

# SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ESTACIONARIA DE SCHRÖDINGER EN VARIEDADES BIDIMENSIONALES DE CURVATURA NO CONSTANTE

Por

Mario Introíni Isbarbo

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS  
en  
MATEMÁTICAS PURAS

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO  
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ  
Mayo, 2012

Aprobada por:

---

Julio E. Barety, PhD  
Miembro, Comité Graduado

---

Fecha

---

Krzysztof Rozga, Ph.D  
Miembro, Comité Graduado

---

Fecha

---

Alfredo Villanueva Cueva, PhD  
Presidente, Comité Graduado

---

Fecha

---

Omell Pagan, Ph.D  
Representante de Estudios Graduados

---

Fecha

---

Omar Colón Reyes, PhD  
Director del Departamento

---

Fecha

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada  
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los  
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

## **SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ESTACIONARIA DE SCHRÖDINGER EN VARIEDADES BIDIMENSIONALES DE CURVATURA NO CONSTANTE**

Por

Mario Introíni Isbarbo

Mayo 2012

Consejero: Alfredo Villanueva  
Departamento: Ciencias Matemáticas

En Mecánica Cuántica, la descripción del estado de una partícula en un cierto dominio es un problema del mayor interés para aquellos que quieran explorar los entresijos de la materia a nivel molecular, atómico o subatómico. La Ecuación de Schrödinger es la ecuación principal de la Mecánica Cuántica, y debido a su importancia ha sido extensivamente estudiada en espacios Euclidianos. En este trabajo exploraremos nuevos espacios en donde resolver la Ecuación de Schrödinger Independiente del Tiempo, empleando el método de Separación de Variables. Concretamente, en variedades bidimensionales (superficies) de curvatura Gaussiana no constante. Con este fin, consideraremos primero su resolución en el espacio de Darboux  $D1$ , conocida en la literatura. Partiendo de  $D1$ , el cual es una superficie de revolución, buscamos nuevas superficies en donde separar la ecuación. Las superficies quedarán definidas por su métrica. Presentamos tres métricas y dos familias uniparamétricas de métricas Riemannianas en las que la ecuación se resuelve empleando la técnica de separación de

variables. El método utilizado para obtener las nuevas superficies es de una singular importancia porque permite encontrar nuevos dominios de solubilidad de una ecuación diferencial, o encontrar nuevas variables en función de las cuales se pueda lograr dicho objetivo. Realizamos luego el estudio geométrico del espacio  $D1$  y de las nuevas superficies obtenidas, calculando la curvatura Gaussiana y resolviendo las ecuaciones de las geodésicas. Finalmente, presentamos algunas parametrizaciones y sus correspondientes gráficas.

Abstract of Dissertation Presented to the Graduate School  
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the  
Requirements for the Degree of Master of Science

**SOLUTION OF SCHRÖDINGER'S STATIONARY EQUATION ON  
TWO DIMENSIONAL MANIFOLDS OF NON CONSTANT  
CURVATURE**

By

Mario Introíni Isbarbo

May 2012

Chair: Alfredo Villanueva  
Major Department: Mathematical Sciences

In Quantum Mechanics, the description of the state of a particle in a certain domain is a problem of the utmost interest for those who wish to explore the details of matter at a molecular, atomic or subatomic level. Schrödinger's Equation is the main equation of Quantum Mechanics, and due to its importance it has been extensively studied in Euclidean Space. In this work we will explore new spaces in which we can solve the Time Independent Schrödinger's Equation, employing the method of Separation of Variables. More specifically, in two-dimensional manifolds (surfaces) of non constant Gaussian curvature. To this end, we first consider its solution in Darboux D1 space, which is known from the literature. Starting from D1, which is a surface of revolution, we look for new surfaces where we can separate the equation. The surfaces will be defined by their metric. We present three metrics and two families of Riemannian metrics depending on a single parameter where the equation is solved by separation of variables. The method employed to obtain the new surfaces is quite important, the reason being that

it enables us to find new domains where we can solve a particular differential equation, or to find new variables in terms of which this goal can be achieved. In a later stage we conduct a geometric study of the space  $D1$  and of the new surfaces obtained, calculating the Gaussian curvature and solving the equations of the geodesics. We conclude this work presenting some parameterizations and their corresponding graphics.

Derechos Reservados © 2012

Por

Mario Introíni Isbarbo

*Dedico humildemente este trabajo*

*A mi amada esposa Anabella,*

*A la memoria de mi madre Olga y de mi querida tía Gloria,*

*A mi familia, en Colonia y en Montevideo,*

*A todos los buscadores del Conocimiento,*

*A los Sabios Maestros que han pisado este planeta Tierra,*

*Al Divino Cuerpo de la Verdad, a lo incomprensible, a la Luz sin Límites.*

## AGRADECIMIENTOS

A mi querida esposa Anabella Porrás Febles, compañera de camino y fuente de inspiración, sin la presencia de la cual, ninguna de las pocas cosas valiosas que he logrado hacer en esta vida, hubieran sido hechas.

A nuestra amiga Elida Rovira Fernández, por toda la ayuda que nos ha brindado durante este periplo en Puerto Rico.

Al Director de mi Tesis, Dr. Alfredo Villanueva Cueva, por su ayuda, paciencia, enseñanzas y orientación. Por guiarme sabiamente en estos primeros pasos en el estudio de la Geometría Diferencial y compartir conmigo algunos importantes temas de sus investigaciones en este campo.

Al Dr. Omar Colón Reyes, Director del Departamento de Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez, el cual siempre está dispuesto a apoyar y ayudar a los estudiantes, sobre todo en los momentos críticos, que siempre los hay.

A todos los Profesores que me dictaron cursos durante mi Maestría, gracias por sus enseñanzas.

Al Dr. Julio E. Barety, por sus valiosos comentarios al borrador de esta Tesis, y especialmente por su amabilidad al indicarme la manera de ordenar los cálculos y demás deducciones que aparecen en las páginas 111 y 112 de este trabajo.

Al Dr. Krzysztof Rozga, por la brillante lectura crítica del borrador, su ayuda, su paciencia y su aliento, y por sus enseñanzas.

Al Dr. Héctor Salas Olaguer, por su amistad considerada y generosa y sus sabios consejos matemáticos.

Al Dr. Pedro Vásquez Urbano, por abrirme las puertas al estudio de las Matemáticas en el RUM.

También quiero aprovechar para agradecer a todo el personal Docente y Administrativo del Departamento, que hacen de este lugar un sitio maravilloso para el estudio de las Matemáticas, y una valiosa experiencia de vida.

Al grupo de estudiantes de post grado, por su compañerismo, alegría, y gratos momentos compartidos.

A mi esposa Anabella Porrás Febles, Naida Sanabria Rodríguez, Ana Aparicio, César Barreto, Iván Henríquez, y Juan Carlos Belén Ortiz, por su invaluable ayuda en la elaboración de la versión final de este documento.

## ÍNDICE

Resumen de Disertación. . . . .	ii
Abstract of Dissertation. . . . .	iv
Dedicatoria. . . . .	vii
Agradecimientos. . . . .	viii
Lista de Figuras. . . . .	xii
Lista de Abreviaturas. . . . .	xiii
Lista de Símbolos. . . . .	xiv
CAPÍTULO 1 – INTRODUCCIÓN . . . . .	1
CAPÍTULO 2 - MARCO TEÓRICO . . . . .	4
2.1 Variedades Diferenciables. . . . .	4
2.2 Vector Tangente y Espacio Tangente a una Variedad. . . . .	15
2.3 Diferencial de una Función. . . . .	19
2.4 Métrica Riemanniana, Variedad Riemanniana. . . . .	21
2.5 Primera Forma Fundamental de una Superficie. . . . .	25
2.6 Segunda Forma Fundamental de una Superficie, Curvatura. . . . .	34
2.7 Geodésicas en una Superficie. . . . .	58
2.8 Gradiente, Divergencia, Laplaciano. . . . .	68
2.9 Ecuación de Schrödinger. . . . .	82
2.10 Solución de EDPs por el Método de Separación de Variables. . . . .	93
CAPÍTULO 3 - ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN EL ESPACIO $D_1$ . . . . .	100

3.1 Aspectos Previos . . . . .	100
3.2 Solución de la Ecuación de Airy. . . . .	107
3.3 Solución de la Ecuación de Schrödinger. . . . .	115
CAPÍTULO 4 - SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN OTRAS SUPERFICIES. . . . .	119
4.1 Adición de un Término a la Ecuación en el Espacio D1. . . . .	120
4.2 Nuevas Métricas. . . . .	122
CAPÍTULO 5 – ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LAS SUPERFICIES. . . . .	140
5.1 Espacio D1. . . . .	140
5.2 Espacio M1. . . . .	148
5.3 Espacio M2. . . . .	149
5.4 Espacio M3. . . . .	152
5.5 Familias I y II. . . . .	155
5.6 Observaciones Finales. . . . .	157
CAPÍTULO 6 VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS. . . . .	158
6.1 Gráficas de las superficies. . . . .	158
6.2 Funciones de Onda. . . . .	163
6.3 Curvatura Gaussiana. . . . .	172
CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS. . . . .	175
BIBLIOGRAFÍA. . . . .	178

## LISTA DE FIGURAS

Figura 6.1:D1 Gráfica 1 . . . . .	159
Figura 6.2: <b>D1</b> Gráfica 2. . . . .	159
Figura 6.3: <b>M2</b> Gráfica 1. . . . .	160
Figura 6.4: <b>M2</b> Gráfica 2. . . . .	161
Figura 6.5: <b>M3</b> Gráfica 1. . . . .	162
Figura 6.6: <b>M3</b> Gráfica 2. . . . .	163
Figura 6.7: $\Psi_{D1}$ Gráfica 1. . . . .	165
Figura 6.8: $\Psi_{D1}$ Gráfica 2. . . . .	165
Figura 6.9: $\Psi_{M1}$ Gráfica 1. . . . .	167
Figura 6.10: $\Psi_{M2}$ Gráfica 1. . . . .	168
Figura 6.11: $\Psi_{M2}$ Gráfica 2. . . . .	169
Figura 6.12: $\Psi_{M3}$ Gráfica 1. . . . .	170
Figura 6.13: $\Psi_{M3}$ Gráfica 2. . . . .	171
Figura 6.14: Gráfica de $\Psi_{M3}(u, v)$ . . . . .	172
Figura 6.15: Gráfica para $\mathbb{K}_{D1}(u, v)$ . . . . .	173
Figura 6.16: Gráfica para $\mathbb{K}_{M3}(u, v)$ . . . . .	174

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

EDP	Ecuación diferencial en derivadas parciales
EDO	Ecuación diferencial ordinaria

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\nabla$	Gradiente de una función
$\Delta$	Operador Laplaciano
D1	Espacio de Darboux Tipo I
M1	Espacio definido por la Métrica I
M2	Espacio definido por la Métrica II
M3	Espacio definido por la Métrica III
F1	Espacio definido por la Familia de métricas dependiente de un parámetro I
F2	Espacio definido por la Familia de métricas dependiente de un parámetro II
$\Psi_{D1}$	Función de onda correspondiente al espacio D1
$\Psi_{M1}$	Función de onda correspondiente al espacio M1
$\Psi_{M2}$	Función de onda correspondiente al espacio M2
$\Psi_{M3}$	Función de onda correspondiente al espacio M3
$\mathbb{K}_{D1}$	Curvatura Gaussiana correspondiente al espacio D1
$\mathbb{K}_{M1}$	Curvatura Gaussiana correspondiente al espacio M1
$\mathbb{K}_{M2}$	Curvatura Gaussiana correspondiente al espacio M2
$\mathbb{K}_{M3}$	Curvatura Gaussiana correspondiente al espacio M3
$\mathbb{K}_{F1}$	Curvatura Gaussiana correspondiente al espacio F1
$\mathbb{K}_{F2}$	Curvatura Gaussiana correspondiente al espacio F2

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Aunque consabido, comenzaremos por mencionar que, tratándose del tema de la Geometría, Francia nunca ha sido ajena al desarrollo de dicha disciplina. Basta mencionar que René Descartes (1596-1650) fue la primera persona en encargarse de establecer, en el año 1637, las bases de la denominada Geometría Analítica.

La viga maestra de la Geometría Cartesiana es, naturalmente, la genial idea de representar puntos por números. Una inmersión, a raudo vuelo de gaviota, en las inmensas aguas de la hermosa materia de la Historia de las Matemáticas, revela que Monge, Frenet, Serret, Lamé, Dupin, Bonnet, Moutard, Bertrand, Chasles, Poincaré, Cartan, y otros, burilaron los primigenios episodios de la rama de las matemáticas que actualmente se denomina Geometría Moderna, o, si se prefiere, Geometría Contemporánea.

Naturalmente no hace a nuestro propósito enumerar las diversas contribuciones de cada investigador francés a la extensa temática de la geometría Moderna o Contemporánea. Es por ello que saltaremos los años y nos ubicaremos en la Francia republicana de las fechas finiseculares del Siglo XIX.

En su tratado de cuatro tomos tímidamente intitulado: "Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces", editados originalmente uno a uno en el paréntesis temporal 1887-1896, el matemático francés Jean Gastón Darboux (1842-1917) le entrega a la comunidad científica de la época una magistral exposición del acervo matemático del que se disponía por esas fechas, acerca de la Teoría General de las Superficies.

Es precisamente en la influyente obra de G. Darboux en la que aparece un estudio de Gabriel Xavier Paul Koenigs (1858-1931) que recibió por título: “Sur les Geodesiques a Integrales Quadratiques”. Importa reparar que la nota de Koenigs representa en sí misma una original contribución al campo de la Física Teórica, efectuada por este egregio miembro de la Academia de Ciencia de París.

En un tamiz de una mayor precisión, diremos que el esfuerzo integrado del dueto Darboux-Koenigs quedó indeleblemente plasmado cuando ellos aplicaron exitosamente los estudios matemáticos de Darboux a una situación física definida, que involucraba a cuatro espacios Riemannianos bidimensionales, los cuales en la actualidad se distinguen con los nombres de “espacios de Darboux” de tipo  $D1$ ,  $D2$ ,  $D3$  y  $D4$ .

Recientemente, tomando como plataforma de arranque el trabajo de Koenigs anteriormente mencionado, los investigadores Kalnins, Kress y Winternitz se consagraron a la tarea de estudiar el tema de la súper-integrabilidad en un espacio bidimensional de curvatura no constante, referencia [1]. De paso, demostraron que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre, es decir, no sujeta a potencial alguno, admite una solución compacta en un plano real. Cabe acotar que en Física el vocablo “súper-integrabilidad” se refiere al hecho específico de que en un espacio bidimensional debe haber, por lo menos, tres constantes del movimiento.

Empleando el artículo [1] como referencia, en el Capítulo 3 de este trabajo estudiamos en detalle la resolución de la Ecuación de Schrödinger Independiente del Tiempo en el espacio  $D1$  por el método de separación de variables, en donde las soluciones obtenidas quedan expresadas en términos de las funciones de Bessel. En el

Capítulo 4 hemos introducido nuevos términos en el operador que define a la ecuación en el espacio  $D1$ , tornándolo más complicado, estudiando las posibilidades de resolución por separación de variables de la nueva ecuación obtenida. Luego, con la experiencia adquirida en el proceso anteriormente mencionado, recorreremos el camino inverso. Dejando el operador inmodificado (o sea, dejando la ecuación inmodificada), y partiendo de  $D1$ , introducimos nuevos términos en la matriz que define a la métrica de la superficie, de manera tal que la expresión de la Ecuación de Schrödinger en ese nuevo espacio se torne separable. De esta manera hemos propuesto nuevas métricas y familias de métricas dependientes de un parámetro, determinando a partir de cada una de ellas la función de onda correspondiente a la solución de la ecuación de Schrödinger Independiente del Tiempo para una partícula libre en estos nuevos espacios, encontrando una fórmula única para cada función de onda en términos de las funciones de Bessel. El Capítulo 5 está dedicado al estudio geométrico del espacio de Darboux  $D1$  y de las nuevas superficies definidas por las métricas que hemos propuesto en el Capítulo 4, calculando la curvatura Gaussiana y las ecuaciones de las geodésicas. Para  $D1$  resolvimos las ecuaciones de sus curvas geodésicas, además de parametrizar a esta superficie en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  como una superficie de revolución, según [1]. Efectuamos un estudio comparado de la curvatura Gaussiana de las superficies, observando que son superficies de curvatura no constante en donde las curvaturas tienen el mismo comportamiento funcional. El Capítulo 6 está destinado a presentar algunas gráficas de los espacios, las funciones de onda y las curvaturas obtenidas. En el Capítulo 7 presentamos las conclusiones y el trabajo a futuro.

## CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO

### *2.1 Variedades Diferenciables*

El concepto de variedad surge como una generalización a dimensiones superiores del concepto de curvas y superficies.

En una variedad diferenciable podemos desplazarnos entre puntos de la misma describiendo curvas que podemos medir (podemos medir longitudes y ángulos, o sea, hacer geometría), además, si hay cantidades que varían en función de dónde estemos situados en la variedad, precisamos cuantificar este cambio gradual de las cantidades de punto a punto de la misma. Esto último conlleva a la noción del cálculo de derivadas y diferenciales de funciones sobre la variedad.

También, en cada punto de una variedad diferenciable de dimensión  $n$  existe un conjunto de direcciones (el espacio tangente) que es un espacio vectorial de la misma dimensión de la variedad, o sea, un espacio vectorial de dimensión  $n$ , y que en cierta forma se asemeja localmente a la misma.

Esto nos lleva a distinguir los aspectos geométricos *locales* de los *globales* en una variedad.

Tomemos como ejemplo de variedad diferenciable a la superficie de la Tierra, todos sabemos que la Tierra no es plana, que es aproximadamente esférica, por lo cual su superficie es (globalmente) curva, sin embargo, nuestra experiencia cotidiana nos dicta

que (localmente) la superficie de la Tierra es plana, asimilable a una porción del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^2$ .

En resumidas cuentas una variedad diferenciable de dimensión  $n$  es un espacio topológico que se parece localmente al espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , y en el cual se puede hacer cálculo. O sea que este parecido es lo suficientemente fuerte como para permitirnos hacer cálculo diferencial en la variedad.

El concepto de variedad diferenciable se fue forjando desde los pioneros trabajos de Gauss en geometría diferencial, quien en 1827 publica su Teorema Egregio.

De este importante teorema se desprende que la Curvatura Gaussiana de una superficie no depende de cómo la superficie está incorporada en  $\mathbb{R}^3$ .

En otras palabras, la curvatura Gaussiana es una característica intrínseca de la superficie (al igual que la medición de distancias en la misma).

Antes de Gauss, el estudio de superficies implicaba que éstas estuvieran inmersas en el espacio ordinario  $\mathbb{R}^3$ . Como consecuencia del teorema anteriormente mencionado los matemáticos se empezaron a cuestionar la presencia de dicho espacio ambiente, viendo la necesidad de encontrar una definición “en sí misma”, independiente de cualquier espacio mayor que los contenga, para estos objetos matemáticos.

Más adelante Riemann, en su tesis de 1854, introduce el concepto de métrica en una variedad  $n$ -dimensional, que es un aspecto intrínseco de la variedad y que nos permite medir distancias en la misma, describiendo cómo, a partir de la métrica, se puede medir la curvatura (ver [12]).

Cabe acotar que el trabajo de Riemann, que al principio fue visto como una teoría matemática sin aplicación, más adelante se convirtió en el aparato matemático de la Teoría de la Relatividad General de Albert Einstein. En esta importante teoría se concibe al espacio y al tiempo como un continuo tetra dimensional (el continuo espacio-tiempo), que es una variedad diferenciable de cuatro dimensiones dotada de una métrica denominada Métrica de Lorentz y cuya curvatura produce los fenómenos gravitatorios. No es necesaria ni útil para esta teoría la presencia de un espacio ambiente que contenga a la variedad anteriormente mencionada.

Finalmente, fue a Hermann Weyl a quien le correspondió presentar la actual definición de variedad diferenciable, en su trabajo intitulado “El Concepto de una Superficie Riemanniana”, en el año 1913.

Luego de este preámbulo vamos entonces a ir definiendo los conceptos que conllevan a la definición de variedad diferenciable.

### ***2.1.1 Variedad Topológica***

Sea  $M$  un espacio topológico. Decimos que  $M$  es una *variedad topológica* de dimensión  $n$ , si se cumple que:

- $M$  es un espacio topológico de Hausdorff
- Existe una base contable para la topología de  $M$
- Para cada  $p \in M$ , existe un abierto  $U \subset M$  que contiene a  $p$ , y un homeomorfismo  $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ , en donde  $\tilde{U}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$

Esta última condición implica entonces que el espacio topológico  $M$  es localmente homeomórfico a  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1.2 Carta sobre $M$

Una *carta* sobre  $M$  es un par  $(U, \varphi)$ , en donde  $U$  es un abierto de  $M$  y  $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$  es un homeomorfismo, con  $\tilde{U} = \varphi(U)$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

El abierto  $U \subset M$  se denomina *dominio de coordenadas* de la carta, el mapa  $\varphi$  es un *mapa local de coordenadas*, las funciones  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , tales que para  $p \in U$ :

$\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$  se conocen con el nombre de *coordenadas locales* (o sistema de coordenadas locales) en  $U$ .

Observemos que por su propia definición, todo punto de una variedad topológica pertenece al dominio de una carta.

Generalmente  $U$  es identificado con su imagen bajo  $\varphi$ .

### 2.1.3 Atlas

Un *atlas* para  $M$  es una colección de cartas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ , en donde  $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ .

Decimos que una función  $f: U \rightarrow V$ , en donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente, es *suave* (“smooth”), o  $C^\infty$ , o *infinitamente diferenciable*, si cada una de sus funciones componentes posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

**Observación:** Una función puede ser  $C^\infty$  sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  y no serlo sobre una imagen homeomórfica del mismo. En otras palabras,  $C^\infty$  no es una propiedad invariante bajo homeomorfismos.

Para una función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , como cada punto de  $M$  pertenece al dominio de alguna carta  $(U, \varphi)$ , decimos que  $f$  es  $C^\infty$  sobre  $M$  si para cada carta se cumple que:

$$f \circ \varphi^{-1}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es } C^\infty \text{ (recordemos que } \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \text{)}.$$

De la observación anterior se desprende que para que la caracterización de función  $C^\infty$  sobre  $M$  sea independiente de la elección de la carta, es preciso restringir la relación entre las cartas que forman un atlas.

### 2.1.4 Cartas Compatibles

Si tenemos dos cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  sobre  $M$  tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ , en la intersección de los dominios tendremos definidos dos sistemas de coordenadas, a saber, los mapas:

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V), \quad \varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V),$$

que son los cambios de coordenadas entre un sistema y otro, y que se denominan *funciones de transición* entre las cartas.

Si estas funciones de transición son  $C^\infty$ , entonces decimos que las cartas son  $C^\infty$  compatibles, o suavemente compatibles, o compatibles.

Otra manera de definirlo es diciendo que dos cartas  $(U, \varphi)$ , y  $(V, \psi)$  sobre  $M$  son compatibles si  $U \cap V = \emptyset$ , o el mapa de transición  $\psi \circ \varphi^{-1}$  es un *difeomorfismo*.

### 2.1.5 Atlas $C^\infty$

Un atlas  $C^\infty$  es un atlas para el cual todas las cartas que lo componen son compatibles. También se le denomina *atlas regular*.

### 2.1.6 Atlas $C^\infty$ maximal

Un atlas  $C^\infty$  maximal es un atlas  $C^\infty$  que no está contenido estrictamente en ningún otro atlas  $C^\infty$ . O sea que, cualquier carta sobre  $M$  que sea compatible con todas las cartas que constituyen este atlas, pertenecen al mismo atlas.

A este tipo de atlas también se le denomina *estructura diferenciable* sobre  $M$ , o *estructura  $C^\infty$*  sobre  $M$ .

Finalmente vamos llegando a la definición que buscamos.

### 2.1.7 Variedad Diferenciable

Es una variedad topológica dotada de una estructura diferenciable.

Si todas las componentes conexas de la variedad tienen dimensión  $n$ , entonces decimos que es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , o variedad diferenciable  $n$ -dimensional.

Notemos que en la definición de variedad diferenciable no se hace alusión alguna a la métrica, que es lo que nos permite medir distancias y ángulos.

**Observación:** Se puede demostrar que:

1. Todo atlas  $C^\infty$  sobre  $M$  está contenido en un único atlas  $C^\infty$  maximal.

2. Dos atlas  $C^\infty$  sobre  $M$  determinan el mismo atlas  $C^\infty$  maximal si y solo si su unión es un atlas  $C^\infty$ .

Por lo tanto, para determinar si una variedad topológica es una variedad diferenciable, basta con constatar la existencia de algún atlas  $C^\infty$  para la variedad (para más detalles ver [3], [10], [13]).

### 2.1.8 Ejemplos

Espacio  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathbb{R}^n$  es una variedad diferenciable n-dimensional. La estructura diferenciable más simple para  $\mathbb{R}^n$  viene determinada por el atlas que consiste de la única carta  $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ . Tal estructura diferenciable se llama *estándar*. También las coordenadas determinadas por esta carta se llaman estándar.

Superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ : Es una variedad bidimensional, lo suficientemente regular (o sea, sin aristas ni puntas) de manera tal que podemos extender las nociones de cálculo diferencial en  $\mathbb{R}^2$  a esta variedad.

La definición es como sigue: Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una *superficie regular* si para todo  $p \in S$  existe una vecindad  $V \subset \mathbb{R}^3$  y una aplicación  $X: U \rightarrow V \cap S$  de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  en  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que: *i)*  $X$  es un homeomorfismo diferenciable; *ii)* La aplicación diferencial  $(dX)_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva,  $\forall q \in U$ .

Si escribimos:  $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ , con  $(u, v) \in U$ , entonces la matriz que representa a la aplicación lineal  $dX_q$  es la siguiente:

$$dX_q(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix},$$

en donde  $q = (u, v)$ .

La condición *ii*) la podemos expresar equivalentemente, afirmando que las columnas de la matriz tienen que ser vectores linealmente independientes.

$$\text{O sea, los vectores } \begin{cases} X_u = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right)_q \\ X_v = \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right)_q \end{cases},$$

son linealmente independientes,  $\forall q \in U$ .

Esta última condición garantiza la existencia de un plano tangente para cada punto de  $S$ .

El mapa  $X$  es una *parametrización* de  $S$  ó sistema de coordenadas locales que contiene a  $p$ . El conjunto  $X(U)$  es la imagen ó *traza* de la parametrización.

Como consecuencia de esta definición la transición de una parametrización a otra es un difeomorfismo y podemos concluir entonces que una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n = 2$ .

De la misma manera podemos definir una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^n$ , siendo la parametrización de  $M$ :

$$X(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v))$$

Si ahora  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U$  abierto, entonces no es difícil de constatar que la gráfica de  $f$ , definida por:

$$\Gamma(f) = \{(u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in U\},$$

satisface las condiciones *i)* y *ii)* previamente citadas, siendo entonces una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ , y por lo tanto una variedad diferenciable de dimensión dos. (Ver [5], [6]).

Esfera de radio unidad: Sea el conjunto

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

El mapa o aplicación  $\mathbb{X}_1: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ , en donde  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , dado por

$$\mathbb{X}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

es la gráfica de la función  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  sobre  $U$ , la cual tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en dicho dominio. Por lo expresado en el párrafo anterior, se deduce que  $\mathbb{X}_1(x, y)$  es una parametrización del hemisferio superior de  $S^2$ , menos el ecuador de la esfera, por lo cual este hemisferio es una superficie regular, y el mapa  $\mathbb{X}_1$  es una parametrización para dicho hemisferio.

De manera semejante el mapa o aplicación  $\mathbb{X}_2: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , en donde  $U$  es el mismo dominio anterior, dado por

$$\mathbb{X}_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

es una representación paramétrica para el hemisferio inferior. Observemos que estas dos representaciones paramétricas cubren a  $S^2$  menos su ecuador, por lo que se precisarán más cartas de este tipo para cubrir a toda la superficie.

Si reflexionamos un poco en esta cuestión, nos daremos cuenta que se necesitarán seis cartas para cubrir completamente a  $S^2$ . Las cuatro parametrizaciones restantes son:

$$\mathbb{X}_3(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$$

$$\mathbb{X}_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$$

$$\mathbb{X}_5(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

$$\mathbb{X}_6(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z),$$

en donde los mapas  $\mathbb{X}_3$  y  $\mathbb{X}_4$  están definidos en  $V = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}$ , abierto del plano  $xz$ ; y  $\mathbb{X}_5$  y  $\mathbb{X}_6$  están definidos en  $W = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}$ , abierto del plano  $yz$ .

Entonces, el conjunto  $\mathcal{A} = \{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4, \mathbb{X}_5, \mathbb{X}_6\}$  es un atlas para  $S^2$ , por lo cual,  $S^2$  es una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ , ergo, una variedad diferenciable de dimensión 2.

Otro notorio atlas para  $S^2$  es el que se obtiene por proyección estereográfica de la esfera en el plano, en donde este atlas estará constituido por sólo dos cartas. Si llamamos a un punto de la esfera como polo norte, denotándolo  $\mathbf{n}$ , y al punto diametralmente opuesto a  $\mathbf{n}$  lo llamamos polo sur, y lo denotamos con la letra  $\mathbf{s}$ , la proyección estereográfica es el mapa

$$\pi: S^2 \setminus \{\mathbf{n}\} \rightarrow T_{\mathbf{s}}S^2,$$

en donde  $T_s S^2$  es el plano tangente a la esfera en el polo sur de la misma, y que proyecta a un punto  $p \in S^2 \setminus \{\mathbf{n}\}$ , en el punto en el cual la recta que une a  $\mathbf{n}$  y a  $p$  corta al plano  $T_s S^2$ .

Por construcción,  $\pi$  es una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera menos su polo norte y el plano  $T_s S^2 \sim \mathbb{R}^2$ . Situando a  $S^2$  en  $\mathbb{R}^3$  de manera tal que  $T_s S^2$  coincida con el plano  $xy$  y el polo norte tenga coordenadas  $(0,0,2)$ , entonces la ecuación de la esfera vendrá dada por la expresión:

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1,$$

y para  $p = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{\mathbf{n}\} \subset \mathbb{R}^3$ , la proyección estereográfica tendrá la expresión

$$\pi(p) = \pi(x, y, z) = \left( \frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z} \right) = q = (u, v),$$

en donde  $q$  es un punto del plano  $xy$ .

La aplicación inversa  $\pi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{\mathbf{n}\} \subset S^2$ , vendrá dada por

$$\pi^{-1}(q) = \pi^{-1}(u, v) = \left( \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right)$$

Es posible demostrar que  $\pi^{-1}$  satisface las condiciones *i*) y *ii*) previamente citadas, por lo cual constituye una carta para  $S^2 \setminus \{\mathbf{n}\}$ . Es claro además que si hacemos una construcción análoga, proyectando estereográficamente los puntos de  $S^2 \setminus \{\mathbf{s}\}$  sobre  $T_n S^2 \sim \mathbb{R}^2$ , entonces, la aplicación inversa de esta última, será una carta para  $S^2 \setminus \{\mathbf{s}\} \subset S^2$ , por lo cual ambas cartas constituyen un atlas para  $S^2$ . (Ver [6], [21]).

Como es natural suponer, existen otros ejemplos de variedades diferenciables mucho más abstractas que las que hemos presentado aquí. Nosotros hemos hecho

hincapié en estos ejemplos porque precisamente vamos a estar trabajando con variedades bidimensionales.

### **2.1.9 Subvariedad**

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $U$  un abierto de  $M$ .

Sea el conjunto  $\mathcal{A}_U = \{\text{cartas compatibles } (W, \varphi) \text{ para } M \mid W \subset U\}$ .

Como todo punto  $p \in U \subset M$  está contenido en el dominio de alguna carta  $(V, \varphi)$  para  $M$ , tomando  $W = V \cap U$ , entonces  $(W, \varphi|_W)$  es una carta en  $\mathcal{A}_U$  tal que  $p \in W$ .

Vemos que  $U$  está cubierto por las cartas en  $\mathcal{A}_U$ , por lo cual es un atlas regular para  $U$ . Con este atlas, cualquier conjunto abierto de  $M$  es llamado *subvariedad abierta* de  $M$ .

## **2.2 Vector tangente y espacio tangente a una variedad**

Todos tenemos la intuición geométrica de lo que es un vector tangente a una curva situada en  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$  o el plano tangente a una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$ .

Tomando como ejemplo este último caso observamos que el plano tangente o un vector tangente a la superficie en un punto de la misma también pueden ser concebidos respectivamente como un plano o como un vector en  $\mathbb{R}^3$ , el espacio ambiente (euclidiano) que contiene a la superficie.

En el caso de una variedad diferenciable no disponemos a priori de un espacio mayor que la contenga (recordemos que este es un punto importante en su definición) por lo cual las definiciones de vector tangente y espacio tangente a la variedad deben ser hechas independientemente de la existencia de un espacio euclidiano que la contenga.

Para lograr una caracterización que tenga sentido para una variedad nos basaremos en el hecho de que un vector euclidiano permite obtener la derivada direccional de una función.

Por todo lo anteriormente mencionado llegaremos a definiciones un tanto abstractas.

### 2.2.1 Definición

Sea  $M$  una variedad diferenciable.

Un mapa  $\xi: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  es una *derivación* en el punto  $p \in M$ , si se cumple que:

- $\xi$  es lineal
- $\xi(fg) = \xi(f)g(p) + \xi(g)f(p), \forall f, g \in C^\infty(M)$

A esta última propiedad se la denomina propiedad de Leibniz.

Sea  $T_pM = \{\xi \mid \xi \text{ es una derivación en } p \in M\}$

Definiendo en  $T_pM$  las operaciones de suma y multiplicación por un escalar

$$(\xi + \eta)(f) = \xi(f) + \eta(f), \forall \xi, \eta \in T_pM$$

$$(\lambda\xi)(f) = \lambda\xi(f), \forall \xi \in T_pM, \lambda \in \mathbb{R},$$

observamos que  $(\xi + \eta) \in T_pM$  y  $\lambda\xi \in T_pM$ . Claramente  $T_pM$  adquiere la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  y se le denomina *espacio tangente* a  $M$  en  $p$ .

Cada elemento de  $T_p M$  es un *vector tangente* a  $M$  en  $p$ .

Es posible demostrar lo siguiente:

- $T_p M$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  (la misma dimensión de la variedad  $M$ ).
- El conjunto  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ , en donde  $x^1, \dots, x^n$  son coordenadas locales en una carta de  $U$  que contiene al punto  $p$ , es una base para  $T_p M$ .

