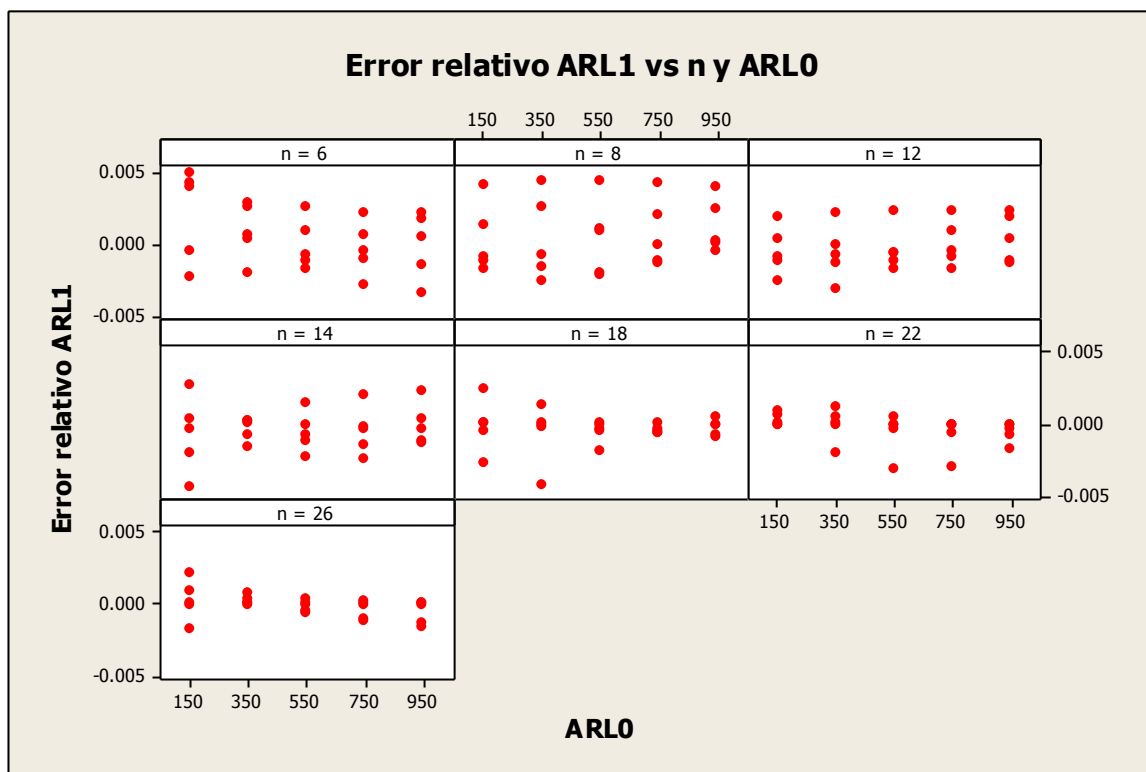


Figura 22. Error porcentual entre ARL_1 y ARL_1 con λ y K predichos

Como se puede observar en la Figura 2222, todos los errores se encuentran por debajo de 5%, lo que indica que indica buen poder de predicción de los valores óptimos de λ y K obtenidos con las ecuaciones 4.4 y 4.5.

En la Figura 2323 se muestra el valor absoluto de la diferencia entre el ARL_1 óptimo para la dispersión fuera de control, ARL_0 y el n usados para crear los datos de validación y el ARL_1 calculado a partir de la Ecuación 4.6.

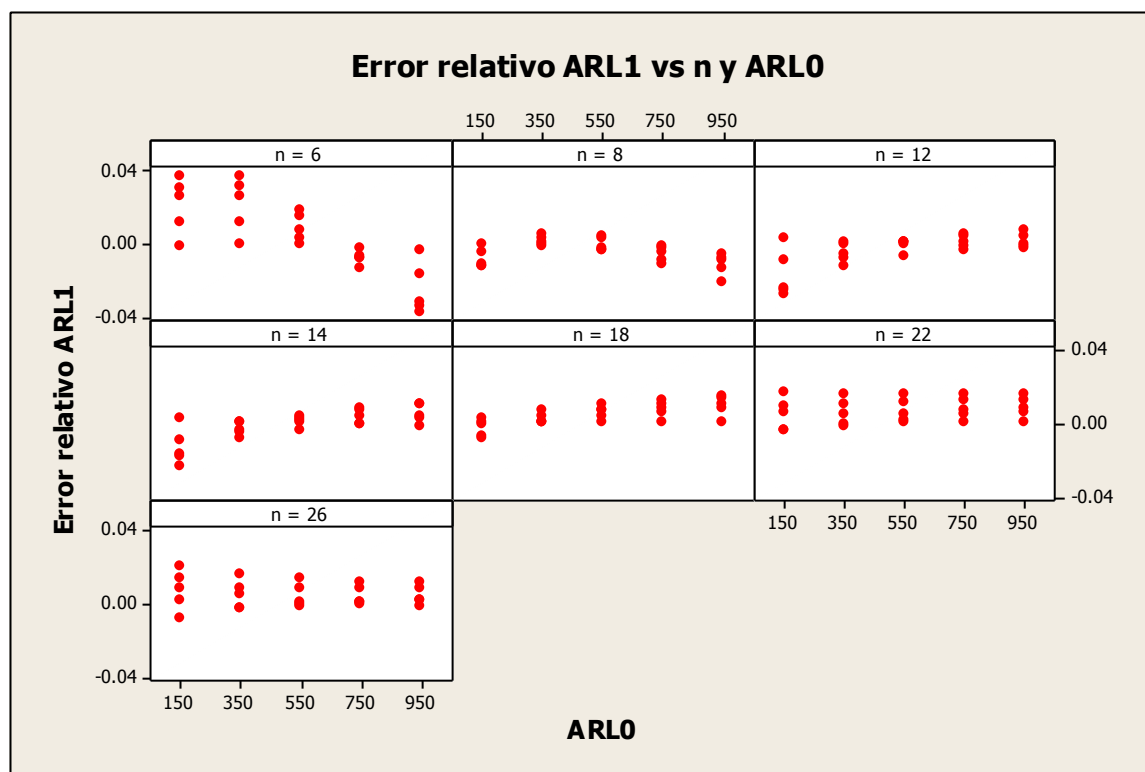


Figura 23. Error relativo entre ARL_1 y ARL_1 estimado mediante función de regresión

Como se puede observar en la Figura 23, todos los errores se encuentran por debajo de 5% en términos absolutos, lo que indica que la predicción del ARL_1 obtenida con la Ecuación 4.6 es prácticamente igual al ARL_1 obtenido con los parámetros resultantes de la solución del problema de optimización formulado en la Sección 3.4.

De forma similar al gráfico con dos límites de control, también se obtuvo el error entre el ARL_0 real y ARL_0 resultante al usar los parámetros predichos, en este caso por las ecuaciones 4.5 y 4.5, este error se puede observar en la Figura 244.

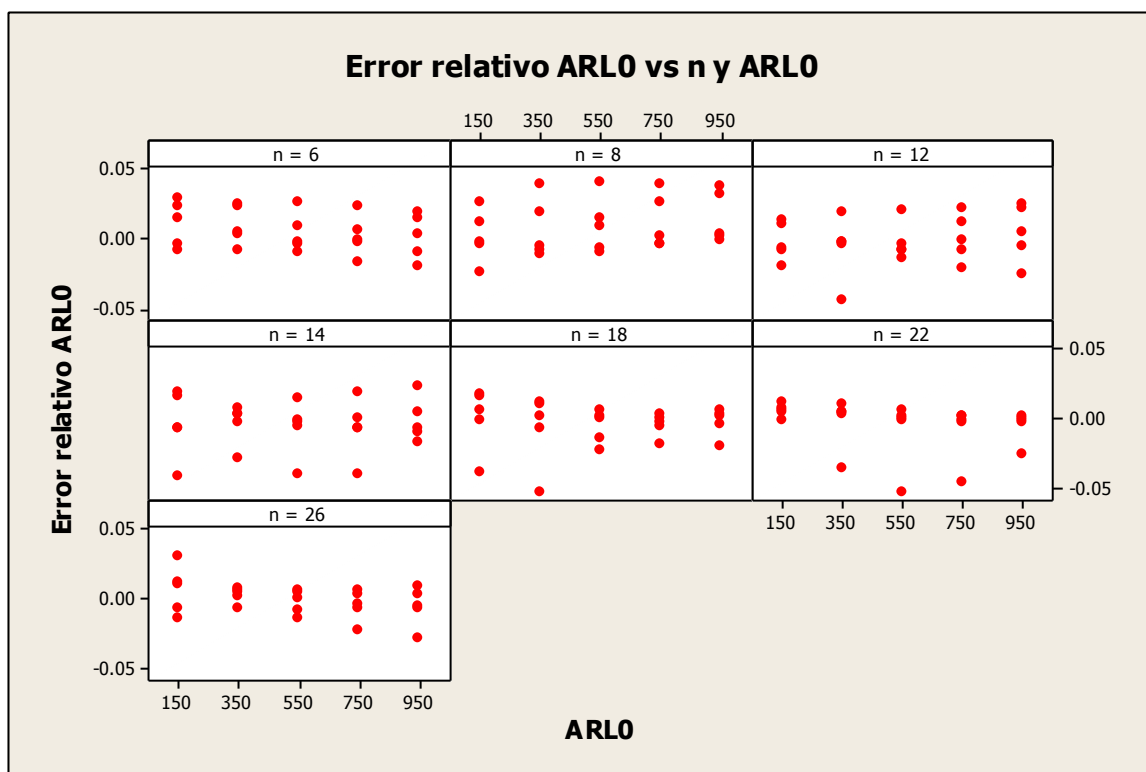


Figura 24. Error relativo entre ARL_0 y ARL_0 con λ y K predichos

En la Figura 24 se puede observar que en términos porcentuales absolutos el error entre el ARL_0 real y el obtenido usando cadenas de Markov y los parámetros óptimos predichos se mantienen por debajo de 5%.

