Sistemas Dinámicos Booleanos y Operaciones de Puente

Por

Luis O. Pérez Báez

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS PURAS

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

Mayo, 2008

Aprobado por:

Dorothy Bollman, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Luis F. Cáceres, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Omar Colón Reyes, Ph.D Presidente, Comité Graduado	Fecha
Anand D. Sharma, Ph.D Representante de Estudios Graduados	Fecha
Julio C. Quintana, Ph.D Director del Departamento	Fecha

Resumen de Disertación a Escuela Graduada

de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los

Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

Sistemas Dinámicos Booleanos y Operaciones de Puente

Por

Luis O. Pérez Báez

Mayo 2008

Consejero: Omar Colón Reyes

Departamento: Departamento de Ciencias Matemáticas

Resumen

Definiremos la noción de puente entre dos grafos fuertemente conexo. El grafo que se origina, $\mathcal{X}_f$, define el sistema dinámico $f : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$, no-lineal, mas simple sobre el cuerpo con dos elementos $\mathbb{Z}_2$. Usaremos un invariante llamado "Loop Number" que aplicado a $\mathcal{X}_f$ nos ayuda a proveer condiciones necesarias y suficientes para que f sea un sistema de punto fijo.

Abstract of Dissertation to the Graduate School

of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the

Requirements for the Degree of Master of Science

Sistemas Dinámicos Booleanos y Operaciones de Puente

By

Luis O. Pérez Báez

May 2008

Chair: Omar Colón Reyes

Major Department: Department of Mathematics Sciences

Abstract

We define the concept of wedge between two strongly connected graphs. The resulting graph, $\mathcal{X}_f$, defines the simplest nonlinear dynamical system $f : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ over the field of 2 elements $\mathbb{Z}_2$. We use an invariant, called the loop number, that when applied to $\mathcal{X}_f$ will help us provide necessary and sufficient conditions for f to be a fixed point system.

Derechos Reservados © 2008

Por

Luis O. Pérez Báez

A mis padres Ulpiano Pérez y Sania M. Báez

Agradecimientos

Quiero dar gracias a Omar Colón Reyes, mi consejero, por toda su ayuda, orientación, tiempo y paciencia. Todo es muy apreciado. También quiero agradecer a los miembros del comité graduado por las sugerencias valiosas del presente trabajo.

Quiero dar gracias a la facultad y personal del departamento de ciencias matemáticas de la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez por los conocimientos adquiridos.

Y todas aquellas persona que de alguna manera enriquecieron mi vida social y cultural, especialmente a Cidmarie Odiott y a Ivelisse Rubio que me motivo y guió a continuar estudios graduados....

Índice general

1. Introducción **1**

2. Sistemas Dinámicos sobre Cuerpos Finitos **7**

2.1. Sistemas Dinámicos Lineales 7

2.2. Sistemas Dinámicos No Lineales 15

3. Linealización de Sistemas Dinámicos **20**

3.1. Linealización de un Sistema Dinámico No Lineal 20

3.2. Inclusión de un Sistema Dinámico No Lineal a uno Lineal 23

4. Operaciones de Puente **32**

4.1. Definición y Ejemplos 32

4.2. Operaciones de Puentes 36

4.3. Sistema Dinámico Finito de Punto Fijo y Operaciones de Puente 41

4.4. Caracterización de Sistema Dinámico Generado por k-puentes 42

4.4.1. Caracterización del 0-puente de un n-ágono y un 1-ágono 43

4.4.2. Caracterización del $0,1$-puente de un 2-ágono y un n-ágono 47

5. Discusión de resultados. **52**

5.1. Conclusiones 52

5.2. Trabajo futuro 56

Índice de figuras

1.1. Órbita 2

1.2. Estado fase del SDF $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$. 3

1.3. Estado fase del sistema lineal $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, x_1+x_2)$. 4

2.1. Estado fase del SDFL $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1 + x_3, x_2)$. 8

2.2. Producto entre ciclos y arboles 10

2.3. Descomposición del SDFL como suma directa de subespacios invariantes. . . . 11

2.4. Estado fase del SDFL $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_1 + x_4, x_4, x_1)$. 12

2.5. Grafo del mapa nilpotente $f = (x_2, x_3, 0) : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^3$. 13

2.6. Estado fase del mapa $f = (x_1 + 2x_2, x_2) : \mathbb{Z}_3^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2$. 14

2.7. Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3)$. 16

2.8. Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1x_3, x_1x_4, 0)$ 16

2.9. Grafo fuertemente conexo con "Loop Number" 1 17

2.10. Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3x_4, x_1, x_4, x_2x_3)$. 19

3.1. Estados fases de $\mathcal{S}(L_1)$ y $\mathcal{S}(L_2)$ 25

3.2. Inclusión del SDFBM al sistema lineal resultante. 29

3.3. Inclusión de un SDFBM a un sistema lineal resultante. 29

3.4. Estado fase de $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ donde $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1)$ y el sistema lineal resultante. 31

4.1. 0-puente de un 2-ágono y un 4-ágono 33
4.2. 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono 34
4.3. Estado fase de 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono. 35
4.4. 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono con vértices permutados. 36
4.5. Estado fase de 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono con vértices permutados. 37
4.6. Estado fase de $\mathcal{S}(f)$ y $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_1, x_1x_3)$ 39
4.7. 1-puente de dos 3-ágonos 40
4.8. Estados fases de $\mathcal{S}(f)$ y $\mathcal{S}(g)$ 40
4.9. 0-puente de un 3-ágono y un 4-ágono 42
4.10. 0-puente de un 1-ágono y un 3-ágono 43
4.11. 0-puente de un 1-ágono y un n-ágono 44
4.12. 0-puente de un 2-ágono y un n-ágono 48
4.13. 1-puente de un 2-ágono y un n-ágono 50

5.1. Estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1x_3, x_2x_3)$. 53
5.2. 2-puente de un 3-ágono y un 4-ágono 54
5.3. Estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1x_4, x_2, x_3)$. . . . 55

Capítulo 1

Introducción

Un sistema dinámico discreto es un sistema que presenta un cambio o evolución de un estado como función de un tiempo finito, el comportamiento en dicho sistema se puede caracterizar determinando los atractores, los estados y sus relaciones. El estado de un sistema como función del tiempo t, es una descripción para predecir los estados futuros sin tener que recurrir a los estados anteriores. La evolución o desarrollo de un sistema se refiere a una secuencia o una trayectoria a través del espacio de los posibles estados. Conocemos ejemplos de aplicaciones de estos sistemas como tipos especiales de circuitos eléctricos, sistemas de controles y sistemas lineales modulares, ver [7]. También encontramos aplicaciones de sistemas dinámicos para modelar sistemas biológicos usando cuerpos finitos, ver [1, 5]. Algunos de los sistemas biológicos más complicados son el sistema nervioso y las redes reguladoras de genes, los cuales pueden tener dos estados, encendido o apagado. Una pregunta fundamental es como analizar la dinámica del modelo sin tener que enumerar todos los estados de transición.

Para nuestro trabajo, un sistema dinámico finito (SDF) es un par (X, f) donde X es un conjunto finito y f es una función de conjunto, $f : X \longrightarrow X$. Muchas de estas aplicaciones como las redes reguladoras de genes requieren que el conjunto X sea el producto cartesiano de n copias de un cuerpo finito, en particular tomaremos el conjunto X como $\mathbb{Z}_2^n$. Obtenemos entonces que $(\mathbb{Z}_2^n, f)$, $n \geq 1$, es un SDF. La dinámica del sistema es generada por la iteración

de la función con ella misma, esto es $f^0(x) = x$, $f^{l+1}(x) = f\left(f^l(x)\right)$ para $l \geq 1$. La dinámica de f está ilustrada en el estado fase de f, denotado por $\mathcal{S}(f)$, el cual es un grafo dirigido definido como sigue. Los vértices de $\mathcal{S}(f)$ son los 2^n elementos de $\mathbb{Z}_2^n$ y existe un eje dirigido $a \longrightarrow b$ si $f(a) = b$. En particular un eje dirigido desde un vértice a el mismo esta permitido. Esto es que $\mathcal{S}(f)$ contiene todos los estados de transición de f. Cada componente conexo del grafo de $\mathcal{S}(f)$ consiste de ciclos dirigidos llamados ciclos límites con un árbol conexo a cada vértice en un ciclo (Ver figura 1.1). Estos componentes conexos son subgrafos en los cuales se pueden conseguir un camino dirigido entre cualesquiera dos vértices.

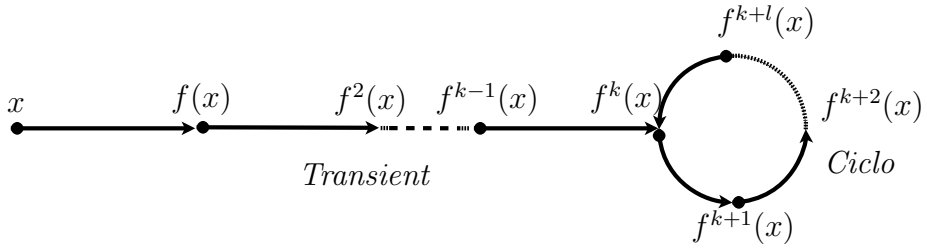


Figura 1.1: Órbita

Decimos que el SDF tiene un ciclo límite de largo l, basado en a si $f^l(a) = f^0(a) = a$, para algún $a \in \mathbb{Z}_2^n$. También decimos que el "transient" de $a \in \mathbb{Z}_2^n$ es k, si k es el valor mínimo que satisface $f^k(x) = f^{k+l}(x)$. El "transient" de $\mathcal{S}(f)$ es el máximo de los "transient" de todos los arboles de $\mathcal{S}(f)$.

Sabemos (ver [2]) que f se puede describir de la forma $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ donde $f_i : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$. Ahora como $\mathbb{Z}_2$ es un cuerpo finito entonces la función coordenada f_i se puede representar por un polinomio en $\mathbb{Z}_2[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Así que cualquier SDF sobre $\mathbb{Z}_2$ se puede representar como función de polinomios.

Ejemplo 1.0.1 *Considere el SDF* $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ *donde* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$*, entonces el estado fase de* f*,* $\mathcal{S}(f)$*, esta dado en la figura 1.2*[1]*. Note que* $f^3(0,0,1) = (0,0,1)$*,* $f^3(0,1,1) = (0,1,1)$*,* $f(0,0,0) = (0,0,0)$ *y* $f(1,1,1) = (1,1,1)$*, o sea que el sistema tiene dos ciclos de largo 3 y dos putos fijos* $(0,0,0)$*,* $(1,1,1)$*.*

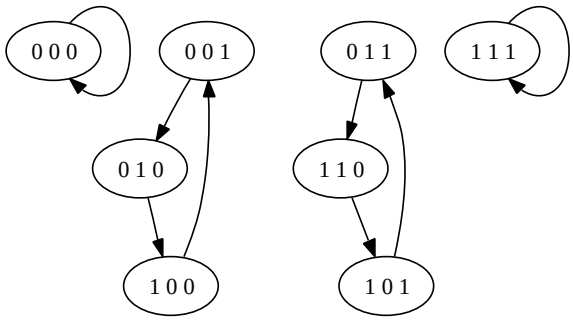


Figura 1.2: Estado fase del SDF $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$.

Los SDF se pueden clasificar en dos tipos: los lineales y no-lineales, ver [2, 10]. En [10] R. Hernández, usando el hecho de que un espacio vectorial V, se descompone como la suma directa del núcleo y la imagen de una trasformación lineal $\phi : V \longrightarrow V$, caracterizó completamente los SDF lineales. El resultado principal de [10] establece que todo estado fase está compuesto por la unión disjunta de ciclos y un árbol. Esto es, que el estado fase de un sistema dinámico lineal finito consiste del producto de ciclos y un árbol. Es decir que el estado fase consiste de un árbol conexo a cada vértice de los ciclos. También R. Hernández provee una descripción total de la dinámica del sistema.

Ejemplo 1.0.2 *Considere el sistema lineal* $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ *donde*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

[1]Las figuras de los ejemplos de los estados fase son creadas con el programa DVD desarrollado en Virginia Bioinformatic Institute, `http://dvd.vbi.vt.edu/network_visualizer/`.

Entonces la representación de f en forma de matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es $x^2(x+1)$. El sistema f es un sistema de punto fijo el cual se puede observar en la figura 1.3.

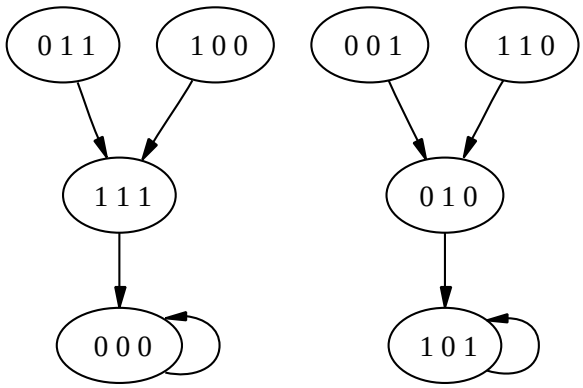


Figura 1.3: Estado fase del sistema lineal $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, x_1+x_2)$.

Para sistemas no lineales P.Cull en [5] proporciona otra forma de conocer la dinámica de estos sistemas no lineales. Él propone la linealización de un sistema no lineal y usando resultados similares a los publicados por Hernández en [10], obtiene el número de ciclos y el largo de los ciclos del sistema lineal. Para esto P.Cull considera representar las funciones del sistema dado como vectores. Luego construye una matriz usando estos vectores llamada la matriz de funciones y calculando el polinomio mínimo obtiene el largo de los ciclos.

Además en [2], Colón et. al. describen un sistema no lineal sobre $\mathbb{F}_2$ con monomios. Ellos consideran un sistema $(\mathbb{F}_2^n, f)$ donde $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, tal que cada f_i es un polinomio de la forma $x_{i_1}^{\epsilon_{i1}} x_{i_2}^{\epsilon_{i2}} \cdots x_{i_r}^{\epsilon_{ir}}$ con $\epsilon_{ij} \in \{0, 1\}$ o una constante igual a 0 o 1. A este sistema de polinomio le asocian un grafo de dependencia, denotado por $\mathcal{D}(f)$, cuyos vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$

corresponden a $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Existe un eje dirigido $v_i \longrightarrow v_j$ si x_j aparece en f_i, esto es que $x_j | f_i$. Para sistemas monomiales booleanos el grafo de dependencia permite la reconstrucción exacta del sistema. El resultado principal de [2], demuestra que la estructura de ciclos del estado fase $\mathcal{S}(f)$ se puede determinar exclusivamente desde el grafo de dependencia $\mathcal{D}(f)$, que es, desde la estructura de las f_i. El rol principal para solucionar este problema es un invariante asociado a un grafo fuertemente conexo, esto es, un grafo en el cual existe un camino dirigido entre dos vértices cualesquiera. Para tal grafo definen el "Loop Number" como el mínimo de las distancias entre dos caminos distintos desde un vértice a él mismo. Note que el grafo de dependencia de un sistema monomial se puede descomponer en componentes fuertemente conexoss cuyo "Loop Number" determina la estructura de los ciclos límites. El resultado principal de Colón et. al. es que si el "Loop Number" de todos los componentes fuertemente conexo es uno, entonces f es un sistema de punto fijo.