Entonces, cada vector tangente  $\xi \in T_p M$  se puede representar de la siguiente manera:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Mediante el convenio de sumación de Einstein, la notación puede simplificarse a:

$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  ó, más simple aún,  $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  si no perdemos de vista que estamos evaluando las derivadas en el punto  $p$ .

Los números  $\xi^i = \xi(x^i)$  son los componentes del vector  $\xi$  en el sistema local de coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  anteriormente mencionado.

O sea que,  $\xi(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \xi(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}$  evaluado en  $p \in M$ .

Interpretando a  $\xi(f)$  como una derivada direccional, entonces cada elemento de  $T_p M$  es un funcional sobre  $C^\infty(M)$  que toma la derivada direccional de (la representación de)  $f$  en las coordenadas locales anteriormente mencionadas, evaluadas en (la representación de)  $p$ .

Algunos autores escriben:  $\xi(f) = \frac{\partial f}{\partial \xi}$  interpretando a  $\xi$  como una *dirección* en el punto  $p$  (por más detalles ver [10], [13]).

### 2.2.2 Otra caracterización de vector tangente

Una manera alternativa de pensar en un vector tangente a una variedad, es la siguiente:

Sea  $M$  una variedad diferenciable.

A una función diferenciable  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , donde  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  es un abierto de  $\mathbb{R}$ , se le denomina una *curva* en  $M$ .

Sea  $\alpha(0) = p \in M$ , y  $D = \{f \in C^\infty(M) \mid f \text{ es diferenciable en } p, \forall p \in M\}$ , definimos el vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $t = 0$ ;  $\alpha'(0)$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha'(0): D &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , tomando una carta  $\mathbb{X}: W \rightarrow M$ ,  $W$  abierto de  $\mathbb{R}^n$  con  $\mathbb{X}(0) = p$ , entonces la expresión en coordenadas para la función  $f$  y la curva  $\alpha$  serán:

$$\begin{aligned} f \circ \mathbb{X}(q) &= f(x_1, \dots, x_n), \forall q = (x_1, \dots, x_n) \in W \subset \mathbb{R}^n \\ \mathbb{X}^{-1} \circ \alpha(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} = \left. \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0}$$

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f.$$

Recordando la convención de sumación de Einstein

$$\alpha'(0)f = \left( x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f,$$

por lo cual llegamos a la siguiente expresión para  $\alpha'(0)$ :

$$\alpha'(0) = x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{t=0}.$$

Claramente se verifica que  $\alpha'(0)$  es un elemento de  $T_p M$ .

Por lo tanto, en esta caracterización, un vector tangente a  $M$  en  $p$  es el vector tangente a una curva  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha(0) = p$ . (ver [12]).

Este último enfoque es una generalización de nuestra experiencia con vectores tangentes a una superficie regular  $S$  en  $\mathbb{R}^3$ , en donde se define un vector tangente a  $S$  en  $p$  como la velocidad de una curva diferenciable  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , con  $\alpha(0) = p$ .

### 2.3 Diferencial de una función

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $p$  un punto de  $M$ .

Se define la aplicación diferencial de  $f$ , que denotaremos  $df$ , de la siguiente manera:

$$df: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi \rightarrow df(\xi) = \xi(f), \forall \xi \in T_p M$$

Observamos que  $df$  es una aplicación lineal y, por tanto, un funcional sobre el espacio vectorial  $T_p M$ , o sea que  $df \in T_p^* M$ , el espacio dual de  $T_p M$ .

La base  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}_p$  de  $T_p M$  tendrá su base dual en  $T_p^* M$ , que denotaremos por  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ , y que cumplirá:

$$e_i^* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}, \text{ delta de Kronecker.}$$

Observemos que los elementos del conjunto  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  cumplen con esta propiedad, ya que

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Entonces, el conjunto  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  es una base para  $T_p^* M$ , ya que es la base dual de  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}_p$ .

Sea ahora el siguiente elemento de  $T_p M$ :

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Luego notemos que (recordando el convenio de sumación de Einstein),

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi(x^i) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \xi(f).$$

O sea que en la base  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  podemos representar a  $df$  por medio de la expresión  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ , en donde los componentes de  $df$  son las derivadas parciales  $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

El conjunto  $T_p^* M$  es llamado el *espacio cotangente* de  $M$  en  $p$  y sus elementos, *covectores*.

## 2.4 Métrica Riemanniana, variedad Riemanniana

### 2.4.1 Definiciones

- Una *métrica Riemanniana* en una variedad diferenciable  $n$ -dimensional  $M$ , es una familia  $g = \{g_x\}$ ,  $x \in M$ , tal que  $g_x$  es una forma bilineal, simétrica y positiva definida sobre el espacio tangente  $T_x M$  que varía en forma regular con  $x \in M$ .
- Una *variedad Riemanniana*  $(M, g)$  es una variedad diferenciable  $M$  dotada de una métrica Riemanniana  $g$ .

La métrica Riemanniana también es llamada *tensor métrico* de Riemann. Es un campo tensorial de segundo rango, simétrico, positivo definido en cada punto de  $M$ , diferenciable (o sea, que varía en forma regular para todo  $x$  perteneciente a  $M$ ).

Por medio de este tensor podemos definir el producto interno de elementos en  $T_x M$  convirtiendo a  $T_x M$  en un espacio vectorial con producto interno (llamado espacio vectorial Euclidiano).

Para  $\xi, \eta \in T_x M$ , el producto interno se denota por  $\langle \xi, \eta \rangle_g$  y cuando no hay peligro de confusión se puede suprimir el subíndice, quedando  $\langle \xi, \eta \rangle$ .

La longitud de un vector perteneciente a  $T_x M$  se define como:

$$|\xi|_g = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_g} \in \mathbb{R}$$

En coordenadas locales  $x^1, \dots, x^n$  obtenemos,

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = g_{ij}(x) \xi^i \eta^j,$$

en donde  $g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_g$ .

La matriz  $(g_{ij}(x))_{n \times n}$  es simétrica y positiva definida.

Las funciones  $g_{ij}(x)$  son los componentes del tensor  $g$  en las coordenadas dadas, siendo funciones  $C^\infty$  en las cartas donde están definidas.

### 2.4.2 Ejemplo

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n=3$ ;  $\xi, \eta$  dos elementos de  $T_p M$  tales que

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \eta &= \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned} \right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle_g &= \left\langle \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \eta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle_g \\ \langle \xi, \eta \rangle_g &= \xi^1 \eta^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle_g + \xi^1 \eta^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle_g + \xi^1 \eta^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle_g + \\ &\quad \xi^2 \eta^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle_g + \xi^2 \eta^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle_g + \xi^2 \eta^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle_g + \\ &\quad \xi^3 \eta^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle_g + \xi^3 \eta^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle_g + \xi^3 \eta^3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle_g \\ \langle \xi, \eta \rangle_g &= [\xi^1 \quad \xi^2 \quad \xi^3] \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle_g & \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle_g & \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle_g \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle_g & \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle_g & \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle_g \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right\rangle_g & \left\langle \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\rangle_g & \left\langle \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En la igualdad anterior la matriz simétrica de  $3 \times 3$  es la expresión de la métrica en las coordenadas dadas. En notación de sumatorias,

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi^i \eta^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_g = g_{ij}(x) \xi^i \eta^j \in \mathbb{R}$$

Definiendo el producto tensorial de los covectores  $dx^i$  y  $dx^j$ ,

$$(dx^i \otimes dx^j)(\xi, \eta) = dx^i(\xi) \otimes dx^j(\eta),$$

tal que, para  $i \neq j$  se cumple que

$$dx^i \otimes dx^j = -(dx^j \otimes dx^i),$$

definimos ahora el *producto simétrico* de los covectores de la siguiente manera:

$$dx^i dx^j = \frac{1}{2} [dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i].$$

Entonces,

$$(dx^i dx^j)(\xi, \eta) = dx^i(\xi) dx^j(\eta),$$

el cual es un funcional bilineal sobre  $T_x M$ , y como  $dx^i(\xi) = \xi(x^i) = \xi^i$ ,  $dx^j(\eta) = \eta(x^j) = \eta^j$ , se verifica lo siguiente:

$$g_{ij} dx^i dx^j(\xi, \eta) = g_{ij} dx^i(\xi) dx^j(\eta) = g_{ij} \xi^i \eta^j = \langle \xi, \eta \rangle$$

Entonces, la expresión  $g_{ij} dx^i dx^j$  es otra manera de escribir la métrica.

### 2.4.3 Longitud de un segmento de curva

Dada una métrica Riemanniana podemos definir la longitud de un segmento de curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ , como:  $\ell(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_g^{\frac{1}{2}} dt$ , que es la conocida fórmula de la integración de la rapidez de la curva.

La métrica Riemanniana nos proporciona una manera de medir la longitud de los vectores tangentes a la variedad, el área de superficies, ángulos entre curvas en la variedad, y demás aspectos geométricos (geometría métrica) en la variedad.

En otras palabras, si definimos para un espacio en general un producto interno en su espacio tangente, entonces toda la estructura geométrica del espacio quedará definida en términos de dicho producto. Este es el nuevo punto de vista de la geometría moderna, en donde se establece que el concepto apropiado en el cual basar toda la geometría de un espacio es el producto interno (también llamado producto escalar) de los vectores tangentes al espacio (leer [9]).

Cabe acotar que el concepto de métrica Riemanniana no debe ser confundido con el concepto de métrica en un espacio métrico.

Más adelante, cuando tratemos el tema de las geodésicas, definiremos la noción de distancia en una variedad Riemanniana.

De todos modos, una variedad diferenciable dotada de una métrica Riemanniana (o sea, una variedad Riemanniana), se convierte en un espacio métrico.

Acotamos también que se sobreentiende que la forma bilineal es no-degenerada o sea,

$$\langle x, y \rangle_g = 0, \forall y \in T_x M \Rightarrow x = 0.$$

Si la forma bilineal no es positiva definida, la métrica pasa a llamarse pseudo Riemanniana y las variedades dotadas con métricas de este tipo, variedades pseudo Riemannianas.

Nosotros vamos a trabajar en variedades Riemannianas y pseudo Riemannianas de dos dimensiones (superficies), resolviendo la ecuación de Schrödinger en estos espacios, empleando el método de separación de variables.

## ***2.5 Primera Forma Fundamental de una superficie***

En los primigenios capítulos de la Geometría Diferencial de curvas y superficies (en épocas de Leonard Euler y, más adelante, Karl Friedrich Gauss) estos objetos matemáticos se concebían inmersos en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  (superficies),  $\mathbb{R}^2$  (curvas planas), ó  $\mathbb{R}^3$  (curvas “en el espacio”).

Como consecuencia de esto existe una manera natural de medir, por ejemplo, la longitud de un vector tangente a una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  en un punto  $p$  de la misma, tomando al vector como perteneciendo a  $\mathbb{R}^3$  y utilizando el producto interno estándar en  $\mathbb{R}^3$ .

O sea que el espacio tangente (plano tangente) a la superficie  $S$  hereda naturalmente el producto interno en  $\mathbb{R}^3$ .

Este es un ejemplo del caso general, en el que una subvariedad de una variedad Riemanniana hereda la métrica de la variedad principal. Se dice que la variedad principal induce una métrica sobre la subvariedad. Volviendo a la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ , el producto interno heredado de  $\mathbb{R}^3$  genera en  $T_p S$  una forma cuadrática correspondiente, llamada la Primera Forma Fundamental de la superficie.

$$I_p(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle = |\xi|^2 \geq 0$$

### 2.5.1 Definición

Para una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , la forma cuadrática  $I_p$  en  $T_p S$  es llamada la *Primera Forma Fundamental* de  $S$  en  $p$ .

### 2.5.2 Ejemplos

Ejemplo 1: En este ejemplo ensayaremos a definir los coeficientes de la Primera Forma Fundamental. Sea  $\mathbb{X}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$  una parametrización de  $S$  en  $p$ ,  $\alpha(t)$  una curva en  $S$  tal que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = \omega \in T_p S$ .

Entonces  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ , y el módulo del vector  $\omega$  se obtiene del siguiente modo:

$$|\omega|^2 = |\alpha'(0)|^2 = I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v', \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v' \rangle$$

$$|\omega|^2 = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle u'^2 + 2\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle u'v' + \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle v'^2$$

Estamos efectuando los cálculos en  $p = \alpha(0) = \mathbb{X}(u(0), v(0)) = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ , y

las derivadas primeras  $u' = \frac{du}{dt}$ ,  $v' = \frac{dv}{dt}$  son evaluadas en  $t = 0$ .

Si definimos:

$$\begin{cases} E(u_0, v_0) = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle_p \\ F(u_0, v_0) = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle_p \\ G(u_0, v_0) = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle_p, \end{cases}$$

la forma cuadrática se puede expresar como sigue:

$$|\omega|^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2, \text{ en donde } E, F \text{ y } G \text{ son los}$$

*coeficientes de la Primera Forma Fundamental de la superficie en el punto  $p$ .*

Ejemplo 2: El objetivo del presente ejemplo, viene siendo demostrar que el conjunto  $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}_p$  constituye una base para  $T_pS$ . Comencemos por observar que para  $p = \mathbb{X}(u_0, v_0) \in S$  (o sea, el punto  $p$  tiene coordenadas  $(u_0, v_0)$ ), se tiene que  $\mathbb{X}(u, v_0)$  es una curva en  $S$ , llamada curva coordenada  $v = v_0$ ; de manera semejante,  $\mathbb{X}(u_0, v)$  es la curva coordenada  $u = u_0$ . Estas curvas se intersecan en  $p$ .

Por lo visto anteriormente en el apartado de vectores tangentes a una variedad, los vectores tangentes a estas curvas en  $p$  gozarán también de la propiedad de ser elementos de  $T_pS$ ; en otras palabras,  $\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v$  evaluados en  $p$ , pertenecen a  $T_pS$ .

Como la superficie es regular, se tiene que  $\mathbb{X}_u(u, v)$  y  $\mathbb{X}_v(u, v)$  serán vectores linealmente independientes para cada punto de  $S$ , por lo cual, el conjunto  $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}_p$  es una base para  $T_pS$  (ya que  $\dim T_pS = 2 = \text{dimensión de } S$ ).

Sean:

$$\xi = \xi^1 \mathbb{X}_u + \xi^2 \mathbb{X}_v, \quad \eta = \eta^1 \mathbb{X}_u + \eta^2 \mathbb{X}_v, \quad \xi, \eta \in T_pS.$$

Entonces,

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi^1 \mathbb{X}_u + \xi^2 \mathbb{X}_v, \eta^1 \mathbb{X}_u + \eta^2 \mathbb{X}_v \rangle \langle \xi, \eta \rangle$$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1 \eta^1 \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle + \xi^1 \eta^2 \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle + \xi^2 \eta^1 \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u \rangle + \xi^2 \eta^2 \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle.$$

Como  $\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u \rangle$ , entonces

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1 \eta^1 \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle + (\xi^1 \eta^2 + \xi^2 \eta^1) \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle + \xi^2 \eta^2 \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle$$

$$\langle \xi, \eta \rangle = E \xi^1 \eta^1 + F(\xi^1 \eta^2 + \xi^2 \eta^1) + G \xi^2 \eta^2,$$

en donde el producto interno es el proveniente de  $\mathbb{R}^3$ .

Ejemplo 3: Longitud de una curva.

Sea  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$  una curva regular en la superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , la longitud de  $\alpha$  desde  $\alpha(c)$  hasta  $\alpha(t)$  se define de la siguiente manera:

$$s(t) = \int_c^t |\alpha'(t)| dt = \int_c^t |\mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v'| dt = \int_c^t \langle \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v', \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v' \rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

$$s(t) = \int_c^t \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} dt = \int_c^t \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du dv}{dt dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

Entonces,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du dv}{dt dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Multiplicando ambos miembros de esta última expresión por  $dt^2$  obtenemos (al menos formalmente), la expresión clásica para la métrica en una superficie:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

En esta fórmula podemos interpretar a  $ds$  como una longitud infinitesimal de arco, la cual integrada sobre la curva de coordenadas  $(u(t), v(t))$ , nos proporciona la longitud de la curva.

También podemos interpretarla como una distancia infinitesimal desde el punto  $\mathbb{X}(u, v)$  al punto  $\mathbb{X}(u + du, v + dv)$  en  $S$ , medida a lo largo de la curva (ver [4], [7]).

Escribamos ahora las expresiones de los ejemplos anteriores en forma matricial

$$|\omega|^2 = |\alpha'(0)|^2 = [u' v'] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix},$$

$$\langle \xi, \eta \rangle = [\xi' \eta'] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix},$$

$$ds^2 = [du dv] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix},$$

en donde

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle & \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle \\ \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle & \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle \end{bmatrix}_p.$$

Observamos el papel fundamental que juega la matriz  $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ , ya que define para cada  $p \in S$  una forma bilineal en  $T_p S$ , y por tanto el producto interno en  $T_p S$ , el cual a su vez define la longitud de los vectores tangentes a  $S$  en  $p$ , de la cual depende la geometría de  $S$ .

La fórmula  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$  es la expresión más conocida de la *Primera Forma Fundamental* de una superficie.

Para cada  $p = \mathbb{X}(u, v) \in S$ , los coeficientes de la Primera Forma Fundamental  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  son funciones diferenciables en el dominio de coordenadas de la parametrización.

La discusión anterior la hemos mantenido en el ámbito de superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  como motivación, para entender el significado y alcance de la Primera Forma Fundamental de una superficie, y el papel que juega el producto interno inducido por  $\mathbb{R}^3$ . El trabajo de Riemann de 1854 consistió en extender estas ideas a variedades diferenciables  $n$ -dimensionales, introduciendo en el espacio tangente en cada punto de la variedad una forma bilineal, simétrica, no degenerada, positiva definida, y que varía suavemente sobre la variedad. En cada carta de la variedad la forma bilineal estará representada por una matriz simétrica de dimensiones  $n \times n$ , cuyas entradas serán funciones diferenciables en el dominio de coordenadas de la carta.

Esta forma bilineal definirá el producto interno  $I: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  de elementos del espacio tangente a la variedad  $M$  para cada  $p \in M$ , y a partir del producto interno la estructura geométrica de  $M$ .

Recordemos que las características esenciales de un producto interno en un espacio vectorial son las siguientes:

- i.  $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$
- ii.  $\langle \lambda_1 \xi + \lambda_2 \gamma, \eta \rangle = \lambda_1 \langle \xi, \eta \rangle + \lambda_2 \langle \gamma, \eta \rangle, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- iii.  $\langle \xi, \xi \rangle \neq 0$  si  $\xi \neq 0$ .

El producto interno definido por medio de la forma bilineal anteriormente mencionada cumple con estas características.

Esta estructura introducida por Riemann es la *métrica Riemanniana*, o *tensor métrico* de Riemann.

Volviendo al caso de dos dimensiones, la variedad recibe el nombre de superficie. En caso que el producto interno no sea positivo definido, la métrica se llama pseudo-Riemanniana (observemos que, para este tipo de métrica, puede darse que  $|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle < 0$ ), y la variedad se denomina entonces variedad pseudo-Riemanniana.

Una variedad diferenciable bidimensional equipada con una métrica Riemanniana ó pseudo-Riemanniana, recibe el nombre de *superficie abstracta* (ver [4]).

### ***2.5.3 Ejemplos de superficies abstractas y sus métricas correspondientes***

- $\mathbb{R}^2$ : El producto interno usual de elementos de  $\mathbb{R}^2$

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd,$$

lo podemos escribir como forma bilineal de la siguiente manera,

$$[a \ b] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$$

Si pensamos en  $\mathbb{R}^2$  como una variedad Riemanniana bidimensional de atlas  $(\mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2})$ , entonces:

$$\mathbb{X}(u, v) = (u, v), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{X}_u = (1, 0), \mathbb{X}_v = (0, 1)$$

Utilizando el producto interno definido anteriormente, ya que  $\mathbb{X}_u$  y  $\mathbb{X}_v \in T_p\mathbb{R}^2$ , que es isomórfico a  $\mathbb{R}^2$ , obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} E &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1 \\ F &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0 \\ G &= \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = (0, 1) \cdot (0, 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La expresión de la Primera Forma Fundamental es, por lo tanto,

$$ds^2 = [du \ dv] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

$$\therefore ds^2 = du^2 + dv^2,$$

llamada *métrica Euclidiana* de  $\mathbb{R}^2$ .

Ésto se puede extender de la misma manera a  $\mathbb{R}^n$ ,  $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$  y la métrica es  $(a_{ij})_{n \times n} = (\delta_j^i)_{n \times n}$ , espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

- **Cilindro Circular Recto:**  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z$  es un parámetro libre.

Sea la parametrización  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \quad 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

$$\mathbb{X}_u = (-\sin u, \cos u, 0), \mathbb{X}_v = (0, 0, 1)$$

$$E = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u + 0 = 1$$

$$F = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0$$

$$G = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = 1$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Sorprendentemente, el plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  y este cilindro presentan la misma métrica. En este caso se dice que las variedades son localmente isométricas.

- **Esfera:** Radio  $r = a$ , centrada en el origen.

$$\mathbb{X}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u), 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi.$$

$$\mathbb{X}_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u),$$

$$\mathbb{X}_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0).$$

$$E = a^2 \cos^2 u \cos^2 v + a^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 = a^2,$$

$$F = -a^2 \cos u \cos v \sin u \sin v + a^2 \cos u \sin v \sin u \cos v + 0 = 0,$$

$$G = a^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 \sin^2 u \cos^2 v + 0 = a^2 \sin^2 u.$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 u \end{bmatrix} \therefore ds^2 = a^2 du^2 + a^2 \sin^2(u) dv^2.$$

- **Métrica de Poincaré:** Ésta no surge a consecuencia del producto interno en  $\mathbb{R}^3$ . Sea el dominio  $\mathbb{R}^{2+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ , semiplano superior de  $\mathbb{R}^2$ . Para  $(u, v) \in \mathbb{R}^{2+}$  se define la siguiente métrica:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\lambda^2 v^2}, \lambda > 0,$$

$$\therefore \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 v^2 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 v^2 \end{bmatrix}.$$

- **Gráfica de una función diferenciable:** Sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

$$\mathbb{X}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3,$$

también llamada parametrización de Monge, o “Monge patch”.

$$\mathbb{X}_u = (1, 0, f_u), \quad \mathbb{X}_v = (0, 1, f_v),$$

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2,$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{bmatrix},$$

$$ds^2 = (1 + f_u^2)du^2 + 2f_u f_v dudv + (1 + f_v^2)dv^2.$$

#### 2.5.4 Cambio de coordenadas

A consecuencia de un cambio de coordenadas la expresión de la métrica también cambia.

Por ejemplo, vimos que la métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^2$  es  $ds^2 = du^2 + dv^2$ . Si utilizamos ahora coordenadas polares obtendremos

$$\begin{aligned} u = r \cos \theta &\Rightarrow du = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ v = r \sin \theta &\Rightarrow dv = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} ds^2 = du^2 + dv^2 &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 = \\ &= \cos^2 \theta dr^2 - 2r \sin \theta \cos \theta drd\theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + \sin^2 \theta dr^2 + 2r \sin \theta \cos \theta drd\theta \\ &+ r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \therefore \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix},$$

y la longitud de un arco dado por  $\alpha(t) = \mathbb{X}(r(t) \cos \theta(t), r(t) \operatorname{sen} \theta(t)) = \widehat{\mathbb{X}}(r(t), \theta(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , es

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} dt .$$

### 2.5.5 Otras fórmulas importantes

Para finalizar esta parte mencionaremos las siguientes fórmulas, las cuales dependen de la métrica.

**Ángulo entre vectores:**  $\cos \varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi||\eta|}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

**Ángulo entre curvas:** Se define el ángulo entre dos curvas  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  que se intersecan para  $t = t_0$ , como el ángulo entre sus respectivos vectores tangentes  $\xi$  y  $\eta$  en  $t = t_0$ .

**Área de una región:** Sea  $U \subset S$  una región de la superficie  $S$ , la cual es una variedad Riemanniana bidimensional. Sea  $\mathcal{U} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$  la coordinatización de  $U$  en una carta, entonces:

$$\text{Área de } U = \iint \sqrt{EG - F^2} dudv , \text{ en donde la integral se evalúa sobre } \mathcal{U}.$$

## 2.6 Segunda Forma Fundamental de una superficie, curvatura.

Iniciaremos nuestro estudio con curvas y superficies regulares inmersas en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.6.1 Velocidad, rapidez, aceleración y curvatura de una curva

Sea la curva regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) ; I \subset \mathbb{R}, I \text{ abierto.}$$

Definimos, para  $t \in I$ , el vector tangente a la curva, llamado también *vector velocidad* de la curva

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)),$$

y el *vector aceleración*

$$\alpha''(t) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t), \alpha''_3(t)).$$

La longitud de la curva desde  $t = t_0$  hasta  $t = t \in I$  es, por definición,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|,$$

llamada *rapidez* de la curva. Si la curva viene parametrizada por su longitud de arco (llamado *parámetro natural de la curva*), entonces  $t = s$  y se verifica que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{ds} = 1 = |\alpha'(s)|.$$

Observamos en este último caso que  $\alpha'(s)$  es un *vector tangente unitario a la curva*, y la misma tendrá, entonces, rapidez constante e igual a uno en la dirección creciente de  $s$ , para cada  $s$  perteneciente al dominio de la parametrización.

O sea,

$$|\alpha'(s)|^2 = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \therefore \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle' = 0.$$

Recordando que para vectores  $v(t), w(t)$  en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  se cumple:

$$\langle v, w \rangle' = \langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle,$$

entonces

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle' = 2\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

por lo cual

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad \therefore \quad \alpha''(s) \perp \alpha'(s).$$

**Definición:** La *curvatura*  $k(s)$  de una curva regular  $\alpha(s)$ , es la magnitud del vector aceleración, cuando la curva está parametrizada por su parámetro natural  $s$ .

Entonces,

$$k(s) = |\alpha''(s)|.$$

Si la curva está parametrizada por un parámetro  $t$ , podemos definir el vector tangente unitario a la curva, de la siguiente manera:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad \therefore \quad T(s) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = \alpha'(s).$$

Ahora bien,

$$\alpha'(s) = T(s) \quad \therefore \quad \alpha''(s) = T'(s) = \frac{dT}{ds} \quad \therefore \quad k(s) = |\alpha''(s)| = \left| \frac{dT}{ds} \right|.$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dT/dt}{ds/dt} \quad \therefore \quad \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{dT/dt}{ds/dt} \right| = \left| \frac{T'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = \frac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|} = k(t).$$

De aquí concluimos que, en función del parámetro  $t$ , la curvatura quedará expresada en la forma

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|}.$$

Teniendo en cuenta que los vectores tangentes  $T(s)$  y  $T(t)$  son vectores unitarios (de magnitud constante), por lo visto en el párrafo inmediatamente anterior a la definición de curvatura, se verificará que  $T'(s) \perp T(s)$  y  $T'(t) \perp T(t)$ . Además, ambos vectores estarán dirigidos apuntando hacia el lado cóncavo (interno) de la curva. Definamos ahora el vector unitario  $n(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$ , llamado *vector normal unitario principal* de la curva  $\alpha(t)$  en  $t$ . Expresado en función del parámetro natural de longitud de arco  $s$ ,

$$n(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} \Rightarrow \alpha''(s) = |\alpha''(s)|n(s) = k(s)n(s)$$

$$\therefore T'(s) = k(s)n(s).$$

Esta última expresión es denominada *primera fórmula de Frenet-Serret*.

Sea ahora la curva regular  $\alpha(t)$ . Denotando su vector velocidad como  $v(t)$  se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} v(t) = \alpha'(t) \\ T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \end{array} \right\} \Rightarrow v(t) = |\alpha'(t)|T(t).$$

Como  $|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt}$ , la fórmula para la velocidad de la curva quedará expresada

del siguiente modo:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}T(t),$$

que es la rapidez de la curva multiplicada por el vector tangente unitario a la misma en la dirección creciente del parámetro, para cada  $t \in I$ .

La aceleración de  $\alpha(t)$  será:

$$\alpha''(t) = v'(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} T(t) \right) = \frac{d^2s}{dt^2} T(t) + \frac{ds}{dt} \frac{dT(t)}{dt}.$$

Observamos en esta última expresión que la aceleración consta de un componente tangencial  $\frac{d^2s}{dt^2}T(t)$  dependiente del cambio en la rapidez de la curva en función del parámetro, y un componente normal  $\frac{ds}{dt} \frac{dT(t)}{dt}$  que involucra el cambio de dirección del vector tangente unitario en función de  $t$ .

Si ahora la curva está parametrizada por su longitud de arco  $s$ , entonces

$$\frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

$$\therefore \alpha''(s) = \frac{dT(s)}{ds},$$

en donde se pone de manifiesto que la aceleración de la curva es debida al cambio en la dirección del vector tangente unitario  $T$  en función de la longitud de arco, **lo cual es una consecuencia directa del posicionamiento de la curva en su espacio ambiente**, o sea, de su forma de curvarse. Es por ello que, para definir la curvatura de una curva, se utiliza la aceleración de la curva cuando la misma está parametrizada por su longitud de arco.

Según la primera fórmula de Frenet – Serret anteriormente vista, podemos escribir:

$$\alpha''(s) = \frac{dT(s)}{ds} = k(s)n(s).$$

Finalmente, en todo punto de una curva regular existe un plano muy importante llamado *plano osculador* de la curva, el cual contiene al vector tangente y al vector normal a la curva en el punto en consideración (por más detalles ver [21], [9]).

### 2.6.2 Segunda Forma Fundamental de una superficie

Supongamos una superficie regular y orientada  $S \subset \mathbb{R}^3$  de parametrización

$$r(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

en donde  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U$  abierto.

Como la superficie es regular y orientada, tendrá un vector normal unitario  $\hat{n}$  perfectamente definido en todo punto de la misma y que varía continuamente sobre  $S$ ,

$$\hat{n}(p) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}(p),$$

en donde  $\times$  es el producto vectorial definido en  $\mathbb{R}^3$ .

Si ahora  $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$  es una curva regular en  $S$ , se tendrá que

$$\alpha'(t) = r_u u' + r_v v',$$

$$\alpha''(t) = (r_{uu}u' + r_{uv}v')u' + r_u u'' + (r_{vu}u' + r_{vv}v')v' + r_v v'',$$

$$\alpha''(t) = (r_{uu}u'^2 + 2r_{uv}u'v' + r_{vv}v'^2) + (r_u u'' + r_v v'').$$

Supongamos que  $\alpha(t_0) = p \in S$ , entonces  $r_u(t_0)$  y  $r_v(t_0) \in T_p S$ , por lo cual en el punto  $p$  se tiene que

$$\left. \begin{aligned} r_u \perp \hat{n} &\therefore \langle r_u, \hat{n} \rangle_p = 0 \\ r_v \perp \hat{n} &\therefore \langle r_v, \hat{n} \rangle_p = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore \langle \alpha''(t), \hat{n}(t) \rangle_p = \langle r_{uu}, \hat{n} \rangle_p u'^2(t_0) + 2\langle r_{uv}, \hat{n} \rangle_p u'(t_0)v'(t_0) + \langle r_{vv}, \hat{n} \rangle_p v'^2(t_0).$$

Esta última es una forma cuadrática en el vector velocidad de la curva  $\alpha(t)$  en  $p$ , el cual es un elemento de  $T_p S$  cuyas componentes son  $u'(t_0)$  y  $v'(t_0)$ .

El producto interno  $\langle \alpha''(t), \hat{n}(t) \rangle_p = \langle \alpha''(t_0), \hat{n}(t_0) \rangle$  es la proyección del vector aceleración de la curva sobre el vector normal a la superficie en  $p \in S$ .

Definiendo para todo  $p \in S$ :

$$\left\{ \begin{aligned} L &= \langle r_{uu}, \hat{n} \rangle \\ M &= \langle r_{uv}, \hat{n} \rangle \\ N &= \langle r_{vv}, \hat{n} \rangle, \end{aligned} \right.$$

podemos escribir

$$\langle \alpha''(t), \hat{n}(t) \rangle = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2.$$

Escrita en forma diferencial:

$$\langle \alpha''(t), \hat{n}(t) \rangle dt^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

y se le llama *Segunda Forma Fundamental* de la superficie  $S$ ,

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Observemos que los coeficientes  $L, M$  y  $N$  sólo dependen del punto  $p$  en consideración, y no dependen de la curva  $r(u(t), v(t))$  en particular.

### 2.6.3 Curvatura Normal de una curva en una superficie

Si ahora la curva está parametrizada por longitud de arco, a consecuencia de la primera fórmula de Frenet-Serret anteriormente vista tenemos que

$$T'(s) = \alpha''(s) = k(s)n(s) = r''(u(s), v(s)),$$

en donde  $k(s)$  y  $n(s)$  son, respectivamente, la curvatura y el vector normal unitario de la curva en cada punto  $p$  de la misma, definidos en 2.6.1.

Entonces,

$$\langle \alpha''(s), \hat{n}(s) \rangle ds^2 = k(s) \langle n(s), \hat{n}(s) \rangle ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Teniendo en cuenta que para  $p \in \alpha(s)$  se verifica que  $\langle n(s), \hat{n}(s) \rangle = \cos \theta$ , en donde  $\theta$  es el ángulo entre estos vectores, y que además

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = I_p,$$

Primera Forma Fundamental de  $S$  en  $p$ , denotando la curvatura de  $\alpha$  en  $p$  como  $k(p)$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$k_n(p) = k(p) \cos \theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II_p}{I_p},$$

en donde  $k_n(p)$  es la componente de la proyección del vector aceleración  $\alpha''(s) = k(s)n(s)$  de la curva  $\alpha$  sobre el vector normal  $\hat{n}$  a la superficie  $S$  en  $p$ , y es llamada la *curvatura normal* de  $\alpha$  en  $p$ .

Observamos que  $k_n$  puede ser positivo ó negativo, según la dirección de  $\hat{n}$  (que a su vez depende de la orientación de  $S$ ).

Tengamos en cuenta además que los coeficientes de  $I$  y  $II$  son funciones continuas de los parámetros  $u$  y  $v$ , por lo cual dependen solamente del punto  $p \in S$  bajo escrutinio.

Si reescribimos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$k_n(p) = \frac{L \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2M \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + N \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2},$$

observamos que

$$k_n(p) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)},$$

en donde  $w \in T_pS$  es el vector velocidad de la curva  $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$  en  $p$ , el cual define una dirección en  $T_pS$ .