5 Conclusiones e Investigación Futura

5.1 Conclusiones

En este trabajo de tesis se evaluó el desempeño y se estableció la metodología de diseño de dos vertientes del gráfico EWMA usando la transformación de la normal inversa: gráfico EWMA basado en la transformación de la normal inversa con dos límites de control ($P\sigma$ EWMA) y el gráfico EWMA basado en la transformación de la normal inversa con un límite de control y “reset” ($P\sigma$ EWMA1), entiéndase por “reset” el hecho de reemplazar los valores del estadístico $P\sigma$ EWMA1 que caen por de un valor establecido K_0 , por dicho valor.

Para evaluar el desempeño de estos gráficos se determinó el ARL_1 más pequeño que se podía obtener dados el ARL_0 y el tamaño de muestra para diferentes desviaciones fuera de control. Para comparar el desempeño de los gráficos se optimizaron todos para una desviación fuera de control en particular y con el mismo ARL_0 , partiendo de estas optimizaciones el gráfico con mejor desempeño es aquel con ARL_1 más pequeño.

Al hacer las comparaciones de ARL se vio que el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control supera consistentemente al gráfico EWMA de $\ln\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\right)$ y para incrementos en la desviación estándar menores a un 50% supera al gráfico del rango y la varianza. Es importante recalcar que dado que el gráfico EWMA es un gráfico con memoria tiene dificultades al detectar cambios grandes y abruptos, por esta razón el mismo es superado por los gráficos R y S^2 para incrementos mayores a 50%. En el caso del gráfico EWMA con un límite de control y “reset” se observó que éste tiene un desempeño similar al del gráfico EWMA de $\ln\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\right)$ con un límite de control y “reset” pero que supera a los gráficos R y S^2 .

Dada la complejidad computacional que implica hacer un estimado preciso del ARL del gráfico EWMA no resulta práctico dejar en manos del usuario el diseño del mismo. Por esta razón, se procedió a obtener los valores óptimos de ARL_1 , λ y K para distintos incrementos en la desviación estándar, tamaños de muestra y ARL_0 . Luego se ajustaron funciones que proveyeran los valores óptimos de ARL_1 , λ y K dados el ARL_0 y n para distintos incrementos en la desviación estándar. Para cada una de estas funciones se evaluó la bondad del ajuste usando el R^2 y el R^2 ajustado; el R^2 ajustado más pequeño fue 99.16%.

Desde la perspectiva del usuario, la ventaja de diseñar el gráfico EWMA usando funciones, tal y como lo hizo Artiles-León et al. (1996) con los gráficos de Shewhart, es que sólo hay que sustituir el ARL_0 y tamaño de muestra en la ecuación indicada para obtener los parámetros óptimos sin necesidad de calcular probabilidades de transición ni usar métodos de optimización.

5.2 Investigación Futura

A partir del desarrollo de esta tesis se detectaron los temas que se describen a continuación como posibles trabajos futuros en la línea de investigación:

- 1) En caso de que la media del proceso sea conocida, crear un gráfico de detección conjunta de desplazamientos de la media e incrementos o disminuciones de la varianza usando el estadístico:

$$P_{\sigma_b} = \Phi^{-1} \left\{ F_{\chi_n^2} \left[\frac{n \cdot S^2}{\sigma^2} \right] \right\}$$

$$\text{donde } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

La lógica detrás de este estadístico es que el mismo tendrá distribución normal estándar si y solo si S^2 proviene de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 , por tanto, si se da un cambio en cualquiera de estos parámetros el gráfico lo detectaría debido a que se daría un cambio en la distribución del estadístico P_σ .

- 2) Comparar el desempeño del gráfico P_σ EWMA con límites asimétricos con el de otros gráficos con límites no simétricos y diseñar el mismo. Una vertiente del gráfico asimétrico sería combinar dos gráficos con reset, uno para detectar incrementos y otro para detectar disminuciones en la dispersión del proceso. Para diseñar ambos gráficos se puede seguir la metodología definida en esta tesis.
- 3) Modificar el estadístico P_σ para evaluar qué tan bueno sería el desempeño del gráfico EWMA si la distribución del estadístico en lugar de ser normal fuera uniforme. El estadístico sugerido para hacer esta evaluación es:

$$P_{\sigma_u} = F_{\chi_{n-1}^2} \left[\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \right]$$

Apéndice A: Resultados

Tablas para gráfico $P\sigma$ EWMA con 2 límites de control

Tabla 17. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(5,7,9)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

σ/σ_0	n	ARL_0				
		100	200	370	500	600
1.25	5	(0.148,2.2758) 12.04	(0.114,2.4938) 14.96	(0.094,2.6854) 17.74	(0.087,2.7773) 19.15	(0.082,2.8321) 20.02
1.5	5	(0.387,2.4984) 4.87	(0.326,2.7256) 5.72	(0.279,2.9144) 6.51	(0.261,3.0043) 6.90	(0.251,3.0578) 7.14
1.75	5	(0.569,2.5479) 2.93	(0.515,2.7798) 3.33	(0.468,2.9726) 3.71	(0.446,3.0631) 3.89	(0.433,3.1168) 4.01
2.00	5	(0.683,2.5627) 2.12	(0.643,2.7953) 2.35	(0.607,2.9889) 2.56	(0.589,3.0798) 2.67	(0.578,3.1338) 2.74
2.25	5	(0.759,2.5688) 1.71	(0.729,2.8010) 1.86	(0.701,2.9944) 1.99	(0.687,3.0853) 2.06	(0.678,3.1393) 2.10
1.25	7	(0.190,2.3464) 9.03	(0.156,2.5770) 10.97	(0.133,2.7725) 12.79	(0.123,2.8649) 13.72	(0.118,2.9198) 14.28
1.5	7	(0.459,2.5233) 3.64	(0.400,2.7535) 4.21	(0.353,2.9453) 4.73	(0.333,3.0356) 4.99	(0.322,3.0893) 5.15
1.75	7	(0.647,2.5589) 2.22	(0.602,2.7914) 2.48	(0.561,2.9848) 2.73	(0.541,3.0757) 2.85	(0.529,3.1296) 2.92
2.00	7	(0.761,2.5689) 1.65	(0.729,2.8010) 1.79	(0.699,2.9944) 1.92	(0.685,3.0852) 1.99	(0.676,3.1391) 2.03
2.25	7	(0.835,2.5727) 1.37	(0.812,2.8044) 1.46	(0.789,2.9974) 1.54	(0.778,3.0881) 1.58	(0.772,3.1420) 1.60
1.25	9	(0.223,2.3865) 7.38	(0.186,2.6192) 8.86	(0.161,2.8154) 10.23	(0.150,2.9079) 10.92	(0.145,2.9629) 11.35
1.5	9	(0.520,2.5385) 2.97	(0.463,2.7699) 3.40	(0.416,2.9624) 3.79	(0.395,3.0529) 3.99	(0.383,3.1066) 4.11
1.75	9	(0.710,2.5652) 1.84	(0.671,2.7974) 2.03	(0.635,2.9909) 2.21	(0.617,3.0817) 2.30	(0.606,3.1357) 2.35
2.00	9	(0.821,2.5721) 1.40	(0.794,2.8038) 1.50	(0.770,2.9969) 1.59	(0.757,3.0876) 1.64	(0.749,3.1415) 1.67
2.25	9	(0.889,2.5745) 1.21	(0.871,2.8058) 1.26	(0.853,2.9987) 1.31	(0.844,3.0893) 1.34	(0.839,3.1431) 1.35

Tabla 18. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(5,7,9)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.25	5	(0.079,2.8781) 20.77	(0.076,2.9175) 21.42	(0.074,2.9520) 22.00	(0.072,2.9826) 22.52
1.5	5	(0.243,3.1024) 7.35	(0.236,3.1408) 7.52	(0.231,3.1743) 7.68	(0.226,3.2040) 7.82
1.75	5	(0.422,3.1616) 4.11	(0.413,3.1999) 4.19	(0.405,3.2334) 4.27	(0.399,3.2631) 4.33
2.00	5	(0.569,3.1787) 2.80	(0.561,3.2173) 2.84	(0.554,3.2509) 2.89	(0.548,3.2808) 2.93
2.25	5	(0.671,3.1842) 2.14	(0.665,3.2228) 2.17	(0.659,3.2564) 2.20	(0.654,3.2863) 2.22
1.25	7	(0.114,2.9657) 14.77	(0.111,3.0051) 15.19	(0.108,3.0395) 15.56	(0.105,3.0700) 15.90
1.5	7	(0.313,3.1341) 5.28	(0.306,3.1726) 5.40	(0.300,3.2061) 5.50	(0.294,3.2360) 5.59
1.75	7	(0.519,3.1745) 2.99	(0.511,3.2130) 3.04	(0.503,3.2466) 3.09	(0.496,3.2764) 3.14
2.00	7	(0.668,3.1841) 2.07	(0.661,3.2226) 2.10	(0.655,3.2563) 2.13	(0.650,3.2861) 2.15
2.25	7	(0.766,3.1869) 1.62	(0.761,3.2254) 1.64	(0.756,3.2590) 1.66	(0.752,3.2888) 1.67
1.25	9	(0.140,3.0087) 11.71	(0.136,3.0480) 12.03	(0.133,3.0823) 12.30	(0.130,3.1128) 12.56
1.5	9	(0.373,3.1514) 4.21	(0.365,3.1898) 4.29	(0.358,3.2233) 4.37	(0.352,3.2531) 4.44
1.75	9	(0.597,3.1806) 2.40	(0.589,3.2191) 2.44	(0.582,3.2528) 2.48	(0.576,3.2826) 2.51
2.00	9	(0.743,3.1864) 1.69	(0.737,3.2249) 1.72	(0.732,3.2585) 1.74	(0.728,3.2883) 1.75
2.25	9	(0.834,3.1880) 1.37	(0.830,3.2264) 1.38	(0.826,3.2600) 1.39	(0.823,3.2898) 1.40

Tabla 19. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(11,13,15)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