En aplicaciones biológicas se desean métodos matemáticos eficientes para extraer información sobre la iteración regular entre genes, ver [1]. Una pieza de información que nos interesa es cuando la dinámica de estos genes se "estabiliza". En [1] D. Bollman et. al. desarrollan herramientas que permiten la detección de estados de equilibrio cuando los genes son modelados por sistemas dinámicos finitos. Ellos discuten dos modelos de cuerpos finitos, el modelo univariable y el modelo multivariable. El modelo multivariable es dado por un sistema dinámico finito $\left(\mathbb{F}_q^n, f\right)$ donde $\mathbb{F}_q^n$ representa el conjunto de n-tuplas sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ con q elementos. Cada función f_i provee el próximo estado del gen i, dado el estado actual de los demás genes. El modelo univariable es dado por un sistema dinámico finito $(\mathbb{F}_{q^n}, f)$. En esté caso, cada valor de f representa el próximo estado de los n genes, dado el estado presente. Bollman et. al. demuestran que estos dos modelos son equivalentes y que uno se expresa en términos del otro por medio de una transformada discreta de Fourier. También dan las condiciones necesarias y suficientes para que el modelo univariable sea de punto fijo. En dicho artículo, también se introducen un nuevo modelo el cual es definido sobre módulos

finitamente generados y proveen las condiciones necesarias y suficientes para que tal sistema sea uno en equilibrio.

En este trabajo se presentará una familia de sistemas dinámicos no lineales para el cual se obtendrá información sobre su dinámica. El interés principal es buscar condiciones necesarias y suficientes para que un sistema dinámico finito no lineal sea uno de punto fijo. También nos interesa conseguir una cota para el "transient" de los sistemas no lineales. En el capítulo 2 se presentarán algunos de los trabajos más importantes hechos sobre sistemas dinámicos finitos lineales y no lineales. Se darán resultados que caracterizan el estado fase de un sistema dinámico lineal finito. También se proveerán condiciones necesarias y suficientes para que un sistema dinámico no lineal sea uno de punto fijo. En el capítulo 3 se presenta un método propuesto en [5], para convertir un sistema dinámico finito no lineal booleano a uno lineal. Se demostrará que el estado fase del sistema no-lineal está contenido en el estado fase del sistema lineal resultante bajo isomorfismo. Una consecuencia inmediata de este resultado es que si el sistema lineal resultante es de punto fijo entonces el sistema no lineal es de punto fijo. Estos resultados nos proveen una cota para los sistema dinámico finito monomial booleano, si el sistema lineal resultante es de punto fijo. El capítulo 4 se dedicará a las operaciones de puente. Definiremos el k-puente entre dos grafos fuertemente conexos, el cual genera un sistema dinámico monomial. Para este sistema generado por el k-puente se darán condiciones suficientes para que este sea uno de punto fijo. También se caracterizarán algunas familias para distintos k-puente.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos sobre Cuerpos Finitos

En este capítulo se presentarán algunos resultados sobre sistemas dinámicos discretos. Se caracterizarán completamente los sistemas dinámicos lineales sobre cuerpos finitos. Esta caracterización está basada en la descomposición de un espacio vectorial como la suma directa del subespacio nilpotente y del subespacio bijectivo. Presentaremos que el estado fase de un sistema lineal está compuesto de un árbol, correspondiente a la parte nilpotente, por ciclos correspondiente a la parte biyectiva. También se proveerán algunos resultados para cuando el sistema dinámico es no lineal usando monomios. En [2] se define un sistema dinámico finito no lineal utilizando monomios. A este sistema le asocian un grafo dirigido del cual se puede caracterizar el comportamiento cíclico del sistema. En dicho artículo Colón et. al. proporcionan condiciones necesarias y suficientes para que un sistema dinámico finito monomial sea uno de punto fijo. Para esto usan un número invariante llamado "Loop Number" el cual determina la estructura de los ciclos límites del sistema monomial.

2.1. Sistemas Dinámicos Lineales

En el resto de este capítulo consideremos $X = \mathbb{F}_q^n$.

Definición 2.1.1 *Un sistema dinámico lineal finito (SDFL) es un SDF* $\left(\mathbb{F}_q^n, f\right)$ *tal que* $f : \mathbb{F}_q^n \longrightarrow \mathbb{F}_q^n$ *es lineal.*

Para describir el estado fase de un SDFL se utilizan grafos. Los vértices de estos grafos son los elementos de $\mathbb{F}_q^n$ y existe un eje $a \longrightarrow b$ en el grafo si $f(a) = b$.

Ejemplo 2.1.2 *Considere el SDFL* $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ *donde* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1 + x_3, x_2)$. *La dinámica de* f *se representa en la figura 2.1.*

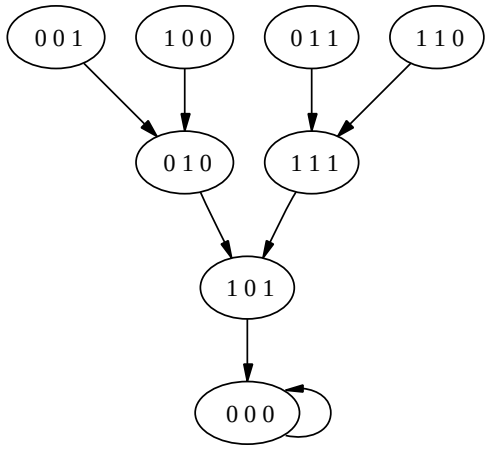


Figura 2.1: Estado fase del SDFL $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1 + x_3, x_2)$.

Sabemos que el SDFL se puede representar como una matriz A. Ahora decimos que un polinomio $p(x)$ es un polinomio aniquilador de A si y sólo si $p(A) = 0$. Cualquier mapa lineal sobre un espacio vectorial tiene polinomios aniquiladores los cuales están garantizados por el teorema de Cayley-Hamilton. Los polinomios aniquiladores son múltiplos del polinomio mínimo. Este polinomio mínimo es el polinomio de menor grado que aniquila a A. Así que el polinomio característico es un polinomio aniquilador que es divisible por el polinomio mínimo. El próximo teorema se encuentra en el articulo [10] de R. Hernández el cual es importante para la caracterización de los SDFL.

Teorema 2.1.3 *Sea p un polinomio aniquilador del SDFL $f : X \longrightarrow X$ y supongamos que p factoriza como $p(x) = p_1(x)\, p_2(x)$ donde p_1 y p_2 son polinomios relativamente primos. Entonces*

$$X = X_1 \oplus X_2$$

donde X_1 y X_2 son subespacios invariantes relativos a f ($f(X_i) \subset X_i$). Además si p es el polinomio característico de f, entonces p_i es el polinomio característico de $f_i = f|_{X_i}$, $i = 1, 2$.

Ahora definiremos el producto directo de dos SDF. Para esto sean (X_1, f_1) y (X_2, f_2) SDF. Entonces el producto directo de (X_1, f_1) y (X_2, f_2) es $(X_1 \times X_2, f_1 \times f_2)$ donde $X_1 \times X_2$ es el producto cartesiano de X_1 y X_2, y $(f_1 \times f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$. En el próximo resultado de [10] se aplicará está terminología.

Proposición 2.1.4 *Sea f un SDFL sobre X y supongamos que $X = X_1 \oplus X_2$ con X_1 y X_2 invariantes bajo f y $f(X_i) \subset X_i$. Entonces f es un SDFL sobre F_i y*

$$(X, f) = (X_1, f_1) \times (X_2, f_2).$$

Demostración. Sea f un SDFL sobre X y supongamos que $X = X_1 \oplus X_2$ con X_1 y X_2 invariantes bajo f. Entonces $X = X_1 \oplus X_2$ implica que cada elemento x de X se puede escribir de forma única como $x = x_1 + x_2$ con $x_i \in X_i$. Ahora por la linealidad de f tenemos que

$$f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

Por consiguiente $f = f_1 \times f_2$. □

Esta proposición implica que la dinámica de (X, f) se reduce al estudio de la dinámica de (X_1, f_1) y (X_2, f_2).

Ejemplo 2.1.5 *Considere el siguiente SDFL $(\mathbb{F}_3^3, f)$ donde*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, 2x_1 + x_2, x_1 + x_3).$$

Este sistema se puede representar con la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual tiene polinomio característico $p(x) = (x+2)(x^2+x+2)$. *Ahora como* $\mathbb{F}_3^3 = \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3^2$, *temenos por la proposición 2.1.4 que* $(\mathbb{F}_3^3, f) = (\mathbb{F}_2, f_1) \times (\mathbb{F}_2^2, f_2)$ *donde* $f_1 = f|_{\mathbb{F}_3}$ *y* $f_2 = f|_{\mathbb{F}_3^2}$. *Además los polinomios característicos de* f_1 *y* f_2 *son* $p(x)_{f_1} = x+2$ *y* $p(x)_{f_2} = x^2+x+2$ *respectivamente.*

Para la descripción completa de la dinámica de un SDFL definiremos un producto especial a partir del producto de dos SDFL. El producto entre un ciclo y un árbol es un grafo que esta formado por el ciclo y por el árbol donde en cada vértice del ciclo existe una copia del árbol como lo muestra la figura 2.2.

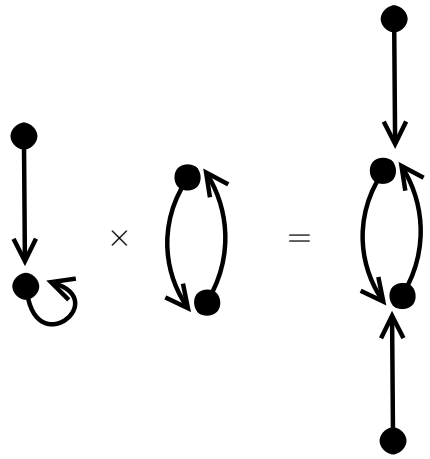


Figura 2.2: Producto entre ciclos y arboles

Ahora se presentara el resultado de R.Hernández et. al. en [10] que caracteriza completamente el estado fase de un SDFL.

Teorema 2.1.6 *Sea* (X, f) *un SDFL. Entonces* X *es igual al producto de un árbol con ciclos.*

Demostración. Sea (X, f) un SDFL y sea p el polinomio característico de f. Entonces p factoriza como

$$p(x) = x^s \phi(x) \text{ con } \phi(0) \neq 0.$$

Ahora por el teorema 2.1.3,

$$X = X_1 \oplus X_2$$

donde X_1 y X_2 son subespacios invariantes bajo f. De modo que X_1 tiene polinomio característico x^s para la restricción f_1 de f a X_1. Así que $f_1^s = 0$, es decir que f_1 es un mapa nilpotente. Por otro lado la hipótesis de que $\phi(0) \neq 0$ es equivalente a decir que $\det(\phi) \neq 0$, o sea que la restricción f_2 de f a X_2 es biyectiva. Entonces por la proposición 2.1.4 el grafo G de f es el producto de $G_{f_1} \times G_{f_2}$.

□

Por consiguiente, el estado fase está configurado de la siguiente manera: una parte es un árbol dado para la parte nilpotente y por ciclos dado para la parte biyectiva como lo muestra el diagrama 2.3.

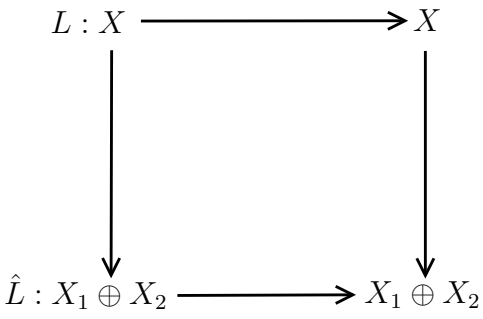


Figura 2.3: Descomposición del SDFL como suma directa de subespacios invariantes.

Observación 2.1.7 *El estado fase de un SDFL consiste de la unión disjunta de ciclos con un árbol pegado en cada uno de los vértices de los ciclos.*

Después del próximo ejemplo se darán descripciónes de las parte nilpotente y la parte biyectiva.

Ejemplo 2.1.8 *Considere el SDFL* $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ *con* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_1 + x_4, x_4, x_1)$. *Note que el estado fase de* f *representado en la figura 2.4 está compuesto de dos ciclos de largo 1, un ciclo de largo 2 y un árbol pegado en cada vértice de los ciclos.*

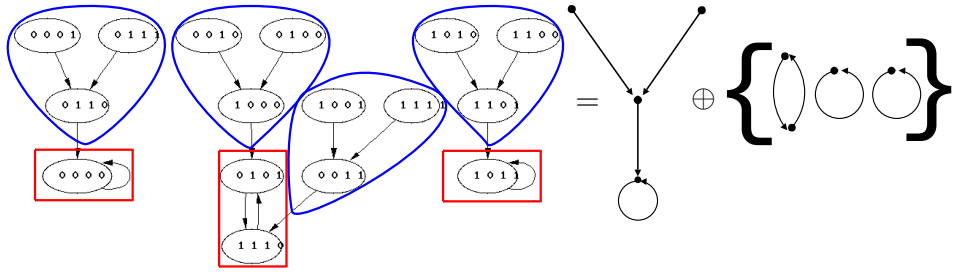


Figura 2.4: Estado fase del SDFL $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_1 + x_4, x_4, x_1)$.

Ahora para comprender la estructura del estado fase de un SDFL y el teorema 2.1.6 se discutirá la parte nilpotente y la parte biyectiva de un SDFL.

Definición 2.1.9 *Un mapa* $g : X \longrightarrow X$ *es nilpotente si existe un número natural* n *tal que* $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n-veces} = 0$.

Si g es un mapa nilpotente tal que $g^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ y n es el menor con está propiedad decimos que n es el índice de nilpotencia de g. También decimos que g es un mapa nilpotente puro si el índice de nilpotencia es igual a la dimensión del espacio vectorial donde este actúa.

Teorema 2.1.10 *Sea* $f : X \longrightarrow X$ *un mapa nilpotente puro y sea* $|X| = n$. *El grafo de* f *es un árbol de altura* n *con punto terminal cero.*

Ejemplo 2.1.11 *Considere el mapa* $f = (x_2, x_3, 0) : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^3$, f *es un mapa nilpotente puro de índice 3. Así que por el teorema 2.1.10 el grafo de* f *es un árbol de longitud 3, el cual está representado en la figura 2.5*

Sea (X, f) un SDFL biyectivo, entonces por el teorema 2.1.6 el grafo de f es una colección de ciclos disjuntos. Usando propiedades de los espacios vectoriales X sobre un cuerpo finito

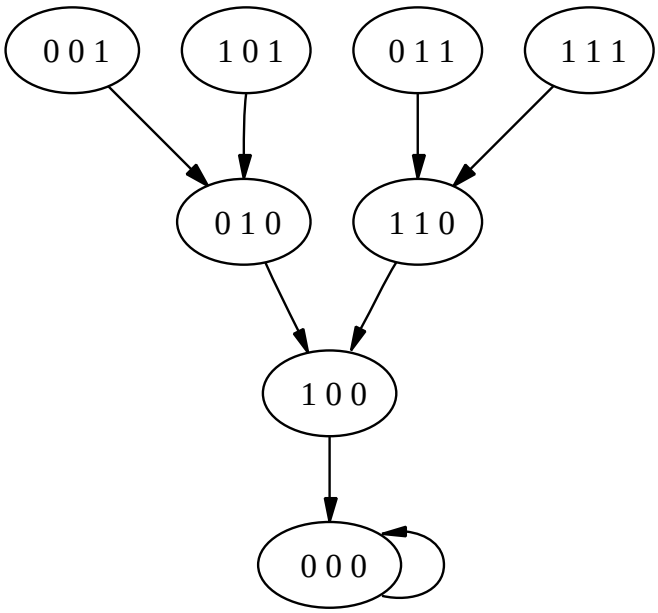


Figura 2.5: Grafo del mapa nilpotente $f = (x_2, x_3, 0) : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^3$.

k, la dinámica de un SDFL f en general se limita al estudio de la dinámica de los SDF. La matriz de transformación del SDFL tiene polinomio característico $p(x) = x^s\phi(x)$, $x \neq 0$ y $\phi(0) \neq 0$ donde x^s es el polinomio característico del mapa nilpotente de f y $\phi(x)$ es el polinomio característico del mapa biyectivo de f.