Además, para cualquier vector  $\lambda w$  colineal con  $w$ , se cumplirá que

$$\frac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 II_p(w)}{\lambda^2 I_p(w)} = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = k_n(p).$$

Entonces podemos decir que, para un vector  $w \in T_p S$ , la expresión  $k_n(p) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}$ , nos da la curvatura normal de cualquier curva regular  $\alpha$  que sea tangente al vector  $w$  en  $p$ .

De aquí el siguiente resultado debido a Meusnier:

“Todas las curvas en una superficie regular  $S$  que sean tangentes en un punto  $p$  a una misma línea, tendrán la misma curvatura normal en  $p$ ”.

A consecuencia de esto, podemos hablar de la curvatura normal en una cierta dirección en  $p$  (ver [5], [9]).

#### ***2.6.4 Sección Normal de una superficie regular***

Dado  $w \in T_p S$ , la intersección de  $S$  con un plano que contenga a  $w$  y a  $\hat{n}_p$  (vector normal unitario a  $S$  en  $p$ ), se llama *sección normal de  $S$  en  $p$  en la dirección  $w$* . Como  $S$  es regular, en un entorno del punto  $p$  la sección normal será una curva plana regular, cuyo vector normal unitario  $n_p = \pm \hat{n}_p$  ó  $n_p = 0$ .

Entonces,  $\cos \theta = \pm 1$  según que  $n_p$  y  $\hat{n}_p$  sean paralelos o antiparalelos, por lo cual  $k_n(p) = \pm k(p)$ , en donde  $k(p)$  es la curvatura de la sección normal de  $S$  en  $p$  en la dirección  $w$ .

#### ***2.6.5 Curvaturas principales, direcciones principales***

La curvatura normal nos brinda información acerca de la manera de curvarse de una superficie  $S$  en un punto  $p$  de la misma, en una cierta dirección  $w \in T_p S$ .

Según el signo de la curvatura normal se presentarán tres casos, a saber:

- $k_n(p) > 0 \Rightarrow$  la sección normal se está curvando en la misma dirección que  $\hat{n}_p$  por lo cual, en la dirección  $w$ ,  $S$  se está curvando hacia su vector normal  $\hat{n}_p$ .
- $k_n(p) < 0 \Rightarrow$  sucede lo contrario al caso anterior ( $n_p$  y  $\hat{n}_p$  son opuestos), y  $S$  se curva alejándose de  $\hat{n}_p$ .
- $k_n(p) = 0 \Rightarrow k(p) = 0$ , la curvatura de la sección normal es cero en  $p$  en la dirección  $w$ , por lo cual el vector normal  $\hat{n}_p$  no se puede definir. De aquí no podemos hacer conclusiones importantes sobre la forma de curvarse de la superficie en esa dirección. Sólo podríamos decir que su curvatura es pequeña.

Vemos entonces que para cada dirección en  $T_pS$  tendremos una sección normal cuya curvatura será (a menos de un signo) el valor de la curvatura normal en el punto en cuestión. Interesante es averiguar los valores máximo y mínimo de  $k_n$ , y las direcciones para las cuales se dan estos valores.

**Definición:** Los valores máximo y mínimo de la curvatura normal, que denotaremos respectivamente  $k_1$  y  $k_2$ , son llamados las *curvaturas principales* de  $S$  en  $p$ ; las direcciones correspondientes a dichas curvaturas, son las *direcciones principales* de la superficie en  $p$ .

Supongamos que el vector  $w$  es un vector unitario, entonces

$$I_p(w) = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = |w|^2 = 1,$$

por lo cual

$$k_n(p) = II_p(w).$$

Observamos que el valor de la Segunda Forma Fundamental para un vector unitario en un punto de una superficie es igual a la curvatura normal de una curva regular tangente a dicho vector en el punto en cuestión.

De aquí se desprende que, para encontrar las curvaturas principales y las direcciones principales de  $S$  en  $p$ , habremos de resolver el siguiente problema (ver [6]):

$$\text{Extremizar la expresión: } k_n(p) = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2,$$

sujeta a la condición

$$I_p(w) = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1.$$

Vamos a resolver este problema utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange. Introduciendo una nueva variable  $\lambda$  (que representará a las curvaturas principales) se obtiene

$$F(u', v') = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 - \lambda(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 - 1).$$

Las condiciones para extremizar  $k_n(p)$  sujeto a  $I_p(w) = 1$  son las mismas que para extremizar  $F(u', v')$  sin ninguna relación entre las variables  $u'$  y  $v'$ .

Para que  $F$  presente extremos es necesario que  $F_{u'} = 0$  y  $F_{v'} = 0$ , por lo cual,

$$\begin{cases} Lu' + Mv' - \lambda(Eu' + Fv') = 0, \\ Mu' + Nv' - \lambda(Fu' + Gv') = 0. \end{cases}$$

Escribiendo el sistema anterior de forma matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí vemos que para que el sistema tenga soluciones no triviales debe verificarse lo siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} = 0.$$

Expandiendo el determinante llegamos a la siguiente ecuación,

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN - 2FM + GL)\lambda + (LN - M^2) = 0, \quad (2.1)$$

la cual es una ecuación cuadrática en las curvaturas principales, cuyo discriminante puede escribirse de la siguiente manera (detalles en [7]):

$$\Delta = 4 \left( \frac{EG - F^2}{E^2} \right) (EM - FL)^2 + \left[ EN - GL - \frac{2F}{E} (EM - FL) \right]^2.$$

Recordando que para una variedad Riemanniana la Primera Forma Fundamental es una forma cuadrática positiva definida, entonces  $EG - F^2 > 0$ , por lo cual  $\Delta \geq 0$ .

- Si  $\Delta > 0$ , tendremos dos soluciones distintas  $\lambda_1 = k_1$  y  $\lambda_2 = k_2$ , las cuales son las curvaturas principales de  $S$  en  $p$ .
- Si  $\Delta = 0$ , entonces  $\lambda_1 = \lambda_2$ , y las curvaturas principales son iguales en  $p$ .

Cuando esto sucede se dice que  $p$  es un *punto umbilical* de  $S$ .

$$\text{Observamos que } \Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} EM - FL = 0 \\ EN - GL = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

### 2.6.6 Curvatura Media, Curvatura Gaussiana

Dividiendo la ecuación (2.1) entre  $(EG - F^2)$  la podemos reescribir en la forma

$$K^2 - 2HK + \mathbb{K} = 0,$$

en donde  $K$  es curvatura principal, y

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

es llamada *curvatura media* de  $S$  en  $p$ ,

$$\mathbb{K} = K_1 K_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

es la *curvatura Gaussiana* de  $S$  en  $p$ .

Como la curvatura normal  $k_n(p)$  de una curva en  $S$  a lo más cambia de signo con un cambio en la orientación de  $S$ , los valores de  $K_1$  y  $K_2$  cambiarán de signo (el máximo se convertirá en el mínimo y viceversa), en virtud de lo cual seguirán siendo los valores extremos de  $K_n(p)$  y el valor de  $\mathbb{K} = K_1 K_2$  no cambiará.

Con el objetivo de obtener las direcciones principales, volvemos al sistema anterior

$$\begin{cases} Lu' + Mv' - \lambda(Eu' + Fv') = 0 \\ Mu' + Nv' - \lambda(Fu' + Gv') = 0, \end{cases}$$

despejando  $\lambda$ , obtenemos:

$$\begin{bmatrix} Lu' + Mv' & Eu' + Fv' \\ Mu' + Nv' & Fu' + Gv' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Para que este sistema tenga soluciones no triviales se necesita que

$$\det \begin{pmatrix} Lu' + Mv' & Eu' + Fv' \\ Mu' + Nv' & Fu' + Gv' \end{pmatrix} = 0,$$

$$\therefore (EM - FL)u'^2 + (EN - GL)u'v' + (FN - GM)v'^2 = 0,$$

ecuación que deben satisfacer las direcciones principales.

Recordando que la Primera y la Segunda Forma Fundamental de  $S$  en  $p$  son formas cuadráticas de matrices  $\mathbb{G} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$  y  $\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$ , en donde la Primera Forma Fundamental es positiva definida, la condición anterior:

$$\det \begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} = 0,$$

es equivalente a

$$\det(\mathbb{Q} - \lambda\mathbb{G}) = 0.$$

Como hemos visto anteriormente, las raíces de esta última ecuación representan a las curvaturas principales de la superficie. Observemos también que estas raíces, que denotaremos ahora  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , son llamadas los valores propios del par de formas cuadráticas  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{G}$ . Es posible demostrar que, si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces las direcciones principales son ortogonales en  $T_pS$ . Esto último es una variante del conocido teorema del álgebra lineal que afirma que, dada una forma cuadrática  $\mathbb{Q}$  de matriz simétrica real en un espacio vectorial  $V$ , existe una base ortonormal de  $V$  en la cual  $\mathbb{Q}$  asume forma diagonal. Los valores propios de la matriz son los valores máximo y mínimo de  $\mathbb{Q}$  en el círculo  $|\xi| = 1$ , y los vectores de la base ortonormal (direcciones principales) son los vectores propios de la matriz (detalles en [9], [5], [4]).

### 2.6.7 Ejemplos

Ejemplo 1: Sea una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  dada como la gráfica de una función diferenciable  $z = f(x, y)$ . La superficie puede ser parametrizada mediante una parametrización de Monge,

$$(x, y, z) = r(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

con  $(u, v) \in U$ , en donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

De aquí,

$$r_u = (1, 0, f_u), \quad r_v = (0, 1, f_v)$$

$$E(u, v) = \langle r_u, r_u \rangle = 1 + f_u^2$$

$$F(u, v) = \langle r_u, r_v \rangle = f_u f_v$$

$$G(u, v) = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + f_v^2$$

$$r_u \times r_v = (-f_u, -f_v, 1), \quad |r_u \times r_v| = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}$$

$$n(u, v) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}$$

$$r_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad r_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \quad r_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

$$L(u, v) = \langle r_{uu}, \hat{n} \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}$$

$$M(u, v) = \langle r_{uv}, \hat{n} \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}$$

$$N(u, v) = \langle r_{vv}, \hat{n} \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}$$

Estas son fórmulas importantes para  $S$ .

La curvatura Gaussiana de la superficie vendrá dada por la fórmula:

$$\mathbb{K}(u, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^2}.$$

La curvatura media:

$$H(u, v) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{(1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2)f_{uu}}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^{3/2}}.$$

Ejemplo 2: Continuando con el ejemplo anterior, supongamos ahora que el punto

$p = (u_0, v_0) \in U$  es un punto crítico de  $f$ , o sea,

$$f_u(u_0, v_0) = 0, \quad f_v(u_0, v_0) = 0, \quad n(u_0, v_0) = (0, 0, 1)$$

De aquí,

$$E(u_0, v_0) = 1 + f_u^2(u_0, v_0) = 1$$

$$F(u_0, v_0) = (f_u f_v)(u_0, v_0) = 0$$

$$G(u_0, v_0) = 1 + f_v^2(u_0, v_0) = 1$$

Entonces, en el punto  $p$  bajo consideración, se cumple que

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)},$$

en donde esta última es la *matriz Hessiana* de la función  $z = f(x, y)$  evaluada en  $p = (u_0, v_0)$ .

Observemos que  $\det(\mathbb{Q} - \lambda \mathbb{G}) = \det(\mathbb{Q} - \lambda \mathbb{I}_2)$ . Por lo tanto, las curvaturas principales de  $S$  en  $p$  se corresponderán con los valores propios de la matriz Hessiana de la función  $z = f(x, y)$  en  $(u_0, v_0)$ .

La curvatura Gaussiana en  $p$  será:

$$\mathbb{K}(u_0, v_0) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{1} = f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2,$$

la cual es el determinante de la matriz Hessiana anteriormente dicha.

La curvatura media en  $p$ :

$$H(u_0, v_0) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{L + N}{2} = \frac{f_{uu} + f_{vv}}{2},$$

que es la mitad de la traza de la matriz Hessiana.

Nótese que la curvatura Gaussiana nos brinda información importante en relación al comportamiento de la gráfica de la función  $f$  en una vecindad del punto  $p$ :

- $\mathbb{K} > 0$ , con  $K_1 > 0$  y  $K_2 > 0$ , la superficie se curva en todas direcciones hacia su normal  $\hat{n}_p = (0, 0, 1)$ , que es paralela al eje  $z$ , por lo cual este caso representa un mínimo local de  $f$  en el punto  $p$ .
- $\mathbb{K} > 0$ , con  $K_1 < 0$  y  $K_2 < 0$ , comportamiento opuesto al anterior, máximo local en  $p$ .
- $\mathbb{K} < 0$ , con  $K_1 > 0$  y  $K_2 < 0$  ó  $K_1 < 0$  y  $K_2 > 0$ , en algunas direcciones la superficie se curvará hacia su normal y en otras direcciones lo hará alejándose de su normal, en este caso se dice que  $p$  es un punto silla de la superficie.

Para este ejemplo que hemos tratado, como  $\mathbb{K}$  es el valor del determinante de la matriz Hessiana de  $f$  en  $p$ , entonces las conclusiones anteriores coinciden con el test de las segundas derivadas parciales de  $f$  en  $p$  conocido del Cálculo elemental (ver [4], [21]).

Como comentario final de este ejemplo, de los tres puntos arriba mencionados se desprende algo muy importante y es que si  $\mathbb{K} > 0$  en  $p$ , la superficie se encuentra localmente a un lado de su plano tangente en  $p$  y si  $\mathbb{K} < 0$ , entonces para algunas direcciones la superficie se encontrará de un lado y en otras direcciones se encontrará del otro lado de su plano tangente en el punto en cuestión, por lo cual la superficie cortará a dicho plano tangente. De aquí podemos inferir que la curvatura Gaussiana nos da un criterio para clasificar los puntos de una superficie, como veremos a continuación.

Ejemplo 3: A colación del ejemplo retropróximo, debido a que toda superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  puede ser representada localmente como la gráfica de una función diferenciable, dado un punto arbitrario  $p \in S$  podemos elegir un sistema de coordenadas

en  $\mathbb{R}^3$  de manera tal que el origen de dicho sistema coincida con el punto  $p$  y el eje  $z$  esté dirigido paralelo a la normal unitaria a  $S$  en  $p$ , que denotaremos  $\hat{n}_p$ . De esta manera, el plano  $xy$  será tangente a  $S$  en  $p$  (el plano  $xy$  coincidirá con  $T_pS$ ).

Por lo tanto, y del mismo modo que en el ejemplo anterior, una vecindad del punto  $p$  podrá ser representada mediante una parametrización de Monge en la forma

$$(x, y, z) = r(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

con  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U$  abierto, y en donde ahora

$$p = (0, 0, 0) = r(0, 0) = (0, 0, f(0, 0))$$

$$f_u(0, 0) = 0, \quad f_v(0, 0) = 0, \quad \hat{n}_p = (0, 0, 1).$$

La curvatura Gaussiana de la superficie en el punto  $p$  será ahora el determinante de la matriz Hessiana de  $f$  evaluado en  $(0, 0)$  y cada punto de la superficie podrá ser clasificado según el signo de  $\mathbb{K}$ , de la siguiente manera:

- Punto elíptico: cuando  $\mathbb{K} > 0$ . En este caso,  $K_1$  y  $K_2$  tienen igual signo, lo cual significa geoméricamente que  $S$  se encuentra a un lado de  $T_pS$ .
- Punto hiperbólico: cuando  $\mathbb{K} < 0$ . Aquí tenemos que  $K_1$  y  $K_2$  tienen diferente signo, por lo cual en algunas direcciones la superficie estará de un lado de  $T_pS$  y en otras direcciones del otro lado de  $T_pS$ . Se dice que  $p$  es un punto silla.
- Punto parabólico: cuando  $\mathbb{K} = 0$  pero  $K_1$  y  $K_2$  no son simultáneamente cero. Por ejemplo, los puntos de un cilindro son puntos parabólicos.
- Punto planar: Cuando  $\mathbb{K} = 0$ , con  $K_1 = K_2 = 0$ .

Los puntos del plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  son puntos planares.

De esta manera, los puntos de una superficie quedan clasificados en cuatro tipos.

Ejemplo 4: En el Ejemplo 2 hemos visto que las curvaturas principales de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ , dada como la gráfica de una función diferenciable  $z = f(x, y)$ , en un punto crítico  $p = (u_0, v_0)$  de la misma, vienen dadas por los valores propios de la matriz Hessiana de la función en dicho punto, que denotaremos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

Sea  $w \in T_p S$ , tal que  $|w|^2 = I_p(w) = 1$ . El vector  $w = (w_1, w_2)$  representa una dirección en  $T_p S$ .

La curvatura normal de la superficie  $S$  en el punto  $p$  en la dirección  $w$  vendrá dada por:

$$\begin{aligned} k_n(p) &= \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = Lw_1^2 + 2Mw_1w_2 + Nw_2^2 \\ &= f_{uu}w_1^2 + 2f_{uv}w_1w_2 + f_{vv}w_2^2. \end{aligned}$$

Esta última forma cuadrática la podemos escribir en la forma matricial

$$k_n(p) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{uu}(u_0, v_0) & f_{uv}(u_0, v_0) \\ f_{uv}(u_0, v_0) & f_{vv}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = (D^2 f_p)(w, w).$$

Al diagonalizar la matriz Hessiana, la forma cuadrática adquiere la siguiente forma:

$$k_n(p) = \begin{bmatrix} \overline{w}_1 & \overline{w}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \end{bmatrix},$$

en donde ahora  $w = (\overline{w}_1, \overline{w}_2)$  está expresado en la base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$ , constituida por los vectores propios de la matriz, direcciones principales de  $S$  en  $p$ .

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , con  $\lambda_1 > \lambda_2$ , entonces  $\lambda_1 = K_1$  y  $\lambda_2 = K_2$ , por lo que la expresión para la curvatura normal es ahora:

$$k_n(p) = [\overline{w}_1 \ \overline{w}_2] \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \end{bmatrix} = K_1 \overline{w}_1^2 + K_2 \overline{w}_2^2,$$

siendo  $K_1$  y  $K_2$  las curvaturas principales de  $S$  en  $p$ .

Si tomamos ahora  $\theta \in \mathbb{R}$ , en donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector unitario  $w \in T_p S$  y la dirección principal  $e_1 \in T_p S$ , con  $\theta \in [0, 2\pi)$ , podemos representar al vector  $w$  en la base  $\{e_1, e_2\}$  en la forma

$$w = e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta,$$

o sea

$$w = (\overline{w}_1, \overline{w}_2) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta),$$

por lo cual

$$K_n(p) = K_1 \cos^2 \theta + K_2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Esta fórmula nos da el valor de la curvatura normal de  $S$  en  $p$  en la dirección  $w$ , en función de las curvaturas principales  $K_1$  y  $K_2$  de  $S$  en  $p$ , y el ángulo  $\theta$  entre el vector  $w$  y la dirección principal  $e_1$  correspondiente a  $K_1$ .

La misma fue desarrollada por Euler en 1760 y se le denomina “fórmula de Euler”. En virtud de la discusión al inicio del ejemplo 3, la misma es válida en todo punto de una superficie regular y en cualquier sistema de coordenadas que se utilice para parametrizar la superficie (más detalles en [9], [5]).

### 2.6.8 Teorema Egregio de Gauss

Las cuatro funciones más importantes para una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  vistas hasta ahora son las curvaturas.

En orden de importancia, éstas son:

- Curvatura Gaussiana:  $\mathbb{K} = K_1 K_2$ .
- Curvatura media:  $H = \frac{K_1 + K_2}{2}$ .
- Curvaturas principales:  $K_1$  y  $K_2$ .
- Curvatura normal:  $k_n$ .

También hemos observado la importancia de la curvatura Gaussiana, en donde su signo nos da una idea directa de la manera de situarse de la superficie en su espacio ambiente, conduciéndonos a la clasificación de los puntos de la misma en cuatro clases diferentes.

Empero, la curvatura Gaussiana presenta un aspecto más trascendental todavía, que se debe al sorprendente descubrimiento de Gauss, en donde este notable matemático logra expresar a  $\mathbb{K}$  solamente en términos de los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de la superficie y sus derivadas parciales. Esto constituye, en esencia, su Teorema Egregio, el cual es uno de los teoremas más importantes del Siglo XIX. De aquí podemos inferir que la curvatura Gaussiana depende solamente de las propiedades métricas intrínsecas de la superficie, y que superficies localmente isométricas (como el cilindro y  $\mathbb{R}^2$  vistos anteriormente) tendrán igual curvatura Gaussiana.

He aquí el enunciado del Teorema Egregio de Gauss dado en [5]:

**Teorema Egregio de Gauss:** “La curvatura Gaussiana  $\mathbb{K}$  de una superficie es invariante bajo isometrías locales”.

En [21] se da el siguiente enunciado:

**Teorema Egregio de Gauss:** “La curvatura Gaussiana está determinada solamente por la primera forma fundamental I. Esto es,  $\mathbb{K}$  puede ser computada a partir de  $E, F, G$ , y sus primeras y segundas derivadas parciales”.

En la demostración del teorema, y luego de un esclarecedor esfuerzo, Gauss llega a la siguiente expresión dada en [3]:

$$4\mathbb{K}(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} 4F_{uv} - 2E_{vv} - 2G_{uu} & E_u & 2F_u - E_v \\ 2F_v - G_u & E & F \\ G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E_v & G_u \\ E_v & E & F \\ G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

Esta es la fórmula que usaremos en este trabajo para calcular la curvatura Gaussiana de las superficies presentadas en el mismo.

Si recordamos la expresión anterior para  $\mathbb{K}$ :

$$\mathbb{K} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

en primera instancia nada nos haría sospechar que  $\mathbb{K}$  fuese independiente de los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental.

Como corolario del Teorema Egregio podemos expresar, siguiendo a [21], lo siguiente: “Si dos superficies son localmente isométricas, sus curvaturas Gaussianas en puntos correspondientes son iguales”.

Cabe acotar que el recíproco del Teorema Egregio de Gauss no se cumple, o sea, puede haber superficies que no sean localmente isométricas pero que tengan igual curvatura Gaussiana.

Veamos un contraejemplo:

Las superficies definidas por las siguientes parametrizaciones:

$$S_1: (u, v) \rightarrow (av \cos u, av \sin u, b \log v),$$

$$S_2: (u, v) \rightarrow (av \cos u, av \sin u, bu),$$

presentan igual curvatura Gaussiana

$$\mathbb{K} = \frac{-b^2}{b^2 + a^2v^2},$$

sin embargo, calculando los coeficientes de la Primera Forma Fundamental se obtiene:

- Para  $S_1$ :  $E = a^2v^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = a^2 + \frac{b^2}{v^2}$ .
- Para  $S_2$ :  $E = b^2 + a^2v^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = a^2$ .

Observamos que las superficies presentan distintos coeficientes de la Primera Forma Fundamental (ver [4], [21]).

### ***2.6.9 Algunas consecuencias del Teorema Egregio***

Las consecuencias de este Teorema son muy profundas. El hecho de que la curvatura Gaussiana dependa solamente de las propiedades métricas internas de la superficie hace que se cuestione la presencia de un espacio ambiente que contenga a la misma. Todo esto trajo aparejado un cambio en la manera de concebir a estos objetos matemáticos, tal como lo discutimos en *2.1 Variedades Diferenciables* al principio de este trabajo.

El descubrimiento de Gauss también revela que las dos Formas Fundamentales están interrelacionadas, no son independientes la una de la otra.

Hasta aquí nos hemos movido en superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  para poder visualizar y entender los conceptos básicos relacionados con la curvatura.

Para una variedad  $m$ -dimensional  $M$  inmersa en  $\mathbb{R}^{m+1}$ , existirán  $m$  curvaturas principales  $K_1, \dots, K_m$  en cada punto de  $M$ .

Cuando se trata de una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional para  $n > 2$ , la situación se torna mucho más complicada. La curvatura es descrita por un tensor llamado *tensor de curvatura*, el cual es una forma cuatri-lineal, muy compleja de estudiar. El Teorema Egregio de Gauss se generaliza, en donde ahora el tensor de curvatura de Riemann es intrínseco a  $M$  (ver [3], [8], [11]).

Cuando se trata de superficies abstractas, a partir de los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de la superficie podemos calcular la curvatura Gaussiana de la misma.

## 2.7 Geodésicas en una superficie

Como hemos visto en 2.5.2, Ejemplo 3, la longitud de una curva regular  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$  inmersa en una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  desde  $\alpha(c)$  hasta  $\alpha(t)$ , viene dada por la fórmula

$$s(t) = \int_c^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt.$$

Observemos en esta última expresión la dependencia de  $s(t)$  con la Primera Forma Fundamental de la superficie.

Supongamos ahora los puntos  $p = \alpha(c)$  y  $q = \alpha(d) \in S$ , la longitud de  $\alpha$  desde  $p$  hasta  $q$  será:

$$\ell_g(\alpha) = \int_c^d \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt = \int_c^d |\alpha'(t)|_g dt.$$

Nótese que podemos interpretar a  $\ell_g(\alpha)$  como la distancia desde  $p$  a  $q$  medida a lo largo de la curva  $\alpha \subset S$ . De esta manera, para cada curva  $\alpha$  en  $S$  que conecte a los puntos  $p$  y  $q$  vamos a tener un valor de  $\ell_g(\alpha)$ , el cual vendrá dado por la fórmula anterior, y en donde los límites de integración serán propios de la parametrización de la curva de coordenadas  $(u(t), v(t))$ . Surge entonces la necesidad de definir más precisamente la noción de distancia entre puntos en una superficie o, más generalmente, en una variedad Riemanniana.

### 2.7.1 Función distancia Riemanniana, caminos más cortos, segmentos

**Definición:** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana conexa. La *distancia* entre los puntos  $p$  y  $q \in M$ , que denotaremos  $d_g(p, q)$ , es el ínfimo del largo de las curvas en  $M$  que conectan a dichos puntos,

$$d_g(p, q) = \inf \{ \ell_g(\alpha) \mid \alpha \text{ es una curva en } M; \alpha(c) = p, \alpha(d) = q \}.$$

Es posible demostrar que la distancia así definida es una métrica sobre la variedad, por lo cual la misma adquiere la estructura de espacio métrico.

**Definición:** Dados  $p$  y  $q \in M$ , las curvas en  $M$  que conectan a ambos puntos y cuyo largo es igual a la distancia entre los mismos ( $\ell_g(\alpha) = d_g(p, q)$ ), son llamadas *caminos más cortos* ó *segmentos* entre  $p$  y  $q$ .

De las definiciones anteriores surgen cuestiones interesantes en relación a la existencia y unicidad de los segmentos que unen puntos en una variedad así como

también a la manera de obtener las ecuaciones de dichas curvas. En nuestro caso vamos a estar interesados en variedades bidimensionales (superficies), por lo cual mantendremos la discusión en ese ámbito.

### ***2.7.2 Geodésicas en una superficie***

Todos tenemos la intuición geométrica de que el camino más corto entre todos los posibles que conecta a dos puntos dados en el plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , es el segmento de recta que une a dichos puntos. Además, tomamos naturalmente la distancia entre ambos puntos del plano como la longitud de dicho segmento de recta.

Lo que no es tan trivial es demostrar rigurosamente el dictado de nuestra intuición geométrica anteriormente expresado. La rama de las Matemáticas llamada Cálculo de Variaciones surge precisamente para dar respuesta a este tipo de problemas.

Si tenemos una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , considerando la situación de encontrar para dos puntos dados una curva  $\alpha$  en  $S$  que tenga la menor longitud entre todas las curvas que conectan a ambos puntos, el cálculo de variaciones nos indica que la aceleración de  $\alpha$  tiene que ser perpendicular a  $S$  en todo punto de  $\alpha$ . En otras palabras, la componente tangencial de la aceleración de la curva (llamada aceleración tangencial, mencionada en 2.6.1) tiene que ser igual a cero. Esto significa que, vista desde la superficie,  $\alpha$  es una curva de aceleración nula, o sea, de velocidad constante. Esta es la caracterización de las *curvas geodésicas* en una superficie. Los segmentos, definidos en

la sección anterior, serán entonces arcos de geodésicas, o sea que, para determinar los segmentos entre dos puntos dados es necesario obtener las ecuaciones de las curvas geodésicas.

Observemos que este resultado concuerda con lo anteriormente expresado en relación a la distancia entre puntos en  $\mathbb{R}^2$ , ya que las curvas que tienen velocidad constante y aceleración tangencial nula en dicho espacio son las líneas rectas.

Desde el punto de vista anteriormente expresado las curvas geodésicas en una superficie son asimilables a las líneas rectas de dicha superficie. Por ejemplo, los rayos de luz seguirán dichas trayectorias según el principio de mínima acción de Fermat, condicionando las imágenes y propagación de señales electromagnéticas en la misma. Una partícula que esté confinada a moverse en la superficie y que no esté sometida a la acción de fuerzas (lo que se llama una partícula libre) se moverá según las curvas geodésicas de la superficie, como consecuencia del principio de mínima acción de Hamilton. De aquí que estas curvas sean tan importantes para entender el comportamiento de sistemas físicos en ciertos dominios.

Ejemplo 1: Para la esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , las geodésicas se corresponden con los círculos máximos de la superficie (obtenidos al intersecar la misma con planos que pasan por el centro de la esfera). Si los puntos sobre la superficie están lo suficientemente próximos habrá un único círculo máximo (o sea, una única geodésica) que los conectará, la cual constituirá el segmento ó camino más corto entre ambos. La distancia entre los puntos será la longitud de dicho arco. Cualquier otra curva que conecte a ambos puntos tendrá una longitud mayor que la anterior. Si los puntos se corresponden con los polos de

la esfera (antipodales), entonces habrán infinitas geodésicas que los unen (que son los meridianos de la esfera). Si tenemos dos puntos próximos entre sí sobre la superficie de la esfera conectados por una única geodésica, y un punto empieza a alejarse del otro siguiendo la trayectoria de dicha curva, en un momento llegarán a ser antipodales entre sí, y como habíamos visto la geodésica dejará de ser única, si aún los puntos se siguen alejando por dicha trayectoria, entonces dicho arco dejará de ser el camino más corto entre los puntos. El segmento será ahora el arco del mismo círculo máximo desde el punto inicial al punto final, pero recorrido en sentido opuesto al anterior.

De este ejemplo podemos inferir que no siempre una geodésica se corresponde con el camino más corto entre dos puntos en una variedad Riemanniana. De todos modos, es claro que el camino más corto siempre es un arco de geodésica.

Por último, otra manera de entender geoméricamente el resultado anterior proveniente del cálculo de variaciones, es observar que el plano osculador de una curva geodésica es ortogonal al plano tangente a la superficie en todo punto de la curva.

### ***2.7.3 Conexión, derivada covariante, campos paralelos***

Para una curva  $\alpha: I \rightarrow M$ , en donde  $M$  es una variedad diferenciable, una correspondencia que asigna a cada  $t \in I$  un vector  $w(t) \in T_{\alpha(t)}M$ , es llamado un campo de vectores sobre la variedad a lo largo de la curva [12]. Observemos que la velocidad de una curva, en todo punto de la misma, puede ser interpretada como un campo de vectores a lo largo de la curva, en donde  $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ . Más generalmente, para cualquier campo de vectores  $Y(x)$  sobre  $M$ , la restricción de dicho campo a la curva  $\alpha$ , es un campo de

vectores a lo largo de la curva, en donde  $Y(\alpha(t)) = X(t) \in T_{\alpha(t)}M$ . En este caso se dice que  $X$  es un campo de vectores inducido por  $Y$  [12].

En la sección anterior hemos trabajado con superficies en  $\mathbb{R}^3$  en donde nos hemos valido del espacio ambiente para obtener la aceleración de la curva, que es la derivada de su velocidad con respecto al parámetro  $t$ . Ahora bien, cuando se trata de variedades diferenciables en donde no disponemos a priori de un espacio ambiente, se hace necesario introducir nuevos conceptos con el fin de poder definir la manera de diferenciar campos de vectores sobre la variedad.

Sea  $\mathfrak{X}(M) = \{X | X \text{ es un campo de vectores sobre } M\}$ .

**Definición:** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una *conexión* ó *derivada covariante* en  $M$ , es una aplicación [4]

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

la cual, para  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , podemos concebirla como el mapa

$$\nabla_X: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

tal que para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f, g \in C^\infty(M)$  se cumple que

$$i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$$

$$ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$iii) \nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_XY.$$

Obsérvese que para  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$ , de *ii)* y *iii)* se deduce que

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_XY + b\nabla_XZ.$$

Para una variedad diferenciable en general no hay una manera canónica de asignar una conexión a la misma, sin embargo, si la variedad es Riemanniana sí existe tal

conexión, la cual se dice que es compatible con la métrica y es llamada *conexión de Levi-Civita* ó *conexión Riemanniana* sobre  $M$  [12].

Si  $X$  es un campo de vectores a lo largo de una curva  $\alpha$  en una variedad la derivada covariante de  $X$  se denota  $\frac{DX}{dt}$ . Si además  $X$  es un campo inducido por  $Y$ , entonces se tiene que

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} Y.$$

**Definición:** Sea  $M$  una variedad diferenciable en donde hay definida una conexión  $\nabla$ . Un campo de vectores  $X$  a lo largo de la curva  $\alpha: I \rightarrow M$  se dice *paralelo* si,  $\forall t \in I$ , se cumple que

$$\frac{DX}{dt} = 0.$$

Volviendo al caso de superficies en  $\mathbb{R}^3$ , sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular,  $\alpha: I \rightarrow S$  una curva en  $S$ . Además, sea  $X(t): I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de vectores sobre  $S$  a lo largo de la curva  $\alpha$ .

Por lo general, el vector  $\frac{dX}{dt} \notin T_{\alpha(t)}S$ . Esto nos indica que, a priori, la diferenciación de un campo de vectores sobre  $S$  no es una operación geoméricamente intrínseca a la superficie. Si tomamos la proyección ortogonal de  $\frac{dX}{dt}$  sobre  $T_{\alpha(t)}S$ , que denotaremos  $\frac{DX}{dt}$ , este nuevo vector así obtenido puede ser interpretado como la derivada de  $X$  vista desde  $S$ . Esta es en este caso la derivada covariante de  $X$  [5]. Si  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \xi \in T_pS$ , entonces la expresión  $\frac{DX}{dt}(0)$  es llamada la derivada covariante en  $p$  del campo de vectores  $X$  relativa al vector  $\xi$  [5].

La definición de conexión es una generalización a variedades diferenciables de lo expuesto arriba.

Luego de haber estudiado el significado geométrico de la derivada covariante en el ámbito de superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$  nos percatamos que, por lo expuesto en 2.7.2, las curvas geodésicas en una superficie son aquellas para las cuales la derivada covariante de su velocidad relativa a su velocidad es cero en todo punto de la curva.