		ARL ₀				
σ/σ_0	n	100	200	370	500	600
1.25	11	(0.252,2.4160) 6.31	(0.213,2.6490) 7.51	(0.186,2.8452) 8.61	(0.175,2.9377) 9.17	(0.168,2.9926) 9.51
1.5	11	(0.572,2.5485) 2.54	(0.519,2.7804) 2.89	(0.473,2.9733) 3.20	(0.451,3.0639) 3.36	(0.438,3.1176) 3.46
1.75	11	(0.762,2.5690) 1.60	(0.727,2.8009) 1.74	(0.695,2.9942) 1.88	(0.679,3.0850) 1.95	(0.670,3.1389) 2.00
2.00	11	(0.867,2.5738) 1.26	(0.845,2.8053) 1.33	(0.824,2.9982) 1.39	(0.813,3.0888) 1.43	(0.807,3.1426) 1.45
2.25	11	(0.927,2.5753) 1.12	(0.913,2.8065) 1.15	(0.899,2.9992) 1.19	(0.892,3.0898) 1.20	(0.887,3.1436) 1.21
1.25	13	(0.280,2.4388) 5.56	(0.238,2.6715) 6.56	(0.209,2.8675) 7.49	(0.197,2.9598) 7.95	(0.190,3.0146) 8.23
1.50	13	(0.618,2.5553) 2.24	(0.568,2.7875) 2.53	(0.523,2.9806) 2.79	(0.501,3.0712) 2.92	(0.489,3.1250) 3.01
1.75	13	(0.804,2.5713) 1.44	(0.774,2.8031) 1.55	(0.745,2.9961) 1.66	(0.731,3.0869) 1.72	(0.722,3.1408) 1.76
2.00	13	(0.902,2.5748) 1.17	(0.884,2.8061) 1.22	(0.866,2.9988) 1.27	(0.857,3.0894) 1.29	(0.851,3.1432) 1.31
2.25	13	(0.953,2.5756) 1.07	(0.943,2.8068) 1.09	(0.932,2.9995) 1.11	(0.926,3.0900) 1.12	(0.923,3.1438) 1.13
1.25	15	(0.307,2.4572) 4.99	(0.262,2.6893) 5.86	(0.231,2.8849) 6.65	(0.218,2.9771) 7.05	(0.211,3.0318) 7.29
1.50	15	(0.658,2.5602) 2.02	(0.611,2.7923) 2.26	(0.568,2.9855) 2.49	(0.547,3.0763) 2.60	(0.535,3.1301) 2.67
1.75	15	(0.839,2.5729) 1.33	(0.812,2.8044) 1.42	(0.787,2.9973) 1.51	(0.774,3.0880) 1.55	(0.766,3.1419) 1.58
2.00	15	(0.929,2.5753) 1.11	(0.914,2.8065) 1.15	(0.899,2.9992) 1.18	(0.891,3.0898) 1.20	(0.886,3.1436) 1.21
2.25	15	(0.971,2.5757) 1.04	(0.963,2.8069) 1.05	(0.955,2.9996) 1.07	(0.950,3.0901) 1.08	(0.948,3.1439) 1.08

Tabla 20. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(11,13,15)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.25	11	(0.163,3.0383) 9.80	(0.159,3.0776) 10.05	(0.155,3.1118) 10.27	(0.152,3.1422) 10.47
1.5	11	(0.427,3.1625) 3.54	(0.419,3.2008) 3.61	(0.411,3.2344) 3.67	(0.404,3.2641) 3.73
1.75	11	(0.661,3.1839) 2.04	(0.654,3.2223) 2.07	(0.648,3.2560) 2.10	(0.642,3.2858) 2.12
2.00	11	(0.801,3.1875) 1.47	(0.796,3.2260) 1.48	(0.792,3.2596) 1.50	(0.788,3.2893) 1.51
2.25	11	(0.884,3.1884) 1.22	(0.880,3.2268) 1.23	(0.877,3.2604) 1.24	(0.875,3.2902) 1.25
1.25	13	(0.185,3.0604) 8.47	(0.180,3.0995) 8.68	(0.176,3.1337) 8.87	(0.173,3.1641) 9.04
1.5	13	(0.478,3.1699) 3.07	(0.469,3.2083) 3.13	(0.461,3.2418) 3.19	(0.454,3.2716) 3.23
1.75	13	(0.715,3.1857) 1.79	(0.708,3.2242) 1.81	(0.702,3.2578) 1.84	(0.697,3.2876) 1.86
2.00	13	(0.846,3.1881) 1.32	(0.842,3.2265) 1.33	(0.839,3.2601) 1.35	(0.835,3.2899) 1.35
2.25	13	(0.920,3.1886) 1.14	(0.917,3.2270) 1.14	(0.915,3.2606) 1.15	(0.913,3.2904) 1.15
1.25	15	(0.205,3.0775) 7.50	(0.200,3.1166) 7.68	(0.196,3.1507) 7.84	(0.193,3.1810) 7.98
1.5	15	(0.524,3.1750) 2.73	(0.515,3.2134) 2.78	(0.507,3.2470) 2.83	(0.500,3.2768) 2.87
1.75	15	(0.759,3.1868) 1.60	(0.753,3.2252) 1.63	(0.748,3.2588) 1.65	(0.743,3.2886) 1.66
2.00	15	(0.882,3.1884) 1.22	(0.879,3.2268) 1.23	(0.876,3.2604) 1.24	(0.873,3.2902) 1.25
2.25	15	(0.946,3.1887) 1.08	(0.944,3.2271) 1.09	(0.942,3.2607) 1.09	(0.940,3.2905) 1.10

Tabla 21. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(17,20,25)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

		ARL_0				
σ/σ_0	n	100	200	370	500	600
1.25	17	(0.332,2.4722) 4.54	(0.285,2.7039) 5.31	(0.252,2.8989) 6.01	(0.238,2.9909) 6.36	(0.231,3.0456) 6.57
1.50	17	(0.693,2.5637) 1.85	(0.650,2.7958) 2.06	(0.609,2.9890) 2.25	(0.589,3.0798) 2.35	(0.577,3.1336) 2.41
1.75	17	(0.869,2.5739) 1.25	(0.845,2.8053) 1.32	(0.822,2.9981) 1.39	(0.810,3.0888) 1.43	(0.803,3.1426) 1.45
2.00	17	(0.949,2.5755) 1.07	(0.937,2.8068) 1.10	(0.924,2.9994) 1.13	(0.918,3.0900) 1.14	(0.914,3.1437) 1.15
2.25	17	(0.982,2.5758) 1.02	(0.976,2.8070) 1.03	(0.971,2.9996) 1.04	(0.968,3.0902) 1.05	(0.966,3.1439) 1.05
1.25	20	(0.368,2.4903) 4.03	(0.317,2.7213) 4.68	(0.281,2.9156) 5.27	(0.266,3.0073) 5.57	(0.258,3.0618) 5.75
1.50	20	(0.739,2.5674) 1.65	(0.699,2.7993) 1.82	(0.662,2.9925) 1.99	(0.644,3.0833) 2.07	(0.632,3.1371) 2.12
1.75	20	(0.904,2.5748) 1.16	(0.884,2.8061) 1.21	(0.865,2.9988) 1.27	(0.855,3.0894) 1.29	(0.849,3.1432) 1.31
2.00	20	(0.970,2.5757) 1.04	(0.961,2.8069) 1.06	(0.952,2.9996) 1.07	(0.947,3.0901) 1.08	(0.944,3.1439) 1.09
2.25	20	(0.992,2.5758) 1.01	(0.989,2.8070) 1.01	(0.985,2.9997) 1.02	(0.983,3.0902) 1.02	(0.982,3.1440) 1.02
1.25	25	(0.424,2.5123) 3.41	(0.368,2.7428) 3.94	(0.327,2.9360) 4.42	(0.310,3.0272) 4.66	(0.301,3.0814) 4.80
1.50	25	(0.800,2.5712) 1.44	(0.766,2.8028) 1.56	(0.734,2.9958) 1.68	(0.718,3.0865) 1.74	(0.708,3.1403) 1.78
1.75	25	(0.944,2.5755) 1.08	(0.930,2.8067) 1.11	(0.916,2.9994) 1.14	(0.908,3.0899) 1.16	(0.904,3.1437) 1.17
2.00	25	(0.988,2.5758) 1.01	(0.984,2.8070) 1.02	(0.979,2.9997) 1.03	(0.976,3.0902) 1.03	(0.975,3.1440) 1.03
2.25	25	(0.998,2.5758) 1.00	(0.997,2.8070) 1.00	(0.996,2.9997) 1.01	(0.995,3.0902) 1.01	(0.995,3.1440) 1.01

Tabla 22. λ^* , K^* y $ARL1^*$ para ARL_0 (700,800,900,1000) y $n(17,20,25)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.25	17	(0.224,3.0911) 6.75	(0.219,3.1302) 6.91	(0.215,3.1643) 7.05	(0.211,3.1946) 7.18
1.5	17	(0.566,3.1785) 2.47	(0.557,3.2170) 2.51	(0.550,3.2506) 2.55	(0.543,3.2804) 2.59
1.75	17	(0.797,3.1875) 1.47	(0.792,3.2259) 1.49	(0.787,3.2595) 1.50	(0.783,3.2893) 1.52
2.00	17	(0.911,3.1886) 1.16	(0.908,3.2270) 1.16	(0.905,3.2606) 1.17	(0.903,3.2903) 1.17
2.25	17	(0.964,3.1888) 1.05	(0.962,3.2272) 1.05	(0.961,3.2607) 1.06	(0.960,3.2905) 1.06
1.25	20	(0.252,3.1073) 5.90	(0.246,3.1463) 6.03	(0.241,3.1803) 6.15	(0.237,3.2105) 6.26
1.5	20	(0.623,3.1821) 2.16	(0.614,3.2205) 2.20	(0.607,3.2541) 2.24	(0.600,3.2839) 2.27
1.75	20	(0.843,3.1881) 1.33	(0.839,3.2265) 1.34	(0.835,3.2601) 1.35	(0.831,3.2898) 1.36
2.00	20	(0.942,3.1887) 1.09	(0.940,3.2271) 1.10	(0.938,3.2607) 1.10	(0.936,3.2904) 1.10
2.25	20	(0.981,3.1888) 1.02	(0.980,3.2272) 1.03	(0.979,3.2608) 1.03	(0.979,3.2905) 1.03
1.25	25	(0.293,3.1267) 4.92	(0.287,3.1655) 5.03	(0.282,3.1994) 5.12	(0.278,3.2295) 5.20
1.5	25	(0.700,3.1852) 1.82	(0.693,3.2237) 1.85	(0.686,3.2573) 1.87	(0.680,3.2871) 1.89
1.75	25	(0.900,3.1885) 1.18	(0.896,3.2269) 1.19	(0.893,3.2605) 1.19	(0.890,3.2903) 1.20
2.00	25	(0.973,3.1888) 1.04	(0.972,3.2272) 1.04	(0.971,3.2607) 1.04	(0.970,3.2905) 1.04
2.25	25	(0.994,3.1888) 1.01	(0.994,3.2272) 1.01	(0.994,3.2608) 1.01	(0.993,3.2905) 1.01