Para caracterizar la parte biyectiva de los SDFL, R. Hernández generaliza un resultado de [7], el cual cuenta el número de ciclos y el largo de ciclos para cuerpos finitos de característica 2.

Teorema 2.1.12 *Sea k un cuerpo finito de característica p con q elementos. Sea X un espacio finito sobre un cuerpo finito k de dimensión n y $T : X \longrightarrow X$ un mapa biyectivo. Suponga que el polinomio mínimo de T es $f = g^s$, donde g es un polinomio irreducible de grado m. Entonces la estructura de los ciclos del grafo de f es dada por*

$$G_T = 1 + \sum_{i=1}^{s} \frac{q^{mi} - q^{m(i-1)}}{r_i} C_{r_i} \tag{2.1}$$

donde 1 es el 0-ciclo, C_{r_i} es un ciclo de largo r_i y $r_i = ord(g^i)$.

Ejemplo 2.1.13 *Considere el SDFL* $(\mathbb{Z}_3^2, f)$ *con* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2)$, *cuya representación matricial es* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *El polinomio característico de* A *es* $p(x) = (1-x)^2$. *Así que tomando* $g = 1-x$ *tenemos que* $m = 1$ *y* $s = 2$ *por que* $f = g^2$. *Además* $char(\mathbb{Z}_3) = 3$ *y* $\mathbb{Z}_3$ *tiene tres elementos, es decir* $q = 3$. *Ahora*

- $ord(g) = 1$, *porque* $1 - x$ *divide a* $1 - x$
- *El orden de* g^2 *es* $ord(g)\, p^t$ *donde* t *es el entero menor con* $p^t \geq s$, *así que* $ord(g^2) = 1 \cdot 3 = 3$, *por que* $3^1 \geq 2$.

Entonces, usando la fórmula 2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} G_f &= 1 + \frac{3^1 - 3^0}{1} C_1 + \frac{3^{1(2)} - 3^1}{3} C_3 \\ &= 1 + 2C_1 + 2C_3. \end{aligned}$$

Esto es que el $\mathcal{S}(f)$ *contiene* 3 *ciclos de largo* 1 *y* 2 *ciclos de largo* 3, *los cuales se pueden observar en la figura 2.6.*

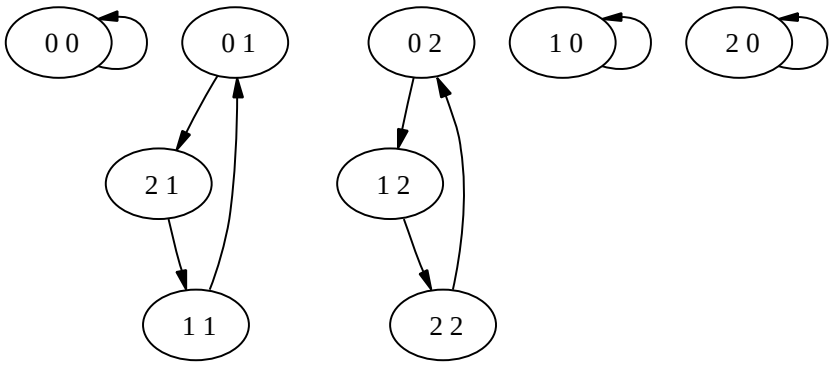


Figura 2.6: Estado fase del mapa $f = (x_1 + 2x_2, x_2) : \mathbb{Z}_3^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2$.

2.2. Sistemas Dinámicos No Lineales

En está sección se discutirá algunas ideas del trabajo realizado por O. Colón-Reyes et. al. en [2]. Ellos consideran un sistema dinámico finito no lineal sobre $\mathbb{Z}_2$, utilizando monomios y para el cual presentan condiciones necesarias y suficientes para que este sistema sea uno de punto fijo. El resultado principal de [2] muestra que la estructura cíclica del estado fase se puede determinar exclusivamente desde un grafo dirigido.

Comenzamos esta sección con la definición de un sistema dinámico finito booleano monomial.

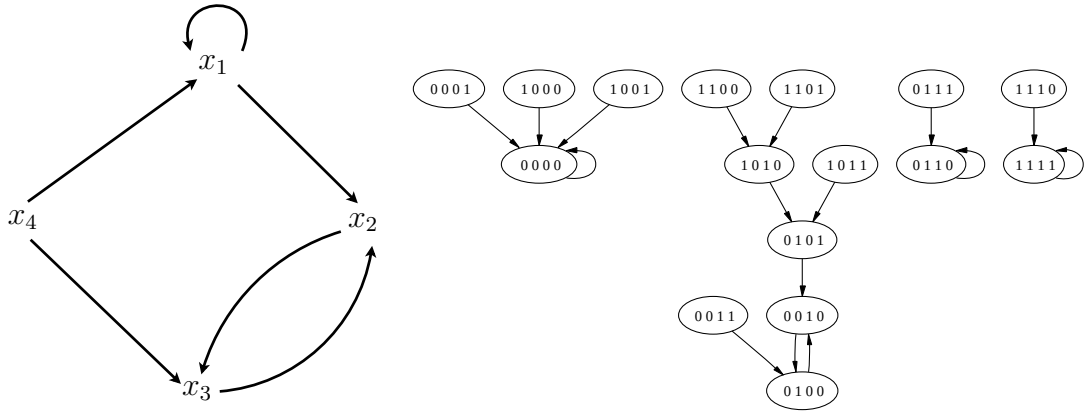
Definición 2.2.1 *Un sistema $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ es un sistema dinámico finito booleano monomial (SDF BM) si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y cada función monomial es de la forma $f_i = \alpha_i x_1^{\varepsilon_{1i}} \cdots x_n^{\varepsilon_{ni}}$ donde $\alpha_i \in \{0,1\}$ y $\varepsilon_{ji} \in \{0,1\}$. Si $\alpha_i = 0$, el conjunto de todos los $\varepsilon_{ji} = 0$.*

La composición m-veces de la función f con ella misma $f^m = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m-veces}$, la denotamos por $f^m = (f_1^m, \ldots f_n^m)$ y por definición tenemos que $f_i^m = \alpha_i \left(f_i^{m-1}\right)^{\varepsilon_{1i}} \cdots (f_n^{m-1})^{\varepsilon_{ni}}$. Ahora con f asociamos un digrafo $\mathcal{X}$ cuyos vértices corresponden a las variables de f.

Definición 2.2.2 *Sea $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un SDFBM. Entonces a $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ le asociamos un grafo $\mathcal{X}$ llamado el grafo de dependencia con conjunto de vértice $\{a_1, a_2, \ldots, \varepsilon\}$. Existe un eje dirigido desde a_i a a_j si $\alpha_i = 1$ y x_j es factor en f_i es decir $\varepsilon_{ji} = 1$. También existe un eje dirigido desde a_i a ε si $\alpha_i = 0$, es decir $f_i = 0$.*

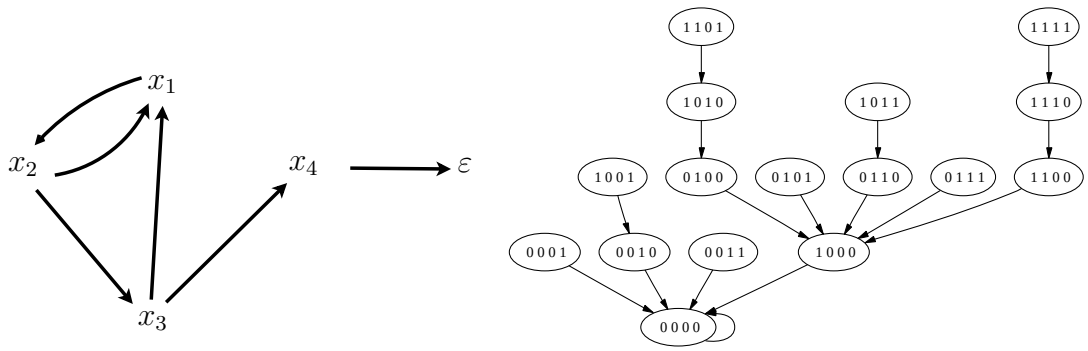
Note que ciclos $a_i \longrightarrow a_i$ son permitidos, esto ocurre si f_i tiene un factor x_i y si existe un eje $a_i \longrightarrow \varepsilon$, entonces no existe un eje $a_i \longrightarrow a_j$ para todo j.

Ejemplo 2.2.3 *(1) El sistema $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3)$ tiene el grafo de dependencia de la figura 2.7(a) y el estado fase esta dado en la figura 2.7(b).*
(2) El sistema $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1x_3, x_1x_4, 0)$ tiene el grafo de dependencia de la figura 2.7(a) y el estado fase esta dado en la figura 2.7(b).



(a) Grafo de dependencia (b) Estado fase

Figura 2.7: Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_2, x_1x_3)$.



(a) Grafo de dependencia (b) Estado fase

Figura 2.8: Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1x_3, x_1x_4, 0)$

Definición 2.2.4 *Un camino p de largo n en un grafo es una sucesión $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_n$ donde v_i son vértices y e_i son ejes del grafo con v_i , e_i adyacentes. Denotamos el camino p y el largo de p como $p : v_0 \longrightarrow v_n$ y $n = |p|$ respectivamente.*

Ahora con el grafo de dependencia se define un número invariante llamado "Loop Number" asociado a grafos fuertemente conexo, que es, un grafo donde existe un camino dirigido entre cualquiera dos vértices. Este invariante proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un SDFBM sea un de punto fijo.

Definición 2.2.5 *Sea $\mathcal{X}$ un grafo de dependencia de un SDFBM. El "Loop Number" de un vértice $a \in \mathcal{X}$ es el mínimo de todas los números $t \geq 1$ con $t = |p| - |q|$, para todo camino cerrado $p, q : a \longrightarrow a$. Si no existe un camino cerrado de a a a entonces el "Loop Number" es cero . Denotamos el "Loop Number" de un grafo fuertemente conexo $\mathcal{X}$ como $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.*

Observación 2.2.6 *Note que si existe un "loop" $p : a \longrightarrow a$ entones el "Loop Number" de a es 1.*

Ejemplo 2.2.7 *Considere el grafo fuertemente conexo de la figura 2.9 El "Loop Number"*

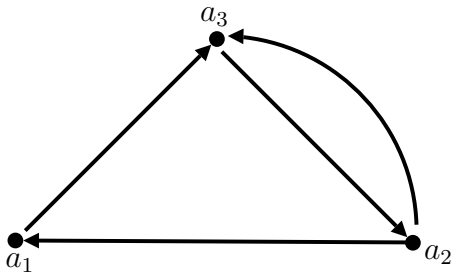


Figura 2.9: Grafo fuertemente conexo con "Loop Number" 1

de este grafo es 1. *Para esto considere el camino $p : a_3 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_3$ y el camino $q : a_3 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_3$. Entonces $|p| - |q| = 3 - 2 = 1$.*

Ahora para los próximo capítulos necesitamos los siguientes resultados de [2].

Lema 2.2.8 *El "Loop Number" es constante en cualquier grafo fuertemente conexo $\mathcal{X}$, es decir que el "Loop Number" esta bien definido.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{X}$ y supongamos que el "Loop Number" de $\mathcal{X}$ es t, es decir que existen caminos $p, q : a \longrightarrow a$ tal que $|p|-|q| = t$. Queremos ver que el "Loop Number" esta bien definido. Para esto sean $p' : a \longrightarrow b$ y $q' : b \longrightarrow a$ dos caminos. Entonces $p'pq', p'qq' : b \longrightarrow b$ son caminos cerrados con $|p'pq'| - |p'qq'| = t$. Así que el "Loop Number" de b es menor o igual que el "Loop Number" de a. Por simetría el "Loop Number" es constante en $\mathcal{X}$. □

Lema 2.2.9 *Sea el "Loop Number" de $\mathcal{X}$ igual a t. Sea $p' : a_i \longrightarrow a_j$ y $q' : a_i \longrightarrow a_j$ dos caminos. Entonces $|p'| - |q'| \in (t) \subseteq \mathbb{Z}$.*

Demostración. Supongamos que $|p'| > |q'|$ y sea $|p'| - |q'| = rt + s$ con $0 \leq s < t$. Queremos ver que $|p'| - |q'| \in (t) \subseteq \mathbb{Z}$, esto es que $s = 0$. Para ésto sean $p, q : a_i \longrightarrow a_i$ caminos en $\mathcal{X}$ tal que $|q| - |p| = t$. Tenemos que $r \geq 0$. Luego

$$|p'p| - |q'q| = |p'| + |p| - |q'| - |q| = rt + s - t = (r-1)\,t + s.$$

Por tanto existen caminos $p'', q'' : a_i \longrightarrow a_j$ en $\mathcal{X}$ con $|p''| - |q''| = s$. Sea $p^\star : a_j \longrightarrow a_i$ un camino en $\mathcal{X}$. Entonces $|p^\star p''| - |p^\star q''| = s = 0$ porque el "Loop Number" es el mínimo. Por consiguiente $|p'| - |q'| \in (t) \subseteq \mathbb{Z}$. □

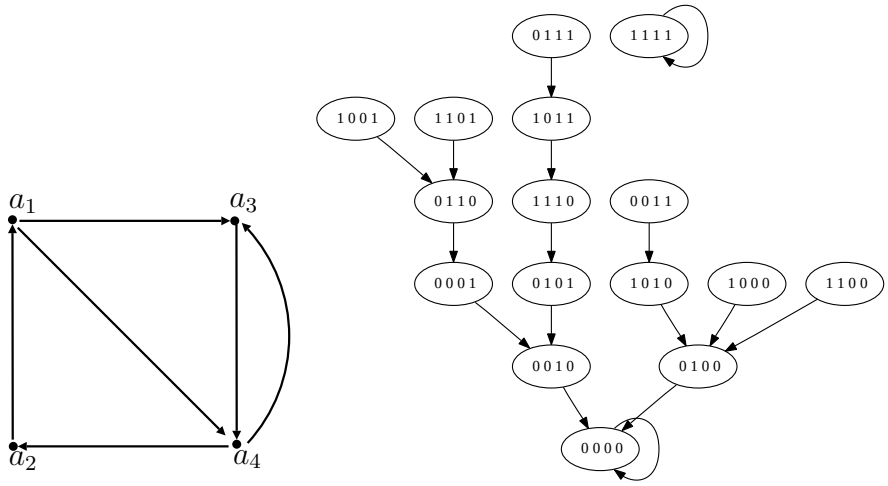
Corolario 2.2.10 *Sea el "Loop Number" de $\mathcal{X}$ igual a t. Sea $p : a \longrightarrow a$ un camino cerrado. Entonces $|p| \in (t)$.*

Demostración. Sea el "Loop Number" de $\mathcal{X}$ igual a t y sea $p : a \longrightarrow a$ un camino cerrado en $\mathcal{X}$. Queremos ver que $|p| \in (t)$. Para esto considere p y pp en el lema 2.2.9. □

El siguiente resultado es el más importante y fue publicado en [2].

Teorema 2.2.11 *El sistema f es un sistema de punto fijo si y solo si el "Loop Number" de todos los componentes fuertemente conexos de $\mathcal{X}$ es 1.*

Ejemplo 2.2.12 *Considere el SDFBM* $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ *donde* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3x_4, x_1, x_4, x_2x_3)$. *El grafo de dependencia* $\mathcal{D}(f)$*, esta representado en la figura 2.10(a). Note que el "Loop*



(a) Grafo de dependencia (b) Estado fase

Figura 2.10: Grafo de dependencia y estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3x_4, x_1, x_4, x_2x_3)$.