Expresando esto último en términos de la definición de conexión se obtiene

$$\nabla_{\alpha'(t)}(\alpha'(t)) = 0, \quad \forall t \in I,$$

en donde  $\nabla_{\alpha'(t)}(\alpha'(t))$  es llamada la aceleración de la curva en  $S$ , la cual depende de la conexión  $\nabla$ .

Equivalentemente, y a la luz de la definición de campos paralelos podemos decir que las curvas geodésicas son aquellas para las cuales su campo de velocidades es un campo paralelo (algunos autores les llaman curvas *auto-paralelas*).

La noción de derivada covariante nos permite entonces caracterizar los caminos que minimizan la distancia entre puntos en una variedad. Como este es un problema esencialmente métrico, dependerá solamente de las propiedades métricas intrínsecas de la variedad. Cuando se trata de una superficie  $S$  es esperable entonces que la derivada covariante y las ecuaciones diferenciales que caracterizan a las curvas geodésicas en  $S$  dependan de la Primera Forma Fundamental de  $S$ .

#### ***2.7.4 Símbolos de Christoffel para una superficie***

Los símbolos de Christoffel son coeficientes que nos permiten obtener la expresión de la derivada covariante en coordenadas [4]. Se calculan a través de los coeficientes  $E, F$  y  $G$  de la Primera Forma Fundamental y sus derivadas de primer orden.

Se definen de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{cases}$$

Para una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  de parametrización

$$\mathbb{X}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)),$$

los símbolos de Christoffel satisfacen las siguientes ecuaciones, llamadas Ecuaciones de Gauss:

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbb{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbb{X}_v + LU, \\ \mathbb{X}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbb{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbb{X}_v + MU, \\ \mathbb{X}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbb{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbb{X}_v + NU, \end{cases}$$

en donde  $U = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v|}$  es el vector normal unitario y  $L, M, N$  son los coeficientes de la

Segunda Forma Fundamental de la superficie.

### 2.7.5 Ecuaciones de las geodésicas en una superficie

Supongamos la superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  de parametrización  $\mathbb{X}(u, v)$ ,  $(u, v) \in W \subset \mathbb{R}^2$  y la curva  $\alpha$  en  $S$ ,  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ .

Entonces,

$$\alpha'(t) = \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v',$$

$$\alpha''(t) = (\mathbb{X}_{uu} u'^2 + 2\mathbb{X}_{uv} u'v' + \mathbb{X}_{vv} v'^2) + (\mathbb{X}_u u'' + \mathbb{X}_v v'').$$

Introduciendo ahora las expresiones para  $\mathbb{X}_{uu}$ ,  $\mathbb{X}_{uv}$  y  $\mathbb{X}_{vv}$  dadas por las Ecuaciones de Gauss, la expresión para  $\alpha''(t)$  se convierte en

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = & (u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2)\mathbb{X}_u + \\ & (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2)\mathbb{X}_v + \\ & (Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)U. \end{aligned}$$

Para que  $\alpha$  sea una geodésica en  $S$ , según lo expresado en 2.7.2, los coeficientes de  $\mathbb{X}_u$  y  $\mathbb{X}_v$  (que son los componentes tangenciales de la aceleración) deben anularse, por lo cual debe verificarse lo siguiente:

$$\boxed{\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0 \end{cases}}.$$

Estas son las ecuaciones diferenciales que definen a las curvas geodésicas en la superficie. Es un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales acopladas en  $u(t)$  y  $v(t)$ , las cuales son las coordenadas de las curvas. Luego de resolverse (lo cual, claro está, no es tan simple), se obtiene la expresión para las curvas  $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ .

Nótese que las ecuaciones diferenciales están escritas únicamente en términos de los Símbolos de Christoffel, por lo que (y como era de esperarse) dependerán solamente

de los coeficientes de la Primera Forma Fundamental de  $S$ . Como consecuencia, estas ecuaciones nos permitirán también definir las curvas geodésicas en una superficie abstracta (más detalles en [3], [4], [5], [12]).

## 2.8 Gradiente, Divergencia, Laplaciano

Hasta ahora hemos visto que en cada punto  $x$  de una variedad Riemanniana  $M$  hay definido un espacio vectorial de la misma dimensión de  $M$ , llamado el espacio tangente, cuyos elementos son vectores tangentes a  $M$  en  $x$  y que se denota por  $T_x M$ .

Asimismo,  $T_x M$  tiene un espacio dual que denotamos  $T_x^* M$ , cuyos elementos son funcionales lineales sobre  $T_x M$ . A este espacio lo denominamos espacio cotangente, y a sus elementos, covectores.

En una carta  $U$  que contiene al punto  $x \in M$  de coordenadas locales  $x^1, \dots, x^n$ , el conjunto  $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x \right\}$  es una base para  $T_x M$  y el conjunto  $\mathcal{B}^* = \{dx^1, \dots, dx^n\}$  una base para  $T_x^* M$ .

Al ser  $M$  una variedad Riemanniana, para cada punto  $x \in M$  hay definido un producto interno en  $T_x M$ , por lo cual  $T_x M$  es un espacio vectorial finito dimensional con producto interno.

Dado  $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$ , por el Teorema de Riesz sabemos que existe un único funcional  $\xi^* \in T_x^* M$  tal que  $\xi^*(\omega) = \langle \omega, \xi \rangle, \forall \omega \in T_x M$ .

Representando el funcional  $\xi^*$  en la base  $\overline{\mathcal{B}^*}$ ,  $\xi^* = \xi_i^* dx^i$  (recordemos que estamos usando el convenio de sumación de Einstein), vemos que:

$$\begin{aligned}\xi^* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \xi_1^* dx^1 \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \dots + \xi_i^* dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \dots + \xi_n^* dx^n \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ \xi^* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \xi_1^* \frac{\partial x^1}{\partial x^i} + \dots + \xi_i^* \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \right) + \dots + \xi_n^* \left( \frac{\partial x^n}{\partial x^i} \right) = 0 + \dots + \xi_i^* + \dots + 0 \\ \xi^* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \xi_i^*\end{aligned}$$

Además,

$$\xi^* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \xi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \xi^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = g_{ij} \xi^j,$$

por lo cual  $\xi_i^* = g_{ij} \xi^j$ , en donde  $(g_{ij})$  es la expresión de la métrica en la carta  $U$ .

Tengamos en cuenta que en la notación que estamos usando los superíndices se refieren a componentes de vectores, como  $\xi^j$  y subíndices se refieren a componentes de covectores, como es el caso de  $\xi_i^*$ .

Haciendo esta distinción, la última expresión puede ser escrita en la forma

$$\xi_i = g_{ij} \xi^j.$$

Identificando los elementos de  $T_x M$  y  $T_x^* M$  con sus componentes respectivas en las bases anteriormente mencionadas, y denotando la métrica en  $x \in M$  como  $g = g_{ij}$ , podemos escribir:  $\xi^* = g\xi$  y por lo tanto, también:  $\xi = g^{-1}\xi^* = (g^{ij})\xi^*$  en donde  $g^{ij}$  son las entradas de  $g^{-1}$ . Entonces,  $\xi^i = g^{ij} \xi_j$ .

En otras palabras, la métrica  $g$  nos permite establecer la correspondencia  $T_x M \leftrightarrow T_x^* M$ . A esto se le denomina *subida y bajada de índices*. Si  $g = \delta_j^i$ , entonces no hay distinción entre las componentes de vectores y sus respectivos covectores.

Luego de este preámbulo, vamos a definir el gradiente de una función en una variedad.

### 2.8.1 Gradiente de una función

Sea  $f \in C^\infty(M)$ , como  $df: T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional lineal para cada  $x \in M$ , el teorema de Riesz nos asegura que existe un único vector en  $T_x M$ , que llamaremos *gradiente de  $f$  en  $x$* , y que denotaremos  $\nabla_g f$ , tal que

$$df(\omega) = \langle \omega, \nabla_g f \rangle, \forall \omega \in T_x M.$$

Teniendo en cuenta que  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ , y a consecuencia de lo anteriormente expuesto, vemos que

$$(\nabla_g f)^* = df,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} (\nabla_g f)^i &= g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ \therefore \nabla_g f &= g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

en donde todas las partes de esta última expresión están evaluadas en  $x \in M$ .

### 2.8.2 Ejemplo: Gradiente de una función en $\mathbb{R}^n$

En el caso que  $M = \mathbb{R}^n$  con la métrica euclidiana estándar,

$$g = (g_{ij}) = (\delta_j^i), \quad g^{-1} = (g^{ij}) = (\delta_j^i),$$

por lo cual

$$\nabla_g f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Si identificamos la base de  $T_x M$  con la base de  $\mathbb{R}^n$ :  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ;  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ ;  $e_n = (0, \dots, 1)$ , entonces

$$\nabla_g f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} e_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) = \nabla f,$$

expresión para el gradiente de una función en  $\mathbb{R}^n$  por todos conocida del cálculo elemental.

### 2.8.3 Campo de vectores

Prosiguiendo con las definiciones, diremos que un *campo de vectores* sobre  $M$  es una familia  $\{v(x)\}_{x \in M}$ , tal que  $v(x) \in T_x M, \forall x \in M$ .

En coordenadas locales  $x^1, \dots, x^n$ , se puede representar en la forma

$$v(x) = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Si las funciones  $v^i(x)$  son suaves en cualquier carta, el campo  $v(x)$  se dice *suave*. Podemos concebir a un campo de vectores suave como una asignación suave y continua de un elemento de  $T_x M$  en cada punto  $x \in M$ .

### 2.8.4 Soporte de una función

Para una función  $f \in C(M)$  ó  $C^k(M)$ , definimos su *soporte* como:

$$\text{supp}f = \overline{\{x \in M: f(x) \neq 0\}}, \text{ en donde la clausura es en } M.$$

Si el soporte de  $f$  es compacto se denota:  $f \in C_o(M)$  ó  $f \in C_o^k(M)$ .

### 2.8.5 Forma de volumen

Recordando la expresión para el área de una región  $U$  en una variedad Riemanniana bidimensional  $S$ :

$$\text{Área de } U = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx^1 dx^2,$$

en donde  $\Omega = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$  es el dominio de coordenadas de  $U$  en una carta consistente con la orientación de  $S$  (por ejemplo, para una superficie regular  $S$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  la orientación tiene que ver con la asignación continua de un vector normal a  $S$  en cada  $p \in S$ ). Cuando la parametrización es consistente con la orientación se dice que la parametrización es positiva.

Observamos que un ingrediente importante en esta fórmula es el término  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\det g}$ , en donde  $g = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$  es la expresión de la métrica en la carta.

De manera análoga, para una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional orientada, se define el volumen de una región  $R \subset M$ , en donde  $R$  es abierto, conexo y de clausura compacta.

Sea  $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow M$  una parametrización positiva tal que  $R \subset \mathbb{X}(\Omega)$ .

Entonces,

$$\text{vol}(R) = \int_{\mathbb{X}^{-1}(R)} \sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n$$

A la expresión  $\sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n$  se le llama *forma de volumen* de la variedad Riemanniana.

### 2.8.6 Divergencia de un campo de vectores

**Teorema:** Dada una variedad Riemanniana  $M$  y un campo de vectores arbitrario  $\xi(x)$  de clase  $C^\infty$ , existe una única función suave en  $M$ , que denotaremos  $\text{div } \xi$ , tal que, para toda función  $f \in C_0^\infty(M)$ , se cumple que:

$$\int_M (\text{div } \xi) f \, d\text{vol} = - \int_M \langle \xi, \nabla f \rangle_g \, d\text{vol}$$

Demostración:

Supongamos una carta  $U$  de coordenadas  $x^1 \dots x^n$ , entonces, por la definición de gradiente de una función vista anteriormente,  $\forall f \in C_0^\infty(U)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int \langle \xi, \nabla f \rangle_g \, d\text{vol} &= \int df(\xi) \, d\text{vol} = \int \xi(f) \, d\text{vol} = \\ \int \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n &= \int (\xi^i \sqrt{\det g}) \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^1 \dots dx^n, \end{aligned}$$

en donde las integrales son definidas sobre el dominio de coordenadas de la carta  $U$ .

Integrando por partes en  $U$ , y recordando que  $f \in C_0^\infty(U)$ ,

$$\begin{aligned} \int (\xi^i \sqrt{\det g}) \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^1 \dots dx^n &= - \int \frac{\partial}{\partial x^i} (\xi^i \sqrt{\det g}) f \, dx^1 \dots dx^n = \\ - \int \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\xi^i \sqrt{\det g}) f \sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n &= - \int \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\xi^i \sqrt{\det g}) f \, d\text{vol} \end{aligned}$$

De aquí concluimos que la expresión de la divergencia de  $\xi(x)$  en la carta  $U$  es

$$\operatorname{div}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\xi^i \sqrt{\det g}).$$

Con el propósito de probar la unicidad de  $\operatorname{div} \xi$ , probaremos un Lema previo.

**Lema:** Si  $f \in C(M)$ , y  $\int_M f \varphi \, d\operatorname{vol} = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(M)$ , entonces  $f \equiv 0$ .

Prueba: Supongamos que  $f(x_0) \neq 0$  para  $x_0 \in M$ .

Sea entonces  $f(x_0) > 0$ . Como  $f$  es continua en  $M$ , existe una vecindad abierta  $U \subset M$ , tal que  $x_0 \in U$ , y en donde  $f$  es estrictamente positiva.

Sea ahora una función  $\varphi \in C_0^\infty(M)$ , tal que  $\varphi \equiv 1$  en un abierto  $U_1 \subset U$ , con  $x_0 \in U_1$ ;  $\varphi = 0$  en  $M \setminus U$  (a este tipo de función se le llama *función de corte* de  $x_0$  en  $U$ ).

Entonces,

$$\int_M f \varphi \, d\operatorname{vol} = \int_U f \varphi \, d\operatorname{vol} \geq \int_{U_1} f \varphi \, d\operatorname{vol} > 0, \text{ contradiciendo la hipótesis del Lema.}$$

Supongamos ahora la existencia de dos expresiones distintas para la divergencia de  $\xi$ ;  $(\operatorname{div} \xi)_1$  y  $(\operatorname{div} \xi)_2$ . Entonces,  $\forall f \in C_0^\infty(M)$ , debe verificarse que:

$$\left. \begin{aligned} \int_M (\operatorname{div} \xi)_1 f \, d\operatorname{vol} &= - \int_M \langle \xi, \nabla f \rangle_g \, d\operatorname{vol} \\ \int_M (\operatorname{div} \xi)_2 f \, d\operatorname{vol} &= - \int_M \langle \xi, \nabla f \rangle_g \, d\operatorname{vol} \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore \int_M (\operatorname{div} \xi)_1 f \, d\operatorname{vol} = \int_M (\operatorname{div} \xi)_2 f \, d\operatorname{vol} \Rightarrow \int_M [(\operatorname{div} \xi)_1 - (\operatorname{div} \xi)_2] f \, d\operatorname{vol} = 0.$$

Por el Lema anterior se cumple que

$$(\operatorname{div} \xi)_1 - (\operatorname{div} \xi)_2 = 0 \therefore (\operatorname{div} \xi)_1 = (\operatorname{div} \xi)_2,$$

probando así la unicidad de la  $\operatorname{div} \xi$ .

Si  $U$  y  $V$  son dominios de dos cartas tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces tendremos la expresión de la divergencia en cada carta, las cuales, por unicidad, coinciden en  $U \cap V$ , por lo tanto, la divergencia está definida en toda la variedad  $M$  para toda función  $f$  de soporte compacto en alguna carta (más detalles en [13], [15], [17]).

### 2.8.7 Laplaciano

Finalmente vamos llegando a la definición del operador Laplaciano en una variedad Riemanniana (también llamado operador de Laplace-Beltrami).

Para  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla_g f).$$

Recordando que

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

se verifica entonces que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

por lo cual

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)},$$

expresión en coordenadas del operador Laplaciano en una variedad Riemanniana.

Inmediatamente observamos que, para  $g = (\delta_j^i)$ ,  $\det g = 1$ , y  $g^{-1} = (g^{ij}) = (\delta_j^i)$ , obteniendo la expresión usual del Laplaciano en  $\mathbb{R}^n$ :

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}.$$

### 2.8.8 Ejemplos

Ejemplo 1:

Sean:  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , esfera de radio unidad centrada en el origen, y la variedad Riemanniana bidimensional  $M$  de parametrización:

$$r: U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(\theta, \varphi) \rightarrow r(\theta, \varphi) = (\text{sen}\theta\cos\varphi, \text{sen}\theta\text{sen}\varphi, \cos\theta),$$

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)\},$$

en donde  $\theta$  es el ángulo del vector de posición del punto  $p \in M$  con el eje  $z$  positivo (colatitud o ángulo azimutal), y  $\varphi$  es el ángulo de la proyección de dicho vector sobre el plano  $x, y$ , con el eje  $x$  positivo (longitud).

La parametrización cubre a  $S^2$  menos el semicírculo  $C$  desde los polos (puntos  $(0,0,1)$  y  $(0,0,-1)$ ) y que pasa por el eje  $x$  positivo (punto  $(1,0,0)$ ). Con dos cartas de este tipo es posible cubrir a  $S^2$ , por lo tanto constituyen un atlas para  $S^2$  (ver [6]).

O sea que  $r(U) = S^2 \setminus C$ .

Tomando a  $M$  como una subvariedad del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  tenemos que

$$\left. \begin{aligned} r_\theta &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\text{sen}\varphi, -\text{sen}\theta) \\ r_\varphi &= (-\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, \text{sen}\theta\cos\varphi, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} E = \langle r_\theta, r_\theta \rangle &= \cos^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin\varphi + \sin^2\theta = 1 \\ F = \langle r_\theta, r_\varphi \rangle &= 0 \\ G = \langle r_\varphi, r_\varphi \rangle &= \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cos^2\varphi = \sin^2\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} = (g_{ij}) \quad \therefore \quad g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{bmatrix} = (g^{ij}).$$

Haciendo ahora  $x^1 = \theta$ ,  $x^2 = \varphi$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ \Delta &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sqrt{\det g} g^{11} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{\det g} g^{12} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\det g} g^{21} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{\det g} g^{22} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + 0 \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( 0 + \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta &= \frac{1}{\sin\theta} \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \\ \therefore \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Métrica de Poincaré en el semiplano superior  $\mathbb{R}^{2+}$ .

$$\mathbb{R}^{2+} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$$

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\lambda^2 v^2}, \quad \lambda > 0,$$

$$\therefore g = \begin{bmatrix} (\lambda^2 v^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda^2 v^2)^{-1} \end{bmatrix}, \quad \det g = (\lambda^4 v^4)^{-1}, \quad g^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^2 v^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 v^2 \end{bmatrix} = (g^{ij}).$$

Sean  $x^1 = u$ ,  $x^2 = v$ , entonces

$$\Delta = \lambda^2 v^2 \frac{\partial}{\partial u} \left( (\lambda^2 v^2)^{-1} \lambda^2 v^2 \frac{\partial}{\partial u} + 0 \right) + \lambda^2 v^2 \frac{\partial}{\partial v} \left( 0 + (\lambda^2 v^2)^{-1} \lambda^2 v^2 \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

$$\therefore \Delta = \lambda^2 v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

Ejemplo 3:

En Relatividad General se utiliza una métrica en cuatro dimensiones denominada

*Métrica de Schwarzschild* cuya fórmula es la siguiente:

$$ds^2 = \frac{dv^2}{1 - \frac{2m}{v}} + v^2 d\theta^2 + v^2 \text{sen}^2 \theta^2 d\phi^2 - \left( 1 - \frac{2m}{v} \right) du^2.$$

Si hacemos  $\theta$  y  $\phi$  constantes, la métrica pasa a ser de dos dimensiones y la variedad es llamada *superficie de Schwarzschild*.

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{v} \right) du^2 + \frac{dv^2}{1 - \frac{2m}{v}}, v \neq 0, v \neq 2m.$$

Para esta métrica,

$$g = \begin{bmatrix} - \left( 1 - \frac{2m}{v} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2m}{v}} \end{bmatrix}, \det g = -1 \text{ (pseudo Riemanniana)}, \sqrt{|\det g|} = 1,$$

$$\therefore g^{-1} = \begin{bmatrix} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{v}} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2m}{v} \end{bmatrix} = (g^{ij}).$$

Sean  $x^1 = u$ ,  $x^2 = v$ , entonces

$$\Delta = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial u} i \left( \frac{-1}{1 - \frac{2m}{v}} \frac{\partial}{\partial u} + 0 \right) + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial v} i \left( 0 + \left( 1 - \frac{2m}{v} \right) \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

$$\Delta = \frac{-1}{1 - \frac{2m}{v}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{2m}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} + \left( 1 - \frac{2m}{v} \right) \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

$$\therefore \Delta = \frac{v}{2m - v} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{v - 2m}{v} \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{2m}{v^2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Observamos cómo la métrica juega un rol fundamental en la expresión del operador Laplaciano en una variedad y por lo tanto tiene una incidencia directa en las condiciones de separatividad (separación de variables) de la ecuación diferencial en derivadas parciales resultante.

### 2.8.9 Aspectos relevantes del operador Laplaciano

El operador Laplaciano aparece en todas las leyes de la Física (a través de la fórmula de Green), por lo cual juega un papel muy importante tanto en Matemáticas como en Física.

Debe su nombre al insigne matemático francés Pierre Simón de Laplace (1736-1813) quien, en 1784-85, plantea que un campo gravitacional puede ser representado como el gradiente de una función potencial  $V(x)$  la cual satisface en un espacio libre de masas la ecuación  $\Delta V = 0$ , llamada *ecuación de Laplace*.

Otras ecuaciones importantes que involucran al Laplaciano son:

- La ecuación de onda,

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = k\Delta u,$$

en donde  $u(x, t)$  es, por ejemplo, el desplazamiento de la posición de equilibrio de una cuerda vibrante.

- Procesos de difusión (masa, calor, movimiento Browniano, etc.),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u,$$

en donde la función  $u(x, t)$  es concentración en moles por litro (molaridad) para difusión de masa, temperatura para ecuación de calor, densidad de probabilidad para movimiento Browniano, etc.

- Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi .$$

En esta expresión,  $\psi(x, t)$  es la *función de onda* de la partícula (más adelante profundizaremos sobre esta ecuación).

Podemos decir entonces que el Laplaciano llegó a las Matemáticas desde la Física.

La importancia de este operador, no sólo se limita al hecho del rol que desempeña en las ecuaciones anteriormente mencionadas.

Cuando se tratan cuestiones de Análisis en Variedades Riemannianas es posible, por ejemplo, demostrar que en una variedad Riemanniana  $(M, g)$  compacta, conexa, sin borde y orientada, el Laplaciano  $\Delta_g: L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  (en donde  $L^2(M)$  es el conjunto de

funciones de cuadrado integrable sobre  $M$ ) es diagonalizable en una base ortonormal de  $L^2(M)$ .

En otras palabras, existe una base ortonormal de  $L^2(M)$  formada por funciones propias de  $\Delta_g$  (ver [14]).

Una consecuencia importante de esta última aseveración radica en el hecho de que la solución fundamental (kernel) de la ecuación de calor en una variedad Riemanniana con las características anteriormente mencionadas está relacionada con los valores propios y funciones propias del Laplaciano en la variedad.

Estas son las expansiones asintóticas del kernel de la ecuación de calor presentadas por Minakshisundaram y Pleijel en 1949.

Para terminar, no podemos dejar de mencionar también que el Laplaciano es una fuente de información geométrica de la variedad.

Como el Laplaciano está intrínsecamente relacionado con la métrica, y la métrica define (como hemos visto anteriormente) la geometría de la variedad, entonces, el espectro de este operador codifica de alguna manera la información geométrica de la variedad (ver [17]).

Una importante área de investigación en matemáticas se centra actualmente en el estudio de estas interesantes cuestiones.

## ***2.9 Ecuación de Schrödinger***

### ***2.9.1 Motivación histórica***

La ecuación de Schrödinger es la ecuación más importante de la Mecánica Cuántica. Fue propuesta en 1926 por el físico austriaco Erwin Schrödinger, de la Universidad de Zurich.

Por esos años se estaba dando una gran revolución en el marco de la Física Teórica, a consecuencia del célebre experimento del físico alemán Max Planck sobre la radiación del cuerpo negro.

En el año 1900 Planck estudia experimentalmente el fenómeno de la radiación de energía electromagnética emitida por un cuerpo negro, concluyendo que la energía es emitida de manera discontinua, a manera de paquetes, en múltiplos enteros de una cantidad mínima que él denominó *cuanto* de energía  $E = h\nu$ , en donde  $h$  es una constante experimental denominada constante de Planck,  $h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ ergseg}$  y  $\nu$  es la frecuencia en *Hertz* del átomo que irradia, considerado como un oscilador armónico. El propio Planck considera que su resultado debe ser erróneo ya que se suponía, según la Física Clásica, que la emisión de energía habría de ser continua.

Este experimento de Planck inició la revolución cuántica de la época, considerándose históricamente como la frontera separadora entre la Física Clásica y la Física Moderna (Física Cuántica).

De aquí en adelante se fueron dando varios eventos importantes que están relacionados al génesis de la Ecuación de Schrödinger, algunos de los cuales describiremos brevemente (ver [15], [16], [22]).

- En 1905 Albert Einstein explica exitosamente el efecto fotoeléctrico, volviendo a la teoría corpuscular de la luz (que había quedado relegada a segundo plano debido a la teoría electromagnética de Maxwell) y utilizando los cuantos de energía de Planck, en donde los fotones de la luz incidente en una placa metálica tienen una energía  $E = h\nu$ , siendo  $\nu$  la frecuencia de la luz, mirada como onda electromagnética.

Cabe acotar que Einstein recibe en el año 1921 el premio Nobel de Física por la explicación del efecto fotoeléctrico (y no por la Teoría de la Relatividad).

- En el año 1909 se lleva a cabo un importante experimento en la Universidad de Manchester, Inglaterra. Hans Geiger y Ernest Marsden, dirigidos por el físico neozelandés Ernest Rutherford, bombardean láminas de oro con partículas  $\alpha$  con el objetivo de dilucidar la estructura del átomo. Publican sus resultados en el año 1911 concluyendo que el átomo consta de un núcleo en donde se concentra su masa y su carga positiva y una periferia más sutil donde orbitan los electrones de carga negativa. La región nuclear ocupa un volumen cien mil veces menor que el volumen atómico. Este es el modelo nuclear del átomo (que desplazó al anterior modelo de Thompson) y que deja planteado un interrogante teórico en relación a la estabilidad de las órbitas de los electrones. Según la Física Clásica, el electrón

debería caer hacia el núcleo en un movimiento en espiral y el átomo no podría ser estable.

- Para zanjar este problema el físico danés Niels Bohr propone en 1913 un modelo de átomo de hidrógeno, llamado el átomo de Bohr, en el cual, a priori, existen ciertas órbitas permitidas, así como ciertos valores de la cantidad de movimiento angular permitidos para el electrón. El modelo explica y predice correctamente muchos resultados experimentales y Bohr recibe el premio Nobel de Física en el año 1922. En este modelo está implícita la cuantización, la discontinuidad: el electrón gira en órbita circular alrededor del núcleo atómico y para pasar de una órbita permitida a otra absorbe o emite cuantos de energía.
- En 1914 el físico experimental alemán Max Von Laue descubre la naturaleza ondulatoria de los rayos X (experimento de difracción de rayos X).

Como hemos visto hasta ahora, si consideramos a la luz como un fenómeno ondulatorio, entonces un haz de luz de frecuencia  $\nu$  tendrá, según la fórmula de Planck, una energía  $E = h\nu$ .

A su vez un fotón de luz de energía  $E$  tendrá, en virtud de la relación masa-energía de Einstein ( $E = mc^2$ ), una masa asociada  $m = \frac{E}{c^2}$ , en donde  $c$  es la velocidad de la luz. La cantidad de movimiento lineal (momentum) del fotón será:

$$p = mc = \frac{E}{c^2}c = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\Lambda},$$

en donde  $\Lambda = \frac{c}{\nu}$  es la longitud de la *onda asociada* al fotón.

Notemos, en la ecuación

$$p = \frac{h}{\Lambda},$$

la naturaleza corpuscular de la luz ( $p$ , cantidad de movimiento lineal del fotón), y la naturaleza ondulatoria de la luz ( $\Lambda$ , longitud de onda asociada al fotón), ambas conectadas por medio de la constante de Planck  $h$ .

- En su tesis doctoral del año 1924 el físico francés Louis de Broglie (1892-1987) propone extender a todos los cuerpos el concepto de onda asociada, postulando la existencia de *ondas de materia* de longitud de onda  $\lambda = \frac{h}{mv}$ , en donde  $m$  y  $v$  son la masa y la velocidad del cuerpo, respectivamente. Claro está que, a escala macroscópica, la longitud de onda asociada es extremadamente pequeña, pero a escala subatómica su efecto puede ser importante. Este es el concepto de *dualidad onda-partícula* propuesto por de Broglie.

Tales eran los eventos que se fueron dando por esos años en los que se estaba gestando la Mecánica Cuántica. La dualidad onda-partícula del mundo sub atómico era algo totalmente desconcertante.

Durante un coloquio en la Universidad de Zurich a fines del año 1925 en el que se estaban discutiendo estos importantes temas de Física Teórica, el físico holandés Robert Debye le propone a Erwin Schrödinger (quien era, a la sazón, un especialista en elasticidad) encontrar una ecuación de ondas que describiera el movimiento de los electrones en el átomo.

En la primera mitad del año 1926 Schrödinger desarrolla esta importante ecuación y a consecuencia de ello fue galardonado con el Premio Nobel de Física del año 1933 (compartido con Paul Dirac).

No podemos dejar de mencionar que en el año 1927 George Paget Thomson en la Universidad de Aberdeen en Escocia y Clinton Joseph Davisson y Lester Halbert Germer en los Laboratorios Bell desarrollan experimentos de difracción de haces de electrones, poniendo de manifiesto la naturaleza ondulatoria de los mismos, y corroborando el planteamiento de de Broglie en su Tesis Doctoral, por lo cual se le otorga a este último el Premio Nobel de Física en el año 1929.

### ***2.9.2 La ecuación y su significado***

Schrödinger busca escribir una ecuación que dé cuenta de las ondas de materia de de Broglie, y que a escala macroscópica se redujera a la mecánica clásica de la partícula.

Deriva su ecuación basándose en una analogía formal entre la óptica ondulatoria y la mecánica clásica.

En propagación de ondas existe una ecuación llamada *ecuación de la eikonal* (vocablo alemán proveniente del griego, *imagen*) la cual sirve de enlace entre la óptica física (ondas) y la óptica geométrica (rayos). Es una aproximación a la óptica geométrica, a la cual está asociada el principio variacional de Fermat.

En Mecánica Clásica las ecuaciones de Hamilton-Jacobi constituyen una formulación equivalente a las leyes del movimiento de Newton y se derivan del principio

de mínima acción de Hamilton, el cual es un principio variacional fundamental de la Naturaleza.

La ecuación de la eikonal guarda un parecido formal con las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para una partícula no relativista sometida a una fuerza que procede de un potencial.

Cabe acotar que este paralelismo ya había sido advertido por Hamilton en 1834.

La ecuación que Schrödinger propone en 1926, llamada Ecuación de Schrödinger Dependiente del Tiempo, es la siguiente:

$$\hat{H}\Psi = \left( -\frac{h^2}{8\pi^2m} \Delta + V \right) \Psi = i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} ,$$

para una partícula de masa  $m$ , con ausencia de espín, en un campo de fuerzas conservativo que se deriva de un potencial  $V = V(x)$ . La variable temporal es  $t$  (tiempo) y la variable espacial es  $x$  (posición),  $h$  es la constante de Planck,  $i = \sqrt{-1}$ .

Poniendo  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , llamada *constante de Planck reducida*, la ecuación se puede escribir:

$$\boxed{\hat{H}\Psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}}$$

Esta ecuación representa la ecuación fundamental del movimiento en Mecánica Cuántica (ver [16]).

El operador  $\hat{H}$ , denominado *operador Hamiltoniano*, es equivalente a la *función de Hamilton* de la Mecánica Clásica (observemos también que  $\hat{H}$  involucra al operador Laplaciano  $\Delta$ ).

La función  $\Psi(x, t)$  es la *función de onda* del sistema.

En mecánica clásica la dinámica o evolución temporal de un sistema conservativo de partículas (que se mueve bajo la acción de fuerzas provenientes de un potencial) se describe a través de la función de Hamilton, la cual representa la energía total del sistema

$$H = E_c + V.$$

En esta última ecuación  $E_c$  representa la energía cinética y  $V$  la energía potencial del sistema, ambas expresadas en función de las posiciones y las cantidades de movimiento lineal de las partículas que componen el mismo. O sea que  $H = H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ . Si el sistema es conservativo, entonces  $H$  es constante (se dice que es una *constante del movimiento*). La dinámica o evolución temporal del sistema es descrita por las ecuaciones de Hamilton-Jacobi:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

en donde los puntos designan derivadas temporales.

Notemos la conexión existente entre la evolución temporal de un sistema y su energía.

En el tratamiento mecánico cuántico en vez de la función de Hamilton  $H$  se utiliza el operador Hamiltoniano  $\hat{H}$ , el cual se obtiene reemplazando en  $H$  las posiciones y los

momentos por operadores mecánico-cuánticos llamados el operador de posición y el operador de cantidad de movimiento lineal.

Este proceso de reemplazo se llama cuantización de un operador y fue propuesto por Niels Bohr a través de su *principio de correspondencia*.

El papel de la función de onda es fundamental, ya que todo posible estado de un sistema es descrito a través de su función de onda, la cual codifica la distribución de probabilidad de todas las propiedades medibles u observables del mismo (por ejemplo, energía, posición, cantidad de movimiento lineal, momento angular, espín, etc.).

El conjunto de funciones de onda de un sistema admite la estructura de espacio de Hilbert sobre el campo de los números complejos. Los operadores en Mecánica Cuántica están definidos sobre este espacio.

Un estado particular de un sistema en un cierto instante  $t$  se corresponde entonces con una función  $\Psi(x, t)$  y el estado queda completamente descrito por  $\Psi$ . La función  $\Psi(x, t)$  es llamada también *vector de estado dependiente del tiempo*.

Notemos que en esta teoría, la posición ( $x$ ) y el tiempo ( $t$ ) no están a priori relacionados funcionalmente entre sí (esto marca una gran diferencia conceptual con la Física Clásica).