Tabla 23. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

		ARL_0				
σ/σ_0	n	100	200	370	500	600
1.25	30	(0.474,2.5275) 2.99	(0.416,2.7581) 3.43	(0.371,2.9506) 3.83	(0.352,3.0414) 4.03	(0.341,3.0954) 4.15
1.50	30	(0.848,2.5732) 1.30	(0.819,2.8046) 1.39	(0.791,2.9974) 1.48	(0.777,3.0881) 1.53	(0.768,3.1419) 1.56
1.75	30	(0.969,2.5757) 1.04	(0.959,2.8069) 1.06	(0.949,2.9996) 1.08	(0.944,3.0901) 1.09	(0.941,3.1439) 1.09
2.00	30	(0.996,2.5758) 1.00	(0.994,2.8070) 1.01	(0.992,2.9997) 1.01	(0.990,3.0902) 1.01	(0.989,3.1440) 1.01
2.25	30	(1.000,2.5758) 1.00	(0.999,2.8070) 1.00	(0.999,2.9997) 1.00	(0.999,3.0902) 1.00	(0.999,3.1440) 1.00

Tabla 24. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 2 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.25	30	(0.333,3.1405) 4.25	(0.326,3.1791) 4.34	(0.320,3.2129) 4.42	(0.315,3.2429) 4.49
1.5	30	(0.761,3.1868) 1.58	(0.755,3.2253) 1.61	(0.749,3.2588) 1.63	(0.744,3.2886) 1.65
1.75	30	(0.938,3.1887) 1.10	(0.935,3.2271) 1.10	(0.933,3.2607) 1.11	(0.931,3.2904) 1.11
2.00	30	(0.989,3.1888) 1.01	(0.988,3.2272) 1.02	(0.987,3.2608) 1.02	(0.987,3.2905) 1.02
2.25	30	(0.998,3.1888) 1.00	(0.998,3.2272) 1.00	(0.998,3.2608) 1.00	(0.998,3.2905) 1.00

Tabla 25. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(5,7,9)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím

		ARL ₀				
σ/σ_0	n	100	200	370	500	600
1.20	5	(0.172,2.2067) 13.23	(0.120,2.4198) 17.40	(0.091,2.6047) 21.50	(0.080,2.6942) 23.61	(0.075,2.7479) 24.92
1.25	5	(0.228,2.2715) 10.17	(0.163,2.4943) 13.04	(0.127,2.6845) 15.81	(0.113,2.7751) 17.23	(0.106,2.8293) 18.10
1.50	5	(0.481,2.3817) 4.29	(0.404,2.6299) 5.14	(0.342,2.8340) 5.94	(0.315,2.9293) 6.34	(0.300,2.9856) 6.59
1.75	5	(0.658,2.3946) 2.65	(0.587,2.6479) 3.04	(0.533,2.8553) 3.42	(0.508,2.9521) 3.60	(0.493,3.0094) 3.72
2.00	5	(0.795,2.3840) 1.96	(0.721,2.6438) 2.18	(0.668,2.8540) 2.39	(0.645,2.9514) 2.50	(0.632,3.0090) 2.56
2.25	5	(0.908,2.3612) 1.60	(0.829,2.6297) 1.75	(0.774,2.8448) 1.88	(0.751,2.9438) 1.95	(0.737,3.0021) 1.99
1.20	7	(0.198,2.2401) 10.32	(0.146,2.4688) 13.21	(0.116,2.6637) 15.98	(0.104,2.7566) 17.39	(0.098,2.8120) 18.26
1.25	7	(0.262,2.2991) 7.84	(0.198,2.5338) 9.81	(0.160,2.7320) 11.67	(0.146,2.8257) 12.60	(0.138,2.8814) 13.18
1.50	7	(0.547,2.3903) 3.26	(0.473,2.6405) 3.83	(0.415,2.8467) 4.36	(0.389,2.9431) 4.63	(0.373,3.0002) 4.79
1.75	7	(0.752,2.3892) 2.03	(0.677,2.6467) 2.29	(0.622,2.8557) 2.54	(0.598,2.9527) 2.66	(0.584,3.0101) 2.73
2.00	7	(0.914,2.3597) 1.54	(0.832,2.6293) 1.68	(0.774,2.8447) 1.81	(0.750,2.9439) 1.88	(0.736,3.0022) 1.92
2.25	7	(1.000,2.3322) 1.30	(0.960,2.5967) 1.38	(0.897,2.8217) 1.46	(0.871,2.9244) 1.50	(0.856,2.9846) 1.53
1.20	9	(0.223,2.2671) 8.61	(0.170,2.5029) 10.82	(0.138,2.7024) 12.92	(0.126,2.7968) 13.98	(0.119,2.8529) 14.64
1.25	9	(0.295,2.3204) 6.50	(0.231,2.5607) 8.00	(0.191,2.7622) 9.40	(0.175,2.8572) 10.10	(0.167,2.9136) 10.54
1.50	9	(0.609,2.3941) 2.69	(0.535,2.6458) 3.12	(0.478,2.8527) 3.51	(0.452,2.9494) 3.71	(0.437,3.0066) 3.83
1.75	9	(0.838,2.3770) 1.70	(0.758,2.6402) 1.89	(0.701,2.8520) 2.06	(0.676,2.9499) 2.15	(0.662,3.0076) 2.21
2.00	9	(1.000,2.3322) 1.32	(0.931,2.6058) 1.42	(0.868,2.8286) 1.51	(0.842,2.9304) 1.56	(0.827,2.9902) 1.59
2.25	9	(1.000,2.3322) 1.16	(1.000,2.5823) 1.21	(1.000,2.7888) 1.26	(0.977,2.8938) 1.29	(0.961,2.9567) 1.30

Tabla 26. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(5,7,9)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.20	5	(0.071,2.7932)	(0.068,2.8321)	(0.065,2.8663)	(0.063,2.8968)
		26.04	27.02	27.89	28.67
1.25	5	(0.101,2.8748)	(0.097,2.9138)	(0.093,2.9481)	(0.090,2.9785)
		18.85	19.50	20.08	20.60
1.50	5	(0.289,3.0325)	(0.279,3.0727)	(0.271,3.1077)	(0.264,3.1388)
		6.79	6.98	7.14	7.28
1.75	5	(0.481,3.0571)	(0.471,3.0980)	(0.462,3.1336)	(0.454,3.1652)
		3.82	3.90	3.98	4.05
2.00	5	(0.621,3.0568)	(0.612,3.0976)	(0.604,3.1333)	(0.597,3.1648)
		2.62	2.67	2.71	2.75
2.25	5	(0.727,3.0505)	(0.718,3.0917)	(0.710,3.1277)	(0.703,3.1595)
		2.02	2.05	2.08	2.11
1.20	7	(0.094,2.8584)	(0.090,2.8983)	(0.087,2.9331)	(0.084,2.9641)
		19.00	19.65	20.22	20.74
1.25	7	(0.132,2.9280)	(0.127,2.9679)	(0.123,3.0027)	(0.120,3.0337)
		13.67	14.10	14.48	14.83
1.50	7	(0.361,3.0477)	(0.351,3.0883)	(0.342,3.1237)	(0.335,3.1551)
		4.93	5.05	5.15	5.25
1.75	7	(0.573,3.0579)	(0.563,3.0987)	(0.554,3.1343)	(0.547,3.1659)
		2.80	2.85	2.90	2.95
2.00	7	(0.725,3.0506)	(0.715,3.0919)	(0.707,3.1279)	(0.700,3.1597)
		1.96	1.99	2.01	2.04
2.25	7	(0.845,3.0344)	(0.835,3.0768)	(0.827,3.1137)	(0.819,3.1463)
		1.55	1.57	1.59	1.60
1.20	9	(0.114,2.8998)	(0.110,2.9401)	(0.106,2.9753)	(0.104,3.0065)
		15.20	15.68	16.11	16.50
1.25	9	(0.160,2.9606)	(0.155,3.0009)	(0.150,3.0361)	(0.146,3.0673)
		10.90	11.23	11.51	11.77
1.50	9	(0.425,3.0543)	(0.414,3.0951)	(0.405,3.1307)	(0.397,3.1622)
		3.94	4.03	4.11	4.18
1.75	9	(0.650,3.0556)	(0.641,3.0966)	(0.632,3.1322)	(0.625,3.1639)
		2.26	2.30	2.34	2.37
2.00	9	(0.815,3.0396)	(0.805,3.0817)	(0.796,3.1184)	(0.789,3.1507)
		1.61	1.63	1.65	1.67
2.25	9	(0.948,3.0086)	(0.937,3.0526)	(0.928,3.0909)	(0.920,3.1246)
		1.32	1.33	1.34	1.35

Tabla 27. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(11,13,15)$ -Pσ EWMA 1 lím