Number" de $\mathcal{D}(f)$ *es* 1 *y por el teorema 2.2.11* f *es un sistema de punto fijo el cual esta representado en la figura 2.10(b)*

En el próximo capítulo se presentará un método para la linealización de un sistema dinámico no lineal.

Capítulo 3

Linealización de Sistemas Dinámicos

En este capítulo se discutirán algunas ideas de P.Cull basadas en [5], el cual presenta un método para analizar redes de comunicaciones en sistemas biológicos. Estas redes son usadas para modelar eventos biológicos los cuales son estudiados en distintas áreas de las matemáticas. Una red de comunicación en sistemas biológicos está compuesta de un conjunto de elementos llamados genes, los cuales tiene dos estados, encendido o apagado. En cada instante de tiempo, cada elemento de la red tiene uno de estos dos estados y el próximo estado se puede representar con una función del estado presente de los elementos con el conjunto de entradas externas. Estas entradas externas son procesos de datos o control de información que proceden del exterior de la aplicación. En algunos casos las entradas externas contiene una constante, estas clases de redes son llamadas "autonomous". En [5], P.Cull describe un método para analizar el comportamiento del "autonomous" de una red no lineal dada.

3.1. Linealización de un Sistema Dinámico No Lineal

En [5], P. Cull demostró que los cuerpos finitos son convenientes para describir y analizar elementos de redes de comunicación en sistemas biológicos. Cada elemento de la red tiene dos estados, así que podemos asociar una función binaria a cada elemento en la red. En un cuerpo con 2 elementos y un conjunto de n variables se pueden tomar 2^n valores. Cada

función binaria puede ser representada como un polinomio, de modo que la función se puede representar como un vector de largo 2^n donde n es el número de variables y los elementos del vector son los coeficientes de los 2^n términos del polinomio. Para evaluar la función se toma el producto escalar de este vector con el valor de las variables. Esta representación vectorial de las funciones no es única, ya que las entradas de los vectores dependen del orden de los términos del polinomio. Así que para representar estos vectores tomaremos un orden específico para los 2^n términos del polinomio.

Ejemplo 3.1.1 *Considere la función* $x_1 + x_1x_3$ *la cual se puede representar por el vector* $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ *usando el siguiente orden:* $0, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$. *Puesto que* $x_1 + x_1x_3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_1x_2 + 1 \cdot x_1x_3 + 0 \cdot x_2x_3 + 0 \cdot x_1x_2x_3$, *tenemos un* 0 *en la primera entrada del vector por que la función no tiene términos constantes. En la segunda entrada tenemos un* 1, *por que el coeficiente de* x_1 *es* 1. *En las entradas* $3, 4, 5, 7$ *y* 8 *tenemos* 0 *por que los coeficientes de* x_2, x_3, x_1x_2, x_2x_3 *y* $x_1x_2x_3$ *son iguales a cero y un* 1 *en la entrada* 6 *por que el coeficiente de* x_1x_3 *es 1. Similarmente, usando el siguiente orden:* $x_2x_3, x_1x_2x_3, 0, x_1, x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_2$ *tenemos que la función se puede representar con el vector* $(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0,)$.

Ahora como cada función se puede representar con un vector de largo 2^n, definimos una matriz $\mathcal{A}$ de dimensión $2^n \times 2^n$ que contiene en sus filas las representaciónes en vectores de los 2^n productos de las n funciones calculadas por los elementos de la red. A la matriz de $\mathcal{A}$ se le conoce como la matriz de funciones.

Ejemplo 3.1.2 *Consideramos una red descrita en [5] cuyo primer elemento de la red se puede representar como:* $f_1 = 1 + x_2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2x_3$, *el segundo elemento se puede representar como* $f_2 = 1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2x_3$ *y el tercer elemento se representa como* $f_3 = 1 + x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$. *Existen muchas posibilidades para el número de estados, así que tomaremos el número de estado en el siguiente orden:* 0, x_1, x_2, x_3,x_1x_2,

x_1x_3, x_2x_3, $x_1x_2x_3$. Los 8 posibles productos de la 3 funciones originales y la representación vectorial son las siguientes.

	0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
$f_0 = 1$	1	0	0	0	0	0	0	0
$f_1 = 1 + x_2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2x_3$	1	0	1	0	1	1	0	1
$f_2 = 1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2x_3$	1	0	1	1	1	1	0	1
$f_3 = 1 + x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$	1	1	0	0	1	1	1	1
$f_1f_2 = 1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$	1	0	1	1	1	0	1	1
$f_1f_3 = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2x_3$	1	1	1	0	0	0	0	1
$f_2f_3 = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$	1	1	1	1	0	0	1	1
$f_1f_2f_3 = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_3 + x_1x_2x_3$	1	1	1	1	0	1	1	0

y la matriz de funciones $\mathcal{A}$ es simplemente la matriz que tiene esos 8 vectores en sus filas, es decir

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora P.Cull demuestra que el polinomio característico de $\mathcal{A}$ factoriza como:

$$x^k \left(x^{r_1} + 1\right) \cdots \left(x^{r_l} + 1\right),$$

donde k es el número de estados del "transient" y los r_j son los largos de varios ciclos. Luego por el teorema de Cayley-Hamilton tenemos que cualquier matriz satisface la ecuación

característica, es decir que

$$\mathcal{A}^k \left(\mathcal{A}^{r_1} + I\right) \cdots \left(\mathcal{A}^{r_l} + I\right) = 0.$$

Así que, como la característica es 2 tenemos que

$$\mathcal{A}^k \left(\mathcal{A} + I\right)^{r_1} \cdots \left(\mathcal{A} + I\right)^{r_l} = 0.$$

Luego cualquier polinomio de menor grado que satisface a $\mathcal{A}$ tiene que dividir el polinomio característico de $\mathcal{A}$. Así que tomando la ecuación mínima de $\mathcal{A}$ tenemos que

$$\mathcal{A}^j \left(\mathcal{A} + I\right)^{r_h} \cdots \left(\mathcal{A} + I\right)^{r_g} = 0. \tag{3.1}$$

De modo que en la ecuación mínima, j es la altura del "transient" del estado fase de $\mathcal{A}$ y $r_h, \ldots r_g$ son distintos largos de ciclos del estado fase de $\mathcal{A}$ donde los demás ciclos dividen a uno de los r_i.

Ejemplo 3.1.3 *La ecuación característica de la matriz $\mathcal{A}$ del ejemplo 3.1.2 es* $\det(\mathcal{A}+xI) = x\left(x^4+1\right)\left(x^3+1\right)$*, en este caso la ecuación mínima es igual a la ecuación característica:* $\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^4+I\right)\left(\mathcal{A}^3+I\right) = 0$*. Por consiguiente el "transient" es de largo* 1 *y existen ciclos de largo* 4 *y de largo* 3*.*

3.2. Inclusión de un Sistema Dinámico No Lineal a uno Lineal

En esta sección se presentarán resultados obtenidos utilizando el método de linealización de un sistema dinámico descrito en [5]. Se demostrará que el estado fase del SDFBM está contenido en el estado fase del sistema lineal resultante. Una consecuencia directa de este resultado es que si el sistema lineal es uno de punto fijo entonces el SDFBM también es de punto fijo. Antes de presentar los resultados considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1 *Considere el SDFBM* $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ *donde* $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ *con el siguiente orden:* $0, x_1, x_2, x_1x_2$. *Entonces el sistema lineal resultante es*

	0	x_1	x_2	x_1x_2
$f_0 = 0$	0	0	0	0
$f_1 = x_2$	0	0	1	0
$f_2 = x_1$	0	1	0	0
$f_1f_2 = x_1x_2$	0	0	0	1

es decir que, la matriz de funciones es

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

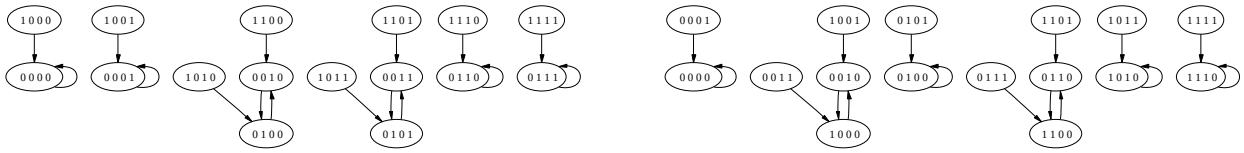
y el SDFL es $(\mathbb{Z}_2^4, L_1)$ *donde* $L_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_3, x_2, x_4)$. *Ahora tomando el siguiente orden:* $x_1, x_1x_2, x_2, 0$ *tenemos que,*

	x_1	x_1x_2	x_2	0
$f_1 = x_2$	0	0	1	0
$f_1f_2 = x_1x_2$	0	1	0	0
$f_2 = x1$	1	0	0	0
$f_0 = 0$	0	0	0	0

así que la matriz de funciones es

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el SDFL es $(\mathbb{Z}_2^4, L_2)$ *donde* $L_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_2, x_1, 0)$. *Cuyos estados fases están representados en las figuras 3.1(a) y 3.1(b). Ahora note que* $\mathcal{S}(L_1)$ *y* $S(L_2)$ *son isomorfos por*



(a) $\mathcal{S}(L_1)$ (b) $\mathcal{S}(L_2)$

Figura 3.1: Estados fases de $\mathcal{S}(L_1)$ y $\mathcal{S}(L_2)$

la construcción de la matriz de funciones.

En general, si $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ es un SDFBM la matriz de funciones $2^n \times 2^n$ se puede pueden construir con

$$y_i = \alpha_i x_1^{\epsilon_{i1}} x_2^{\epsilon_{i2}} \cdots x_n^{\epsilon_{in}} \tag{3.2}$$

$$g_i = \alpha_i f_1^{\epsilon_{i1}} f_2^{\epsilon_{i2}} \cdots f_n^{\epsilon_{in}} \tag{3.3}$$

donde y_i genera el orden deseado, es decir y_i son los posibles productos de las n variables y g_i son los 2^n posibles productos de las funciones originales con $1 \leq i \leq 2^n$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$ y $\epsilon_{ij} \in \{0, 1\}$. Así que la matriz de funciones $\mathcal{A}$, es:

$$\mathcal{A} = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha_i = 0 \text{ o } g_i \neq y_j \\ 1, & \text{si } \alpha_i = 1 \text{ y } g_i = y_j \end{cases}$$

donde y_j, g_i están definidos en 3.2 y 3.3. De modo que el sistema lineal resultante $L : \mathbb{Z}_2^{2^n} \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{2^n}$ es

$$L((x_1, x_2, \ldots, x_{2^n})) = \left[\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2^n} \end{pmatrix} \right]^T .$$

Ejemplo 3.2.2 *Consideremos el SDFBM* $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ *donde* $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1)$*, con el siguiente orden:* x_1*,* 0*,* x_2*,* x_1x_2*. Entonces*

		y_i			
		x_1	0	x_2	x_1x_2
g_i	$f_1 = x_1x_2$	0	0	0	1
	$f_0 = 0$	0	0	0	0
	$f_2 = x_1$	1	0	0	0
	$f_1f_2 = x_1x_2$	0	0	0	1

luego,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema lineal resultante es $(\mathbb{Z}_2^4, L)$ *con* $L = (x_4, 0, x_1, x_4) : \mathbb{Z}_2^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^4$*.*

Observación 3.2.3 $\mathcal{S}(L)$ *es invariante respecto al orden. Porque al cambiar el orden de* y_i *y* g_i *definidos en 3.2 y 3.3 respectivamente de la matriz de funciones* $\mathcal{A}$*, obtenemos una matriz* $\mathcal{B}$ *similar a* $\mathcal{A}$*. Es decir que el estado fase del sistema lineal representado por* $\mathcal{A}$ *es isomorfo al estado fase del sistema lineal representado por* $\mathcal{B}$*.*

Ahora el siguiente resultado establece la inclusión del estado fase del SDFBM al estado fase del sistema lineal resultante.

Teorema 3.2.4 *Si* $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ *es un sistema monomial y* $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ *es el sistema lineal resultante. Entonces* $\mathcal{S}(f) \trianglelefteq \mathcal{S}(L)$*.*

Demostración. Sean $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un sistema dinámico monomial y $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ el sistema lineal resultante donde

$$L\left((x_1, x_2, \ldots, x_{2^n})\right) = \left[\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2^n} \end{pmatrix}\right]^T$$

y $\mathcal{A}$ es la matriz de funciones. Queremos ver que $\mathcal{S}(f)$ es un subgrafo de $\mathcal{S}(L)$ bajo isomorfismo, esto es que hay una inclusión $\phi : \mathcal{S}(f) \hookrightarrow \mathcal{S}(L)$ que preserva ejes. Para esto considere la función $\phi : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{2^n}$ definida por

$$\phi\left((x_1, x_2, \ldots x_n)\right) = (y_1, y_2, \ldots, y_{2^n})$$

donde $y_i = \alpha_i x_1^{\epsilon_{i1}} x_2^{\epsilon_{i2}} \cdots x_n^{\epsilon_{in}}$ para $1 \leq i \leq 2^n$ con $\alpha_i \in \{0, 1\}$ y $\epsilon_{ij} \in \{0, 1\}$ fijos dependiendo el orden tomado. Primero veremos que ϕ esta bien definida, para esto sean $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en $\mathbb{Z}_2^n$ tal que $a = b$, es decir que $a_j = b_j$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces $\phi(a) = \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_{2^n})$ donde $y_i = \alpha_i a_1^{\epsilon_{i1}} a_2^{\epsilon_{i2}} \cdots a_n^{\epsilon_{in}}$. Ahora como $a_j = b_j$ para $1 \leq j \leq n$ tenemos que $y_i = \alpha_i a_1^{\epsilon_{i1}} a_2^{\epsilon_{i2}} \cdots a_n^{\epsilon_{in}} = \alpha_i b_1^{\epsilon_{i1}} b_2^{\epsilon_{i2}} \cdots b_n^{\epsilon_{in}} = y_i'$, O sea que $\phi(a) = \phi\left((a_1, a_2, \ldots, a_n)\right) = (y_1, y_2, \ldots, y_{2^n}) = (y_1', y_2', \ldots, y_{2^n}') = \phi\left((b_1, b_2, \ldots, b_n)\right) = \phi(b)$. Por lo tanto ϕ esta bien definida. Ahora para ver que existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de $\mathcal{S}(f)$ y un subconjunto de $\mathcal{S}(L)$, sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ en $\mathcal{S}(f)$, y supongamos que $\phi(x) = \phi(z)$. Entonces

$$\phi(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1', y_2', \ldots, y_n') = \phi(z)$$

donde $y_i = \alpha_i x_1^{\epsilon_{i1}} x_2^{\epsilon_{i2}} \cdots x_n^{\epsilon_{in}}$ y $y_i' = \alpha_i z_1^{\epsilon_{i1}} z_2^{\epsilon_{i2}} \cdots z_n^{\epsilon_{in}}$, O sea que $y_i = \alpha_i x_1^{\epsilon_{i1}} x_2^{\epsilon_{i2}} \cdots x_n^{\epsilon_{in}} = \alpha_i z_1^{\epsilon_{i1}} z_2^{\epsilon_{i2}} \cdots z_n^{\epsilon_{in}} = y_i'$, pero como todos los ordenes son los posibles productos de las n variables, en particular tenemos que $x_j = z_j$ para $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto $x = z$, es decir que existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de $\mathcal{S}(f)$ y un subconjunto de $S(L)$. Ahora

para ver que los ejes son preservados sean $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_2)$ en $\mathcal{S}(f)$ y supongamos que $a \longrightarrow b$ en $\mathcal{S}(f)$, esto es que $f(a) = b$, o sea que

$$\begin{aligned} f((a_1, a_2, \ldots, a_n)) &= (f_1((a_1, a_2, \ldots, a_n)), f_2((a_1, a_2, \ldots, a_n)), \ldots, f_n((a_1, a_2, \ldots, a_n))) \\ &= (b_1, b_2, \ldots, b_n), \end{aligned}$$

entonces debemos demostrar que $L(\phi(a)) = \phi(b)$. Para esto note que

$$L(\phi(a)) = L(\phi((a_1, a_2, \ldots, a_n))) = \left[\mathcal{A}\phi((a_1, a_2, \ldots, a_n))^T\right]^T = \left[\mathcal{A}\phi(a)^T\right]^T.$$