Así como la evolución temporal de un sistema en Física Clásica está gobernada por su energía escrita como función de Hamilton  $H(x, p)$ , el operador Hamiltoniano determina la evolución temporal de la función de onda en un sistema cuántico no perturbado. Si el sistema no está perturbado por ningún experimento (por ejemplo, por ninguna medición) la evolución temporal de  $\Psi(x, t)$  está gobernada entonces por la

Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Esta es una ecuación completamente determinista y representa para los átomos y partículas subatómicas un papel análogo a la Segunda Ley de Newton en la Mecánica Clásica, en donde el operador  $\hat{H}$  se corresponde con la fuerza (o sea que  $\hat{H}$  es equivalente a un campo de fuerzas). Mencionemos también que la Ecuación de Schrödinger no es una ecuación relativista (o sea, no tiene en cuenta los efectos relacionados con la Relatividad).

Esta importante ecuación sirve como fundamento teórico para las ondas de materia de de Broglie, el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr, varias observaciones experimentales que no habían podido ser explicadas teóricamente todavía (como el efecto Zeeman), además de predecir nuevos efectos que más adelante tuvieron su confirmación experimental.

No menos importante que la ecuación anteriormente presentada, es la Ecuación de Schrödinger Independiente del Tiempo. Esta última surge al proponer soluciones estacionarias para la Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

Un estado *estacionario* de un sistema físico es aquel cuya dependencia con el tiempo es de la forma  $e^{-i\omega t}$ , en donde  $\omega = 2\pi\nu$  es la frecuencia angular (también llamada velocidad angular), en  $\frac{rad}{seg}$ . Estados cuya dependencia temporal es distinta a la anteriormente mencionada son llamados no estacionarios (ver [15]).

Una solución estacionaria de la Ecuación de Schrödinger Dependiente del Tiempo es de la forma

$$\varphi(x, t) = \Psi(x)e^{-i\omega t}.$$

Reemplazando y suprimiendo posteriormente el factor exponencial,

$$\hat{H}\varphi = i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\hat{H}\varphi = i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi(x)e^{-i\omega t}) = i \frac{h}{2\pi} \Psi(x)(-i\omega)e^{-i\omega t} = \frac{h}{2\pi} \omega \Psi(x)e^{-i\omega t}$$

$$\hat{H}\varphi = \frac{h}{2\pi} (2\pi\nu)\varphi = h\nu\varphi = E\varphi$$

$$\hat{H}\varphi = \hat{H}\Psi(x)e^{-i\omega t} = E\Psi(x)e^{-i\omega t}$$

$$\therefore \boxed{\hat{H}\Psi = E\Psi},$$

en donde  $E = h\nu$  es la energía de la partícula.

Esta última expresión es llamada Ecuación de Schrödinger Independiente del Tiempo.

Al observar esta ecuación nos percatamos de que los niveles de energía de la partícula se corresponden con los autovalores del operador en el miembro izquierdo de la igualdad.

En otras palabras, los niveles de energía  $E$  de un sistema físico dependerán del espectro del operador Hamiltoniano de dicho sistema. En esto radica la importancia de la Ecuación de Schrödinger Independiente del Tiempo.

Escribiendo explícitamente el operador Hamiltoniano,

$$\hat{H}\Psi = \left( -\frac{h^2}{8\pi^2m} \Delta + V \right) \Psi = E\Psi$$

$$\boxed{\hat{H}\Psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi = E\Psi}.$$

Expresada en *unidades atómicas*, la ecuación puede escribirse de forma más simple:

$$\hat{H}\Psi = \left(-\frac{1}{2}\Delta + V\right)\Psi = E\Psi.$$

Si además la partícula es libre de potencial, entonces  $V = V(x) = 0$  y la ecuación se reduce a la siguiente:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{1}{2}\Delta\Psi = E\Psi,$$

en donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano anteriormente visto.

Escribiendo la expresión para el Laplaciano obtenida en 2.8.7,

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{2\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Psi = E\Psi.$$

Utilizando la notación de [1], en donde  $\det g = g$  ;  $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_{x^i}$  obtenemos la expresión de la ecuación con la cual vamos a trabajar en esta Tesis:

$$\boxed{\hat{H}\Psi = -\frac{1}{2\sqrt{g}} \partial_{x^i} (\sqrt{g} g^{ij} \partial_{x^j}) \Psi = E\Psi}.$$

La interpretación probabilista de la función de onda es debida al físico alemán Max Born, quien en el año 1926 propone esta manera de entender a  $\Psi(x, t)$  y que jugará un rol fundamental en el desarrollo ulterior de la Mecánica Cuántica.

Las implicaciones de esta teoría son muy profundas, sobre todo en relación a la información que podemos obtener y a que lo podemos llegar a saber sobre un sistema físico a través de mediciones y observaciones sobre el mismo, y ha dado lugar a muchos debates en relación a la interpretación y significado de la misma (los más notorios, entre Niels Bohr y Albert Einstein).

Baste decir que la Mecánica Cuántica pone en tela de juicio los fundamentos de la Física Clásica, como son los importantes conceptos de determinismo y continuidad, o sea que el mundo subatómico se comporta de una manera muy diferente de la que estamos acostumbrados a observar en nuestra experiencia cotidiana. De todas maneras, en el mundo macroscópico los efectos cuánticos son despreciables y la Física Clásica es, claro está, válida.

Las consecuencias de la introducción de los cuantos debida a Planck en el año 1900 son más trascendentales todavía y aún la humanidad está en el proceso de elaborar su más profundo significado. En este orden de cosas podemos decir que la Física Clásica es el límite de la Mecánica Cuántica para  $h \rightarrow 0$ .

## ***2.10 Solución de EDPs por el Método de Separación de Variables***

El método de separación de variables es una poderosa herramienta que nos permite encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs).

No es el único método existente para resolver este tipo de ecuaciones, pero puede ser utilizado con éxito en importantes aplicaciones.

Supongamos que estamos buscando una solución particular  $u(r, s)$  de una EDP de segundo orden lineal, en dos variables. Para este menester podemos postular que la

función  $u$  es la forma  $u(r, s) = X(r)Y(s)$ , en donde  $X$  es una función exclusiva de la variable  $r$ , e  $Y$  es una función de la variable  $s$  solamente.

De este modo,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = X'Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = X''Y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = XY', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = XY'',$$

en donde las derivadas son derivadas ordinarias.

Si la EDP es separable, al reemplazar las expresiones anteriores en la misma y tras el proceso de separación se generarán dos ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), una para  $X(r)$  y la otra para  $Y(s)$ . Resolviendo estas EDOs obtendremos las funciones  $X$  e  $Y$  y finalmente  $u(r, s) = XY$ .

Vale la aclaración que este no es un método general ya que no todas las EDPs se pueden separar.

### **2.10.1 Ejemplo**

Resolver por el método de separación de variables la EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Suponiendo una solución del tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

tendremos entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XT',$$

reemplazamos estas expresiones en la ecuación original para obtener

$$X''T = 4XT'.$$

Ahora dividimos ambos miembros entre  $4XT$  para llegar a la expresión

$$\frac{X''}{4X} = \frac{T'}{T},$$

en donde las variables han quedado separadas.

Observemos que el miembro izquierdo de esta última ecuación sólo depende de la variable  $x$  y el segundo miembro sólo depende de  $t$ . Como ambas variables son independientes entre sí, esto sólo puede suceder si ambos miembros son constantes. Aquí se presenta una tricotomía que precisamos analizar según sea el signo de esta constante, la cual se denomina *constante de separación* y que usualmente se denota como un número real elevado al cuadrado afectado por un coeficiente que puede ser  $+1$  ó  $-1$ .

Caso 1: Constante de separación positiva.

Tenemos que

$$\frac{X''}{4X} = \frac{T'}{T} = \lambda^2 > 0$$

y entonces

$$\left. \begin{aligned} X'' - 4\lambda^2 X &= 0 \\ T' - \lambda^2 T &= 0 \end{aligned} \right\}$$

es un par de EDOs cuyas soluciones son

$$X(x) = k_1 e^{2\lambda x} + k_2 e^{-2\lambda x},$$

o también

$$X(x) = a_1 \cosh(2\lambda x) + a_2 \sinh(2\lambda x),$$

$$T = a_3 e^{\lambda^2 t}.$$

Entonces, la solución general de la EDP dada para  $\lambda^2 > 0$  es:

$$u_1(x, t) = XT = A_1 e^{\lambda^2 t} \cosh(2\lambda x) + A_2 e^{\lambda^2 t} \sinh(2\lambda x),$$

en donde  $A_1$  y  $A_2$  son dos constantes arbitrarias.

Caso 2: Constante de separación negativa.

En este caso

$$\frac{X''}{4X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2 < 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} X'' + 4\lambda^2 X = 0 \\ T' + \lambda^2 T = 0 \end{array} \right\},$$

y

$$\left. \begin{array}{l} X = b_1 \cos(2\lambda x) + b_2 \sin(2\lambda x) \\ T = b_3 e^{-\lambda^2 t} \end{array} \right\},$$

por lo cual, la solución general de la EDP dada para  $-\lambda^2 < 0$  es:

$$u_2(x, t) = XT = B_1 e^{-\lambda^2 t} \cos(2\lambda x) + B_2 e^{-\lambda^2 t} \sin(2\lambda x),$$

en donde  $B_1$  y  $B_2$  son dos constantes arbitrarias.

Caso3: Constante de separación igual a cero.

Si  $\lambda^2 = 0$ , se habrá de verificar que

$$\left. \begin{array}{l} X'' = 0 \\ T' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X = c_1x + c_2 \\ T = c_3 \end{array} \right\},$$

y la solución general de la EDP para este caso es:

$$u_3(x, t) = XT = C_1x + C_2,$$

en donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos constantes arbitrarias.

Hemos obtenido tres familias distintas de soluciones  $u_1, u_2$  y  $u_3$  de la EDP dada. Notemos la influencia que tiene el signo de la constante de separación en el tipo de solución particular obtenida. Para efectuar la elección correcta de la constante de separación es preciso considerar ciertos aspectos del problema tales como las condiciones de frontera, las condiciones iniciales, el tipo de comportamiento físico que se espera de la solución (por ejemplo si es oscilatoria), etc.

La aplicación de este método en problemas con condiciones de frontera y condiciones iniciales (por ejemplo en la ecuación de calor, la ecuación de onda y la ecuación de Laplace) conlleva los importantes conceptos de valor propio, función propia y desarrollo de una función en series infinitas de funciones ortogonales, por ej., series de Fourier (por más detalles ver [18], [19], [20]).

En problemas con más de dos variables independientes se tiene que lograr expresar la ecuación de manera tal que en un miembro de la misma sólo hayan términos que dependan de una variable mientras que en el otro miembro estén los términos con las variables restantes. De aquí concluimos que cada miembro de la igualdad debe ser constante, obteniendo así una constante de separación. Aplicando sucesivamente esta técnica vamos obteniendo otras constantes de separación (y otras EDOs) hasta separar la ecuación original totalmente.

### 2.10.2 Ejemplo

Admitamos que la ecuación de calor en una región rectangular del plano  $xy$  viene dada por la expresión:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ 0 < x < b, 0 < y < c \\ t > 0 \end{aligned} \right\},$$

en donde  $k$  es una constante real positiva.

Postulamos la solución  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ ,

entonces, sustituyendo en la EDP se tiene

$$XYT' = k(X''YT + XY''T).$$

Luego dividimos cada miembro de la ecuación entre  $kXYT$ ,

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} + \frac{T'}{kT},$$

y de aquí, tomando la constante de separación  $-\lambda^2$ , inferimos que

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} + \frac{T'}{kT} = -\lambda^2,$$

por lo cual,

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ \frac{Y''}{Y} &= \frac{T'}{kT} + \lambda^2 \end{aligned} \right\}.$$

A su vez, cada miembro de la última ecuación tiene que ser constante, por tanto

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{kT} + \lambda^2 = -\mu^2,$$

que implica

$$\left. \begin{aligned} Y'' + \mu^2 Y &= 0 \\ T' + k(\lambda^2 + \mu^2)T &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Hemos llegado a

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ Y'' + \mu^2 Y &= 0 \\ T' + k(\lambda^2 + \mu^2)T &= 0 \end{aligned} \right\},$$

por lo tanto,

$$\begin{cases} X(x) = a_1 \cos(\lambda x) + a_2 \operatorname{sen}(\lambda x) \\ Y(y) = b_1 \cos(\mu y) + b_2 \operatorname{sen}(\mu y) \\ T(t) = c e^{-k(\lambda^2 + \mu^2)t} \end{cases}$$

Las condiciones de frontera e iniciales que pueda tener este problema nos conducirán, a la postre, a soluciones expresables en series infinitas de funciones ortogonales.

# CAPÍTULO 3

## ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN EL ESPACIO D1

En este capítulo nos proponemos analizar detalladamente la resolución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en el espacio de Darboux D1, tal cual aparece en el trabajo de Kalnins, Kress y Winternitz [1] anteriormente mencionado.

### 3.1 Aspectos Previos

En el presente estudio trabajaremos en una variedad Riemanniana bidimensional, con distancia infinitesimal

$$ds^2 = g_{ij}(u)du^i du^j, \text{ en donde } i, j \in \{1,2\} \text{ y } u = (u^1, u^2).$$

Para representar un Hamiltoniano, y aunque consabido, no dejaremos de mencionar que en el tratamiento que presentamos a continuación la cantidad  $\frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j$  representará el término cinético y que  $V(u)$  designa el potencial asociado al término cinético.

Siguiendo la referencia [1], el Hamiltoniano (clásico, también llamado función de Hamilton) tiene la forma  $H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j + V(u)$ , y la correspondiente ecuación de Schrödinger adquiere entonces la siguiente expresión:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_{u^i}(\sqrt{g}g^{ik}\partial_{u^k}\Psi) + V(u)\Psi = E\Psi,$$

donde  $g = \det(g_{ij})$  y  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano.

Antes de proceder al estudio de la resolución de la ecuación diferencial de Schrödinger en el espacio D1, conviene hacer un breve alto para justificar las bases lógicas que sustentan la presencia de cada uno de los pasos matemáticos primordiales que se irán presentando en la secuencia de operaciones conducentes a la obtención del resultado final.

Como ya hemos dejado dicho en el Capítulo 1, en la clasificación de Koenigs y Darboux aparecen, en ordenamiento jerárquico y sistemático, cuatro espacios Riemannianos de dos dimensiones denominados espacios de Darboux de tipos D1, D2, D3 y D4 (ver [1]).

En el espacio bidimensional de Darboux de tipo D1 se trabaja en las variables  $x$  e  $y$  pertenecientes al plano complejo. Introduciremos ahora dos variables reales  $(u, v)$  mediante la transformación lineal

$$\begin{cases} x = u + iv \\ y = u - iv \end{cases}$$

en otras palabras, las variables  $x$  e  $y$  son complejo-conjugadas.

Posteriormente, por mera conveniencia, definiremos un nuevo sistema de coordenadas  $(r, s)$ , girando el plano real  $uv$  un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario. Decimos entonces que el sistema  $uv$  girado un ángulo  $\theta$  en el sentido antihorario define el nuevo plano real  $rs$ . Obsérvese que para  $\theta = 0$  los planos  $uv$  y  $rs$  coinciden. La rotación se logra aplicando a un vector cualquiera del plano  $uv$  la matriz de rotación  $R(\theta)$ , definida como sigue:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Sea  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  el vector cuyo origen se encuentra en el origen del sistema coordenado  $uv$  y cuyo extremo se encuentra en el punto  $(u, v)$ .

Obsérvese que

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de  $R(\theta)$  es

$$R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

de modo que  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ .

Explícitamente

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

por tanto

$$\begin{cases} r = u \cos \theta - v \text{sen } \theta \\ s = u \text{sen } \theta + v \cos \theta. \end{cases}$$

De manera semejante,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{cases} u = r \cos \theta + s \text{sen } \theta \\ v = -r \text{sen } \theta + s \cos \theta. \end{cases}$$

Volviendo a nuestro pensamiento interrumpido, diremos que el espacio de Darboux D1 viene definido por la siguiente distancia infinitesimal:

$$ds^2 = (x + y)dxdy,$$

en donde  $x, y \in \mathbb{C}$  [1].

Trabajando con este espacio de Darboux D1, y con el propósito de considerar solo *formas reales del mismo* (ver [1]), efectuamos la sustitución mencionada anteriormente:

$$\begin{cases} x = u + iv \\ y = u - iv. \end{cases}$$

Entonces

$$x + y = 2u, \quad dx = du + idv, \quad dy = du - idv,$$

por lo cual

$$ds^2 = 2u(du + idv)(du - idv)$$

$$\therefore ds^2 = 2u(du^2 + dv^2).$$

De lo expuesto se infiere que

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2u \end{pmatrix}, \quad \det(g) = 4u^2, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} (2u)^{-1} & 0 \\ 0 & (2u)^{-1} \end{pmatrix} = (g^{ij}).$$

Volviendo a la Ecuación de Schrödinger libre de potencial, observamos que esta viene formalmente dada por la siguiente expresión:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_{u^i}(\sqrt{g}g^{ik}\partial_{u^k}\Psi) = E\Psi.$$

Ahora bien, llamando  $u$  a  $u^1$  y  $v$  a  $u^2$  se obtiene

$$-\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_{u^i}(\sqrt{g}g^{ik}\partial_{u^k}\Psi) =$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{4u^2}} [\partial_{u^1}(2u(2u)^{-1}\partial_{u^1}\Psi + 0) + \partial_{u^2}(0 + 2u(2u)^{-1}\partial_{u^2}\Psi)] =$$

$$-\frac{1}{4u} (\partial_{u^1}^2\Psi + \partial_{u^2}^2\Psi).$$

Entonces la ecuación de Schrödinger libre de potencial en función de las variables reales  $u, v$  es de la forma:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{1}{4u} (\partial_u^2 + \partial_v^2)\Psi = E\Psi.$$

Ya estamos preparados para resolver la ecuación de Schrödinger libre de potencial en las coordenadas  $\{r, s\}$ . Recordando que las variables reales originales  $(u, v)$  y las variables reales nuevas  $(r, s)$  se encuentran vinculadas mediante las fórmulas

$$\begin{cases} s = v \cos \theta + u \operatorname{sen} \theta \\ r = -v \operatorname{sen} \theta + u \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = r \cos \theta + s \operatorname{sen} \theta \\ v = -r \operatorname{sen} \theta + s \cos \theta, \end{cases}$$

introduciendo el cambio de variables se verifica lo siguiente:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u} = \frac{\partial\Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial\Psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial\Psi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial\Psi}{\partial s} \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial u} \right) \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial u} \right) \frac{\partial s}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial\Psi}{\partial s} \operatorname{sen} \theta \right) \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial\Psi}{\partial s} \operatorname{sen} \theta \right) \frac{\partial s}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} = \left( \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} \cos \theta + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r \partial s} \operatorname{sen} \theta \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial^2\Psi}{\partial s \partial r} \cos \theta + \frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} \operatorname{sen} \theta \right) \operatorname{sen} \theta$$

En virtud del hecho de que las derivadas cruzadas son iguales por ser funciones continuas, se desprende que:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial s} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \sin^2 \theta .$$

Análogamente,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial s} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \cos^2 \theta .$$

Sumando estas dos últimas igualdades, y teniendo en cuenta la notación,

$$(\partial_u^2 + \partial_v^2) \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \cos^2 \theta .$$

Finalmente, tras asociar términos semejantes y simplificar, obtenemos:

$$(\partial_u^2 + \partial_v^2) \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = (\partial_r^2 + \partial_s^2) \Psi ,$$

por tanto

$$\begin{cases} -\frac{1}{4u} (\partial_u^2 + \partial_v^2) \Psi = E \Psi \\ u = r \cos \theta + s \sin \theta \\ v = -r \sin \theta + s \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{4(r \cos \theta + s \sin \theta)} (\partial_r^2 + \partial_s^2) \Psi = E \Psi .$$

Para resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales emplearemos el método de separación de variables.

Comenzaremos por expresarla de la siguiente manera:

$$\frac{-1}{4(r \cos \theta + s \sin \theta)} (\partial_r^2 + \partial_s^2) \Psi - E \Psi = 0 .$$

Postulamos la existencia de una función de onda que se puede expresar como el producto de dos funciones, una dependiente de  $r$  y la otra dependiente de  $s$

$$\Psi(r, s) = X(r)Y(s).$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \partial_r \Psi = X'Y, \therefore \partial_r^2 \Psi = X''Y \\ \partial_s \Psi = XY', \therefore \partial_s^2 \Psi = XY'' \end{cases}$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{-1}{4(r \cos \theta + s \sin \theta)} (X''Y + XY'') - EXY = 0,$$

de lo cual se desprende que

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + 4Er \cos \theta + 4Es \sin \theta = 0$$

Separando variables e insertando el parámetro de separación  $\mu$  se llega a

$$\frac{X''}{X} + 4Er \cos \theta = -\frac{Y''}{Y} - 4Es \sin \theta = \mu$$

de lo cual se deduce que:

$$\begin{cases} X''(r) + [(4E \cos \theta)r - \mu]X(r) = 0, \\ Y''(s) + [(4E \sin \theta)s + \mu]Y(s) = 0. \end{cases}$$

La ecuación en derivadas parciales original ha sido separada en dos ecuaciones diferenciales ordinarias que resolveremos a continuación.

$$(i) X''(r) + [(4E \cos \theta)r - \mu]X(r) = X''(r) + 4E \cos \theta \left(r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}\right)X(r) = 0.$$

Eligiendo el cambio de variable  $t = r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}$ , entonces  $\frac{dt}{dr} = 1$

$$\therefore \frac{dX}{dr} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{dX}{dt}, \quad \frac{d^2X}{dr^2} = \frac{d^2X}{dt^2},$$

la ecuación se convierte en la siguiente:

$$X''(t) + (4E \cos \theta)tX(t) = 0,$$

que pertenece a la forma:

$$X'' + \alpha^2 tX = 0 \text{ (Airy), en la que } \alpha^2 = 4E \cos \theta.$$

(ii) Eligiendo ahora  $t = s + \frac{\mu}{4E \operatorname{sen} \theta}$  y efectuando un tratamiento similar para  $Y(s)$ , se deduce que

$$Y''(t) + (4E \operatorname{sen} \theta)tY(t) = 0,$$

que es también una ecuación de Airy de la forma  $Y'' + \alpha^2 tY = 0$ , con  $\alpha^2 = 4E \operatorname{sen} \theta$ .

Puesto que  $\alpha^2 > 0$ , al tener  $E$  (energía de la partícula) un valor positivo, entonces se habrá de verificar que  $\cos \theta > 0$  y  $\operatorname{sen} \theta > 0$ .

## 3.2 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE AIRY

Para resolver la ecuación de Airy, la expresamos de la forma

$$y'' + \alpha^2 xy = 0, \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vamos a obtener soluciones de esta ecuación en forma de series de potencias y luego expresaremos dichas series bajo la forma de series de Bessel.

Sea:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , entonces,  $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \therefore$

$$y'' + \alpha^2 xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} =$$

$$= 2 \cdot 1c_2x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}.$$

Ambas series están en fase (comienzan con  $x$ ), entonces elegimos los cambios de índices  $k = n - 2$  en la primera serie y  $k = n + 1$  en la segunda, obteniendo:

$$\begin{aligned} y'' + \alpha^2 xy &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = \\ &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + \alpha^2 c_{k-1}] x^k = 0. \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} c_2 = 0 \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} + \alpha^2 c_{k-1} = 0, k \geq 1. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_{k+2} = -\frac{\alpha^2 c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Asignándole valores a  $k$ , deducimos que:

$$k = 1 \Rightarrow c_3 = -\frac{\alpha^2 c_0}{3 \cdot 2}$$

$$k = 2 \Rightarrow c_4 = -\frac{\alpha^2 c_1}{4 \cdot 3}$$

$$k = 3 \Rightarrow c_5 = -\frac{\alpha^2 c_2}{5 \cdot 4} = 0$$

$$k = 4 \Rightarrow c_6 = -\frac{\alpha^2 c_3}{6 \cdot 5} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \alpha^4 c_0$$

$$k = 5 \Rightarrow c_7 = -\frac{\alpha^2 c_4}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \alpha^4 c_1$$

$$k = 6 \Rightarrow c_8 = -\frac{\alpha^2 c_5}{8 \cdot 7} = 0$$

$$k = 7 \Rightarrow c_9 = -\frac{\alpha^2 c_6}{9 \cdot 8} = -\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \alpha^6 c_0$$

$$k = 8 \Rightarrow c_{10} = -\frac{\alpha^2 c_7}{10 \cdot 9} = -\frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \alpha^6 c_1$$

$$k = 9 \Rightarrow c_{11} = -\frac{\alpha^2 c_8}{11 \cdot 10} = 0$$

⋮

Entonces,

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = c_0 + c_1 x + 0 - \frac{\alpha^2}{3 \cdot 2} c_0 x^3 - \frac{\alpha^2}{4 \cdot 3} c_1 x^4 + 0 +$$

$$\frac{\alpha^4}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0 x^6 + \frac{\alpha^4}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1 x^7 + 0 - \frac{\alpha^6}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0 x^9 - \frac{\alpha^6}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1 x^{10} + 0 + \dots$$

$$y = c_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{\alpha^4}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} x^6 - \frac{\alpha^6}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} x^9 + \dots \right)$$

$$+ c_1 \left( x - \frac{\alpha^2}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{\alpha^4}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^7 - \frac{\alpha^6}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^{10} + \dots \right)$$

por tanto, la solución general de la ecuación de Airy vendrá dada por la expresión,

$$y = c_0 y_1 + c_1 y_2,$$

en donde

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha^{2k} \frac{[1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3k-2)]}{(3k)!} x^{3k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha^{2k} \frac{[2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3k-1)]}{(3k+1)!} x^{3k+1},$$

y  $c_0, c_1$  son dos constantes arbitrarias.

Observemos que, puesto que todos los puntos de la ecuación de Airy son ordinarios, las soluciones  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  son series de potencias convergentes para todo  $x$  real.

### 3.2.1 Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel surgen al resolver la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \geq 0,$$

la cual recibe el nombre de Ecuación Diferencial de Bessel.

Su solución general es  $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$ , válida para  $x > 0$ , en donde  $J_\nu(x)$  se conoce con el nombre de *función de Bessel de primera especie de orden  $\nu$* , y  $Y_\nu(x)$  es una *función de Bessel de segunda especie de orden  $\nu$*  (también llamada función de Neumann). Importa reparar que tanto  $J_\nu$  como  $Y_\nu$  son convergentes para  $x \in (0, \infty)$ .

En este trabajo nos será de suma importancia la función  $J_\nu(x)$ , cuya expresión es la siguiente:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu},$$

en donde  $\Gamma(s)$  es la función Gamma de Euler, que obedece la ecuación funcional  $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ .

Si  $\nu$  no es un número entero, puede comprobarse que  $J_\nu(x)$  y  $J_{-\nu}(x)$  (esta última se define para  $\nu > 0$ , reemplazando  $\nu$  por  $-\nu$  en la expresión para  $J_\nu(x)$ ) son

linealmente independientes, por lo cual la solución de la ecuación de Bessel quedará expresada como aparece a continuación:

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x), \nu \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$

En cuanto a la ecuación de Airy, la función  $y(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha x^{\frac{3}{2}}\right)$ ,  $x > 0$  es una solución particular de la misma, como demostraremos a continuación.

### 3.2.2 Teorema

Sea  $g_\nu(x) = \sqrt{x}f_\nu(ax^b)$  para  $x > 0$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes no nulas.

Entonces  $g_\nu$  satisface la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + \left(a^2 b^2 x^{2b} + \frac{1}{4} - \nu^2 b^2\right) y = 0,$$

cuando  $f_\nu$  es una solución de la ecuación de Bessel de orden  $\nu$ .

*DEMOSTRACIÓN:*

Supongamos que la función

$$g_\nu(x) = x^{\frac{1}{2}} f_\nu(ax^b)$$

satisface la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + \left(a^2 b^2 x^{2b} + \frac{1}{4} - \nu^2 b^2\right) y = 0.$$

Entonces se verificará lo siguiente

$$x^2 g_\nu''(x) + \left(a^2 b^2 x^{2b} + \frac{1}{4} - \nu^2 b^2\right) g_\nu(x) = 0.$$

Computando las derivadas

$$g_\nu'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} f_\nu(ax^b) + x^{\frac{1}{2}} f_\nu'(ax^b) \cdot abx^{b-1}$$

$$g_v'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} f_v(ax^b) + abx^{b-\frac{1}{2}} f_v'(ax^b)$$

$$\therefore xg_v'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} f_v(ax^b) + abx^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b)$$

$$xg_v'(x) = \frac{1}{2} g_v(x) + abx^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b).$$

Además,

$$(xg_v'(x))' = g_v'(x) + xg_v''(x) =$$

$$\frac{1}{2} g_v'(x) + ab \left( b + \frac{1}{2} \right) x^{b-\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) + abx^{b+\frac{1}{2}} f_v''(ax^b) \cdot abx^{b-1},$$

por lo cual

$$xg_v''(x) = -\frac{1}{2} g_v'(x) + ab \left( b + \frac{1}{2} \right) x^{b-\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) + a^2 b^2 x^{2b-\frac{1}{2}} f_v''(ax^b)$$

$$\therefore x^2 g_v''(x) = -\frac{1}{2} x g_v'(x) + ab \left( b + \frac{1}{2} \right) x^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) + a^2 b^2 x^{2b+\frac{1}{2}} f_v''(ax^b)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} g_v(x) + abx^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) \right] + ab \left( b + \frac{1}{2} \right) x^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) + a^2 b^2 x^{2b+\frac{1}{2}} f_v''(ax^b).$$

Entonces,

$$0 = x^2 g_v''(x) + \left( a^2 b^2 x^{2b} + \frac{1}{4} - v^2 b^2 \right) g_v(x)$$

$$0 = x^2 g_v''(x) + \frac{1}{4} g_v(x) + (a^2 b^2 x^{2b} - v^2 b^2) g_v(x) =$$

$$-\frac{1}{2} abx^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) + ab \left( b + \frac{1}{2} \right) x^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) + a^2 b^2 x^{2b+\frac{1}{2}} f_v''(ax^b) +$$

$$a^2 b^2 x^{2b} g_v(x) - v^2 b^2 g_v(x) =$$

$$ab^2 x^{b+\frac{1}{2}} f_v'(ax^b) + a^2 b^2 x^{2b+\frac{1}{2}} f_v''(ax^b) + a^2 b^2 x^{2b+\frac{1}{2}} f_v(ax^b) - v^2 b^2 x^{\frac{1}{2}} f_v(ax^b)$$

$$0 = b^2 x^{\frac{1}{2}} [(ax^b)^2 f_v''(ax^b) + (ax^b) f_v'(ax^b) + ((ax^b)^2 - v^2) f_v(ax^b)]$$

$$\therefore (ax^b)^2 f_v''(ax^b) + (ax^b) f_v'(ax^b) + ((ax^b)^2 - v^2) f_v(ax^b) = 0.$$

Poniendo  $u = ax^b$  en esta última ecuación obtenemos:

$$u^2 f_v''(u) + u f_v'(u) + (u^2 - v^2) f_v(u) = 0,$$

en donde se observa que  $f_v$  es solución de la ecuación diferencial de Bessel de orden  $v$ , y que es lo que queríamos probar.

Volviendo ahora a la ecuación de Airy

$$y'' + \alpha^2 xy = 0,$$

y comparando esta expresión con

$$x^2 y'' + \left( a^2 b^2 x^{2b} + \frac{1}{4} - v^2 b^2 \right) y = 0,$$

se desprende que

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - v^2 b^2 = 0, \\ 2b - 3 = 0, \\ a^2 b^2 = \alpha^2. \end{cases}$$

La solución de este conjunto de ecuaciones es:

$$a = \frac{2}{3} \alpha, \quad b = \frac{3}{2}, \quad v = \frac{1}{3},$$

por lo que hemos llegado a la conclusión que la función

$$y(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \alpha x^{\frac{3}{2}} \right),$$

es una solución particular de la ecuación e Airy, para  $x > 0$ .

Observemos además que la solución  $y_2(x)$  obtenida anteriormente, cuando es multiplicada por la constante

$$A = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(1 + \frac{1}{3})},$$

se convierte en  $y(x)$ , como veremos a continuación.

Efectivamente

$$Ay_2(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}} x}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+\frac{1}{3}} [2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n-1)] x^{3n+1}}{3^{\frac{1}{3}} (3n+1)! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

y

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+\frac{1}{3}} x^{3n+1}}{3^{2n+\frac{1}{3}} n! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3} + n\right)} = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}} x}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+\frac{1}{3}} x^{3n+1}}{3^{2n+\frac{1}{3}} n! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3} + n\right)}.$$

Observamos que

$$Ay_2(x) = y(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+\frac{1}{3}} [2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n-1)] x^{3n+1}}{3^{\frac{1}{3}} (3n+1)! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+\frac{1}{3}} x^{3n+1}}{3^{2n+\frac{1}{3}} n! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3} + n\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n-1)}{(3n+1)! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3^{2n} n! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3} + n\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n-1)}{(3n+1)! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3^{2n} n! \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{3}\right) \left(3 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(n + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n-1)}{(3n+1)! \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3^{2n} n! \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{10}{3} \dots \frac{3n+1}{3}\right] \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{3^n}{3^{2n} n! [4 \cdot 7 \cdot 10 \dots \cdot (3n+1)] \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3^n n! [4 \cdot 7 \cdot 10 \dots \cdot (3n + 1)] \Gamma(1 + \frac{1}{3})}$$

O sea, precisamos verificar que

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n - 1)}{(3n + 1)!} = \frac{1}{3^n n! [4 \cdot 7 \cdot 10 \dots \cdot (3n + 1)]},$$

es decir que

$$(3n + 1)! = [2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n - 1)] 3^n n! [4 \cdot 7 \cdot 10 \dots \cdot (3n + 1)].$$

Observemos que

$$3^n n! = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \dots \cdot 3)}_{n \text{ veces}} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n) = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \dots \cdot (3 \cdot n)$$

$$3^n n! = [3 \cdot 6 \cdot 9 \dots \cdot 3n]$$

$$\begin{aligned} \therefore [2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n - 1)] 3^n n! [4 \cdot 7 \cdot 10 \dots \cdot (3n + 1)] \\ &= [2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3n - 1)] [3 \cdot 6 \cdot 9 \dots \cdot 3n] [4 \cdot 7 \cdot 10 \dots \cdot (3n + 1)] \\ &= 1 \cdot [(2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot (8 \cdot 9 \cdot 10) \dots \cdot (3n - 1) 3n (3n + 1)] = (3n + 1)!. \end{aligned}$$

Entonces, la igualdad queda probada.