		ARL ₀				
σ/σ_0	n	100	200	370	500	600
1.20	11	(0.247,2.2883) 7.46	(0.192,2.5281) 9.26	(0.159,2.7300) 10.95	(0.146,2.8252) 11.81	(0.139,2.8818) 12.33
1.25	11	(0.327,2.3365) 5.60	(0.261,2.5799) 6.82	(0.218,2.7831) 7.95	(0.202,2.8788) 8.51	(0.193,2.9355) 8.86
1.50	11	(0.666,2.3944) 2.31	(0.591,2.6480) 2.66	(0.534,2.8553) 2.97	(0.508,2.9521) 3.13	(0.493,3.0094) 3.23
1.75	11	(0.916,2.3591) 1.49	(0.831,2.6294) 1.63	(0.771,2.8452) 1.77	(0.745,2.9444) 1.84	(0.731,3.0027) 1.88
2.00	11	(1.000,2.3322) 1.20	(1.000,2.5823) 1.27	(0.952,2.8058) 1.33	(0.924,2.9110) 1.36	(0.908,2.9726) 1.39
2.25	11	(1.000,2.3322) 1.09	(1.000,2.5823) 1.12	(1.000,2.7888) 1.15	(1.000,2.8854) 1.17	(1.000,2.9425) 1.18
1.20	13	(0.271,2.3052) 6.62	(0.386,2.6261) 8.57	(0.178,2.7509) 9.56	(0.164,2.8466) 10.28	(0.157,2.9034) 10.72
1.25	13	(0.356,2.3490) 4.96	(0.289,2.5943) 5.99	(0.244,2.7985) 6.93	(0.226,2.8945) 7.40	(0.217,2.9514) 7.69
1.50	13	(0.721,2.3919) 2.05	(0.642,2.6479) 2.33	(0.584,2.8561) 2.60	(0.559,2.9530) 2.73	(0.544,3.0103) 2.81
1.75	13	(0.988,2.3364) 1.35	(0.898,2.6148) 1.46	(0.835,2.8353) 1.57	(0.808,2.9363) 1.62	(0.793,2.9955) 1.66
2.00	13	(1.000,2.3322) 1.13	(1.000,2.5823) 1.17	(1.000,2.7888) 1.22	(0.999,2.8856) 1.24	(0.982,2.9493) 1.26
2.25	13	(1.000,2.3322) 1.05	(1.000,2.5823) 1.07	(1.000,2.7888) 1.09	(1.000,2.8854) 1.10	(1.000,2.9425) 1.11
1.20	15	(0.293,2.3189) 5.98	(0.234,2.5628) 7.30	(0.196,2.7671) 8.53	(0.182,2.8632) 9.14	(0.174,2.9201) 9.52
1.25	15	(0.385,2.3588) 4.47	(0.315,2.6054) 5.36	(0.268,2.8102) 6.17	(0.250,2.9063) 6.58	(0.240,2.9634) 6.83
1.50	15	(0.769,2.3873) 1.85	(0.689,2.6460) 2.09	(0.631,2.8554) 2.32	(0.605,2.9526) 2.43	(0.590,3.0100) 2.50
1.75	15	(1.000,2.3322) 1.26	(0.960,2.5967) 1.34	(0.893,2.8226) 1.43	(0.865,2.9256) 1.47	(0.850,2.9860) 1.50
2.00	15	(1.000,2.3322) 1.08	(1.000,2.5823) 1.11	(1.000,2.7888) 1.15	(1.000,2.8854) 1.16	(1.000,2.9425) 1.17
2.25	15	(1.000,2.3322) 1.03	(1.000,2.5823) 1.04	(1.000,2.7888) 1.05	(1.000,2.8854) 1.06	(1.000,2.9425) 1.06

Tabla 28. λ^* , K^* y $ARL1^*$ para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(11,13,15)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.20	11	(0.133,2.9290) 12.78	(0.128,2.9694) 13.17	(0.125,3.0048) 13.51	(0.121,3.0361) 13.82
1.25	11	(0.186,2.9828) 9.15	(0.180,3.0233) 9.41	(0.175,3.0586) 9.64	(0.171,3.0900) 9.84
1.50	11	(0.481,3.0571) 3.31	(0.470,3.0979) 3.39	(0.461,3.1336) 3.45	(0.453,3.1652) 3.51
1.75	11	(0.719,3.0512) 1.92	(0.709,3.0925) 1.95	(0.700,3.1284) 1.98	(0.693,3.1602) 2.01
2.00	11	(0.895,3.0234) 1.40	(0.885,3.0667) 1.42	(0.876,3.1042) 1.43	(0.868,3.1373) 1.45
2.25	11	(1.000,2.9902) 1.19	(1.000,3.0309) 1.19	(1.000,3.0665) 1.20	(1.000,3.0980) 1.21
1.20	13	(0.151,2.9507) 11.09	(0.146,2.9913) 11.41	(0.142,3.0267) 11.70	(0.138,3.0582) 11.96
1.25	13	(0.209,2.9988) 7.94	(0.203,3.0395) 8.15	(0.198,3.0749) 8.34	(0.194,3.1063) 8.51
1.50	13	(0.532,3.0580) 2.88	(0.521,3.0988) 2.94	(0.512,3.1345) 3.00	(0.504,3.1660) 3.04
1.75	13	(0.780,3.0446) 1.69	(0.770,3.0864) 1.71	(0.762,3.1228) 1.74	(0.754,3.1549) 1.76
2.00	13	(0.969,3.0018) 1.27	(0.957,3.0464) 1.28	(0.948,3.0850) 1.29	(0.939,3.1191) 1.30
2.25	13	(1.000,2.9902) 1.11	(1.000,3.0309) 1.12	(1.000,3.0665) 1.12	(1.000,3.0980) 1.13
1.20	15	(0.167,2.9676) 9.84	(0.162,3.0083) 10.12	(0.158,3.0438) 10.36	(0.154,3.0752) 10.58
1.25	15	(0.232,3.0109) 7.04	(0.225,3.0516) 7.22	(0.220,3.0871) 7.38	(0.215,3.1186) 7.53
1.50	15	(0.578,3.0578) 2.56	(0.567,3.0986) 2.61	(0.558,3.1342) 2.66	(0.550,3.1658) 2.70
1.75	15	(0.837,3.0359) 1.52	(0.826,3.0783) 1.54	(0.817,3.1152) 1.56	(0.809,3.1478) 1.58
2.00	15	(1.000,2.9902) 1.18	(1.000,3.0309) 1.19	(1.000,3.0665) 1.20	(1.000,3.0980) 1.21
2.25	15	(1.000,2.9902) 1.07	(1.000,3.0309) 1.07	(1.000,3.0665) 1.07	(1.000,3.0980) 1.08

Tabla 29. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(17,20,25)$ -P σ EWMA 1 lím

		ARL ₀				
σ/σ_0	n	100	200	370	500	600
1.20	17	(0.314,2.3303) 5.47	(0.253,2.5754) 6.64	(0.214,2.7802) 7.72	(0.199,2.8765) 8.26	(0.190,2.9335) 8.59
1.25	17	(0.411,2.3667) 4.08	(0.341,2.6140) 4.87	(0.292,2.8193) 5.59	(0.272,2.9156) 5.94	(0.261,2.9727) 6.16
1.50	17	(0.816,2.3808) 1.70	(0.733,2.6427) 1.91	(0.673,2.8537) 2.10	(0.647,2.9513) 2.20	(0.632,3.0089) 2.26
1.75	17	(1.000,2.3322) 1.19	(1.000,2.5823) 1.25	(0.948,2.8071) 1.32	(0.919,2.9125) 1.36	(0.903,2.9740) 1.38
2.00	17	(1.000,2.3322) 1.05	(1.000,2.5823) 1.08	(1.000,2.7888) 1.10	(1.000,2.8854) 1.11	(1.000,2.9425) 1.12
2.25	17	(1.000,2.3322) 1.02	(1.000,2.5823) 1.02	(1.000,2.7888) 1.03	(1.000,2.8854) 1.03	(1.000,2.9425) 1.04
1.20	20	(0.344,2.3440) 4.87	(0.280,2.5902) 5.87	(0.239,2.7956) 6.79	(0.222,2.8920) 7.24	(0.213,2.9492) 7.52
1.25	20	(0.449,2.3757) 3.63	(0.377,2.6239) 4.30	(0.325,2.8296) 4.91	(0.304,2.9260) 5.21	(0.292,2.9832) 5.40
1.50	20	(0.881,2.3679) 1.53	(0.794,2.6354) 1.70	(0.733,2.8493) 1.86	(0.706,2.9479) 1.94	(0.691,3.0059) 1.99
1.75	20	(1.000,2.3322) 1.12	(1.000,2.5823) 1.16	(1.000,2.7888) 1.21	(0.993,2.8880) 1.24	(0.976,2.9516) 1.26
2.00	20	(1.000,2.3322) 1.03	(1.000,2.5823) 1.04	(1.000,2.7888) 1.05	(1.000,2.8854) 1.06	(1.000,2.9425) 1.07
2.25	20	(1.000,2.3322) 1.01	(1.000,2.5823) 1.01	(1.000,2.7888) 1.01	(1.000,2.8854) 1.02	(1.000,2.9425) 1.02
1.20	25	(0.390,2.3607) 4.16	(0.323,2.6081) 4.96	(0.277,2.8138) 5.70	(0.259,2.9104) 6.06	(0.249,2.9677) 6.28
1.25	25	(0.507,2.3857) 3.09	(0.432,2.6349) 3.63	(0.377,2.8410) 4.12	(0.353,2.9375) 4.36	(0.340,2.9947) 4.51
1.50	25	(0.979,2.3398) 1.34	(0.885,2.6178) 1.46	(0.821,2.8378) 1.58	(0.793,2.9385) 1.64	(0.777,2.9976) 1.68
1.75	25	(1.000,2.3322) 1.06	(1.000,2.5823) 1.08	(1.000,2.7888) 1.11	(1.000,2.8854) 1.12	(1.000,2.9425) 1.13
2.00	25	(1.000,2.3322) 1.01	(1.000,2.5823) 1.01	(1.000,2.7888) 1.02	(1.000,2.8854) 1.02	(1.000,2.9425) 1.03
2.25	25	(1.000,2.3322) 1.00	(1.000,2.5823) 1.00	(1.000,2.7888) 1.00	(1.000,2.8854) 1.00	(1.000,2.9425) 1.00