Pero como $\mathcal{A}\phi(a)^T$ es un vector que contiene los 2^n posibles productos de las funciones originales tenemos que

$$\begin{aligned} L(\phi(a)) &= \left(\mathcal{A}\phi(a)^T\right)^T \\ &= (\alpha_1 f_1^{\epsilon_{11}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) f_2^{\epsilon_{12}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ldots f_n^{\epsilon_{1n}}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ &\quad \alpha_2 f_1^{\epsilon_{21}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) f_2^{\epsilon_{22}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ldots f_n^{\epsilon_{2n}}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, \\ &\quad \alpha_{2^n} f_1^{\epsilon_{2^n 1}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) f_2^{\epsilon_{2^n 2}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ldots f_n^{\epsilon_{2^n n}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \\ &= (\alpha_1 b_1^{\epsilon_{11}} b_2^{\epsilon_{12}} \cdots b_n^{\epsilon_{1n}}, \alpha_2 b_1^{\epsilon_{21}} b_2^{\epsilon_{22}} \cdots b_n^{\epsilon_{2n}}, \ldots, \alpha_{2^n} b_1^{\epsilon_{2^n 1}} b_2^{\epsilon_{2^n 2}} \cdots b_n^{\epsilon_{2^n n}}) \\ &= (y_1, y_2, \ldots, y_{2^n}) \\ &= \phi(b) \end{aligned}$$

donde $y_i = \alpha_i b_1^{\epsilon_{i1}} b_2^{\epsilon_{i2}} \cdots b_n^{\epsilon_{in}}$ para $1 \leq i \leq 2^n$ con $\alpha_i \in \{0, 1\}$y $\epsilon_{ij} \in \{0, 1\}$ fijos dependiendo el orden tomado. Por lo tanto los ejes son preservados y por consiguiente $\mathcal{S}(f)$ es un subgrafo de $\mathcal{S}(L)$ bajo isomorfismo. □

El diagrama 3.2 ilustra la inclusión del teorema 3.2.4.

Ejemplo 3.2.5 *Considere el SDFBM del ejemplo 3.2.1,* $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ *donde* $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ *con el siguiente orden* $0, x_1, x_2, x_1x_2$. *Cuyo sistema lineal resultante es* $(\mathbb{Z}_2^4, L)$ *con* $L = (0, x_3, x_2, x_4)$:

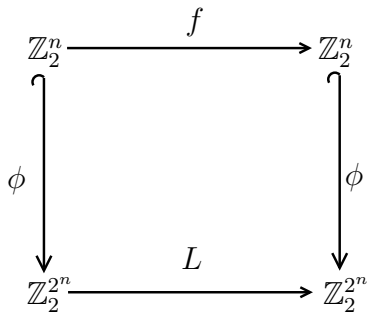
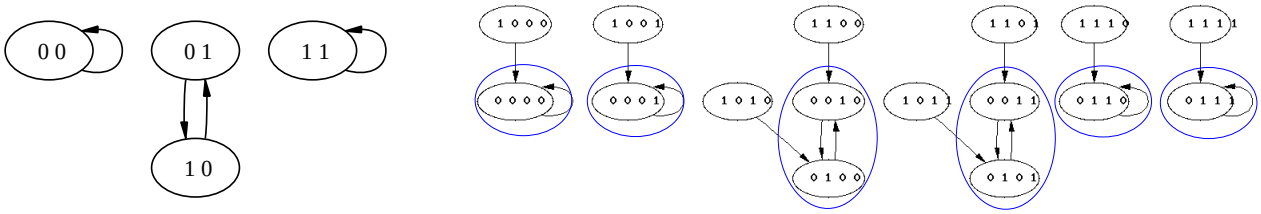


Figura 3.2: Inclusión del SDFBM al sistema lineal resultante.

$\mathbb{Z}_2^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^4$. *Los estados fases de* $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ *y* $(\mathbb{Z}_2^4, L)$ *están representados en la figura 3.3(a) y 3.3(b). Note que existen dos copias del* $\mathcal{S}(f)$ *en el* $\mathcal{S}(L)$.



(a) $\mathcal{S}(f)$ (b) $\mathcal{S}(L)$

Figura 3.3: Inclusión de un SDFBM a un sistema lineal resultante.

Corolario 3.2.6 *Sea* $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ *un sistema monomial y* $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ *el sistema lineal resultante. Si existe un ciclo* γ, $|\gamma| > 1$ *en* $\mathcal{S}(f)$ *entonces existe un ciclo* $\tilde{\gamma}$, $|\tilde{\gamma}| > 1$ *en* $\mathcal{S}(L)$.

Demostración. Sean $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un sistema dinámico monomial y $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ el sistema lineal resultante. Supongamos que existe un ciclo γ, $|\gamma| > 1$ en $\mathcal{S}(f)$. Queremos ver que existe un ciclo $\tilde{\gamma}$, $|\tilde{\gamma}| > 1$ en $\mathcal{S}(L)$. Para esto note que si existe un ciclo γ, $|\gamma| > 1$ en $\mathcal{S}(f)$, entonces por definición tenemos que $f^l(a) = f^0(a) = a$ para algún $a \in \mathbb{Z}_2^n$ y $l = |\gamma|$. Ahora por el teorema 3.2.4 tenemos que $\mathcal{S}(f)$ es un subgrafo bajo isomorfismo de $\mathcal{S}(L)$ y que $L^l(\phi(a)) = L^0(\phi(a)) = \phi(a)$, donde ϕ es la función definida en el teorema 3.2.4. Por lo tanto existe un ciclo $\tilde{\gamma}$, $|\tilde{\gamma}| > 1$ en $\mathcal{S}(L)$. □

Corolario 3.2.7 *Sea* $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ *un sistema monomial y* $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ *el sistema lineal resultante. Si* $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ *es un sistema de punto fijo entonces* $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ *es un sistema de punto fijo.*

Demostración. Sea $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un sistema dinámico monomial, $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ el sistema lineal resultante y supongamos que $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ es uno de punto fijo. Queremos ver que $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ es un sistema de punto fijo. Por el corolario 3.2.6 tenemos que si existe un ciclo γ, $|\gamma| > 1$ en $\mathcal{S}(f)$ entonces existe un ciclo $\tilde{\gamma}$,$|\tilde{\gamma}| > 1$ en $\mathcal{S}(L)$. Entonces tomando el contrapositivo del corolario 3.2.6 tenemos el resultado deseado. □

Con esta inclusión obtenemos una cota para el sistema monomial de punto fijo cuando el sistema lineal resultante es uno de punto fijo.

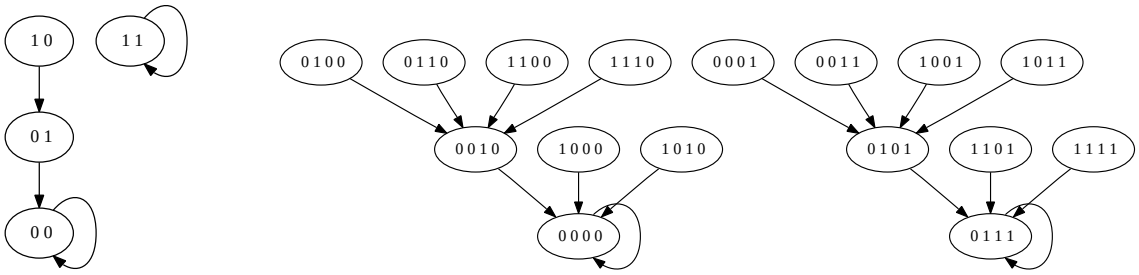
Teorema 3.2.8 *Sea* $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ *un SDFBM de punto fijo y supongamos que el sistema lineal resultante* $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ *es un sistema de punto fijo. Entonces el "transient"* $\mathcal{S}(f)$ *es menor o igual que el "transient" de* $\mathcal{S}(L)$.

Demostración. Sea $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un SDFBM de punto fijo y supongamos que $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ es un sistema de punto fijo. Queremos ver que el "transient" mayor de $\mathcal{S}(f)$ es menor o igual que el "transient" de $\mathcal{S}(L)$. Para esto note que por el teorema 2.1.6 el $\mathcal{S}(L)$ es el producto de ciclos y un árbol. O sea que $\mathcal{S}(L)$ esta formado por el producto de ciclos triviales con un árbol. Ahora por el teorema 3.2.6 $\mathcal{S}(f)$ es un subgrafo bajo isomorfismo de $\mathcal{S}(L)$, es decir que $\mathcal{S}(f)$ esta contenido en el $\mathcal{S}(L)$ y que se preservan los ejes. Por consiguiente el "transient" mayor de $\mathcal{S}(f)$ es menor o igual que el "transient" de $\mathcal{S}(L)$ □

Ejemplo 3.2.9 *Considere el SDFBM* $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ *donde* $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1)$. *Usando el siguiente orden:* 0, x_1, x_2, x_1x_2 *tenemos que la matriz de funciones es*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que $L = (0, x_4, x_2, x_4) : \mathbb{Z}_2^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^4$. *Ahora calculando el polinomio característico de* $\mathcal{A}$ *tenemos que* $\det(A + xI) = x^3(x+1)$ *y el polinomio mínimo es* $x^2(x+1)$. *Así que el "transient" de* $\mathcal{S}(L)$ *es* 2 *y aplicando el teorema 3.2.8 tenemos que el "transient" de* $\mathcal{S}(f)$ *es menor o igual a* 2*; lo cual se puede observar en la figura 3.4.*



(a) $\mathcal{S}(f)$ (b) $\mathcal{S}(L)$

Figura 3.4: Estado fase de $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ donde $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1)$ y el sistema lineal resultante.

En el próximo capítulo se discutirán las operaciones de puente el cual genera un sistema dinámico finito no lineal.

Capítulo 4

Operaciones de Puente

En este capítulo se presentará la noción del k-puente entre dos grafos fuertemente conexo. El grafo que se origina, $\mathcal{X}_f$, define un sistema dinámico $(\mathbb{Z}_2^n, f)$, no lineal, sobre el cuerpo con dos elemento $\mathbb{Z}_2$. Se demostrará que el k-puente de dos grafos dirigidos es invariante con respecto a los vértices donde el puente ocurre. Luego usaremos el "Loop Number" que aplicado a $\mathcal{X}_f$ nos ayuda a proveer condiciones necesarias y suficientes para que f sea un sistema de punto fijo. También se caracterizarán algunas familias de k-puente usando el método de linealización descrito en el capítulo 3.

4.1. Definición y Ejemplos

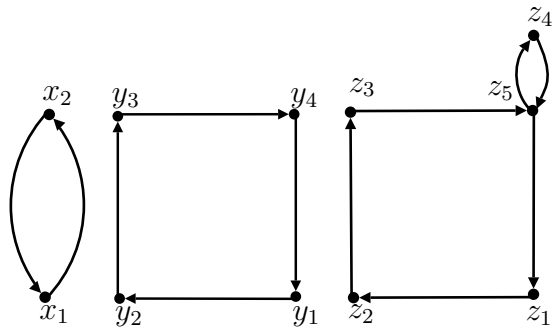
Comenzamos esta sección con la definición del k-puente entre dos grafos fuertemente conexos el cual genera un sistema dinámico finito no lineal.

Definición 4.1.1 *Sean* $\mathcal{X}_f = \{V_f, E_f\}$ *y* $\mathcal{X}_g = \{V_g, E_g\}$ *dos grafos fuertemente conexos donde* $V_f = \{a_1, a_2, \ldots a_s\}$, $V_g = \{b_1, b_2, \ldots b_{\hat{s}}\}$ *son el conjunto de vértices de* $\mathcal{X}_f$ *y* $\mathcal{X}_g$ *respectivamente y* $E_f = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$, $E_g = \{w_1, w_2, \ldots, w_{\hat{r}}\}$ *son el conjunto de ejes de* $\mathcal{X}_f$ *y* $\mathcal{X}_g$ *respectivamente. Entonces definimos el k-puente* $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g = \left\{V_{f\overset{k}{\vee}g}, E_{f\overset{k}{\vee}g}\right\}$ *donde* $V_{f\overset{k}{\vee}g} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots, a_s, b_{k+2}, b_{k+3}, \ldots, b_{\hat{s}}\}$ *y* $E_{f\overset{k}{\vee}g} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_{\tilde{r}}\}$ *son el*

conjunto de vértices y el conjunto de ejes de $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ *respectivamente con*

$$\tilde{e}_l = \begin{cases} (a_i, a_j), & si\ (a_i, a_j) \in \mathcal{X}_f\ y\ i, j > k \\ (b_i, b_j), & si\ (b_i, b_j) \in \mathcal{X}_g\ y\ i, j > k \\ (c_i, c_j), & si\ (a_i, a_j) \in \mathcal{X}_f\ y\ (b_i, b_j) \in \mathcal{X}_g \\ (c_i, a_j), & si\ (a_i, a_j) \in \mathcal{X}_f \\ (a_j, c_i), & si\ (a_j, a_i) \in \mathcal{X}_f \\ (c_i, b_j), & si\ (b_i, b_j) \in \mathcal{X}_g \\ (b_j, c_i), & si\ (b_j, b_i) \in \mathcal{X}_g \end{cases} .$$

Ejemplo 4.1.2 *Considere el* 2*-ágono de la figura 4.1(a) que define el sistema* $(\mathbb{Z}_2^2, f)$ *donde* $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ *y el* 4*-ágono de la figura 4.1(b) que define el sistema* $(\mathbb{Z}_2^4, g)$ *donde* $g(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2, y_3, y_4, y_1)$*. El* 0*-puente está dado en la figura 4.1(c) que define el SDF* $(\mathbb{Z}_2^5, h)$ *donde* $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_5, x_5, x_1 x_4)$*.*



(a) $\mathcal{X}_f$ (b) $\mathcal{X}_g$ (c) $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_f \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_g$

Figura 4.1: 0-puente de un 2-ágono y un 4-ágono

Nota 4.1.3 *Usaremos la terminología de la* k*-cara para referirnos al* k*-puente cuando* $k > 0$*. Ya que el* 0*-puente se hace entre vértices y el* k*-puente con* $k > 0$ *se hace entre los ejes de los grafos.*

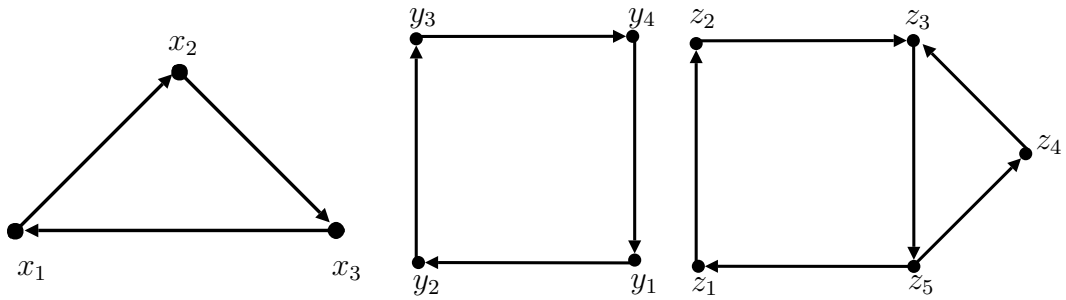
Observación 4.1.4 *El grafo generado por el k-puente de dos grafos es el grafo de dependencia dado en la definición 2.2.2 del cual se puede obtener la estructura cíclica del sistema dinámico monomial.*

Nuestro primer resultado establece que el k-puente de dos grafos fuertemente conexos es un grafo fuertemente conexo.