### 3.3 Solución de la Ecuación de Schrödinger

#### 3.3.1 Resumen

A modo de resumen, enumeraremos los resultados obtenidos hasta ahora.

- 1) La ecuación de Schrödinger para una partícula libre en función de las variables  $(r, s)$  viene expresada de la siguiente manera:

$$\frac{-1}{4(r \cos \theta + s \operatorname{sen} \theta)} (\partial_r^2 + \partial_s^2) \Psi = E \Psi.$$

Al separar variables, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} X''(r) + [(4E \cos \theta)r - \mu]X(r) = 0 \\ Y''(s) + [(4E \operatorname{sen} \theta)s + \mu]Y(s) = 0, \end{cases}$$

las cuales, tras el cambio de variables

$$\begin{cases} t = r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}, & \cos \theta \neq 0 \\ t = s + \frac{\mu}{4E \operatorname{sen} \theta}, & \operatorname{sen} \theta \neq 0, \end{cases}$$

se transforman en

$$\begin{cases} X''(t) + (4E \cos \theta)tX(t) = 0 \\ Y''(t) + (4E \operatorname{sen} \theta)tY(t) = 0, \end{cases}$$

que pertenecen a la forma genérica

$$y'' + \alpha^2 xy = 0 \text{ (Airy)}, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ cuando } E \cos \theta > 0 \text{ y } E \operatorname{sen} \theta > 0.$$

Nótese que en un caso  $\alpha^2 = 4E \cos \theta$  y en el otro  $\alpha^2 = 4E \operatorname{sen} \theta$ , de modo que si  $E > 0$ , las funciones seno y coseno quedarán supeditadas a las restricciones  $\operatorname{sen} \theta > 0$  y  $\cos \theta > 0$ .

2) La ecuación de Airy  $y'' + \alpha^2 xy = 0$  admite la solución general

$y = c_0 y_1 + c_1 y_2$ , en donde

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha^{2k} \frac{[1 \cdot 4 \cdot 7 \dots \cdot (3k-2)]}{(3k)!} x^{3k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha^{2k} \frac{[2 \cdot 5 \cdot 8 \dots \cdot (3k-1)]}{(3k+1)!} x^{3k+1},$$

válidas para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Además,  $y(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha x^{\frac{3}{2}}\right)$ ,  $x > 0$  es una solución particular de la ecuación de Airy, verificándose que

$$y(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right)} y_2(x).$$

3) De 1) y 2) deducimos lo siguiente:

Comparando la ecuación

$$X''(t) + (4E \cos \theta)tX(t) = 0$$

con la ecuación de Airy

$$y'' + \alpha^2 xy = 0,$$

se deduce que  $\alpha^2 = 4E \cos \theta$ .

Ahora bien, puesto que una solución particular de la ecuación de Airy es

$$y(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\alpha x^{\frac{3}{2}}\right),$$

entonces

$$X(t) = \sqrt{t} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{4E \cos \theta} t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Por otra parte  $t = r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}$ , por lo tanto

$$X(r) = \sqrt{r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{4E \cos \theta} \left(r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$r > \frac{\mu}{4E \cos \theta}, \cos \theta > 0,$$

es una solución particular de

$$X''(r) + [(4E \cos \theta)r - \mu]X(r) = 0.$$

Comparando ahora  $Y''(t) + (4E \operatorname{sen} \theta)tY(t) = 0$  con la ecuación de Airy, se deduce que  $\alpha^2 = 4E \operatorname{sen} \theta$ , y trabajando de manera semejante se tiene que

$$Y(s) = \sqrt{s + \frac{\mu}{4E \operatorname{sen} \theta}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{4E \operatorname{sen} \theta} \left( s + \frac{\mu}{4E \operatorname{sen} \theta} \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$s > -\frac{\mu}{4E \operatorname{sen} \theta}, \operatorname{sen} \theta > 0,$$

es una solución particular de

$$Y''(s) + [(4E \operatorname{sen} \theta)s + \mu]Y(s) = 0.$$

### 3.3.2 Conclusión

La ecuación  $\hat{H}\Psi = \frac{-1}{4(r \cos \theta + s \operatorname{sen} \theta)} (\partial_r^2 + \partial_s^2)\Psi = E\Psi$  admite la solución

$$\Psi(r, s) = X(r)Y(s),$$

que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Psi(r, s) = \sqrt{\left(r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}\right) \left(s + \frac{\mu}{4E \operatorname{sen} \theta}\right)} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{4E \cos \theta} \left(r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}\right)^{\frac{3}{2}} \right) J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{4E \operatorname{sen} \theta} \left(s + \frac{\mu}{4E \operatorname{sen} \theta}\right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

Este resultado coincide con el reportado en [1], ecuación (46).

## **CAPÍTULO 4**

# **SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN OTRAS SUPERFICIES**

Diversos trabajos de investigación se han llevado a cabo en el terreno de las EDPs, modificando el operador que define a la ecuación, aumentando su nivel de complejidad y estudiando posteriormente las posibilidades de resolución de la nueva ecuación así obtenida. Esto con el objetivo de perfeccionar las ecuaciones que sirven para modelar ciertos problemas en ingeniería y demás ciencias aplicadas.

En este trabajo, por el contrario, dejaremos el operador inmodificado y vamos a aumentar la complejidad del espacio en donde se define la ecuación de Schrödinger para posteriormente resolver dicha ecuación en este nuevo dominio. En este plan, partiremos del espacio de Darboux D1 para el cual ya hemos estudiado en el Capítulo 3 la resolución de la misma dada en la referencia [1].

En otras palabras, partiendo del espacio D1 vamos a emprender la búsqueda de otras superficies en las cuales resulte factible resolver la ecuación de Schrödinger por el método de separación de variables.

Estas superficies quedarán definidas por su métrica. Habiendo observado el papel fundamental que juega la métrica en la expresión del Laplaciano en una variedad, no nos sorprenderá que la representación analítica de la ecuación de Schrödinger dependa directamente de la métrica del espacio en el cual estemos trabajando.

A fin de orientarnos en este proceso, tomaremos primero la expresión de la ecuación en el espacio D1, agregándole nuevos términos y estudiando las posibilidades de separación de la nueva ecuación así obtenida.

Examinemos un ejemplo de lo anteriormente expresado.

## 4.1 Adición de un término a la ecuación en el espacio D1

### 4.1.1 Ejemplo

Partiendo de la ecuación en las variables  $(u, v)$ ,

$$-\frac{1}{4u}(\partial_u^2 + \partial_v^2)\Psi - E\Psi = 0.$$

Agregamos ahora el término con derivada mixta  $\frac{1}{4u}\partial_{uv}^2$ , y la llevamos a la forma

$$-\frac{1}{4u}(\partial_u^2 - \partial_{uv}^2 + \partial_v^2)\Psi - E\Psi = 0. \quad (4.1)$$

Buscando resolver la ecuación (4.1) por el método de separación de variables, postulamos la siguiente solución:

$$\Psi(u, v) = X(u)Y(v).$$

Entonces

$$\partial_u^2\Psi = X''Y, \quad \partial_{uv}^2\Psi = X'Y', \quad \partial_v^2\Psi = XY''.$$

Reemplazando estas expresiones en (4.1),

$$-\frac{1}{4u}(X''Y - X'Y' + XY'') - EXY = 0$$

$$X''Y + XY'' - X'Y' + 4uEXY = 0.$$

Dividiendo entre  $XY$ ,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} - \frac{X'Y'}{XY} + 4uE = 0$$

Esta última expresión puede ser separada, por ejemplo, para

$$Y(v) = e^{\gamma v},$$

en donde  $\gamma$  es un parámetro real, obteniendo

$$\frac{X''}{X} + \gamma^2 - \frac{X'}{X}\gamma + 4uE = 0$$

$$X'' - \gamma X' + (4uE + \gamma^2)X = 0$$

$$X'' - \gamma X' + 4E \left( u + \frac{\gamma^2}{4E} \right) X = 0.$$

Luego de la ulterior sustitución

$$t = u + \frac{\gamma^2}{4E},$$

llegamos a la ecuación

$$X'' - \gamma X' + 4EtX = 0,$$

la cual es una EDO que se puede resolver para  $X$ .

En resumen, postulando una solución de la forma  $\Psi(u, v) = e^{\gamma v} X(u)$ , la ecuación (4.1) es resuelta mediante el método de separación de variables.

En este proceso que hemos ejemplificado en el párrafo anterior se han introducido cambios en la ecuación de Schrödinger. Como esta ecuación es la ecuación fundamental de la Mecánica Cuántica, y por lo tanto una de las ecuaciones fundamentales de la Física (y no meramente la ecuación de un modelo para un problema particular), seguramente estos cambios tienen un significado físico importante, traduciéndose en la violación de

ciertos principios básicos (como la isotropía espacial y la conservación de la cantidad de movimiento lineal y angular, por ejemplo). Pero no perdamos de vista que, en esta etapa heurística, no se trata de introducir modificaciones *ad hoc* en una ecuación tan medular, sino que lo que nos interesa es ganar visión para entender el comportamiento de la ecuación y su manera de resolverla para cuando trabajemos con ella en superficies distintas del espacio D1.

## 4.2 Nuevas métricas

A consecuencia de lo ejemplificado en 4.1.1, vamos a presentar nuevas métricas para las cuales es posible separar la ecuación de Schrödinger.

### 4.2.1 Métrica I (M1)

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} x + y & \frac{x + y}{2} \\ \frac{x + y}{2} & x + y \end{bmatrix},$$

por lo que

$$ds^2 = (x + y)dx^2 + (x + y)dxdy + (x + y)dy^2,$$

en donde las variables  $x$  e  $y$  pertenecen al plano complejo.

Siguiendo la referencia [1], introducimos el cambio de variables

$$\begin{cases} x = u + iv \Rightarrow dx = du + idv, \\ y = u - iv \Rightarrow dy = du - idv, \end{cases}$$

en donde  $u$  y  $v$  son variables reales.

La métrica quedará expresada como sigue,

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= 2u(du + idv)^2 + 2u(du + idv)(du - idv) + 2u(du - idv)^2 \\
 ds^2 &= 2u(du^2 + 2idudv - dv^2) + 2u(du^2 + dv^2) + 2u(du^2 - 2idudv - dv^2) \\
 ds^2 &= 6udu^2 - 2udv^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore g_{ij} = \begin{bmatrix} 6u & 0 \\ 0 & -2u \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} g = -12u^2 \\ \sqrt{g} = i2\sqrt{3}u, \end{cases}$$

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6u & 0 \\ 0 & -1/2u \end{bmatrix}.$$

Observamos que en estas variables la métrica no es positiva definida ya que  $g = \det(g_{ij}) = -12u^2 < 0, \forall u \neq 0, u \in \mathbb{R}$ , por lo cual la variedad bidimensional correspondiente a esta métrica es pseudo Riemanniana.

Resolveremos la ecuación de Schrödinger estacionaria en esta superficie para una partícula libre de potencial trabajando de manera análoga a la presentada en el Capítulo 2.

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{2\sqrt{g}} [\partial_u(\sqrt{g}g^{11}\partial_u\Psi + \sqrt{g}g^{12}\partial_v\Psi) + \partial_v(\sqrt{g}g^{21}\partial_u\Psi + \sqrt{g}g^{22}\partial_v\Psi)]$$

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{2(i2\sqrt{3}u)} \left[ \partial_u \left( i2\sqrt{3}u \frac{1}{6u} \partial_u\Psi + 0 \right) + \partial_v \left( 0 + i2\sqrt{3}u \frac{-1}{2u} \partial_v\Psi \right) \right]$$

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{4u} \left( \frac{1}{3} \partial_u^2\Psi - \partial_v^2\Psi \right) = \frac{-1}{12u} (\partial_u^2 - 3\partial_v^2)\Psi = E\Psi$$

$$\therefore (\partial_u^2 - 3\partial_v^2)\Psi + 12Eu\Psi = 0 \quad (4.2)$$

Resolviendo la EDP obtenida por el método de separación de variables estudiado en la sección 2.10, postulamos la solución

$$\Psi(u, v) = X(u)Y(v),$$

de modo que

$$\partial_u^2 \Psi = X''Y, \quad \partial_v^2 \Psi = XY''.$$

Sustituyendo en (4.2),

$$X''Y - 3XY'' + 12EuXY = 0,$$

y dividiendo entre  $XY$  se obtiene

$$\frac{X''}{X} - 3\frac{Y''}{Y} + 12Eu = 0,$$

$$\frac{X''}{X} + 12Eu = 3\frac{Y''}{Y} = \gamma^2.$$

Supongamos que  $\gamma \in \mathbb{R}$ , entonces  $\gamma^2 > 0$ , por lo cual obtenemos el par de EDOs

$$\left. \begin{aligned} X'' + (12Eu - \gamma^2)X &= 0 \\ Y'' - \frac{\gamma^2}{3}Y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La ecuación en  $X(u)$  se puede escribir como

$$X'' + 12E\left(u - \frac{\gamma^2}{12E}\right)X = 0,$$

y, entonces, si se efectúa la sustitución

$$t = u - \frac{\gamma^2}{12E}; \quad \frac{dt}{du} = 1$$

se obtiene

$$X'' + 12EtX = 0.$$

(Nótese que, estrictamente hablando, en esta última ecuación se tiene, digamos,  $\hat{X}(t) = X(u(t)) = X\left(t + \frac{\gamma^2}{12E}\right)$  pero, hecha esta salvedad, en este trabajo no vamos a hacer este tipo de distinción notacional).

Hemos llegado a una ecuación de Airy como la que ya hemos estudiado en el capítulo anterior, en donde  $\alpha^2 = 12E$ , cuya solución es

$$X(t) = \sqrt{t} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{12E}t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Entonces,

$$X(u) = \sqrt{u - \frac{\gamma^2}{12E}} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{12E}\left(u - \frac{\gamma^2}{12E}\right)^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$u > \frac{\gamma^2}{12E}.$$

Resolvemos ahora la EDO para  $Y(v)$ .

$$Y'' - \frac{\gamma^2}{3}Y = 0$$

$$\therefore Y(v) = c_1 e^{\gamma v/\sqrt{3}} + c_2 e^{-\gamma v/\sqrt{3}},$$

en donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias.

A consecuencia de la definición de las funciones hiperbólicas  $Y(v)$  también puede ser representada en la forma

$$Y(v) = A \cosh\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}v\right) + B \sinh\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}v\right),$$

con  $A$  y  $B$  constantes arbitrarias que se ajustarán según el problema específico en el que estemos trabajando.

Finalmente llegamos a la siguiente expresión para la función de onda:

$$\Psi(u, v) = X(u)Y(v) = \left( A \cosh\left(\frac{\gamma v}{\sqrt{3}}\right) + B \sinh\left(\frac{\gamma v}{\sqrt{3}}\right) \right) \left( u - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left( \frac{2}{3}\sqrt{12E} \left( u - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

en donde  $\gamma$  es un parámetro real (constante de separación positiva), y  $u > \frac{\gamma^2}{12E}$ .

#### 4.2.2 Métrica II (M2)

Si postulamos la métrica como aparece a continuación:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -i \frac{x+y}{4} & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & i \frac{x+y}{4} \end{bmatrix},$$

de modo que

$$ds^2 = -i \frac{x+y}{4} dx^2 + (x+y) dx dy + i \frac{x+y}{4} dy^2, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

Introduciendo la misma sustitución que en el caso anterior,

$$\begin{cases} x = u + iv \Rightarrow dx = du + idv \\ y = u - iv \Rightarrow dy = du - idv \end{cases}; \quad u, v \in \mathbb{R},$$

tenemos

$$ds^2 = \frac{-i}{4} 2u (du + idv)^2 + 2u (du + idv)(du - idv) + \frac{i}{4} 2u (du - idv)^2$$

$$ds^2 = 2u (du^2 + dudv + dv^2) = 2udu^2 + 2ududv + 2udv^2$$

$$\therefore (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 2u & u \\ u & 2u \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} g = 3u^2 \\ \sqrt{g} = \sqrt{3}u \end{cases}; \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{3u^2} \begin{bmatrix} 2u & -u \\ -u & 2u \end{bmatrix},$$

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} 2/3u & -1/3u \\ -1/3u & 2/3u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}.$$

Para que la métrica sea positiva definida se necesita que  $g_{11} > 0$  y  $g_{22} > 0$ , es decir,  $u > 0$  y que  $g = \det(g_{ij}) > 0$ . Como  $g = 3u^2 > 0$ , entonces, para  $u \in \mathbb{R}, u > 0$  la métrica es positiva definida y la variedad es Riemanniana.

Operando como lo hicimos en la parte anterior,

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{2\sqrt{3}u} \left[ \partial_u \left( \sqrt{3}u \frac{2}{3u} \partial_u \Psi + \sqrt{3}u \frac{(-1)}{3u} \partial_v \Psi \right) + \partial_v \left( \sqrt{3}u \frac{(-1)}{3u} \partial_u \Psi + \sqrt{3}u \frac{2}{3u} \partial_v \Psi \right) \right]$$

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{2\sqrt{3}u} \left[ \partial_u \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \partial_u \Psi - \frac{1}{\sqrt{3}} \partial_v \Psi \right) + \partial_v \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \partial_u \Psi + \frac{2}{\sqrt{3}} \partial_v \Psi \right) \right]$$

$$\hat{H}\Psi = \frac{(-1)}{3u} (\partial_u^2 - \partial_{uv}^2 + \partial_v^2) \Psi = E\Psi$$

$$\therefore \frac{(-1)}{3u} (\partial_u^2 - \partial_{uv}^2 + \partial_v^2) \Psi - E\Psi = 0. \quad (4.3)$$

Observemos que la ecuación que hemos obtenido es similar a la ecuación (4.1), ejemplo 4.1.1, pero esta vez se trata de la expresión de la ecuación de Schrödinger en la superficie en la cual estamos trabajando (es importante entender esta interrelación).

Por lo tanto, podemos resolver (4.3) postulando la solución

$$\Psi(u, v) = e^{\gamma v} z(u),$$

lo cual nos conducirá a la ecuación:

$$z'' - \gamma z' + 3E \left( u + \frac{\gamma^2}{3E} \right) z = 0$$

Eligiendo el cambio de variable

$$t = u + \frac{\gamma^2}{3E},$$

se obtiene  $\frac{dt}{du} = 1$ , de modo que

$$z'' - \gamma z' + 3Etz = 0.$$

Observemos que esta última es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea, con coeficientes variables, de la forma

$$z'' + R(t)z' + S(t)z = 0,$$

$$\begin{cases} R(t) = -\gamma \\ S(t) = 3Et. \end{cases}$$

Para resolverla, elegimos para  $z$  la sustitución

$$z = y(t)w(t) \Rightarrow z' = y'w + yw' \Rightarrow z'' = y''w + 2y'w' + yw''.$$

La ecuación quedará expresada como sigue

$$y''w + 2y'w' + yw'' - \gamma(y'w + yw') + 3Etyw = 0$$

$$yw'' + (2y' - \gamma y)w' + (y'' - \gamma y' + 3Ety)w = 0$$

$$w'' + \left( 2\frac{y'}{y} - \gamma \right) w' + \frac{1}{y}(y'' - \gamma y' + 3Ety)w = 0.$$

Ahora elegimos la función  $y(t)$  tal que

$$2\frac{y'}{y} - \gamma = 0 \Rightarrow y = e^{\frac{\gamma}{2}t}.$$

Entonces,

$$w'' + 0 + \frac{1}{e^{\frac{\gamma}{2}t}} \left( \frac{\gamma^2}{4} e^{\frac{\gamma}{2}t} - \gamma \frac{\gamma}{2} e^{\frac{\gamma}{2}t} + 3Et e^{\frac{\gamma}{2}t} \right) w = 0$$

$$\therefore w'' + \left( 3Et - \frac{\gamma^2}{4} \right) w = 0,$$

$$w'' + 3E \left( t - \frac{\gamma^2}{12E} \right) w = 0.$$

La sustitución  $\xi = t - \frac{\gamma^2}{12E}$  resulta en la ecuación de Airy de la forma ya estudiada

$$w'' + 3E\xi w = 0.$$

En este caso  $\alpha^2 = 3E$ , por lo cual una solución es:

$$w(\xi) = \sqrt{\xi} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{3E} \xi^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\therefore w(t) = \sqrt{t - \frac{\gamma^2}{12E}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{3E} \left( t - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

en donde  $t > \frac{\gamma^2}{12E}$ .

Por lo tanto, una solución particular de  $z'' - \gamma z' + 3Etz = 0$  es:

$$z(t) = y(t)w(t) = e^{\frac{\gamma}{2}t} \sqrt{t - \frac{\gamma^2}{12E}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{3E} \left( t - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

Como  $t = u + \frac{\gamma^2}{3E}$ , entonces  $t - \frac{\gamma^2}{12E} = u + \frac{\gamma^2}{3E} - \frac{\gamma^2}{12E} = u + \frac{\gamma^2}{4E}$ , por lo cual

$$z(u) = e^{\frac{\gamma}{2}\left(u + \frac{\gamma^2}{3E}\right)} \sqrt{u + \frac{\gamma^2}{4E}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{3E} \left(u + \frac{\gamma^2}{4E}\right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Hemos llegado a la conclusión que la expresión para la función de onda admite la forma siguiente:

$$\Psi(u, v) = e^{\gamma v} z(u) = e^{\gamma v} e^{\frac{\gamma}{2}\left(u + \frac{\gamma^2}{3E}\right)} \sqrt{u + \frac{\gamma^2}{4E}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{3E} \left(u + \frac{\gamma^2}{4E}\right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\boxed{\Psi(u, v) = e^{\gamma\left(v + \frac{u}{2} + \frac{\gamma^2}{6E}\right)} \left(u + \frac{\gamma^2}{4E}\right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{3E} \left(u + \frac{\gamma^2}{4E}\right)^{\frac{3}{2}} \right)},$$

en donde  $\gamma$  es un parámetro real, y la cual resulta de resolver la EDP

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{3u} (\partial_u^2 - \partial_{uv}^2 + \partial_v^2)\Psi = E\Psi$$

### 4.2.3 Métrica III (M3)

Supongamos ahora la siguiente métrica:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{(-x+y) - i(x+y)}{8} & \frac{(x+y) + i(-x+y)}{4} \\ \frac{(x+y) + i(-x+y)}{4} & \frac{(x-y) + i(x+y)}{8} \end{bmatrix}; \quad x, y \in \mathbb{C},$$

entonces

$$ds^2 = \frac{(-x+y) - i(x+y)}{8} dx^2 + \frac{(x+y) + i(-x+y)}{2} dx dy + \frac{(x-y) + i(x+y)}{8} dy^2.$$

Procediendo del mismo modo que en los ejemplos anteriores,

$$\begin{cases} x = u + iv \Rightarrow dx = du + idv \\ y = u - iv \Rightarrow dy = du - idv \end{cases} ; u, v \in \mathbb{R},$$

se llega a

$$ds^2 = (u+v)du^2 + (u+v)dudv + (u+v)dv^2,$$

$$(g_{ij})(u, v) = \begin{bmatrix} u+v & \frac{u+v}{2} \\ \frac{u+v}{2} & u+v \end{bmatrix}.$$

Sea ahora una nueva sustitución

$$\begin{cases} u = r + w \\ v = r - w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{u+v}{2} \\ w = \frac{u-v}{2} \end{cases} ; r, w \in \mathbb{R},$$

$$du = dr + dw, \quad dv = dr - dw.$$

Entonces

$$ds^2 = 2r(dr + dw)^2 + 2r(dr + dw)(dr - dw) + 2r(dr - dw)^2$$

$$ds^2 = 2r(dr^2 + 2drdw + dw^2 + dr^2 - dw^2 + dr^2 - 2drdw + dw^2)$$

$$ds^2 = 6rdr^2 + 2rdw^2$$

Por lo tanto,

$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 6r & 0 \\ 0 & 2r \end{bmatrix}$  ;  $g = 12r^2 > 0, \forall r \neq 0$ , la variedad es Riemanniana para  $(r, w) \in \mathbb{R}^2, r > 0$ .

Hemos llegado a una métrica muy parecida a  $MI$ , obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 12r^2 \\ \sqrt{g} = 2\sqrt{3}r \end{array} \right. ; (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1/6r & 0 \\ 0 & 1/2r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}.$$

Operando de manera similar, llegamos a la expresión de la ecuación de Schrödinger para esta métrica:

$$(\partial_r^2 + 3\partial_w^2)\Psi + 12Er\Psi = 0.$$

Suponiendo ahora que  $\Psi(r, w) = X(r)Y(w)$  y trabajando de manera similar, obtendremos las EDOs:

$$\left. \begin{array}{l} X'' + (12Er - \gamma^2)X = 0 \\ Y'' + \frac{\gamma^2}{3}Y = 0 \end{array} \right\},$$

cuyas soluciones son

$$X(r) = \left(r - \frac{\gamma^2}{12E}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{12E}\left(r - \frac{\gamma^2}{12E}\right)^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$r > \frac{\gamma^2}{12E},$$

$$Y(w) = c_1 e^{i\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w} + c_2 e^{-i\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w}.$$

En este caso, a consecuencia de la celebrada fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

la ecuación para  $Y(w)$  se puede escribir en la forma:

$$Y(w) = A \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w\right).$$

Entonces,

$$\Psi(r, w) = X(r)Y(w) = \left(c_1 e^{i\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w} + c_2 e^{-i\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w}\right) \left(r - \frac{\gamma^2}{12E}\right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{12E}\left(r - \frac{\gamma^2}{12E}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\Psi(r, w) = \left(A \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w\right)\right) \left(r - \frac{\gamma^2}{12E}\right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{12E}\left(r - \frac{\gamma^2}{12E}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

En cada expresión de la función de onda, los términos  $c_1$ ,  $c_2$  y  $A$ ,  $B$  son constantes reales arbitrarias, y  $\gamma$  es un parámetro real. Además,  $r > \frac{\gamma^2}{12E}$ .

Observemos también lo siguiente, si en la primera fórmula para  $\Psi(r, w)$  hacemos  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 0$ , llegamos a una expresión para la función de onda análoga a la reportada en [1], ecuación (53).

#### 4.2.4 Familia uniparamétrica de métricas I (F1)

En 4.2.1 hemos visto que en las variables  $u, v$ , la métrica no es positiva definida y por lo tanto la variedad no es Riemanniana.

Supongamos la métrica dada en la siguiente forma:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} x+y & \beta \frac{x+y}{2} \\ \beta \frac{x+y}{2} & x+y \end{bmatrix},$$

o sea

$$ds^2 = (x+y)dx^2 + \beta(x+y)dxdy + (x+y)dy^2,$$

en donde  $\beta$  es un parámetro real. Podríamos entonces preguntarnos para qué valores de  $\beta$  resultaría, tras la sustitución a las variables  $u, v$ , una variedad Riemanniana, y cómo sería la expresión de las funciones de onda obtenidas como resultado de trabajar con estas métricas.

De esta manera,

$$ds^2 = (x+y)(dx^2 + \beta dxdy + dy^2)$$

$$ds^2 = 2u[(du + idv)^2 + \beta(du + idv)(du - idv) + (du - idv)^2]$$

$$ds^2 = 2u(du^2 + 2idudv - dv^2 + \beta(du^2 + dv^2) + du^2 - 2idudv - dv^2)$$

$$ds^2 = 2u[(\beta + 2)du^2 + (\beta - 2)dv^2] = 2u(\beta + 2)du^2 + 2u(\beta - 2)dv^2$$

$$\therefore g_{ij}(u, v) = \begin{bmatrix} 2u(\beta + 2) & 0 \\ 0 & 2u(\beta - 2) \end{bmatrix}.$$

Para que la métrica sea positiva definida se necesita que

- $g = \det(g_{ij}) = 4u^2(\beta + 2)(\beta - 2) > 0 \Leftrightarrow (\beta + 2)(\beta - 2) > 0, u \neq 0.$

Para satisfacer este requerimiento, el parámetro  $\beta$  tendrá que cumplir:  $\beta > 2$  ó  $\beta < -2.$

- $g_{11} = 2u(\beta + 2) > 0 \Leftrightarrow u > 0, \beta > -2$  ó  $u < 0, \beta < -2$ .
- $g_{22} = 2u(\beta - 2) > 0 \Leftrightarrow u > 0, \beta > 2$  ó  $u < 0, \beta < 2$ .

Analizando los tres puntos, concluimos que  $u > 0, \beta > 2$  ó  $u < 0, \beta < -2$ .

Operando ahora con esta familia de métricas, la ecuación de Schrödinger quedará expresada de la manera siguiente:

$$\partial_u^2 \Psi + \frac{\beta + 2}{\beta - 2} \partial_v^2 \Psi + 4(\beta + 2)Eu\Psi = 0,$$

en donde  $\frac{\beta+2}{\beta-2} > 0$ .

Al separarla, obtenemos las EDOs

$$\left. \begin{aligned} X'' + [4(\beta + 2)Eu - \gamma^2]X &= 0 \\ Y'' + \frac{\beta - 2}{\beta + 2}\gamma^2 Y &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

La expresión que  $X(u)$  debe satisfacer es una ecuación de Airy, en donde  $\alpha^2 = 4(\beta + 2)E, \alpha \in \mathbb{R}$ . Suponiendo  $E > 0$ , entonces  $\beta + 2 > 0$ . De aquí concluimos que el caso  $\beta < -2$  debe ser excluido de nuestro análisis. Se deduce entonces que  $u > 0, \beta > 2$ .

Resolviendo cada una de ellas, llegamos a las siguientes fórmulas para  $X(u)$  y  $Y(v)$ :

$$X(u) = \left( u - \frac{\gamma^2}{4(\beta + 2)E} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{4(\beta + 2)E} \left( u - \frac{\gamma^2}{4(\beta + 2)E} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$Y(v) = c_1 e^{i\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v} + c_2 e^{-i\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v} = A \cos\left(\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v\right) + B \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\beta-2}{\beta+2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v\right)$$

Notemos que la función  $Y(v)$  viene expresada ahora como una combinación lineal de funciones sinusoidales, a diferencia de lo que sucede en 4.2.1, en donde  $Y(v)$  está representada por una combinación lineal de funciones hiperbólicas. Esto es una consecuencia directa del tipo de variedad en la que estemos trabajando (Riemanniana o pseudo Riemanniana).

La función de onda  $\Psi(u, v) = X(u)Y(v)$  se obtiene al multiplicar las soluciones recuadradas arriba.

De este modo, la expresión

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} x+y & \beta \frac{x+y}{2} \\ \beta \frac{x+y}{2} & x+y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2u(\beta+2) & 0 \\ 0 & 2u(\beta-2) \end{bmatrix},$$

$$x, y \in \mathbb{C}, u > 0, \beta > 2, \beta \in \mathbb{R},$$

representa a una familia uniparamétrica de métricas en donde la sustitución a las variables reales  $u, v$  con el cual estamos trabajando conduce a superficies Riemannianas, para las cuales es factible representar ciertas soluciones de la Ecuación de Schrödinger estacionaria en términos de funciones de Bessel, y en donde el método utilizado para encontrar estas soluciones particulares es el de separación de variables.

### 4.2.5 Familia uniparamétrica de métricas II (F2)

Razonando como en la sección anterior, supongamos ahora lo siguiente:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x+y) & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & \alpha(x+y) \end{bmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ . Observamos que esta familia se corresponde con  $D1$  cuando  $\alpha = 0$ .

Al igual que en la sección anterior, podemos inquirir para qué valores del parámetro  $\alpha$  resultarían métricas Riemannianas en las variables  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Entonces,

$$ds^2 = \alpha(x+y)dx^2 + (x+y)dxdy + \alpha(x+y)dy^2$$

$$ds^2 = (x+y)(\alpha dx^2 + dxdy + \alpha dy^2)$$

Tras el usual cambio a las variables  $(u, v)$ :

$$ds^2 = 2u[\alpha(du^2 + 2idudv - dv^2) + du^2 + dv^2 + \alpha(du^2 - 2idudv - dv^2)]$$

$$ds^2 = 2u[(1 + 2\alpha)du^2 + (1 - 2\alpha)dv^2] = 2u(1 + 2\alpha)du^2 + 2u(1 - 2\alpha)dv^2$$

$$\therefore (g_{ij})(u, v) = \begin{bmatrix} 2u(1 + 2\alpha) & 0 \\ 0 & 2u(1 - 2\alpha) \end{bmatrix},$$

$$g = \det(g_{ij}) = 4u^2(1 - 4\alpha^2).$$

Ahora, para que la métrica sea Riemanniana debe ser positiva definida y entonces debe cumplirse que

- $g = 4u^2(1 - 4\alpha^2) > 0 \Leftrightarrow (1 - 4\alpha^2) > 0, u \neq 0 \Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), u \neq 0.$
- $g_{11} > 0, g_{22} > 0 \Rightarrow u > 0.$

De estos puntos concluimos que  $u > 0, \alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

Vamos a obtener ahora la expresión de la ecuación de Schrödinger.

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2u(1+2\alpha)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2u(1-2\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix},$$

entonces

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{2(2u)\sqrt{1-4\alpha^2}} \left[ \partial_u \left( \frac{2u\sqrt{1-4\alpha^2}}{2u(1+2\alpha)} \partial_u \Psi + 0 \right) + \partial_v \left( 0 + \frac{2u\sqrt{1-4\alpha^2}}{2u(1+2\alpha)} \partial_v \Psi \right) \right]$$

$$\hat{H}\Psi = \frac{-1}{4u} \left( \frac{1}{1+2\alpha} \partial_u^2 \Psi + \frac{1}{1-2\alpha} \partial_v^2 \Psi \right) = E\Psi$$

$$\therefore \partial_u^2 \Psi + \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha} \partial_u^2 \Psi + 4(1+2\alpha)Eu\Psi = 0,$$

con  $\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha} > 0.$

Suponiendo ahora que  $\Psi(u, v) = X(u)Y(v)$ , se llega al sistema

$$\left. \begin{aligned} X'' + [4(1+2\alpha)Eu - \gamma^2]X &= 0 \\ Y'' + \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}\gamma^2 Y &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Operando similarmente que en la sección anterior, obtenemos

$$X(u) = \left( u - \frac{\gamma^2}{4(1+2\alpha)E} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{4(1+2\alpha)E} \left( u - \frac{\gamma^2}{4(1+2\alpha)E} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$Y(v) = c_1 e^{i\left(\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v} + c_2 e^{-i\left(\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v} = A \cos \left( \left( \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma v \right) + B \sin \left( \left( \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma v \right)$$

La función de onda será  $\Psi(u, v) = X(u)Y(v)$ .