Tabla 30. λ^* , K^* y $ARL1^*$ para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(17,20,25)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.20	17	(0.183,2.9811) 8.87	(0.178,3.0218) 9.11	(0.173,3.0574) 9.33	(0.170,3.0889) 9.52
1.25	17	(0.253,3.0203) 6.34	(0.246,3.0610) 6.50	(0.240,3.0965) 6.65	(0.235,3.1280) 6.77
1.50	17	(0.620,3.0568) 2.31	(0.610,3.0977) 2.36	(0.601,3.1333) 2.40	(0.593,3.1649) 2.44
1.75	17	(0.889,3.0249) 1.40	(0.878,3.0681) 1.42	(0.869,3.1057) 1.43	(0.861,3.1388) 1.45
2.00	17	(1.000,2.9902) 1.12	(1.000,3.0309) 1.13	(1.000,3.0665) 1.14	(1.000,3.0980) 1.14
2.25	17	(1.000,2.9902) 1.04	(1.000,3.0309) 1.04	(1.000,3.0665) 1.04	(1.000,3.0980) 1.05
1.20	20	(0.206,2.9969) 7.76	(0.200,3.0376) 7.96	(0.195,3.0732) 8.15	(0.191,3.1048) 8.31
1.25	20	(0.283,3.0308) 5.55	(0.275,3.0716) 5.69	(0.269,3.1071) 5.81	(0.264,3.1387) 5.91
1.50	20	(0.678,3.0541) 2.03	(0.668,3.0952) 2.07	(0.659,3.1310) 2.10	(0.651,3.1627) 2.13
1.75	20	(0.962,3.0041) 1.27	(0.950,3.0487) 1.28	(0.940,3.0873) 1.29	(0.932,3.1214) 1.30
2.00	20	(1.000,2.9902) 1.07	(1.000,3.0309) 1.07	(1.000,3.0665) 1.08	(1.000,3.0980) 1.08
2.25	20	(1.000,2.9902) 1.02	(1.000,3.0309) 1.02	(1.000,3.0665) 1.02	(1.000,3.0980) 1.02
1.20	25	(0.241,3.0154) 6.47	(0.235,3.0562) 6.63	(0.229,3.0918) 6.78	(0.225,3.1234) 6.91
1.25	25	(0.330,3.0424) 4.63	(0.322,3.0832) 4.74	(0.314,3.1188) 4.84	(0.308,3.1503) 4.92
1.50	25	(0.764,3.0466) 1.71	(0.754,3.0883) 1.74	(0.744,3.1246) 1.77	(0.736,3.1567) 1.79
1.75	25	(1.000,2.9902) 1.14	(1.000,3.0309) 1.15	(1.000,3.0665) 1.16	(1.000,3.0980) 1.16
2.00	25	(1.000,2.9902) 1.03	(1.000,3.0309) 1.03	(1.000,3.0665) 1.03	(1.000,3.0980) 1.03
2.25	25	(1.000,2.9902) 1.00	(1.000,3.0309) 1.01	(1.000,3.0665) 1.01	(1.000,3.0980) 1.01

Tabla 31. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(100,200,370,500,600)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím

		ARL_0				
σ/σ_0	n	100	200	370	500	600
1.20	30	(0.433,2.3722) 3.65	(0.363,2.6204) 4.33	(0.313,2.8263) 4.94	(0.293,2.9229) 5.25	(0.282,2.9802) 5.43
1.25	30	(0.560,2.3914) 2.71	(0.483,2.6416) 3.16	(0.425,2.8479) 3.57	(0.400,2.9445) 3.78	(0.386,3.0018) 3.90
1.50	30	(1.000,2.3322) 1.22	(0.969,2.5937) 1.31	(0.899,2.8212) 1.40	(0.870,2.9247) 1.44	(0.853,2.9853) 1.47
1.75	30	(1.000,2.3322) 1.03	(1.000,2.5823) 1.04	(1.000,2.7888) 1.06	(1.000,2.8854) 1.06	(1.000,2.9425) 1.07
2.00	30	(1.000,2.3322) 1.00	(1.000,2.5823) 1.00	(1.000,2.7888) 1.01	(1.000,2.8854) 1.01	(1.000,2.9425) 1.01
2.25	30	(1.000,2.3322) 1.00	(1.000,2.5823) 1.00	(1.000,2.7888) 1.00	(1.000,2.8854) 1.00	(1.000,2.9425) 1.00

Tabla 32. λ^* , K^* y ARL_1^* para $ARL_0(700,800,900,1000)$ y $n(30)$ - $P\sigma$ EWMA 1 lím

		ARL_0			
σ/σ_0	n	700	800	900	1000
1.20	30	(0.274,3.0279) 5.59	(0.267,3.0688) 5.72	(0.261,3.1044) 5.84	(0.256,3.1360) 5.95
1.25	30	(0.374,3.0494) 4.00	(0.365,3.0902) 4.09	(0.357,3.1258) 4.17	(0.350,3.1574) 4.25
1.50	30	(0.840,3.0353) 1.50	(0.829,3.0779) 1.52	(0.819,3.1150) 1.54	(0.811,3.1476) 1.56
1.75	30	(1.000,2.9902) 1.07	(1.000,3.0309) 1.08	(1.000,3.0665) 1.08	(1.000,3.0980) 1.09
2.00	30	(1.000,2.9902) 1.01	(1.000,3.0309) 1.01	(1.000,3.0665) 1.01	(1.000,3.0980) 1.01
2.25	30	(1.000,3.0125) 1.00	(1.000,3.0309) 1.00	(1.000,3.0989) 1.00	(1.000,3.0980) 1.00

Apéndice B: Programas MatLab (R2008b)

```
function [ARL] = ARL_Rango(r,n)
% Función para calcular el ARL del gráfico del Rango
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros
% r= rango
% n= tamaño de muestra

syms x; % declaración variable simbólica
miu=10; % media del proceso
sigma=1; % desviación del proceso

ARL=n*double(int((normcdf(x+r,miu,sigma)-normcdf(x,miu,sigma))^(n-1))*normpdf(x,miu,sigma),x,-10,10));
end

function fcs2=arl1s2(sigma0,sigma,ARL0,n)
% Función para calcular el ARL fuera de control a un desplazamiento dado del gráfico  $S^2$ .
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% sigma0= desviación en control
% sigma= desviación siendo evaluada
% ARL0= ARL en control
% n= tamaño de muestra o de subgrupos

a=1/ARL0;
UCL=(1/(n-1))*chi2inv(1-a/2,n-1);
LCL=(1/(n-1))*chi2inv(a/2,n-1);

d=(sigma/sigma0)^2;
psup=1-chi2cdf((n-1)/d*UCL,n-1); %Probabilidad caer por encima de LCS
pinf=chi2cdf((n-1)/d*LCL,n-1); %Probabilidad caer por debajo de LCI

fcs2=1/(psup+pinf);

end

function [ ARL ] = ARLPS2(x)
% Función para calcular ARL de gráfico Ps EWMA con dos límites de control
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% x(1)= lambda
% x(2)= K
% x(3)= sigma0
% x(4)=sigma
```

```

%Variables globales
global n

m=401; %cantidad de estados transitorios
LCS= x(2)*sqrt(x(1)/(2-x(1)));
LCI=-x(2)*sqrt(x(1)/(2-x(1)));
delta=(LCS-LCI)/m; %Ancho de intervalos
a=LCI+delta*(0.5:m-0.5)'; %Puntos discretos
a= repmat(a,1,m); %Matriz de puntos discretos
i= repmat((1:m)',1,m); %Matriz de subíndices de las filas
j= repmat(1:m,m,1); %Matriz de subíndices de las columnas
Q=funcion22mod(a+(j-i+1/2)*delta/x(1),n,x(3),x(4))-funcion22mod(a+(j-i-1/2)*delta/x(1),n,x(3),x(4)); %Matriz de transicion
N=(eye(m)-Q)^-1*ones(m,1); %ARLS desde todos los estados
ARL=N((m+1)/2); % ARL desde parámetro en control

end

function [ ARL ] = ARLPS2_ONEL(x)
% Función para calcular ARL de gráfico Ps EWMA con un límite de control y
"reset"
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% x(1)= lambda
% x(2)= K
% x(3)=sigma
%Variables globales
global n

m=401; %cantidad de estados transitorios
LCS= x(2)*sqrt(x(1)/(2-x(1)));
K0=0;
delta=(LCS-K0)/m; %Ancho de intervalos
a=K0+delta*(0.5:m-0.5)'; %Puntos discretos
aj=K0+delta*(0.5:m-0.5)';
a= repmat(a,1,m); %Matriz de puntos discretos
i= repmat((1:m)',1,m); %Matriz de subíndices de las filas
j= repmat(1:m,m,1); %Matriz de subíndices de las columnas
Q=funcion22mod((j-i)*delta/x(1)+ a + delta/(2*x(1)),n,1,x(3))-
funcion22mod((j-i)*delta/x(1)+ a - delta/(2*x(1)),n,1,x(3)); %Matriz de
transicion
P0j=(funcion22mod((aj+delta/2)/x(1),n,1,x(3))-funcion22mod((aj-
delta/2)/x(1),n,1,x(3)))';
ai=aj';
Pi0=funcion22mod(-(1-x(1))*ai/x(1),n,1,x(3))';
P00=funcion22mod(0,n,1,x(3));
Q2=[P00 P0j
    Pi0 Q];
Q=Q2;
N=(eye(m+1)-Q)^-1*ones(m+1,1); %ARLS desde todos los estados
ARL=N(1); % ARL desde parámetro en control
end