Lema 4.1.5 *Sean $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos y sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un grafo fuertemente conexo.*

Demostración. Sean $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos y sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Queremos ver que $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un grafo fuertemente conexo. Para esto, sean a y b vértices en $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ y sea c_i un vértice arbitrario en el k-puente de $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$. Si a y b son ambos vértices en $\mathcal{X}_f$ o en $\mathcal{X}_g$ no hay nada que probar. Así que supongamos que a es un vértice en $\mathcal{X}_f$ y que b es un vértice en $\mathcal{X}_g$. Ahora como $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ son grafos fuertemente conexos y c_i es un vértice en $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$, existen caminos $p : a \longrightarrow c_i$ y $q : c_i \longrightarrow b$ de $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ respectivamente. Entonces $r = qp$ es un camino desde a hasta b. Por tanto $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un grafo fuertemente conexo. □

Ejemplo 4.1.6 *Sean $\mathcal{X}_3$ un 3-ágono y $\mathcal{X}_4$ un 4-ágono los cuales están representados en las figura 4.2(a) y 4.2(b). $\mathcal{X}_3 \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_4$ ilustrado en la figura 4.2(c) define el sistema $(\mathbb{Z}_2^5, f)$ donde*



(a) $\mathcal{X}_3$ (b) $\mathcal{X}_4$ (c) $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_3 \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_4$

Figura 4.2: 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono

$f = (x_2, x_3, x_5, x_3, x_1x_4) : \mathbb{Z}_2^5 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^5$ el cual es de punto fijo como lo muestra la figura 4.3.

Ahora veremos que la dinámica es invariante de la k-cara donde el k-puente se hizo.

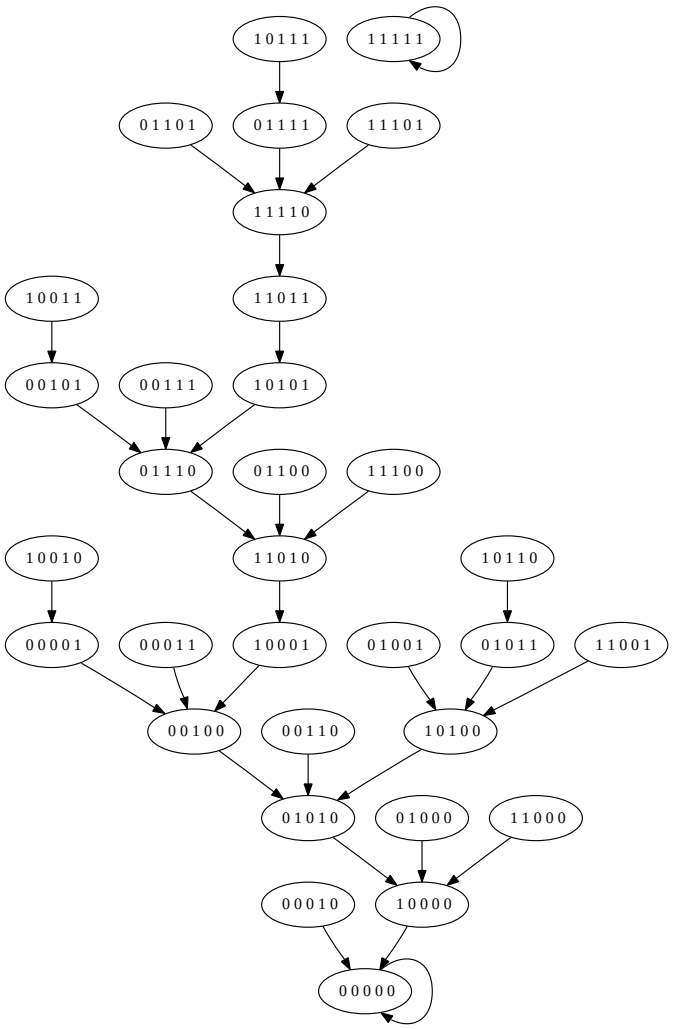


Figura 4.3: Estado fase de 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono.

4.2. Operaciones de Puentes

En esta sección veremos que la dinámica de un sistema $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ tal que $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_g \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_h$ es invariante de la k-cara donde se crea el k-puente. Primero veamos el próximo ejemplo.

Ejemplo 4.2.1 *En la figura 4.2(c) tenemos* $\mathcal{X}_3 \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_4$ *define el sistema dinámico* $(\mathbb{Z}_2^5, f)$ *donde* $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_5, x_3, x_1x_4)$ *cuyo estado fase esta ilustrado en la figura 4.3. Ahora si intercambiamos el sitio donde se hace el k-puente de* $\mathcal{X}_3 \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_4$ *como se muestra en la figura 4.4 obtenemos el sistema dinámico* $(\mathbb{Z}_2^5, f)$ *donde* $g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (y_3y_5, y_1, y_4, y_2, y_2)$. *El*

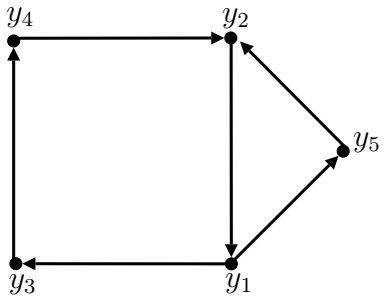


Figura 4.4: 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono con vértices permutados.

estado fase de g está representado en la figura 4.5. Note que los estados fases de las figuras 4.3 y 4.5 son isomorfos.

Ahora el próximo resultado propone que al aplicar una permutación σ del grupo simétrico, S_n, a un SDFBM los estados fases son isomorfos.

Teorema 4.2.2 *Sean* $\sigma \in \mathrm{S}_n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ *tal que* $f_i = \alpha_i x_1^{\varepsilon_{1i}} \ldots x_n^{\varepsilon_{ni}}$ *donde* $\varepsilon_{ji} = \{0, 1\}$ *y* $\alpha_i = \{0, 1\}$ *y sea* $K = \{f : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n | \ (\mathbb{Z}_2^n, f)$ *es SDFBM*$\}$. *Entonces* $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ *donde* $\phi_\sigma : K \longrightarrow K$ *es un mapa definido por*

$$\phi_\sigma(f) = \left(f_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right), \ldots, f_{\sigma^{-1}(n)}\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)\right).$$

Demostración. Sean $\sigma \in \mathrm{S}_n$ y $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ tal que $f_i = \alpha_i x_1^{\varepsilon_{1i}} \ldots x_n^{\varepsilon_{ni}}$ donde $\varepsilon_{ji} = \{0, 1\}$ y $\alpha_i = \{0, 1\}$. Queremos ver que $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$. Primero veremos que el mapa

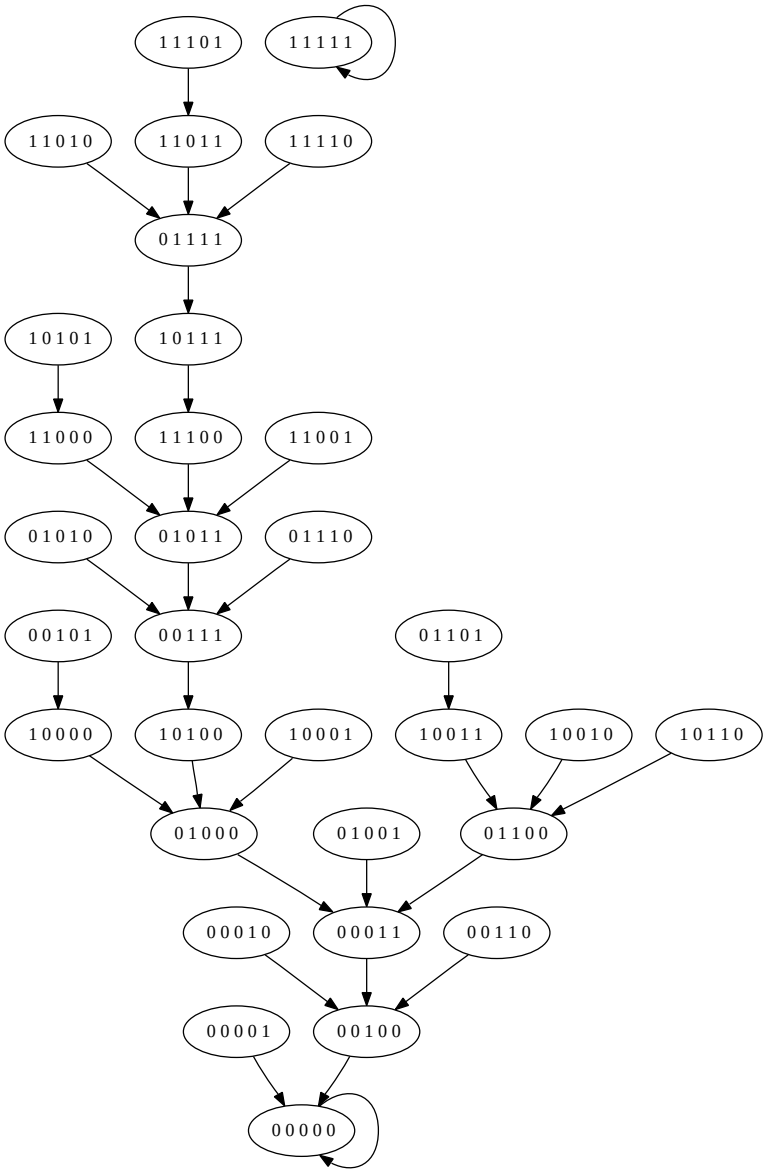


Figura 4.5: Estado fase de 1-puente de un 3-ágono y un 4-ágono con vértices permutados.

ϕ_σ está bien definido y luego que existe una correspondencia uno a uno entre los vértices y que los ejes son preservados. Para esto, sean $f, g \in K$ y supongamos que $f = g$, o sea que $f_i = g_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_\sigma(f) &= \left(f_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right), \ldots, f_{\sigma^{-1}(n)}\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)\right) \\ &= \left(g_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right), \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)}\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)\right) \\ &= \phi_\sigma(g).\end{aligned}$$

Por consiguiente ϕ_σ esta bien definida. Ahora para ver que existe una correspondencia uno a uno entre los vértices considere el mapa $\psi_\sigma : \mathcal{S}(f) \longrightarrow \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ definido por $\psi_\sigma((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = (a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)})$. Note que ψ_σ es un mapa uno a uno. Si $\psi_\sigma((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = \psi_\sigma((b_1, b_2, \ldots, b_n))$, entonces $\left(a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)}\right) = \left(b_{\sigma^{-1}(1)}, b_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, b_{\sigma^{-1}(n)}\right)$ y como $(a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)})$, $\left(b_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, b_{\sigma^{-1}(n)}\right) \in \mathbb{Z}_2^n$ tenemos que $a_{\sigma^{-1}(i)} = b_{\sigma^{-1}(i)}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Ahora como σ^{-1} es una biyección tenemos que $\sigma^{-1}(i) = j$ para $j = 1, \ldots, n$; así que $a_j = b_j$. Por tanto existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de $\mathcal{S}(f)$ y $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$. Ahora para ver que los ejes son preservados, supongamos que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \longrightarrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en $\mathcal{S}(f)$. Entonces por definición del estado fase tenemos que

$$f((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = (f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Por consiguiente

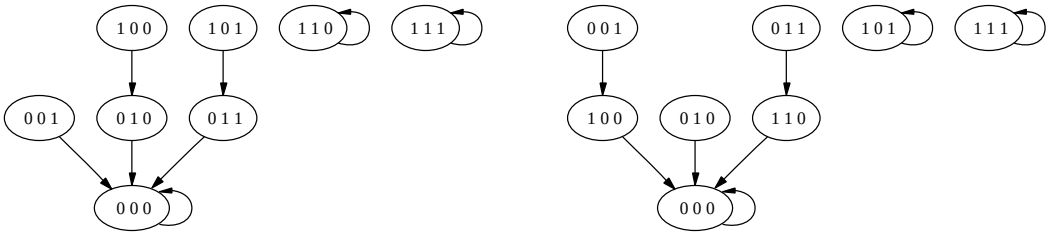
$$\begin{aligned}\phi_\sigma(\psi_\sigma(a_1, \ldots, a_n)) &= \phi_\sigma\left(\left(a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)}\right)\right) \\ &= \left(f_{\sigma^{-1}(1)}\left(a_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}, \ldots, a_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}\right), \ldots, f_{\sigma^{-1}(n)}\left(a_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}, \ldots, a_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}\right)\right) \\ &= \left(f_{\sigma^{-1}(1)}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{\sigma^{-1}(n)}(a_1, \ldots, a_n)\right) \\ &= \left(b_{\sigma^{-1}(1)}, b_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, b_{\sigma^{-1}(n)}\right) \\ &= \psi_\sigma((b_1, b_2, \ldots, b_n)).\end{aligned}$$

Esto implica que $\psi_\sigma((a_1,\ldots,a_n)) \longrightarrow \psi_\sigma((b_1,b_2,\ldots,b_n))$ en $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$. Por tanto el estado fase de f es isomorfo al estado fase de $\phi_\sigma(f)$. □

Ejemplo 4.2.3 *Considere el SDFBM* $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ *donde* $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2, x_1, x_1x_3)$ *y sea* $\sigma = (2\ 1\ 3) \in \mathcal{S}_3$. *Entonces por el mapa* ϕ_σ *del teorema 4.2.2 tenemos que*

$$\begin{aligned}\phi_\sigma(f) &= \left(f_{\sigma^{-1}(1)}\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}\right), f_{\sigma^{-1}(2)}\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}\right), f_{\sigma^{-1}(3)}\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}\right)\right)\\ &= \left(f_2\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}\right), f_3\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}\right), f_1\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}\right)\right)\\ &= (x_3, x_3x_2, x_3x_1)\end{aligned}$$

y por el teorema 4.2.2 tenemos que $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ *los cuales están representados en la figura 4.6. Por ejemplo en la figura 4.6(a) y 4.6(b) se puede observar que* $\psi_\sigma((1,0,0)) = (0,0,1)$, *o sea que el vértice* $(1,0,0)$ *en* $\mathcal{S}(f)$ *corresponde al vértice* $(0,0,1)$ *en* $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ *y como* $(1,0,0) \longrightarrow (0,1,0)$ *entonces* $\phi_\sigma(f)(\psi_\sigma(1,0,0)) = \phi_\sigma(f)((0,0,1)) = (1,0,0) = \psi_\sigma((0,1,0))$, *o sea* $\psi_\sigma((1,0,0)) \longrightarrow \psi_\sigma((0,1,0))$.



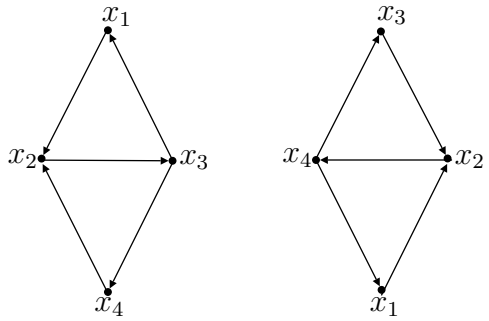
(a) $\mathcal{S}(f)$ (b) $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$

Figura 4.6: Estado fase de $\mathcal{S}(f)$ y $\mathcal{S}(\phi_\sigma(f))$ del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2, x_1, x_1x_3)$

Ahora al cambiar la k-cara donde se realiza el k-puente es equivalente a permutar los vértices. Que es equivalente a aplicar una permutación del grupo simétrico a los vértices. De modo que aplicando el teorema 4.2.2 tenemos que el estado fase de la función que tiene el k-puente es invariante.