Nótese que el caso  $\alpha = 0$  se corresponde al estudio hecho en el Capítulo 3 cuando no hay rotación, y por lo tanto completa dicho análisis.

Para finalizar esta parte, diremos que la expresión

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha(x+y) & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & \alpha(x+y) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2u(1+2\alpha) & 0 \\ 0 & 2u(1-2\alpha) \end{bmatrix},$$

$$x, y \in \mathbb{C}, u > 0, \alpha \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \alpha \in \mathbb{R},$$

es una familia de métricas para la cual podemos efectuar los mismos comentarios que los realizados al final de la sección anterior.

## CAPÍTULO 5

# ESTUDIO GEOMÉTRICO DE LAS SUPERFICIES

En este capítulo haremos una caracterización de los aspectos geométricos más relevantes del espacio  $D1$  y de las variedades definidas por las métricas presentadas en el Capítulo 4.

### 5.1 Espacio $D1$

Según estudiamos en el Capítulo 3, para el espacio  $D1$  se tiene que

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2u \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{C}, u > 0.$$

#### 5.1.1 Curvatura Gaussiana

En 2.6.8 mencionamos uno de los teoremas más importantes de la Geometría Diferencial, el Teorema Egregio de Gauss. Calcularemos la curvatura Gaussiana del espacio  $D1$  valiéndonos de la fórmula a la cual Gauss llega para probar dicho teorema, la cual es [3]:

$$4\mathbb{K}(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} 4F_{uv} - 2E_{vv} - 2G_{uu} & E_u & 2F_u - E_v \\ 2F_v - G_u & E & F \\ G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E_v & G_u \\ E_v & E & F \\ G_u & F & G \end{vmatrix}$$

La expresión de la métrica del espacio  $D1$  en variables reales es:

$$\begin{bmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E = 2u \\ F = 0 \\ G = 2u \end{cases}.$$

Observamos que la métrica no depende del parámetro  $v$ , por lo cual  $\mathbb{K}$  será independiente de  $v$ .

Insertando en la fórmula de Gauss,

$$4\mathbb{K}(4u^2)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 2u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2u & 0 \\ 2 & 0 & 2u \end{vmatrix} = 8u - (-8u)$$

$$4\mathbb{K}16u^4 = 16u$$

$$\boxed{\mathbb{K}_{D1} = \frac{1}{4u^3}}$$

De la fórmula obtenida para la curvatura Gaussiana, se desprende que la misma no es constante, sino que depende del parámetro  $u$ , además:

- i) Cuando  $u < 0 \Rightarrow \mathbb{K}_{D1} < 0$ , región de puntos hiperbólicos.
- ii) Cuando  $u > 0 \Rightarrow \mathbb{K}_{D1} > 0$ , región de puntos elípticos.
- iii) Cuando  $u \rightarrow 0^\pm \Rightarrow \mathbb{K}_{D1} \rightarrow \pm\infty$ , la curvatura Gaussiana se hace infinita.

En este último caso se dice que el espacio presenta una *singularidad* para  $u = 0$ .

Como  $\mathbb{K} \neq 0$  para todo  $u \neq 0$ , la superficie no presentará puntos parabólicos ni puntos planares.

### 5.1.2 Curvas Geodésicas

Según vimos en 2.7.5, las ecuaciones de las geodésicas en una superficie son las siguientes:

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0, \end{cases}$$

en donde  $(u(t), v(t))$  representan a las coordenadas de las curvas y  $\Gamma_{jk}^i$  para  $i, j, k \in \{1, 2\}$  son los Símbolos de Christoffel, los cuales están dados por:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{cases}$$

Recordando que para el espacio en cuestión se cumple que

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2u \end{bmatrix}, EG - F^2 = 4u^2,$$

entonces

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2u} & \Gamma_{11}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = 0 & \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2u} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{-1}{2u} & \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{2u} u'^2 - \frac{1}{2u} v'^2 = 0 \\ v'' + \frac{1}{u} u'v' = 0. \end{cases}$$

Al multiplicar ambos miembros de la segunda ecuación por  $u$ , observamos lo siguiente:

$$uv'' + u'v' = 0$$

$$uv'' + u'v' = (uv)'$$

$$\Rightarrow (uv')' = 0 \quad \therefore uv' = A \quad \therefore v' = \frac{A}{u},$$

en donde  $A$  es una constante real de integración.

Ahora reemplazamos en la primera ecuación del sistema la expresión para  $v'$  recién obtenida

$$u'' + \frac{1}{2u}u'^2 - \frac{1}{2u}\left(\frac{A}{u}\right)^2 = 0$$

$$\therefore 2u^3u'' + u^2u'^2 - A^2 = 0.$$

El sistema se convierte en:

$$\begin{cases} 2u^3u'' + u^2u'^2 - A^2 = 0 \\ v' = \frac{A}{u}. \end{cases}$$

Para resolverlo, primero hemos de obtener la solución de la ecuación en  $u(t)$  y luego integrar la segunda ecuación para obtener la expresión de  $v(t)$ .

Al observar la ecuación para  $u(t)$  nos percatamos de lo siguiente:

$$\frac{u^2}{u'} \frac{d}{dt}(uu'^2) = \frac{u^2}{u'}(u'^3 + 2uu'u'') = 2u^3u'' + u^2u'^2$$

$$\therefore \frac{u^2}{u'} \frac{d}{dt}(uu'^2) - A^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(uu'^2) - \frac{u'}{u^2}A^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(uu'^2) + \frac{d}{dt}\left(\frac{A^2}{u}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(uu'^2 + \frac{A^2}{u}\right) = 0.$$

De aquí inferimos que

$$uu'^2 + \frac{A^2}{u} = B,$$

en donde  $B$  es una constante de integración (al final de esta sección veremos el significado de la misma).

Prosiguiendo,

$$u' = \frac{du}{dt} = \pm \sqrt{\frac{B}{u} - \frac{A^2}{u^2}}$$

Tomando la raíz positiva, que corresponde a una parametrización positiva de  $u(t)$ , entonces

$$dt = \frac{du}{\sqrt{\frac{B}{u} - \frac{A^2}{u^2}}}$$

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{B}{u} - \frac{A^2}{u^2}}} = \int \frac{udu}{\sqrt{Bu - A^2}}.$$

Esta última es una integral conocida, estando tabulada en libros de Cálculo elemental:

$$\int \frac{udu}{\sqrt{Bu - A^2}} = \frac{2}{3B^2} (Bu + 2A^2) \sqrt{Bu - A^2} + C,$$

en donde  $C$  es una constante de integración.

De esta manera llegamos a una expresión implícita para  $u(t)$ ,

$$t = \frac{2}{3B^2} (Bu + 2A^2) \sqrt{Bu - A^2} + C.$$

Entonces la solución del sistema de ecuaciones diferenciales para las coordenadas de las geodésicas del espacio  $D1$  quedará expresada de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{cases} t = \frac{2}{3B^2} (Bu + 2A^2) \sqrt{Bu - A^2} + C \\ v = A \int \frac{dt}{u} + D \end{cases}}$$

Este sistema se puede resolver por métodos numéricos con el auxilio de un programa de computación, por ejemplo *Mathematica*. Los valores de las constantes  $A, B, C, D$  dependerán de la geodésica específica con la que estemos trabajando.

Observemos además que para las geodésicas en este espacio, se cumple que

$$\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t)),$$

en donde  $\mathbb{X}(u, v)$  es una parametrización de  $D1$  tal que  $E = 2u, F = 0, G = 2u$ .

Entonces

$$\alpha'(t) = \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v',$$

es la velocidad de la geodésica. El cuadrado de la rapidez de la curva vendrá dado por la expresión:

$$|\alpha'(t)|^2 = \langle \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v', \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v' \rangle = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$$

$$|\alpha'(t)|^2 = 2uu'^2 + 2uv'^2.$$

Al tratarse de una geodésica, la velocidad de la misma y por lo tanto su rapidez, vistas desde la superficie, serán constantes.

Recordando además que  $v' = \frac{A}{u}$ , se tiene que

$$|\alpha'(t)|^2 = 2uu'^2 + 2u \frac{A^2}{u^2}$$

$$\frac{|\alpha'(t)|^2}{2} = uu'^2 + \frac{A^2}{u} = B.$$

De aquí concluimos que la constante  $B$  representa la mitad del cuadrado de la rapidez de la geodésica, por lo que  $B > 0$ . En caso que la geodésica esté parametrizada por su longitud de arco (esto puede hacerse para facilitar los cálculos), se tendrá que  $B = \frac{1}{2}$ .

### 5.1.3 Parametrización del Espacio $D1$

En [1] Capítulo 5 se da una parametrización de  $D1$  como una superficie de revolución, siendo una subvariedad bidimensional del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , y en donde dicha parametrización no es global.

Una superficie de revolución puede ser parametrizada del siguiente modo

$$\mathbb{X}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, z(u)); 0 < v < 2\pi, a < u < b, f(u) \neq 0.$$

Entonces,

$$\mathbb{X}_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, z'(u)) \therefore E = f'^2 + z'^2,$$

$$\mathbb{X}_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0) \therefore G = f^2, F = 0.$$

Por lo tanto,

$$G = 2u = f^2 \Rightarrow f = \sqrt{2u} \therefore f' = \frac{1}{\sqrt{2u}},$$

$$E = 2u = \left(\frac{1}{\sqrt{2u}}\right)^2 + z'^2 = \frac{1}{2u} + z'^2 \therefore z' = \pm \sqrt{2u - \frac{1}{2u}} = \pm \sqrt{\frac{4u^2 - 1}{2u}}$$

Tomando la raíz positiva,

$$z(u) = \int \sqrt{\frac{4u^2 - 1}{2u}} du.$$

Esta integral estará definida para  $u > 0$  cuando

$$\frac{4u^2 - 1}{2u} \geq 0 \therefore u \in \left[ \frac{1}{2}, \infty \right).$$

La parametrización puede ser escrita de la siguiente manera:

$$x(u, v) = \sqrt{2u} \cos v ; y(u, v) = \sqrt{2u} \sin v ; z(u, v) = \int_{\frac{1}{2}}^u \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{2t}} dt ,$$

$$u > \frac{1}{2} , 0 < v < 2\pi .$$

La integral que define a  $z(u, v)$  va a quedar expresada en función de una integral elíptica de la primera clase, tal como aparece en [1] ecuación (80).

Observemos además que

$$x^2 + y^2 = 2u \Rightarrow u = \frac{x^2 + y^2}{2} ,$$

por lo cual, la superficie puede ser representada por medio de la siguiente expresión implícita:

$$z - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2 + y^2}{2}} \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{2t}} dt = 0 .$$

Con las ecuaciones obtenidas en esta Sección y con las especificadas al final de la Sección anterior, utilizando el programa *Mathematica* anteriormente mencionado se puede graficar el espacio  $D1$  junto con sus geodésicas.

## 5.2 Espacio M1

La métrica que define al espacio M1 fue presentada en 4.2.1,

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} x+y & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & x+y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6u & 0 \\ 0 & -2u \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{C}; u \in \mathbb{R}.$$

### 5.2.1 Curvatura Gaussiana

Para este caso:

$$\begin{cases} E = 6u \\ F = 0 \\ G = -2u. \end{cases}$$

Utilizando la fórmula de Gauss [3],

$$4\mathbb{K}(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} 4F_{uv} - 2E_{vv} - 2G_{uu} & E_u & 2F_u - E_v \\ 2F_v - G_u & E & F \\ G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E_v & G_u \\ E_v & E & F \\ G_u & F & G \end{vmatrix}$$

$$4\mathbb{K}(-12u^2)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 6u & 0 \\ 0 & 0 & -2u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 6u & 0 \\ -2 & 0 & -2u \end{vmatrix} = 24u - (-24u)$$

$$4\mathbb{K}144u^4 = 48u$$

$$\mathbb{K}_{M1} = \frac{1}{12u^3}.$$

Observemos que

$$\mathbb{K}_{M1} = \frac{1}{3} \mathbb{K}_{D1},$$

por lo cual valen las mismas observaciones en relación a los tipos de puntos que las hechas para  $D1$  (ver 5.1.1).

### 5.3 Espacio $M2$

El espacio  $M2$  está caracterizado por la métrica

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} -i \frac{x+y}{4} & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & i \frac{x+y}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2u & u \\ u & 2u \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{C}; u > 0,$$

la cual fue introducida en 4.2.2.

#### 5.3.1 Curvatura Gaussiana

Para esta superficie se cumple que

$$\begin{cases} E = 2u \\ F = u \\ G = 2u. \end{cases}$$

Entonces,

$$4\mathbb{K}(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} 4F_{uv} - 2E_{vv} - 2G_{uu} & E_u & 2F_u - E_v \\ 2F_v - G_u & E & F \\ G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E_v & G_u \\ E_v & E & F \\ G_u & F & G \end{vmatrix}$$

$$4\mathbb{K}(3u^2)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2u & u \\ 0 & u & 2u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2u & u \\ 2 & u & 2u \end{vmatrix} = -4u + 8u - (-8u)$$

$$4\mathbb{K}9u^4 = 12u$$

$$\mathbb{K}_{M_2} = \frac{1}{3u^3}$$

En este caso se cumple la siguiente relación:

$$\mathbb{K}_{M_2} = \frac{4}{3}\mathbb{K}_{D_1},$$

por lo tanto los puntos del espacio  $M_2$  se clasificarán según su curvatura Gaussiana análogamente a los puntos de  $D_1$ .

### 5.3.2 Curvas Geodésicas

Los Símbolos de Christoffel para esta superficie son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{3u} & \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{3u} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{-1}{3u} & \Gamma_{12}^2 = \frac{2}{3u} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{-2}{3u} & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{3u} \end{array} \right.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales al cual se llega es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + \frac{1}{3u}u'^2 - \frac{2}{3u}u'v' - \frac{2}{3u}v'^2 = 0 \\ v'' + \frac{1}{3u}u'^2 + \frac{4}{3u}u'v' + \frac{1}{3u}v'^2 = 0 \end{array} \right. \therefore \left\{ \begin{array}{l} 3uu'' + u'^2 - 2u'v' - 2v'^2 = 0 \\ 3uv'' + u'^2 + 4u'v' + v'^2 = 0 \end{array} \right.$$

Inspeccionándolo nos damos cuenta que para resolverlo lo mejor sea recurrir a métodos numéricos con el auxilio de algún programa de computación como el que hemos mencionado anteriormente.

### 5.3.3 Parametrización del espacio $M2$

Análogamente a lo realizado para el espacio  $D1$ , vamos a parametrizar localmente a  $M2$  como una superficie de revolución en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

Para ello introducimos una nueva sustitución:

$$\left. \begin{array}{l} u = \xi \\ v = \frac{-\xi + 3\eta}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi = u \\ \eta = \frac{u + 2v}{3} \end{array} \right.,$$

en donde  $\xi$  y  $\eta$  son variables reales.

En las nuevas variables la métrica adquirirá la forma

$$\begin{bmatrix} 2u & u \\ u & 2u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\xi & 0 \\ 0 & \frac{9}{2}\xi \end{bmatrix} = (g_{ij})(\xi, \eta).$$

Siguiendo la línea de trabajo realizada en 5.1.3, obtenemos la siguiente parametrización local de  $M2$  en las variables  $(\xi, \eta)$ :

$$\mathbb{X}(\xi, \eta) = \left( \frac{3}{2}\sqrt{2\xi} \cos(\eta), \frac{3}{2}\sqrt{2\xi} \sin(\eta), \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\xi} \sqrt{\frac{12m^2 - 9}{8m}} dm \right),$$

$$\xi > \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0 < \eta < 2\pi.$$

Restituyendo ahora las variables  $(u, v)$ , la parametrización admite la expresión

$$\mathbb{X}(u, v) = \left( \frac{3}{2}\sqrt{2u} \cos\left(\frac{u + 2v}{3}\right), \frac{3}{2}\sqrt{2u} \sin\left(\frac{u + 2v}{3}\right), \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^u \sqrt{\frac{12m^2 - 9}{8m}} dm \right),$$

$$u > \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0 < \frac{u + 2v}{3} < 2\pi.$$

## 5.4 Espacio $M3$

La métrica que define al espacio  $M3$  fue dada en 4.2.3. En este espacio hicimos dos sustituciones consecutivas.

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{(-x+y) - i(x+y)}{8} & \frac{(x+y) + i(-x+y)}{4} \\ \frac{(x+y) + i(-x+y)}{4} & \frac{(x-y) + i(x+y)}{8} \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{C},$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} u+v & \frac{u+v}{2} \\ \frac{u+v}{2} & u+v \end{bmatrix}; u, v \in \mathbb{R}.$$

Luego llevamos la métrica a las variables  $(r, w)$  mediante la sustitución

$$\left. \begin{matrix} u = r + w \\ v = r - w \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{u+v}{2} \\ w = \frac{u-v}{2} \end{cases}; r, w \in \mathbb{R},$$

$$\therefore (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 6r & 0 \\ 0 & 2r \end{bmatrix}; r, w \in \mathbb{R}, r > 0.$$

### 5.4.1 Curvatura Gaussiana

Primero calcularemos la curvatura Gaussiana en las variables  $(r, w)$  y luego la expresaremos en las variables  $(u, v)$ .

$$4\mathbb{K}(12r^2)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -2 & 6r & 0 \\ 0 & 0 & 2r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6r & 0 \\ 2 & 0 & 2r \end{vmatrix} = 24r - (-24r)$$

$$4\mathbb{K}(12r^2)^2 = 48r$$

$$\mathbb{K}(12r^2)^2 = 12r$$

$$\mathbb{K} = \frac{1}{12r^3}.$$

Entonces, en las variables  $(u, v)$  obtenemos

$$\mathbb{K} = \frac{1}{12\left(\frac{u+v}{2}\right)^3} = \frac{8}{12(u+v)^3},$$

$$\boxed{\mathbb{K}_{M^3} = \frac{2}{3(u+v)^3}}.$$

### 5.4.2 Curvas Geodésicas

Observando la métrica para esta superficie expresada en las variables  $(r, w)$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 6r & 0 \\ 0 & 2r \end{bmatrix}; r, w \in \mathbb{R},$$

nos damos cuenta que el sistema de EDOs que definirán a las geodésicas de la misma será similar al sistema para las geodésicas de  $D1$  y por lo tanto las ecuaciones se resolverán de manera similar a la vista en la Sección 5.1.2.

El sistema al que se llega es el siguiente:

$$\begin{cases} r'' + \frac{1}{2r}r'^2 - \frac{1}{6r}w'^2 = 0, \\ w'' + \frac{1}{r}r'w' = 0. \end{cases}$$

Luego

$$\begin{cases} 6r^3r'' + 3r^2r'^2 - A^2 = 0, \\ w' = \frac{A}{r}. \end{cases}$$

Observando ahora que

$$3\frac{r^2}{r'}\frac{d}{dt}(rr'^2) = \frac{r^2}{r'}(r'^3 + 2rr'r'') = 6r^3r'' + 3r^2r'^2,$$

y operando como en 5.1.2 obtenemos, para las coordenadas  $(r(t), w(t))$  de las curvas geodésicas de  $M_3$ , las expresiones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{2\sqrt{3}}{27B^2} (3Br + 2A^2) \sqrt{3Br - A^2} + C \\ w = A \int \frac{dt}{r} + D \end{array} \right.$$

Además, en este caso se tendrá

$$B = \frac{|\alpha'(t)|^2}{6}.$$

Mediante el cambio inverso

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{u + v}{2}, \\ w = \frac{u - v}{2}, \end{array} \right.$$

las coordenadas se pueden expresar en función de las variables  $(u, v)$ .

### 5.4.3 Parametrización del espacio $M_3$

A consecuencia de la expresión de la métrica de esta variedad en las variables  $(r, w)$ , la misma puede ser localmente parametrizada como una superficie de revolución en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , llegando a

$$x(r, w) = \sqrt{2r} \cos w ; y(r, w) = \sqrt{2r} \sin w ; z(r, w) = \int_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^r \sqrt{\frac{12m^2 - 1}{2m}} dm ,$$

$$\text{para } r > \frac{1}{2\sqrt{3}} , 0 < w < 2\pi.$$

En las variables  $(u, v)$  la parametrización se expresa en la forma:

$$\mathbb{X}(u, v) = \left( \sqrt{u+v} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right), \sqrt{u+v} \operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{2}\right), \int_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{u+v}{2}} \sqrt{\frac{12m^2-1}{2m}} dm \right),$$

$$\frac{u+v}{2} > \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad 0 < \frac{u-v}{2} < 2\pi.$$

## 5.5 Familias F1 y F2

### 5.5.1 Curvatura Gaussiana de la familia F1

La métrica correspondiente a la familia F1 fue introducida en 4.2.4, en donde

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} x+y & \beta \frac{x+y}{2} \\ \beta \frac{x+y}{2} & x+y \end{bmatrix} \Leftrightarrow (g_{ij})(u, v) = \begin{bmatrix} 2u(\beta+2) & 0 \\ 0 & 2u(\beta-2) \end{bmatrix},$$

$$x, y \in \mathbb{C}; u > 0, \beta > 2.$$

Entonces,

$$4\mathbb{K}(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} 4F_{uv} - 2E_{vv} - 2G_{uu} & E_u & 2F_u - E_v \\ 2F_v - G_u & E & F \\ G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E_v & G_u \\ E_v & E & F \\ G_u & F & G \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2(\beta+2) & 0 \\ -2(\beta-2) & 2u(\beta+2) & 0 \\ 0 & 0 & 2u(\beta-2) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2(\beta-2) \\ 0 & 2u(\beta+2) & 0 \\ 2(\beta-2) & 0 & 2u(\beta-2) \end{vmatrix},$$

$$4\mathbb{K}(4u^2(\beta + 2)(\beta - 2))^2 = 8u(\beta + 2)(\beta - 2)^2 - (-8u(\beta + 2)(\beta - 2)^2)$$

$$4\mathbb{K}u^3(\beta + 2)^2(\beta - 2)^2 = (\beta + 2)(\beta - 2)^2$$

$$\boxed{\mathbb{K}_{F1} = \frac{1}{4(\beta + 2)u^3}}$$

Analizando el comportamiento de la curvatura según los valores del parámetro  $\beta$  para  $u$  fijo, se tiene que

$$i) \beta \rightarrow 2^+ \Rightarrow \mathbb{K}_{F1} \rightarrow \frac{1}{16u^3}$$

$$ii) \beta \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbb{K}_{F1} \rightarrow 0.$$

### 5.5.2 Curvatura Gaussiana de la familia F2

Según 4.2.5, la métrica que define a la familia F2 es la siguiente:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha(x+y) & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & \alpha(x+y) \end{bmatrix} \Leftrightarrow (g_{ij})(u, v) = \begin{bmatrix} 2u(1+2\alpha) & 0 \\ 0 & 2u(1-2\alpha) \end{bmatrix},$$

$$x, y \in \mathbb{C}; u > 0, \alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculando la curvatura,

$$4\mathbb{K}(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} 4F_{uv} - 2E_{vv} - 2G_{uu} & E_u & 2F_u - E_v \\ 2F_v - G_u & E & F \\ G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & E_v & G_u \\ E_v & E & F \\ G_u & F & G \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2(1+2\alpha) & 0 \\ -2(1-2\alpha) & 2u(1+2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 2u(1-2\alpha) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2(1-2\alpha) \\ 0 & 2u(1+2\alpha) & 0 \\ 2(1-2\alpha) & 0 & 2u(1-2\alpha) \end{vmatrix}$$

$$4\mathbb{K}(4u^2(1-4\alpha^2))^2 = 8u(1-4\alpha^2)(1-2\alpha) - (-8u(1-4\alpha^2)(1-2\alpha))$$

$$4\mathbb{K}u^3(1-4\alpha^2) = (1-2\alpha)$$

$$\boxed{\mathbb{K}_{F2} = \frac{1}{4(1+2\alpha)u^3}}.$$

Si analizamos la expresión de la curvatura según los valores del parámetro  $\alpha$  para  $u$  fijo, observamos lo siguiente:

$$i) \alpha \rightarrow -\frac{1^+}{2} \Rightarrow \mathbb{K}_{F2} \rightarrow \infty,$$

$$ii) \alpha \rightarrow \frac{1^-}{2} \Rightarrow \mathbb{K}_{F2} \rightarrow \frac{1}{8u^3}.$$

## 5.6 Observaciones Finales

En relación a la curvatura Gaussiana de las superficies que hemos estado estudiando vemos que, excepto para  $\mathbb{K}_{M3}$ , todas las demás presentan la relación funcional

$$\frac{1}{Ku^3},$$

en donde  $K$  es una constante real. También observamos que para iguales valores de  $u$  se cumple que  $|\mathbb{K}_{M1}| < |\mathbb{K}_{D1}| < |\mathbb{K}_{M2}|$ .

# CAPÍTULO 6

## VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo vamos a presentar las gráficas de algunas superficies, funciones de onda y curvaturas obtenidas en este trabajo. Las mismas fueron realizadas empleando los programas Matlab y *Mathematica*.

### 6.1 Gráficas de las superficies

#### 6.1.1 Gráfica del espacio $D1$

En 5.1.3 obtuvimos para  $D1$  la parametrización

$$x(u, v) = \sqrt{2u} \cos v ; y(u, v) = \sqrt{2u} \sin v ; z(u, v) = \int_{\frac{1}{2}}^u \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{2t}} dt,$$

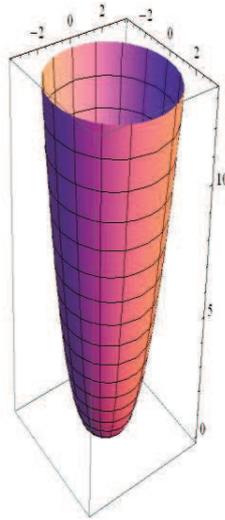
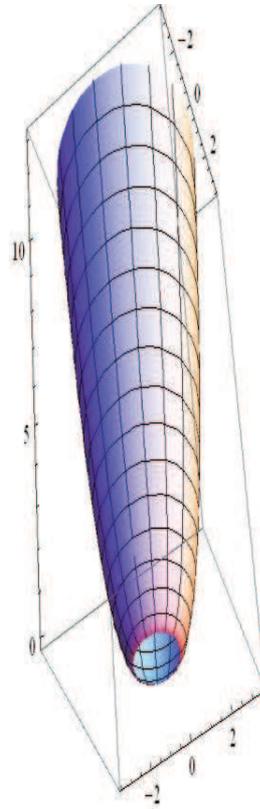
$$\text{para } u > \frac{1}{2}, 0 < v < 2\pi,$$

la cual es una parametrización local de una superficie de revolución en  $\mathbb{R}^3$ .

En las dos perspectivas de la gráfica de  $D1$  presentadas en la próxima página se observa claramente que es una superficie de revolución. Además, recordando que el dominio de esta parametrización es  $u > \frac{1}{2}, 0 < v < 2\pi$  y que la curvatura Gaussiana es

$\mathbb{K}_{D1} = \frac{1}{4u^3}$ , entonces se cumple que  $\mathbb{K}_{D1} > 0$  y se tratará de una región de puntos

elípticos como se puede apreciar en las gráficas a continuación.

**Figura 6.1:** *D1* Gráfica 1**Figura 6.2:** *D1* Gráfica 2

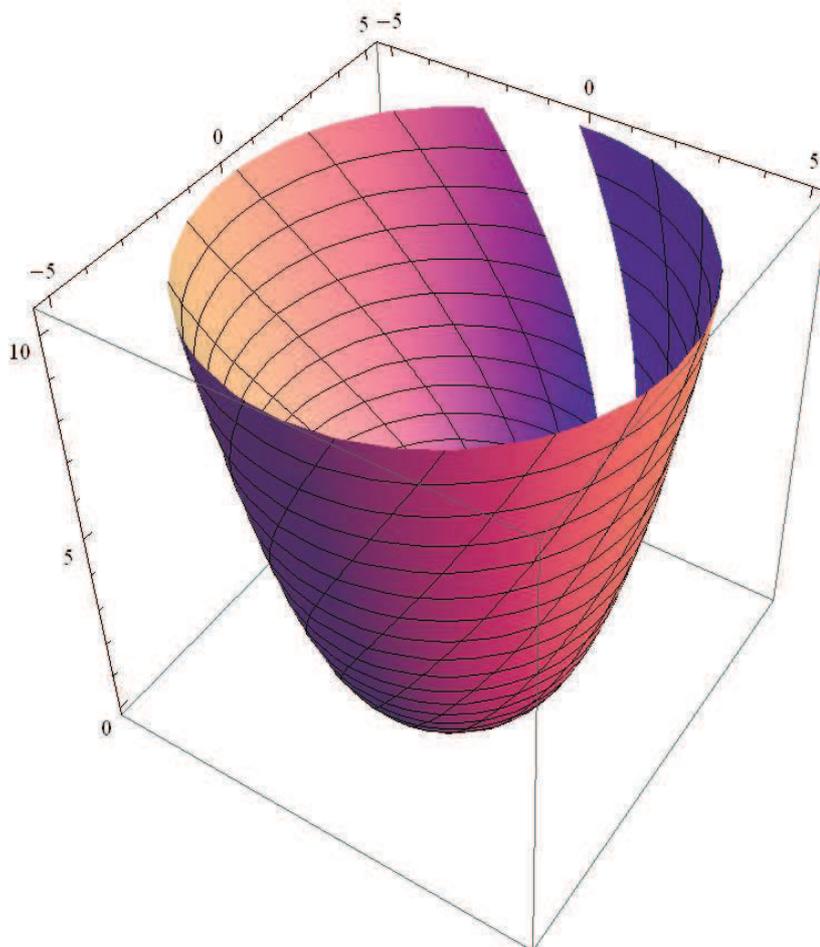
### 6.1.2 Gráfica del espacio $M2$

La parametrización para  $M2$  la obtuvimos en 5.3.3 y es la siguiente:

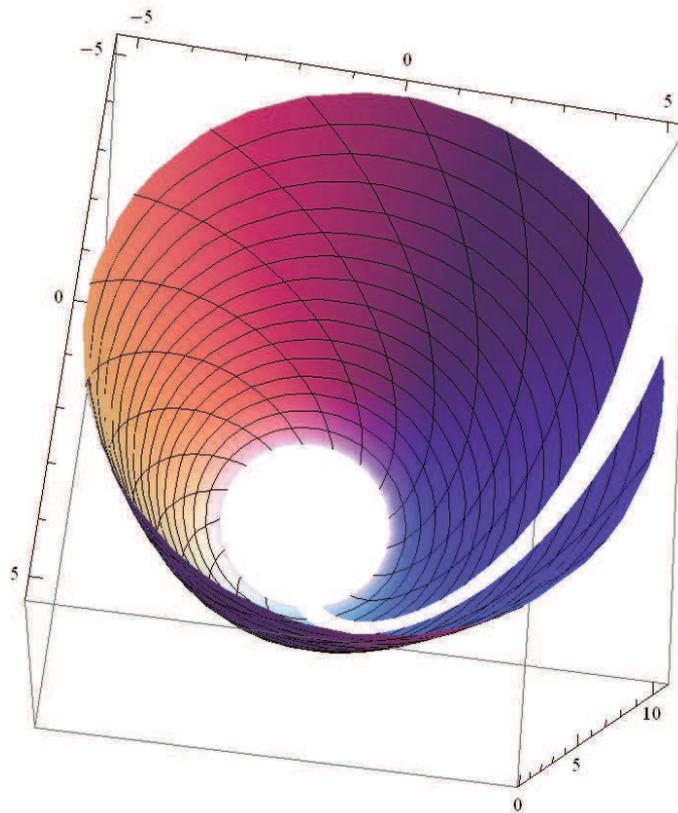
$$\mathbb{X}(u, v) = \left( \frac{3}{2}\sqrt{2u} \cos\left(\frac{u+2v}{3}\right), \frac{3}{2}\sqrt{2u} \operatorname{sen}\left(\frac{u+2v}{3}\right), \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^u \sqrt{\frac{12m^2-9}{8m}} dm \right),$$

$$\text{para } u > \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0 < \frac{u+2v}{3} < 2\pi.$$

Figura 6.3:  $M2$  Gráfica 1



**Figura 6.4: M2 Gráfica 2**



Aquí también se observa que es una superficie de revolución y que la gráfica corresponde a una región de puntos elípticos.

### 6.1.3 Gráfica del espacio M3

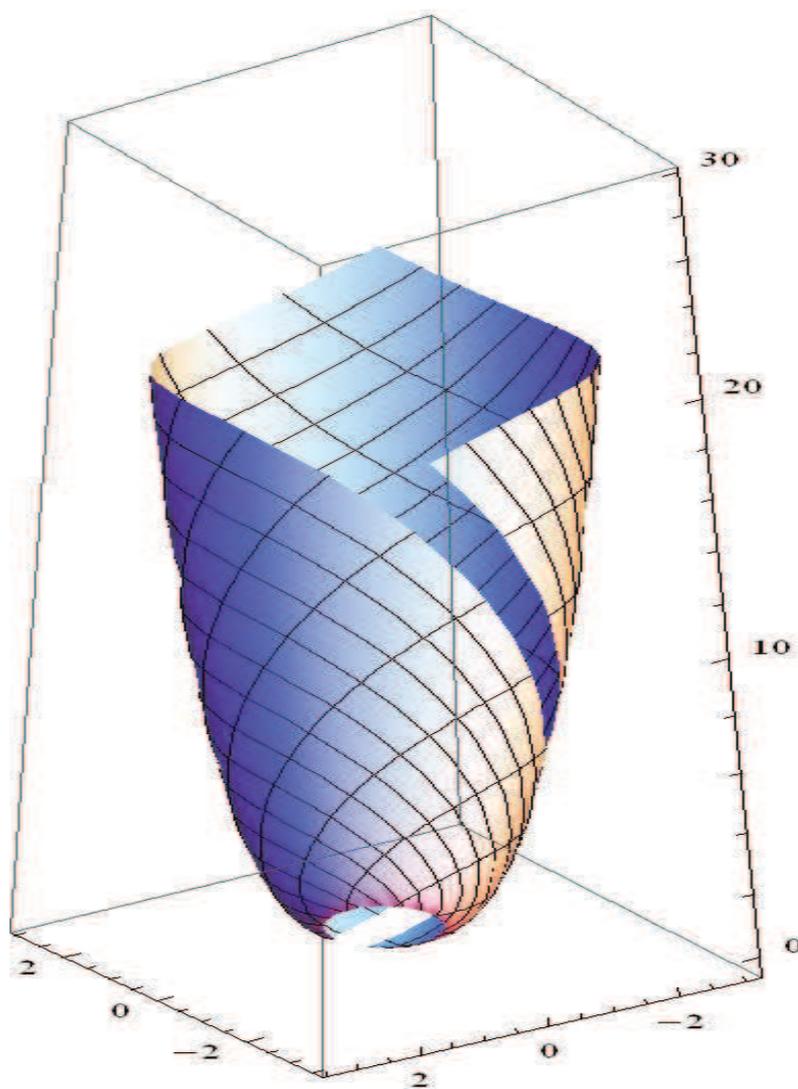
Para el espacio M3 la parametrización, obtenida en 5.4.3, es la siguiente

$$\mathbb{X}(u, v) = \left( \sqrt{u+v} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right), \sqrt{u+v} \sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \int_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{u+v}{2}} \sqrt{\frac{12m^2-1}{2m}} dm \right),$$

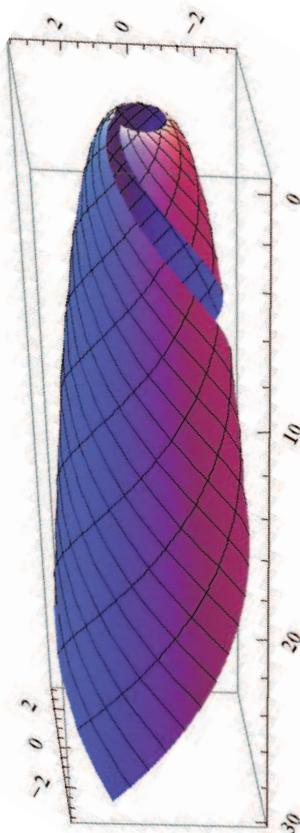
$$\frac{u+v}{2} > \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad 0 < \frac{u-v}{2} < 2\pi.$$

Como puede apreciarse a continuación, es una superficie de revolución cuyos puntos son elípticos.