```

```

function [f] = funcion22mod(x,n,sigma0,sigma)
% Función de distribución acumulada del estadístico Psigma.
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% x=variable aleatoria
% n=tamaño de muestra
% sigma0=desviación en control
% sigma=desviación del proceso

opc=1; %1 si los cálculos se hacen con las funciones exactas, 2 si son
aproximadas.

if sigma0==sigma
    f=normcdf(x,0,1); %Si es para ARL en control se usa la normal
    estándar directamente.
else
    if opc==1
        menores=x<7.75;
        xme=x;
        indicema= menores==0;
        xme(indicema)=0;
        FE=menores.*chi2inv(normcdf(xme),n-1);%Se calcula con la función
        exacta para valores menores de 7.75
        FA=(~(x<7.75)*1).*(n-1+sqrt(2*(n-1))*x + 2/3*(x.^2-1) +
        1/(9*sqrt(2*(n-1)))*(x.^3-7*x) - 1/(405*(n-1))*(6*x.^4+14*x.^2-433) +
        1/(4860*sqrt(2))*(9*x.^5+256*x.^3-433*x)*(n-1)^(-3/2));
        f=chi2cdf((sigma0/sigma)^2*(FE+FA),n-1);
    else %opc==2
        FA=n-1 + sqrt(2*(n-1))*x + 2/3*(x.^2-1) + 1/(9*sqrt(2*(n-
        1)))*(x.^3-7*x) - 1/(405*(n-1))*(6*x.^4+14*x.^2-433) +
        1/(4860*sqrt(2))*(9*x.^5+256*x.^3-433*x)*(n-1)^(-3/2);
        f=chi2cdf((sigma0/sigma)^2*FA,n-1);
    end
end
end
end

```



```

% Programa para generar valores iniciales con los que se harán las
% optimizaciones: gráfico Ps EWMA con dos límites de control
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián

% Variables Globales
global ARL0 m n

m=151; % Cantidad de estados en la matriz de transición
n=26;  % tamaño de muestra

%Variables Locales
sigma0=1;

LCPC=[150,350,550,750,950]; %ARL en control
sigmafuera=[1.25,1.5,1.75,2.0,2.25]; %Desviación fuera de control

soluciones=[];

for ARL0=LCPC
    for cont2=sigmafuera

        lb=[0.05,0.1,sigma0,cont2]; %"Lower bounds" para lambda, K, sigma0,
sigma respectivamente
        ub=[1,10,sigma0,cont2]; %"Upper bounds" para lambda, K, sigma0, sigma
respectivamente

        if ARL0>=500
            x0=[0.5,3,sigma0,cont2];
        else
            x0=[0.5,2.7,sigma0,cont2];
        end

        disp('optimizando para sigma=')
        cont2

        tic

        [x,arl]=fmincon(@ARLPS2,x0,[],[],[],[],lb,ub,@restricciones,optimset('Algorit
hm','active-set','FunValCheck','on'));
        %La función restricciones incluye la restricción de que el ARL para
        %sigma=sigma0 debe ser igual al ARL0 deseado.
        %"active-set" es el algoritmo que trabaja con restricciones no lineales.
        toc
        temparray=[x';arl;ARL0;n;m];
        soluciones=[soluciones temparray];

    end
end

soluciones

```

```

% Programa para hacer optimizaciones: Gráfico Ps EWMA con dos límites de
% control
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián

%Variables Globales
global ARL0 m n
n=22;
m=401;

LCPC=[150,350,550,750,950]; %ARL en control
sigmafuera=[1.25,1.5,1.75,2.0,2.25]; %Desviación fuera de control

inicial=load('iniptreg.csv'); %Se carga archivo csv donde se encuentran
%los resultados de la optimización con las funciones aproximadas

soluciones=[];

for ARL0=LCPC
    ARL0
    for cont2=sigmafuera

        lb=[0.05,0.1,sigma0,cont2]; %"Lower bounds" para lambda, K, sigma0,
sigma respectivamente
        ub=[1,10,sigma0,cont2]; %"Upper bounds" para lambda, K, sigma0, sigma
respectivamente
        index=find(inicial(:,3)==cont2 & inicial(:,4)==ARL0 &
inicial(:,5)==n);%Se busca fila donde se
        %encuentran los valores iniciales correspondientes

        x0=[inicial(index,1),inicial(index,2),sigma0,cont2];

        disp('optimizando para sigma=')
        cont2

        tic

        [x,arl]=fmincon(@ARLPS2,x0,[],[],[],[],lb,ub,@restricciones,optimset('Algorit
hm','active-set','FunValCheck','on'))
        %La función restricciones incluye la restricción de que el ARL para
        %sigma0=sigma debe ser igual al ARL0 deseado.
        %"active-set" es el algoritmo que trabaja con restricciones no lineales.
        toc
        temparray=[x';arl;ARL0;n;m];
        soluciones=[soluciones temparray];
        xlswrite('soluparcial',soluciones); % se escriben soluciones en
archivo de Excel

    end
end

soluciones

```

```

% Programa para generar valores iniciales con los que se harán las
optimizaciones
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián

%Variables Globales
global ARL0 m n

m=401; %cantidad de estados en la matriz de transición
n=26; %tamaño de muestra

%Variables Locales
sigma0=1;

LCPC=[150,350,550,750,950];% ARL0
sigmafuera=[1.2,1.25,1.5,1.75,2.0,2.25]; %Desviación fuera de control

soluciones=[];

for ARL0=LCPC
    for cont2=sigmafuera

        lb=[0.05,0.1,cont2]; %"Lower bounds" para lambda, K, sigma0, sigma
respectivamente
        ub=[1,7,cont2]; %"Upper bounds" para lambda, K, sigma0, sigma
respectivamente

        if ARL0>=500
            x0=[0.5,3,cont2];
        else
            x0=[0.5,2.7,cont2];
        end

        disp('optimizando para sigma=')
        cont2

        tic

[x,arl]=fmincon(@ARLPS2ONEL,x0,[],[],[],[],lb,ub,@restriccionesONEL,optimset(
'Algorithm','active-set','FunValCheck','on'))
        %La función restriccionesONEL incluye la restricción de que el ARL para
        %sigma0=sigma debe ser igual al ARL0 deseado.
        %"active-set" es el algoritmo que trabaja con restricciones no lineales.
        toc
        temparray=[x';arl;ARL0;n;m];
        soluciones=[soluciones temparray];
        xlswrite('soluparcial',soluciones);

    end
end

soluciones

```

```

% Programa para hacer optimizaciones
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián

%Variables Globales
global ARL0 m n

m=401;
n=5; %n= 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 25, 30.
%Para validación n=6,8,12,14,18,22,26
%Variables Locales
sigma0=1;

LCPC=[100,200,370,500,600,700,800,900,1000];
sigmafuera=[1.2,1.25,1.5,1.75,2.0,2.25]; %Desviación fuera de control

soluciones=[];

    inicial=load('inioptionel.csv'); %Se carga archivo csv donde
    %los resultados de la optimización con las funciones aproximadas

    for ARL0=LCPC
        for cont2=sigmafuera

            lb=[1,0.1,cont2]; %"Lower bounds" para lambda, K, sigma
respectivamente
            ub=[1,7,cont2]; %"Upper bounds" para lambda, K,sigma respectivamente

            index=find(inicial(:,3)==cont2 & inicial(:,5)==ARL0 &
inicial(:,6)==n);%Se busca fila donde se
            %encuentran los valores iniciales correspondientes

            x0=[inicial(index,1),inicial(index,2),cont2];

            disp('optimizando para sigma=')
            cont2
            disp('ARL0:')
            ARL0

[x,arl]=fmincon(@ARLPS2ONEL,x0,[],[],[],[],lb,ub,@restriccionesONEL,optimset(
'Algorithm','active-set','FunValCheck','on'))
    % La función restricciones incluye la restricción de que el ARL para
    % sigma0=sigma debe ser igual al ARL0 deseado.
    % "active-set" es el algoritmo que trabaja con restricciones no lineales.
        toc
        temparray=[x';arl;ARL0;n;m];
        soluciones=[soluciones temparray];
        xlswrite('soluparcialonel',soluciones); % se escriben soluciones en
archivo de MS Excel
        end
    end
soluciones

```

```

function [ c,ceq ] = restricciones( x )
% Función de restricciones para la función fmincon. En esta función se define
la restricción de que cuando el proceso está en control el ARL debe ser igual
al ARL en control deseado.
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% x(1): lambda
% x(2): K
% x(3); desviación en control
% x(4): desviación del proceso

%Variable Global
global ARL0

c=[];
ceq=[ARLPS2([x(1);x(2);1;1])-ARL0];

end

```

```

function [ c,ceq ] = restriccionesONEL(x)
% Función de restricciones para la función fmincon. En esta función se define
la restricción de que cuando el proceso está en control el ARL debe ser igual
al ARL en control deseado.
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% x(1): lambda
% x(2): K
% x(3): desviación del proceso

%Variable Global
global ARL0

c=[];
ceq=[ARLPS2ONEL([x(1);x(2);1])-ARL0];

end

```

```

function [R] = EINV(p,n)
% Función para calcular el error de la función acumulada inversa de la
distribución Chi-cuadrada usando la aproximación de
% matlab y la función acumulada inversa de la distribución Chi-cuadrada
usando la aproximación de
% Johnson y Kotz
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% p= probabilidad
% n= tamaño de muestra

```

```

x=norminv(p,0,1);
FJK=(n-1+sqrt(2*(n-1))*x + 2/3*(x.^2-1) + 1/(9*sqrt(2*(n-1)))*(x.^3-7*x) -
1/(405*(n-1))*(6*x.^4+14*x.^2-433) + 1/(4860*sqrt(2))*(9*x.^5+256*x.^3-
433*x)*(n-1)^(-3/2));
FML=chi2inv(p,n-1);
R=abs(FML-FJK);

```

End

```

function [R] = EPA(x,n,sigma0,sigma)
% Función para calcular el error de la función de
% distribución acumulada del estadístico Ps usando
% la aproximación de matlab y la función de distribución
% acumulada del estadístico Ps usando la aproximación de
% Johnson y Kotz
% Programado por: Orlando José Mézquita Fabián
%
% Parámetros:
% x= valor del estadístico Ps siendo evaluado
% n= tamaño de muestra
% sigma0= desviación en control
% sigma= desviación del proceso

Fml= chi2cdf(((sigma0/sigma)^2)*chi2inv(normcdf(x,0,1),n-1),n-1);
Fjk= chi2cdf(((sigma0/sigma)^2)*((n-1+sqrt(2*(n-1))*x + 2/3*(x.^2-1) +
1/(9*sqrt(2*(n-1)))*(x.^3-7*x) - 1/(405*(n-1))*(6*x.^4+14*x.^2-433) +
1/(4860*sqrt(2))*(9*x.^5+256*x.^3-433*x)*(n-1)^(-3/2))),n-1);
R=abs(Fml-Fjk);

end