Corolario 4.2.4 *Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces el estado fase de la función h tal que $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es invariante respecto al k-puente.*

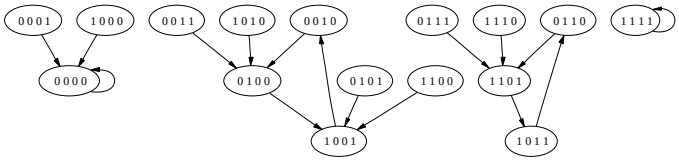
Ejemplo 4.2.5 *Considere el 1-puente de dos $3-$ágonos como se muestra en la figura 4.7(a) y 4.7(b). El 1-puente ilustrado en la figura 4.7(a) define el sistema dinámico $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde*



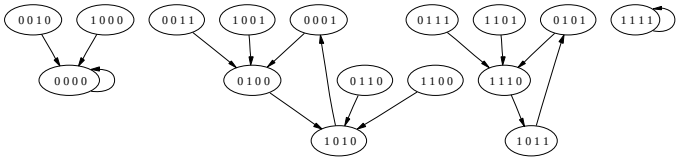
(a) (b)

Figura 4.7: 1-puente de dos 3-ágonos

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_1x_4, x_2)$ y el 1-puente ilustrado en la figura 4.7(b) define el sistema dinámico $(\mathbb{Z}_2^4, g)$ donde $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_4, x_2, x_1x_3) : \mathbb{Z}_2^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^4$. Entonces $\mathcal{S}(f) \cong \mathcal{S}(g)$ como lo muestra la figura 4.8.



(a) $\mathcal{S}(f)$



(b) $\mathcal{S}(g)$

Figura 4.8: Estados fases de $\mathcal{S}(f)$ y $\mathcal{S}(g)$

En la próxima sección se establecerá cuando un sistema dinámico generado por el k-puente es un sistema de punto fijo.

4.3. Sistema Dinámico Finito de Punto Fijo y Operaciones de Puente

En esta sección se establecerán condiciones necesarias y suficientes para que el k-puente de dos grafos fuertemente conexos sean un sistema de punto fijo. El siguiente resultado provee dicho criterio.

Teorema 4.3.1 *Sean $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos con n y m vértices respectivamente tal que* $\gcd(n,m)=1$. *Si existe un camino $p : a \longrightarrow a$ en $\mathcal{X}_f$ y un camino $q : b \longrightarrow b$ en $\mathcal{X}_g$ tal que $|p| = n$ y $|q| = m$. Entonces $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un sistema de punto fijo.*

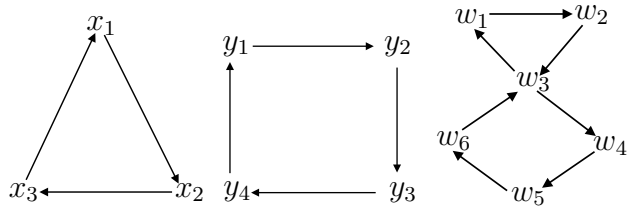
Demostración. Sean $\mathcal{X}_f$ y $\mathcal{X}_g$ dos grafos fuertemente conexos con n y m vértices respectivamente tal que $(n,m)=1$ y supongamos que $\mathcal{L}(\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g) = t$ y que existe un camino $p : a \longrightarrow a$ en $\mathcal{X}_f$ y un camino $q : b \longrightarrow b$ en $\mathcal{X}_g$ tal que $|p| = n$ y $|q| = m$. Queremos ver que $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un sistema de punto fijo. Por el lema 4.1.5 $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un grafo fuertemente conexo, así que el $\mathcal{L}(\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g)$ es invariante por el lema 2.2.8. Ahora por el corolario 4.2.4 el $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es invariante de donde se hizo el k-puente. Así que sean $a_0, a_1, \ldots, a_k$ vértices en el k-puente tal que $a_i = a \vee b$ para $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Esto es que existen caminos $p : a_i \longrightarrow a_i$ y $q : a_i \longrightarrow a_i$ tal que p se mueve por $\mathcal{X}_f$ y q se mueve por $\mathcal{X}_g$ con $|p| = n$, $|q| = m$. Entonces por hipótesis $(|p|, |q|) = 1$, o sea que $1 = |p|x + |q|y$ donde $x, y \in \mathbb{Z}$. Ahora por el lema 2.2.9 tenemos que $|p| - |q| = tl$ donde $l \in \mathbb{Z}$, es decir $|p| = tl + |q|$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} 1 &= (tl + |q|)\, x + |q| y \\ 1 &= t\,(lx) + |q|\,(x + y) \end{aligned}$$

esto implica que $1 = (t, |q|)$ y por el corolario 2.2.10, $|q| \in (t)$, así que $t = 1$. Por consiguiente $\mathcal{X}_f \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_g$ es un sistema de punto fijo por el corolario 2.2.11. □

Corolario 4.3.2 *Sean $\mathcal{X}_n$ un n-ágono y $\mathcal{X}_m$ un m-ágono tal que* $\gcd(n,m)=1$ *y sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Entonces $\mathcal{X}_n \overset{k}{\vee} \mathcal{X}_m$ es un sistema de puntos fijo.*

Ejemplo 4.3.3 *Considere el* 3*-ágono de la figura 4.9(a) para el sistema dinámico* $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ *donde* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$ *y el* 4*-ágono de la figura 4.9(b) para el sistema dinámico* $(\mathbb{Z}_2^3, g)$ *donde* $g(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2, y_3, y_4, y_1)$*. Entonces el* 0*-puente esta dado en la figura 4.9(c) para el sistema dinámico* $(\mathbb{Z}_2^6, h)$ *donde* $h(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) = (w_2, w_3, w_1w_4, w_5, w_6, w_3)$*. Ahora aplicando el corolario 4.3.2 tenemos que* $(\mathbb{Z}_2^6, h)$ *es un sistema de punto fijo.*



(a) $\mathcal{X}_f$ (b) $\mathcal{X}_g$ (c) $\mathcal{X}_f \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_g$

Figura 4.9: 0-puente de un 3-ágono y un 4-ágono

4.4. Caracterización de Sistema Dinámico Generado por k-puentes

En esta sección se caracterizaran algunas familias de sistemas dinámicos definidos por $\mathcal{X}_1 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_n$ y $\mathcal{X}_2 \overset{0,1}{\vee} \mathcal{X}_n$ donde $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_n$ son 1-ágono, 2-ágono y n-ágono con $\gcd(2, n) = 1$. Aproximaremos el "transient" de estas familias usando el método de linealización descrito en el capitulo 3. Para esto usaremos el siguiente orden:

$$0, x_1, x_2, x_1x_2, x_3, x_1x_3, \ldots, x_n, x_1x_n, x_2x_n, x_1x_2x_n, x_3x_n, x_1x_3x_n, \ldots, x_1x_2\cdots x_n,$$

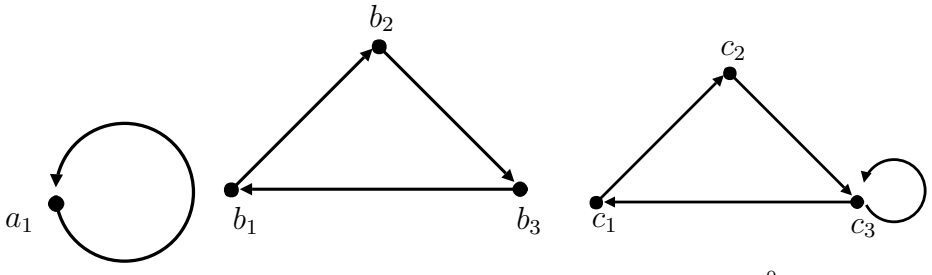
es decir que $y_1 = 0$, $y_2 = x_1$ y y_i es el producto de las y_j anteriores con x_k donde $2 \leq j \leq 2^n$, $k = 2, 3, 4, \ldots, n$.

Por el corolario 4.2.4 el k-puente de dos grafos conexos es invariante respecto a la k-cara. Así que para caracterizar estos sistema no importa el vértices que usemos para el k-puente.

4.4.1. Caracterización del 0-puente de un n-ágono y un 1-ágono

Sea $\mathcal{X}_n$ un n-ágono, $n > 2$ y $\mathcal{X}_1$ un 1-ágono. Como $\gcd(n, 1) = 1$ tenemos que el sistema dinámico generado por $\mathcal{X}_n \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$ es un sistema de punto fijo por el corolario 4.3.2. Luego del próximo ejemplo veremos que el sistema lineal resultante también es de punto fijo.

Ejemplo 4.4.1 *Consideremos $\mathcal{X}_3 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$ representado en la figura 4.10. El sistema dinámico*



(a) $\mathcal{X}_1$ (b) $\mathcal{X}_3$ (c) $\mathcal{X}_3 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$

Figura 4.10: 0-puente de un 1-ágono y un 3-ágono

definido por el $\mathcal{X}_3 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$ es $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1x_3)$. Ahora usando el método de linealización con el orden descrito arriba tenemos que

	0	x_1	x_2	x_1x_2	x_3	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
$f_0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$f_1 = x_2$	0	0	1	0	0	0	0	0
$f_2 = x_3$	0	0	0	0	1	0	0	0
$f_1f_2 = x_2x_3$	0	0	0	0	0	0	1	0
$f_3 = x_1x_3$	0	0	0	0	0	1	0	0
$f_1f_3 = x_1x_2x_3$	0	0	0	0	0	0	0	1
$f_2f_3 = x_1x_3$	0	0	0	0	0	1	0	0
$f_1f_2f_3 = x_1x_2x_3$	0	0	0	0	0	0	0	1

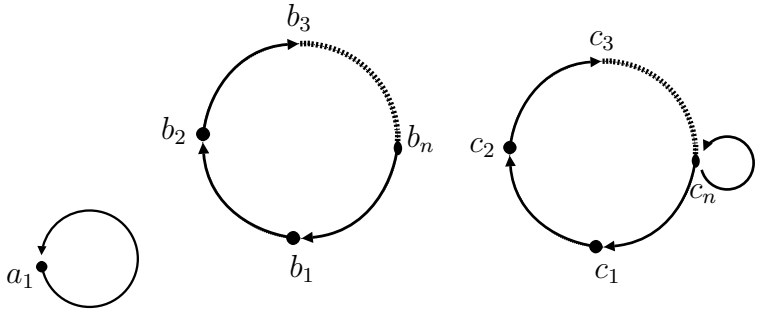
es decir, que la matriz de funciones es

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces el polinomio característico de $\mathcal{A}$ *es* $x^7(x-1)$*, de modo que el sistema lineal resultante es de punto fijo y el "transient" de* $\mathcal{S}(f)$ *es menor o igual que* 7*.*

Ahora caractezaremos la familia de sistemas dinámicos generado por $\mathcal{X}_n \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$ usando el método de linealización. Con esta caracterización obtenemos que el sistema lineal resultante es de puto fijo. Así que por el teorema 3.2.7 tenemos que la familia de SDF generada por $\mathcal{X}_n \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$ son de punto fijo. También presentaremos una cota calculando el polinomio característico del sistema lineal resultante de está familia.

El $\mathcal{X}_n \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$ el cual esta representado en la figura 4.11, define el SDFBM $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ donde



(a) $\mathcal{X}_1$ (b) $\mathcal{X}_n$ (c) $\mathcal{X}_n \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_1$

Figura 4.11: 0-puente de un 1-ágono y un n-ágono

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1 x_n).$$

Luego usando el método de linealización con el orden descrito arriba obtenemos la siguiente matriz de funciones

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{B} & \\ \hline \mathcal{O} & \begin{array}{c} \mathcal{C} \\ \hline \mathcal{C} \end{array} \end{array}\right)$$

donde $\mathcal{O}$ es la matriz cero de dimensión $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ y

$$\mathcal{C}_{2^{n-2} \times 2^{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{2^{n-1} \times 2^n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora consideremos el polinomio característico de $\mathcal{A}$, que es

$$p(x) = \det(\mathcal{A} + xI).$$

Para calcular el $\det(\mathcal{A} + xI)$ usaremos la expansión del cofactor a través de la primera columna de $\mathcal{A} + xI$, ya que $a_{11} = x$ y $a_{i1} = 0$ para $1 < i \leq 2^n$. Así que $\det(A + xI) = x \det(M_{11})$ donde M_{11} es el menor de x, es decir la matriz $2^n - 1 \times 2^n - 1$ que se obtiene al eliminar la primera fila y la primera columna de $\mathcal{A} + xI$. Luego para calcular $\det(\mathcal{A} + xI) = x \det(M_{11})$ usamos la expansión del cofactor en la primera columna por que $a'_{11} = x$ y $a'_{i1} = 0$ para $1 < i \leq 2^n$. De modo que $\det(\mathcal{A} + xI) = xx \det(M'_{11})$ donde M'_{11} es el menor de x. Continuando con este

proceso $2^{n-1}-2$ veces, conseguimos que

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{A}+xI) &= xxx^{2^{n-1}-2}\det(M''_{11}) \\ &= x^{2^{n-1}}\det(M''_{11})\end{aligned}$$

donde $M''_{11} = \left(\left(\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}\right)+xI\right)$ es una matriz de dimensión $2^{n-1}\times 2^{n-1}$, es decir

$$M''_{11} = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & & 0 \\ & & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x+1 \end{pmatrix}.$$

Ahora para calcular el $\det(M''_{11})$, note que los columnas $2m+1$ de M''_{11} contiene una x en una de las entradas y el resto de las entradas son ceros. Así que usando la expansión del cofactor en dichas columnas tenemos que $\det(M''_{11}) = x^{2^{n-2}}\det(M^*_{11})$ donde M^*_{11} es una matriz de dimensión $2^{n-2}\times 2^{n-2}$ con la misma estructura de M''_{11}. Entonces para computar $\det(M^*_{11})$ usamos la expansión del cofactor en las columnas impares por que M^*_{11} tiene la misma estructura de M''_{11}. Así que $\det(M^*_{11}) = x^{2^{n-3}}\det(M^{**}_{11})$ donde M^{**}_{11} es la matriz de dimensión $2^{n-3}\times 2^{n-3}$con estructura similar a la matriz M''_{11}. Continuando de esta manera conseguimos que el determinante de M''_{11} es

$$\det(M''_{11}) = x^{2^{n-2}}x^{2^{n-3}}\cdots x^2\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \det(A+xI) &= x^{2^{n-1}}x^{2^{n-2}}\cdots x^2 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= x^{2^{n-1}}x^{2^{n-2}}\cdots x^2 x\,(x+1) \\ &= x^{2^n-1}\,(x+1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

lo que implica que el sistema lineal resultante es un sistema de punto fijo. Por lo cual obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.4.2 *Sea $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un SDFBM generado por el 0-puente de 1-ágono y un n-ágono. Entonces el sistema lineal resultante es un sistema de punto fijo.*

Por consiguiente obtenemos una cota para $\mathcal{X}_1 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_n$.

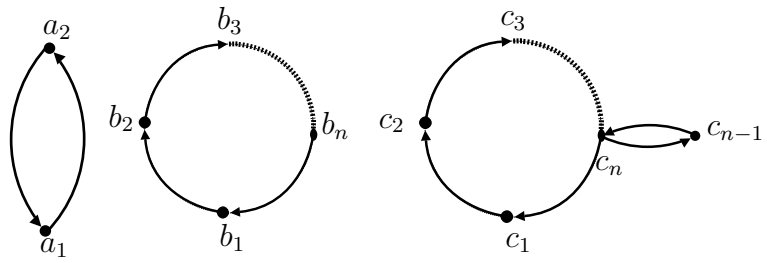
Observación 4.4.3 *Sea $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un SDFBM donde $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1x_n)$. Entonces el "transient" de $\mathcal{S}(f)$ es menor o igual que $2^n - 1$.*

En la próxima sección consideremos el $\mathcal{X}_2 \overset{0,1}{\vee} \mathcal{X}_n$ donde $\mathcal{X}_2$ es un 2-ágono y $\mathcal{X}_n$ es un n-ágono.