**Figura 6.5:** *M3* Gráfica 1



**Figura 6.6: M3 Gráfica 2**



## 6.2 Funciones de onda

Vamos a presentar algunas gráficas de las funciones de onda obtenidas en este trabajo, para ciertos valores de los parámetros que definen a las expresiones de las mismas. Además trabajaremos en las variables reales  $y$ , por ser funciones de dos variables, las gráficas se corresponderán entonces con superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Según el espacio denotaremos a las funciones de onda  $\Psi_{D1}$ ,  $\Psi_{M1}$ ,  $\Psi_{M2}$  y  $\Psi_{M3}$ .

### 6.2.1 Función de onda correspondiente a D1

Para el espacio D1 la función de onda es la dada en 3.3.2:

$$\Psi_{D1}(r, s) = \sqrt{\left(r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}\right) \left(s + \frac{\mu}{4E \sin \theta}\right)} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{4E \cos \theta} \left(r - \frac{\mu}{4E \cos \theta}\right)^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{4E \sin \theta} \left(s + \frac{\mu}{4E \sin \theta}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Tomando, a manera de ejemplo:

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \mu = 1 \\ E = 3, \end{cases}$$

en donde la energía  $E$  es expresada en unidades coherentes con las unidades atómicas mencionadas en 2.9.2, graficaremos entonces la siguiente función:

$$\Psi_{D1}(r, s) = \left(r - \frac{1}{12 \cos \frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{12 \cos \frac{\pi}{3}} \left(r - \frac{1}{12 \cos \frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \left(s + \frac{1}{12 \cos \frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{12 \sin \frac{\pi}{3}} \left(s + \frac{1}{12 \cos \frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\text{para } r > \frac{1}{12 \cos \frac{\pi}{3}}, s > -\frac{1}{12 \sin \frac{\pi}{3}}.$$

A continuación presentamos dos gráficas de la función  $\Psi_{D1}(r, s)$ , en donde se aprecia un claro comportamiento oscilatorio dado por las funciones de Bessel.

Figura 6.7:  $\Psi_{D1}$  Gráfica 1

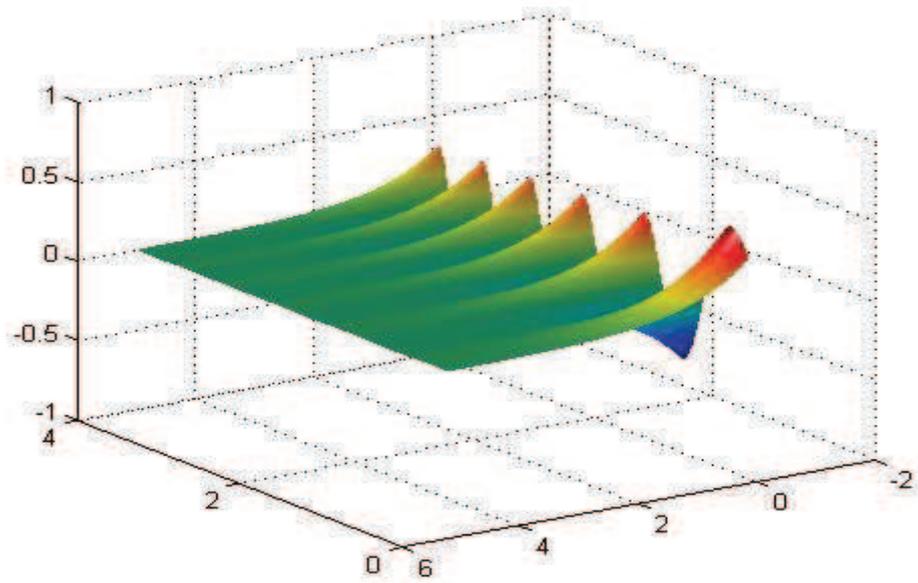
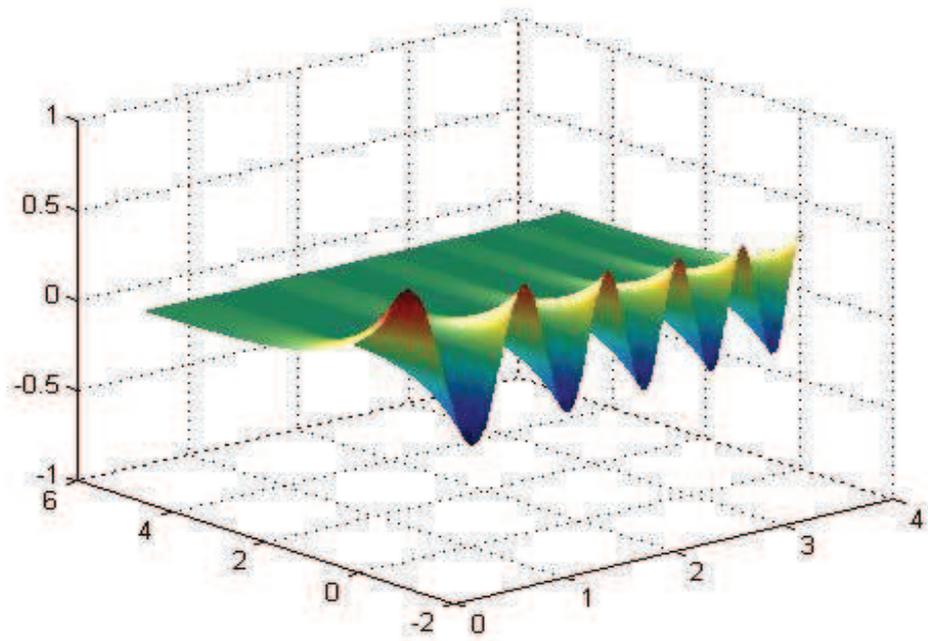


Figura 6.8:  $\Psi_{D1}$  Gráfica 2



### 6.2.2 Función de onda correspondiente a M1

Para la superficie M1, la función de onda obtenida en 4.2.1 es

$$\Psi_{M_1}(u, v) = \left( A \cosh\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}v\right) + B \sinh\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}v\right) \right) \left( u - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left( \frac{2}{3}\sqrt{12E} \left( u - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$\text{para } u > \frac{\gamma^2}{12E}, -\infty < v < \infty.$$

Tomando:

$$\begin{cases} \gamma = -1 \\ E = 3 \\ A = B = 1, \end{cases}$$

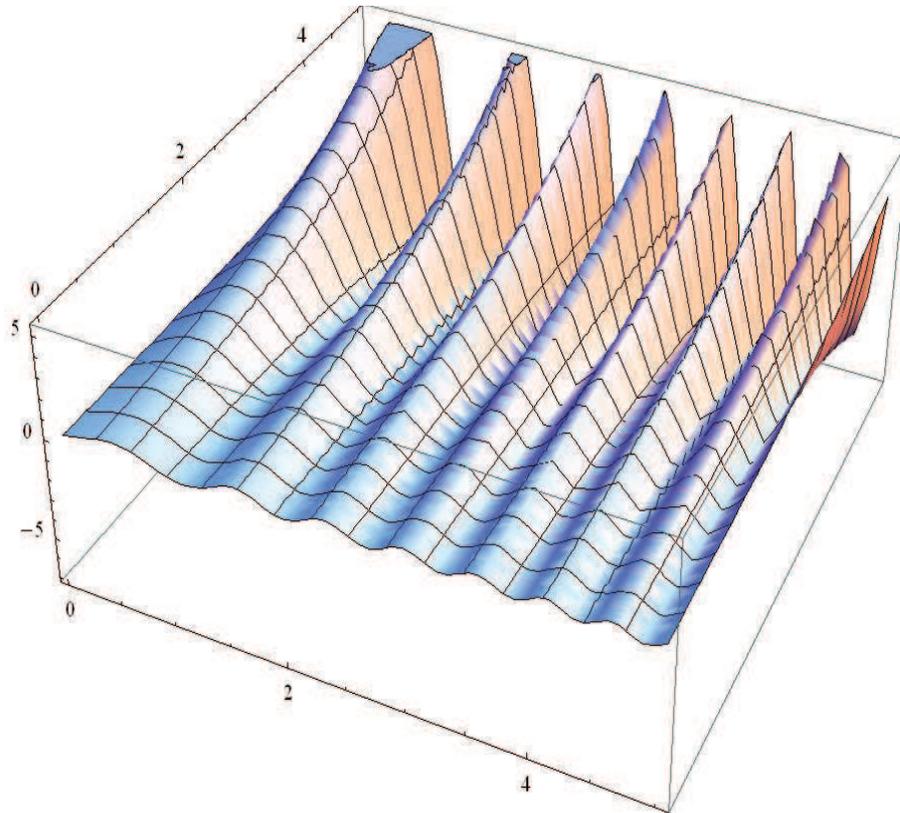
obtenemos la función

$$\Psi_{M_1}(u, v) = \left( \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}v\right) - \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}v\right) \right) \left( u - \frac{1}{36} \right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left( 4 \left( u - \frac{1}{36} \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$\text{para } u > \frac{1}{36}, -\infty < v < \infty.$$

En la próxima página se puede apreciar la interesante gráfica de esta función.

Figura 6.9:  $\Psi_{M1}$  Gráfica 1



### 6.2.3 Función de onda correspondiente a M2

La función de onda para la superficie M2 fue obtenida en 4.2.2,

$$\Psi_{M2}(u, v) = e^{\gamma\left(v + \frac{u}{2} + \frac{\gamma^2}{6E}\right)} \left(u + \frac{\gamma^2}{4E}\right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{3E}}{3} \left(u + \frac{\gamma^2}{4E}\right)^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\text{para } u > -\frac{\gamma^2}{4E}, -\infty < v < \infty.$$

Tomando:

$$\begin{cases} \gamma = -1 \\ E = 3, \end{cases}$$

entonces

$$\Psi_{M_2}(u, v) = e^{-(v + \frac{u}{2} + \frac{1}{18})} \left(u + \frac{1}{12}\right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left(2\left(u + \frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\text{para } u > -\frac{1}{12}, -\infty < v < \infty.$$

Algunas gráficas para esta última función de onda:

**Figura 6.10:**  $\Psi_{M_2}$  Gráfica 1

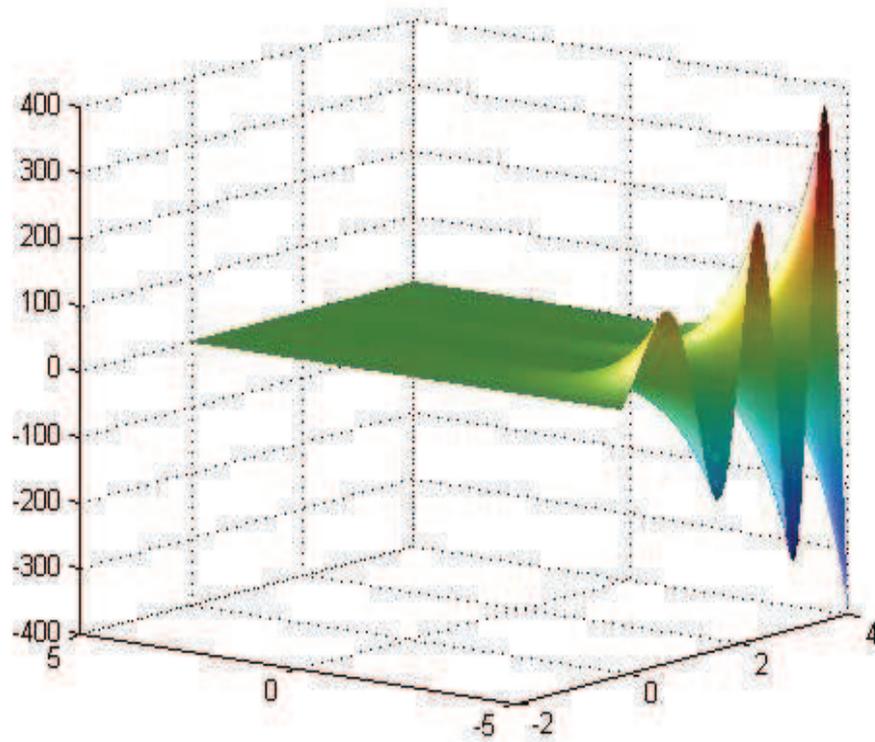
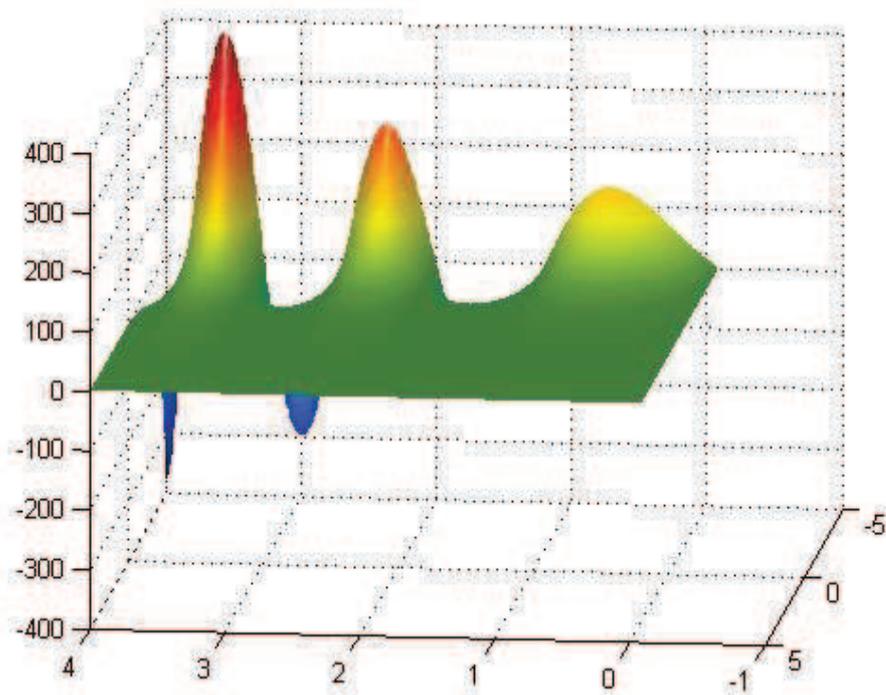


Figura 6.11:  $\Psi_{M2}$  Gráfica 2



#### 6.2.4 Función de onda correspondiente a $M3$

Para el espacio  $M_3$ , la función de onda se obtuvo en 4.2.3.

Expresada en las variables  $(r, w)$ :

$$\Psi_{M3}(r, w) = \left( A \cos\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w\right) + B \sin\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}w\right) \right) \left( r - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left( \frac{2}{3}\sqrt{12E} \left( r - \frac{\gamma^2}{12E} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Tomando:

$$\begin{cases} \gamma = -1 \\ E = 3 \\ A = B = 1, \end{cases}$$

la función queda expresada de la siguiente manera

$$\Psi_{M3}(r, w) = \left( \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}w\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}w\right) \right) \left(r - \frac{1}{36}\right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}}\left(4\left(r - \frac{1}{36}\right)^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\text{para } r > \frac{1}{36}, -\infty < w < \infty.$$

**Figura 6.12:**  $\Psi_{M3}$  Gráfica 1

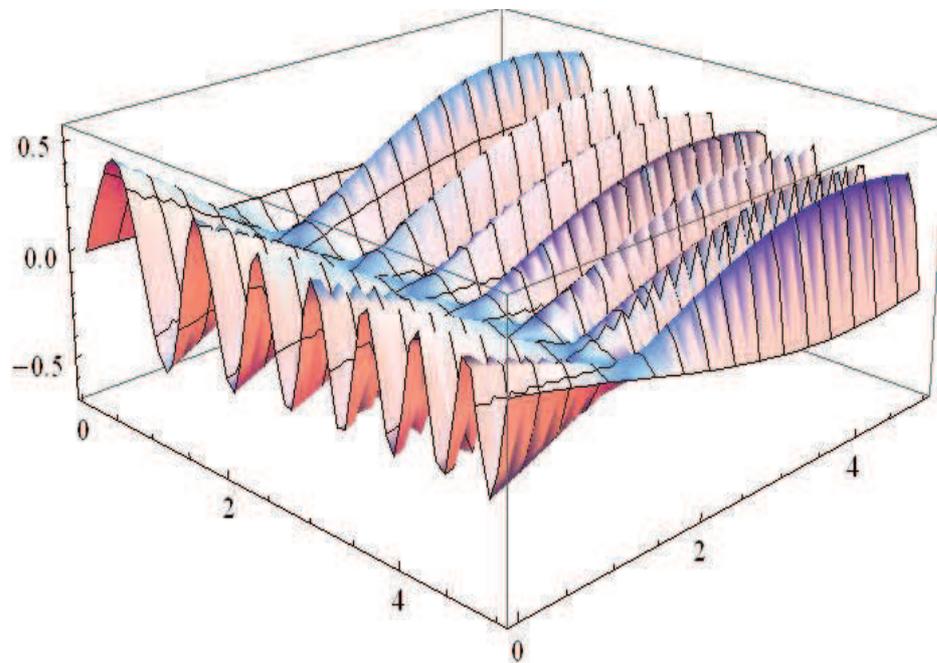
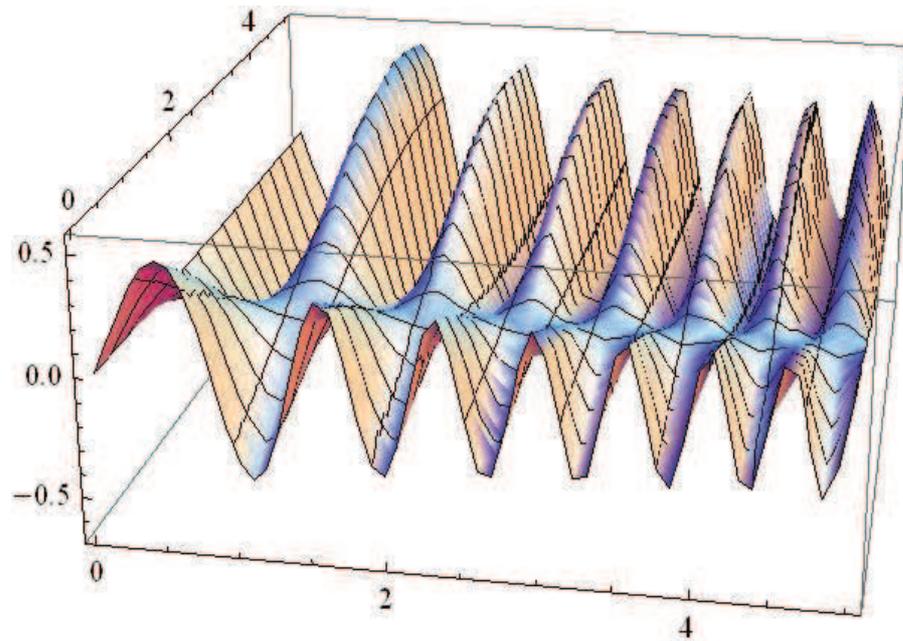


Figura 6.13:  $\Psi_{M3}$  Gráfica 2



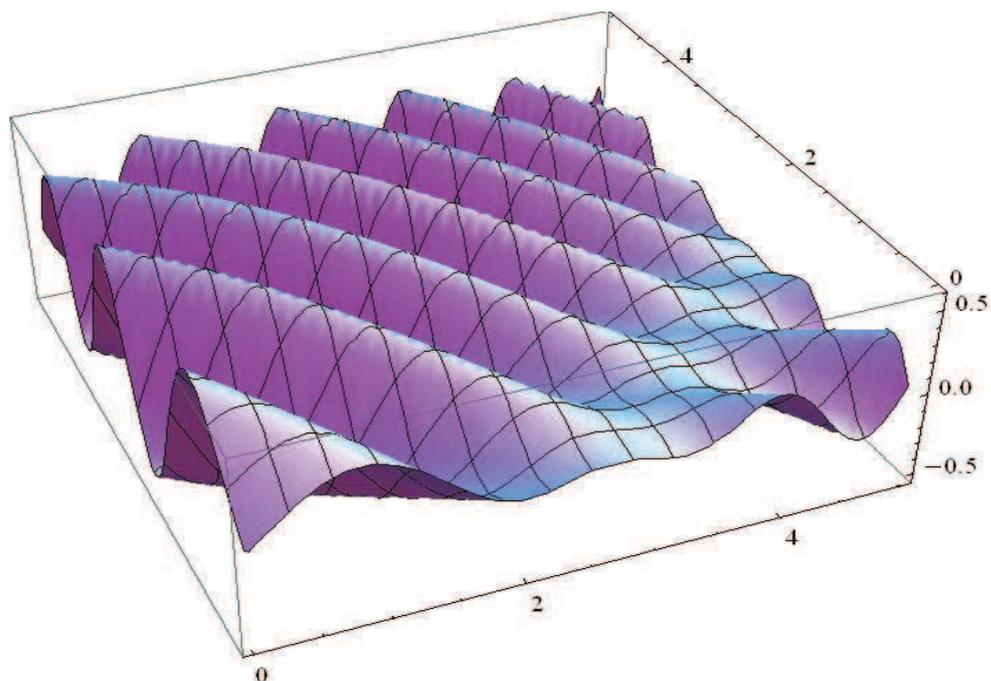
Expresando ahora a  $\Psi_{M3}$  en función de las variables  $(u, v)$  para los mismos valores de  $\gamma$ ,  $E$ ,  $A$  y  $B$  obtenemos:

$$\Psi_{M3}(u, v) = \left( \cos\left(\frac{u-v}{2\sqrt{3}}\right) - \sin\left(\frac{u-v}{2\sqrt{3}}\right) \right) \left( \frac{u+v}{2} - \frac{1}{36} \right)^{1/2} J_{\frac{1}{3}} \left( 4 \left( \frac{u+v}{2} - \frac{1}{36} \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

para  $\frac{u+v}{2} > \frac{1}{36}$ .

Procediendo a graficar esta función, se obtiene:

**Figura 6.14:** Gráfica de  $\Psi_{M_3}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$



Es interesante observar el comportamiento oscilatorio de todas las gráficas, debido a las funciones sinusoidales y a las funciones de Bessel.

### 6.3 Curvatura Gaussiana

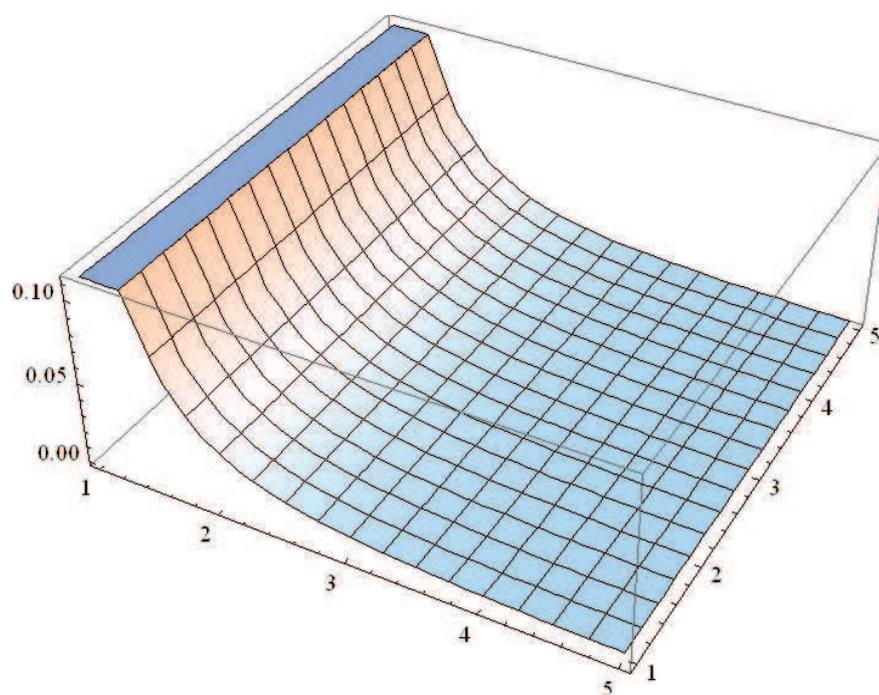
Como habíamos discutido en la sección 5.6, las curvaturas de estos espacios son funcionalmente muy similares. Además, salvo para la superficie  $M_3$ , la curvatura Gaussiana es independiente de  $v$ .

A manera de ejemplo graficaremos las funciones  $\mathbb{K}_{D_1}$  y  $\mathbb{K}_{M_3}$ .

Entonces:

- $\mathbb{K}_{D1}(u, v) = \frac{1}{4u^3}, u \neq 0.$

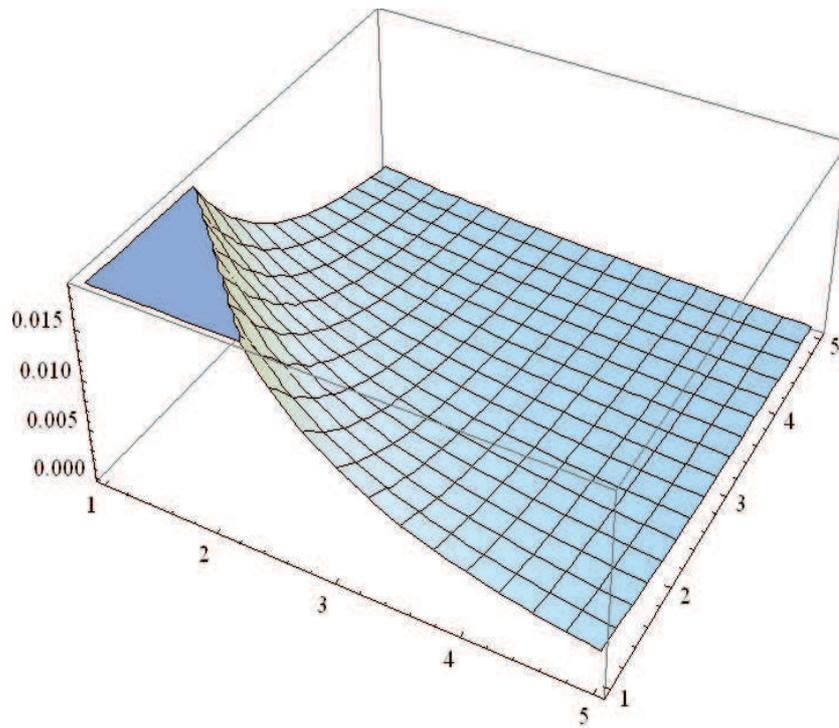
**Figura 6.15:** Gráfica para  $\mathbb{K}_{D1}(u, v)$



En la figura se aprecia la rápida disminución de  $\mathbb{K}_{D1}$  cuando  $u$  crece.

- $\mathbb{K}_{M3}(u, v) = \frac{2}{3(u+v)^3}, u + v \neq 0.$

**Figura 6.16:** Gráfica para  $\mathbb{K}_{M_3}(u, v)$



También observamos aquí la disminución de  $\mathbb{K}_{M_3}$  al crecer  $u$  y  $v$ .

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo hemos propuesto distintas métricas para las cuales es factible resolver la ecuación estacionaria de Schrödinger mediante el método de separación de variables. Estas métricas fueron deducidas a partir del espacio de Darboux Tipo I, denotado  $D1$ , el cual es una superficie de curvatura no constante y en donde ya es conocida la solución de la ecuación. Tomando como referencia a dicho espacio introdujimos modificaciones en la métrica que lo define de manera tal que la expresión de la ecuación de Schrödinger para las nuevas métricas obtenidas sea una EDP que se pueda separar.

Las modificaciones mencionadas en el párrafo precedente no fueron introducidas al azar sino que previamente, y trabajando en  $D1$  (o sea, dejando fijo el espacio), estudiamos la manera de aumentar el grado de complejidad de la expresión de la ecuación en dicho dominio, manipulando la misma mediante la introducción de nuevos términos de manera tal que la nueva EDP así obtenida se pudiera resolver empleando el método de separación de variables. Posteriormente nos preguntamos de qué tipo de métricas puede provenir dicha expresión. De esta manera profundizamos en el entendimiento de la interrelación entre ecuación y espacio. El plan es claro: dejar fijo el espacio y modificar la ecuación; y dejar fija la ecuación y modificar el espacio. Esta fue nuestra línea de trabajo, que nos condujo a la obtención de las métricas y familias de métricas presentadas en el Capítulo 4, y que hemos, entonces, tratado a que fuesen el resultado de una juiciosa

combinación de los métodos heurístico y algorítmico. Consideramos que el método aquí esbozado es una poderosa herramienta para estudiar el comportamiento de una ecuación diferencial y encontrar nuevos espacios o nuevas variables en función de las cuales poder resolverla.

No podemos dejar de mencionar también que hemos realizado un estudio geométrico del espacio  $D1$  y de las demás superficies obtenidas, calculando su curvatura y obteniendo (y resolviendo para  $D1$ ) las ecuaciones de sus geodésicas. También presentamos parametrizaciones de  $D1$ ,  $M2$  y  $M3$  como superficies de revolución inmersas en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Es muy importante poder realizar el estudio geométrico de un espacio ya que la física de un sistema definido en un cierto dominio depende en gran medida de la geometría del mismo. Un claro ejemplo de lo anteriormente dicho se presenta en la Teoría de la Relatividad, en donde Einstein explicó el movimiento de los cuerpos celestes a través de las geodésicas del espacio, y en donde la geometría (o sea, la métrica) es consecuencia de la distribución de masas en el mismo.

Como trabajo a futuro podemos mencionar los siguientes puntos:

- Realizar estudios de Mecánica Cuántica en las nuevas superficies obtenidas en este trabajo. Tal como se ilustra en referencias [1] y [2] para los espacios de Darboux, estudiar la súper-integrabilidad, la búsqueda de potenciales y los aspectos relacionados a las integrales de línea de Feynman en los nuevos dominios aquí presentados.
- Aplicar la metodología desarrollada, ahora a partir de los espacios de Darboux  $D2$ ,  $D3$  y  $D4$  con el objetivo de generar nuevas superficies y familias de

superficies en donde la ecuación de Schrödinger estacionaria se resuelva mediante separación de variables.

- Estudio geométrico y clasificación de las nuevas superficies así generadas.
- Estudiar las posibles interrelaciones de las métricas presentadas en este trabajo en relación a cambios de variable. O sea, investigar si existen sustituciones que vinculen a estas métricas.
- Extender este tipo de estudio a variedades Riemannianas de dimensión 3.
- Como este método puede ser utilizado para estudiar cualquier ecuación diferencial, aplicarlo a las ecuaciones que nos interese conocer y resolver.
- Profundizar el estudio geométrico de las nuevas superficies aquí obtenidas, estudiando si las mismas presentan otras curvas importantes además de las geodésicas.

Concluiremos este trabajo compartiendo una profunda reflexión de Max Planck (1858-1947), célebre descubridor de los cuantos:

*“La Ciencia no puede resolver el grandioso misterio de la Naturaleza.*

*La razón es, que en el último análisis, nosotros somos  
parte del misterio que estamos tratando de resolver.”*

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kalnins, E.G., Kress, J.M., Winternitz, P. *Superintegrability in a two-dimensional space of non-constant curvature*, Journal of Math. Phys. 43: 970-983, 2002.
- [2] Grosche, Ch., Pogosyan, G., Sissakian, A. *Path Integral Approach for Superintegrable Potentials on Spaces of Non-constant Curvature: I. Darboux Spaces  $D1$  and  $D2$* , Journal of Phys. Part. Nucl. 38: 299-325, 2007.
- [3] Berger, M., Gostiaux, B. *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, Springer-Verlag, 1988.
- [4] Gray, A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993.
- [5] Do Carmo, M. *Differential geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [6] Chuan-Chih, H. *A first course in differential Geometry*, John Wiley & Sons, 1981.
- [7] Lipschutz, M. *Differential Geometry*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1969.
- [8] Kay, D. *Tensor calculus*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1988.
- [9] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, S.P. *Modern geometry-Methods and Applications*, Vol.I, Springer-Verlag, 1992.
- [10] Lee, J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, 2003.
- [11] Lee, J.M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, 1997.
- [12] Do Carmo, M.P. *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [13] Grigor'yan, A. *Heat kernel and Analysis on Manifolds*, American Mathematical Society, Volume 47, 2009.

- [14] Rosenberg, S. *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, Cambridge University Press, 1997.
- [15] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [16] Debnath, L., Mikusinski, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Academic Press, Second Edition, 1999.
- [17] Bachrachas, J. *El Laplaciano en variedades Riemannianas*, Trabajo Monográfico, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay, 2008.
- [18] Zill, D.G., Cullen, M.R. *Differential Equations with Boundary Value Problems*, Brooks/Cole, Fourth Edition, 1997.
- [19] Spiegel, M.R. *Fourier Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1974.
- [20] Sagan, H. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*, John Wiley & Sons, 1961.
- [21] Shifrin, Th. *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*, Preliminary Version, University of Georgia, 2012.
- [22] Campos, D. *Matemática Aplicada: Un Puente entre el Universo Cuántico y el mundo clásico*, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.