```

Apéndice C: Guía para implementar los gráficos de control desarrollados

- 1) Verificar los instrumentos con los que se capturan los datos.
- 2) Tomar 1000 observaciones o más en al menos 50 subgrupos en un período de tiempo de por lo menos un mes y verificar que el proceso se encuentra estable.
- 3) Hacer una prueba de normalidad. Si no se rechaza la hipótesis de normalidad continúe al paso 4, de lo contrario aplique una transformación a los datos para normalizarlos y continúe al paso 4.
- 4) Elegir el gráfico a utilizar. Para detectar incrementos en la desviación estándar del proceso usar el gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control y para detectar incrementos o disminuciones en la desviación estándar del proceso usar el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control.
- 5) Definir el tamaño de muestra (n), el ARL en control (ARL_0) y el cambio porcentual ($100 \cdot \alpha\%$) en la desviación estándar para los cuales se desea usar el gráfico. Note que si el cambio porcentual en la desviación estándar es $100 \cdot \alpha\%$ entonces $\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 1 + \alpha$
- 6) Obtener los valores de los parámetros λ y K mediante las tablas. Busque la combinación de n , ARL_0 y $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ en las tablas del Apéndice A. Para el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control busque en las tablas 17-24 y para el gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control busque en las tablas 25-32; si la combinación se encuentra en una de las tablas tome los valores de λ y K y continúe al paso 8, de lo contrario pase al paso 7.

- 7) Obtener los valores de los parámetros λ y K mediante las funciones aproximadas con regresión. Para el gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control el valor de λ se obtiene con la Ecuación 4.1 y los coeficientes de esta función se buscan en la Tabla 5 en la fila correspondiente al $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ definido en el paso 3; después se sustituyen los valores de n y ARL_0 definidos en el paso 5. Para obtener K se sigue el mismo procedimiento con la Ecuación 4.2 y la Tabla 7. Para el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control los valores de λ y K pueden obtenerse con las Ecuaciones 4.4 y 4.5 respectivamente y las tablas de coeficientes son la Tabla 11 y la Tabla 13. Note que para poder usar estas funciones debe cumplirse que $5 \leq n \leq 30$ y $100 \leq ARL_0 \leq 1000$.
- 8) Obtener los límites de control. Sustituya los valores de λ y K obtenidos en el paso 4 o en el paso 7 en las Ecuaciones 2.6 y 2.7 para el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control y en la Ecuación 2.7 para el gráfico con un límite de control.
- 9) Implementar la gráfica. Tome muestras de tamaño n , si en el paso 3 tuvo que transformar los datos aplique la misma transformación a los datos de cada muestra, calcule la varianza de éstas muestras (S_t^2) y calcule el estadístico $P\sigma$ para cada varianza (Ecuación 2.4). Para el gráfico $P\sigma$ EWMA con dos límites de control calcule el estadístico EWMA para cada muestra con la Ecuación 2.5 y gráfiquelo junto con los límites de control definidos en el paso 6; para el gráfico $P\sigma$ EWMA con un límite de control calcule el estadístico EWMA para cada muestra con la ecuación $EWMA_t = \max\{0, \lambda \cdot EWMA_{t-1} + (1 - \lambda) \cdot X_t\}$ y gráfiquelo junto con los límites de control definidos en el paso 8.

Limitaciones

Al implementar los gráficos desarrollados en esta tesis es importante tener en cuenta las siguientes limitaciones:

- 1) Los gráficos EWMA son gráficos con memoria y por tanto están diseñados para detectar cambios pequeños en la variable que se monitorea. En las secciones 4.1.1 y 4.1.2 se detalla para cuáles cambios en la dispersión es recomendable usar los gráficos desarrollados en lugar de un gráfico sin memoria.
- 2) Los gráficos creados en esta tesis presumen que la distribución del proceso que se está monitoreando es normal. Por esta razón, es necesario que los datos sean naturalmente normales o transformados a normales para poder monitorear la variabilidad usando éste gráfico.

Siempre que se tomen en cuenta las limitaciones mencionadas anteriormente, el gráfico puede aplicarse a cualquier tipo de proceso ya sea en manufactura o en servicios.

Referencias

- Acosta-Mejía, C. A. (1998). Monitoring reduction in variability with the range. *IIE Transactions* , 30, 515-523.
- Acosta-Mejía, C. A., Pignatiello, J. J., & Rao, B. V. (1999). A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion. *IIE Transactions* , 31, 569-579.
- Amin, R. W., Wolff, H., Besenfelder, W., & Baxley Jr., R. (1999). EWMA control chart for the smallest and largest observations. *Journal of Quality Technology* , 31 (2), 189-201.
- Artiles-León, N., David, H. T., & Meeks, H. D. (1996). Statistical optimal design of control charts with supplementary stopping rules. *IIE Transactions* , 28, 225-236.
- Brook, D., & Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run lengths. *Biometrika* , 59, 539-549.
- Calzada, M. E., & Scariano, S. M. (2003). Reconciling the integral equation and markov chain approaches for computing EWMA average run lengths. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* , 32 (2), 591-604.
- Castagliola, P. (2005a). A new S^2 -EWMA control chart for monitoring the process variance. *Quality and Reliability Engineering International* , 21, 781-794.
- Castagliola, P. (2005b). A R-EWMA control chart for monitoring the process range. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* , 31-49.
- Champ, C. W., & Rigdon, S. E. (1991). A comparison of the Markov chain and the integral equation approaches for evaluating the run length distribution of quality control charts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* , 20 (1), 191-204.
- Champ, C., & Woodall, W. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary stopping run rules. *Technometrics* , 393-399.
- Chang, T. C., & Gan, F. F. (1995). A cumulative sum control chart for monitoring process variance. *Journal of Quality Technology* , 27, 109-119.
- Chen, G., Cheng, S. W., & Xie, H. (2001). Monitoring process mean and variability with one EWMA chart. *Journal of Quality Technology* , 33 (2), 223-233.
- Crowder, S. V. (1987). A simple method for studying run length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics* , 29, 401-407.
- Crowder, S. V. (1989). Design of exponentially weighted moving average schemes. *Journal of Quality Technology* , 24, 155-162.
- Crowder, S. V., & Hamilton, M. (1992). Average run lengths of EWMA controls for monitoring a process standard deviation. *Journal of Quality Technology* , 24, 44-50.

- De Vargas, V. d., Dias Lopes, L. F., & Mendonça Souza, A. (2004). Comparative study of the performance of the CUSUM and EWMA control charts. *Computers & Industrial Engineering* , 46 (4), 707-724.
- Fu, J. C., Shmueli, G., & Chang, Y. M. (2003). A unified Markov chain approach for computing the run length distribution in control charts with simple or compound rules. *Statistics and Probability Letters* , 65, 457-466.
- Fu, J. C., Spiring, F. A., & Xie, H. (2002). On the average run lengths of quality control schemes using a Markov chain approach. *Statistics and Probability Letters* , 56 (4), 369-380.
- Gan, F. F. (1995). Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average. *Technometrics* , 37 (4), 446-453.
- Gan, F. F., Ting, K. W., & Chang, T. C. (2004). Interval charting schemes for joint monitoring of process mean and variance. *Quality and Reliability Engineering International* , 20, 291-303.
- Johnson, N. L., & Kotz, S. (1970). *Continuous univariate distributions*. New York: Wiley & Sons.
- Khoo, M. B., & Yap, P. W. (2005). Joint monitoring of process mean and variability with a single moving average control chart. *Quality Engineering* , 17, 51-65.
- Lowry, C. A., Champ, C. W., & Woodall, W. H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation. *Communications in Statistics—Simulation and Computation* , 24, 409-437.
- Lucas, J. M., & Crosier, R. B. (1982). Robust CUSUM: a robustness study for CUSUM quality control schemes. *Communication in Statistics-Theory Methods* , 11 (23), 2669-2687.
- Lucas, J. M., & Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics* , 32 (1), 1-12.
- McGregor, F., & Harris, J. (1993). The exponential weighted moving variance. *Journal of Quality Technology* , 25 (2), 106-108.
- Nelson, L. (1990). Monitoring reduction in variation with a range chart. *Journal of Quality Technology* , 22, 163-165.
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika* , 41 (1), 100-115.
- Page, E. S. (1963). Controlling the standard deviation by CUSUM and warning lines. *Technometrics* , 5, 307-315.
- Quesenberry, C. P. (1995). On properties of Q charts for variables. *Journal of Quality Technology* , 27 (3), 184-203.
- Reynolds, M. R., & Stoumbos, Z. G. (2004). Control charts and the efficient allocation of sampling resources. *Technometrics* , 46, 200-214.

- Riaz, M. (2008). A dispersion control chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* , 37, 1239-1261.
- Roberts, S. W. (1959). Control charts tests based on geometric moving averages. *Technometrics* , 1, 239-250.
- Serel, D. A. (2009). Economic design of EWMA control charts based on loss function. *Mathematical and Computer Modelling* , 49, 745-759.
- Shu, L., & Jiang, W. (2008). A new EWMA chart for monitoring process dispersion. *Journal of Quality Technology* , 40 (3), 319.
- Srivastava, M. S. (1997). CUSUM procedure for monitoring variability. *Communications in Statistics—Theory and Methods* , 26, 2905–2926.
- Stemann, D., & Weihs, C. (2001). The EWMA-X-S control chart and its performance in the case of precise and imprecise data. *Statistical Papers* , 42, 207-233.
- Tuprah, K., & Ncube, M. (1987). A comparison of dispersion control charts. *Sequential Analysis* , 6 (2), 155-163.