4.4.2. Caracterización del $0,1$-puente de un 2-ágono y un n-ágono

Comenzamos esta sección con la caracterización de la matriz de funciones de un SDF (X, f) tal que $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_2 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_n$ donde $\mathcal{X}_2$ es un 2-ágono y $\mathcal{X}_n$ es un n-ágono, $n \geq 3$ con $\gcd(n, 2) = 1$. El $\mathcal{X}_2 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_n$ ilustrado en la figura 4.12(c), define el sistema dinámico $\left(\mathbb{Z}_2^{n+1}, f\right)$ donde

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}, x_1x_n).$$



(a) $\mathcal{X}_2$ (b) $\mathcal{X}_n$ (c) $\mathcal{X}_2 \overset{0}{\vee} \mathcal{X}_n$

Figura 4.12: 0-puente de un 2-ágono y un n-ágono

Luego usando el método de linealización del capitulo 3 con el orden descrito arriba obtenemos la siguiente matriz de funciones

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|cc|c} \mathcal{B} & \multicolumn{2}{c|}{\mathcal{O}_1} & \\ \hline & \mathcal{O}_3 & \mathcal{C} & \\ & & \mathcal{C} & \\ & & \mathcal{C} & \mathcal{O}_4 \\ \mathcal{O}_2 & \mathcal{D} & & \\ \hline & \mathcal{O}_3 & \mathcal{O}_4 & \mathcal{D} \\ & & & \mathcal{D} \\ & & & \mathcal{D} \end{array}\right)$$

donde $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ y $\mathcal{O}_4$ son matrices ceros de dimensiones $2^{m-3} \times 2^m - 2^{m-2}$, $2^m - 2^{m-3} \times 2^{m-2}$, $2^{m-1} - 2^{m-3} \times 2^{m-2}$ y $2^{m-1} \times 2^{m-2}$ respectivamente con $m = n + 1$. Definimos las matrices $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y D de dimensión $2^{m-3} \times 2^{m-2}$ como siguen

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

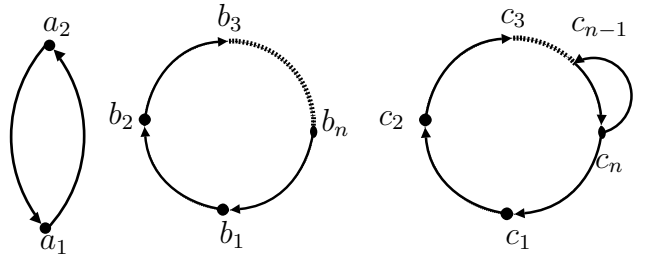
Ejemplo 4.4.4 *Considere el* 0*-puente de un* 3*-ágono y un* 2*-ágono el cual esta definido por el sistema dinámico* $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ *con* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_4, x_4, x_1x_3)$*. Entonces la matriz de funciones es*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema lineal resultante es $(\mathbb{Z}_2^{16}, L)$ *donde*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{16}) = (0, x_3, x_4, x_{11}, x_9, x_{11}, x_9, x_{11}, x_6, x_8, x_{14}, x_{16}, x_{14}, x_{16}, x_{14}, x_{16}).$$

Ahora caracterizaremos $\mathcal{X}_2 \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_n$, $n \geq 3$, con $\gcd(2, n) = 1$, el cual se puede observar en la figura 4.13.



(a) $\mathcal{X}_2$ (b) $\mathcal{X}_n$ (c) $\mathcal{X}_2 \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_n$

Figura 4.13: 1-puente de un 2-ágono y un n-ágono

El $\mathcal{X}_2 \overset{1}{\vee} \mathcal{X}_n$ define el SDFBM $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ donde $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1 x_{n-1})$. Entonces usando el método de linealización obtenemos la siguiente matriz de funciones

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} & \mathcal{B} & \\ \mathcal{O}_1 & \begin{matrix}\mathcal{C}\\ \mathcal{C}\\ \mathcal{O}_2\end{matrix} & \mathcal{O}_1 & \begin{matrix}\mathcal{O}_2\\ \mathcal{C}\\ \mathcal{C}\end{matrix} \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ son matrices cero de dimensión $2^{n-1} \times 2^{n-2}$ y $2^{n-2} \times 2^{n-2}$ respectivamente. Definimos las matrices $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de dimensiones $2^{n-1} \times 2^n$ y $2^{n-3} \times 2^{n-2}$ respectivamente como siguen

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.4.5 *Considere el* 1*-puente de* 2*-ágono y un* 3*-ágono el cual define el sistema* $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ *donde* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1x_2)$*. Entonces usando el método de linealización obtenemos la matriz de funciones*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

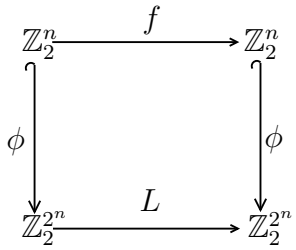
y el sistema lineal resultante es $(\mathbb{Z}_2^8, f)$ *donde* $L(x_1, x_2, \ldots, x_8) = (0, x_3, x_5, x_7, x_4, x_4, x_8, x_8)$.

Capítulo 5

Discusión de resultados.

5.1. Conclusiones

En este trabajo de investigación se logró hacer una inclusión de un SDFBM a un sistema lineal, como se muestra en el siguiente diagrama.



Con esta inclusión logramos proveer condiciones necesarias y suficientes para que algunos sistemas monomiales sean de punto fijo. Es decir que si el sistema lineal resultante $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ es de punto fijo entonces el sistema monomial $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ es de punto fijo. El reciproco del corolario 3.2.7 aún no se ha probado.

Conjetura 5.1.1 *Sean $(\mathbb{Z}_2^n, f)$ un sistema monomial y $\left(\mathbb{Z}_2^{2^n}, L\right)$ el sistema lineal resultante. Entonces $\mathcal{S}(f)$ es un sistema de punto fijo si y sólo si $\mathcal{S}(L)$ es un sistema de punto fijo.*

Ejemplo 5.1.2 *Considere el SDFBM $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1x_3, x_2x_3)$ el cual es un sistema de punto fijo como lo muestra el $\mathcal{S}(f)$ ilustrado en la figura 5.1. Ahora usando el*

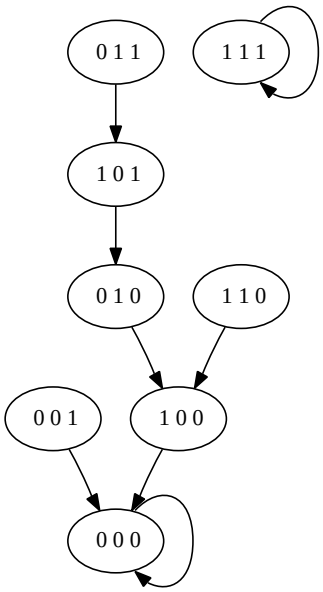


Figura 5.1: Estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^3, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1x_3, x_2x_3)$.

siguiente orden $0, x_1, x_2, x_1x_2, x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$ *obtenemos la siguiente matriz de funciones*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego el polinomio característico de $\mathcal{A}$ *es* $p(x) = \det(\mathcal{A} - xI) = x^7(x+1)$ *lo que implica que* $(\mathbb{Z}_2^8, L)$ *es un sistema de punto fijo.*

También logramos conseguir una cota para el "transient" de un SDFBM, usando el método de linealización. Ya que si $\mathcal{S}(f) \hookrightarrow \mathcal{S}(L)$ y L es de punto fijo entonces el "transient" mayor de $\mathcal{S}(f)$ es menor o igual que el "transient" de $\mathcal{S}(f)$.

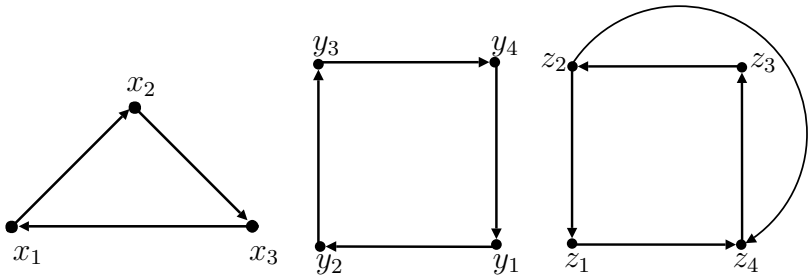
Ejemplo 5.1.3 *Calculando la ecuación mínima de la matriz de funciones del ejemplo 5.1.2 obtenemos que*

$$\mathcal{A}^4 (\mathcal{A} + I) = 0.$$

Es decir que el "transient" del sistema lineal resultante es 4*. Así que el "transient" de* $\mathcal{S}(f)$ *es menor o igual a* 4 *como se puede ver en la figura 5.1.*

Al parecer todos los ciclos del sistema lineal resultante son inducidos por el sistema monomial. Además presentamos la noción del k-puente entre dos grafos dirigidos. Esta operación de puente genera un grafo de dependencia del cual se puede obtener el sistema dinámico. También se presentaron condiciones necesarias y suficientes para que el sistema dinámico definido por el k-puente sea un sistema de punto fijo.

Ejemplo 5.1.4 *Considere el* 2*-puente de un* 3*-ágono y un* 4*-ágono representado en al figura 5.2(c), el cual define el sistema dinámico* $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ *donde* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1x_4, x_2, x_3)$*. Aplicando el corolario 4.3.2 tenemos que* f *es un sistema de punto fijo como se puede ver en*



(a) $\mathcal{X}_3$ (b) $\mathcal{X}_4$ (c) $\mathcal{X}_3 \overset{2}{\vee} \mathcal{X}_4$

Figura 5.2: 2-puente de un 3-ágono y un 4-ágono

la figura 5.3.

Luego se caracterizaron algunas familias definidas por el k-puente usando el método de linealización y el teorema 4.3.1.

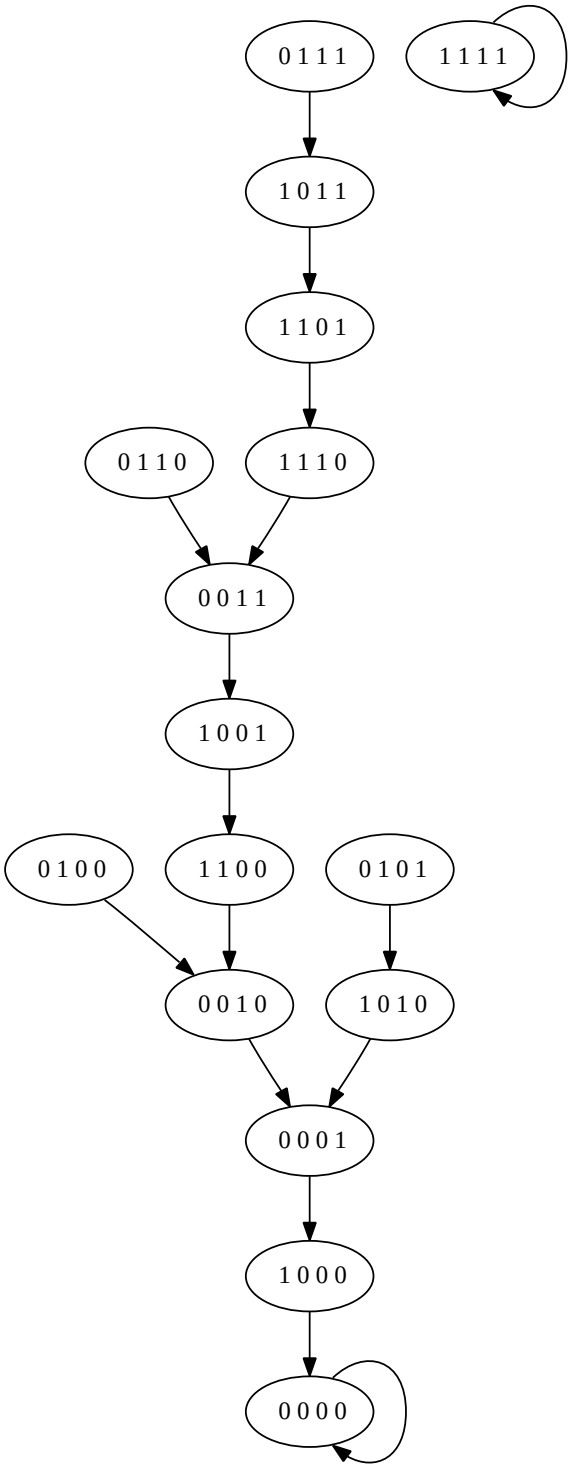


Figura 5.3: Estado fase del SDFBM $(\mathbb{Z}_2^4, f)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1x_4, x_2, x_3)$.

5.2. Trabajo futuro

Todavía tenemos que estudiar los sistemas dinámicos generados por el k-puente de dos grafos fuertemente conexos. Ya que no hemos logrado caracterizar completamente la dinámica de estos sistemas. Algunos de los trabajos futuros que estamos considerando son los siguientes:

1. Demostrar la conjetura 5.1.1.
2. Optimizar la cota para los sistemas definidos por el k-puente.
3. Caracterizar completamente la dinámica de los SDF definidos por el k-puente.
4. Caracterizar los SDF generados por el k-puente a partir de su grafo de dependencia.
5. Establecer condiciones necesarias y suficientes para que un SDF en general sea de punto fijo.

Bibliografía

[1] D. Bollman, O. Colón-Reyes, E. Orozco, *Fixed Points in Discrete Models for Regulatory Genetic Networks*, EURASIP Journal on Bioinformatics and Systems Biology, Vol. 2007, pp. 8, 2007.

[2] O. Colón-Reyes, R. Laubenbacher, B. Pareigis, Boolean Monomial Dynamical Systems, Annals of Combinatorics, Vol. 8, pp. 425-439, 2004.

[3] O. Colón-Reyes, R. Laubenbacher, A. Jarrah, and B. Sturmfelds, Monomial Dynamical Systems over Finite Fields, Complex Systems 16, 2006, 333-342.

[4] O. Colón-Reyes, Monomial Dynamical Systems over Finite Fields, ProQuest / UMI , Marzo 18, 2006.

[5] P. Cull, *Linear analysis of switching nets,* Kybernetik Vol. 8, pp. 31-39, 1971

[6] D. Dommit y R. Foote, Abstract Algebra, Jhon Wiley and Sons, Inc. 2004.

[7] Elspas, Bernard, The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks, IRE Transactions on the Circuit Theory, CT-6, 1959, 45-60. 5

[8] S. Friedberg, A. Insel, L. Spence, Linear Algebra, Prentice Hall, 4th edition, 2003.

[9] L. Sepúlveda, Sistemas Dinámicos Finitos Booleanos Monomiales Afines, Tesis de maestría en matemáticas puras, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, Mayagüez Puerto Rico, 2007.

[10] R. Hernández, *Linear Finite Dynamical Systems*, Communications in Algebra, Vol. 33, pp. 2977-2989, 2005.

[11] Hungeford, Algebra,New York Springer Verlag, 1974.

[12] Lidl, R., and Niederreiter, H., Finite Fields, Encyclopedia of Math and its Appl. 20, Cambridge University press, London, 1997.

[13] Lidl, R., and Pilz, G., Applied Abstract Algebra. Springer Verlag, New York. 1998.

[14] J.H. van Lint y R.M. Wilson, A course in Combinatorics, Cambridge University press, United Kingdom, 2001.