

Grafos de factores en dominios con integridad

Por:

Offir Neil Romero Castro

Tesis sometida como requerimiento parcial para el grado de:

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICA PURA

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

RECINTO DE MAYAGÜEZ

2022

Aprobado por:

Reyes M. Ortiz Albino, Ph.D.
Presidente del Comité Graduado

Fecha

Victor Ocasio González, Ph.D.
Miembro del Comité Graduado

Fecha

Omar Colón Reyes, Ph.D.
Miembro del Comité Graduado

Fecha

Omar Colón Reyes, Ph.D.
Director del Departamento

Fecha

Hilton Alers Valentín, Ph.D.
Representante de Oficina de Estudios Graduados

Fecha

Abstract of dissertation to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in partial fulfillment of the
requirements for the Degree of Master of Science

Graphs of factors in integral domains

By

Offir Neil Romero Castro

July, 2022

Chair: Reyes Matiel Ortiz-Albino

Major Department: Mathematics Sciences

Abstract

Anderson and Frazier (2006) defined the theory of τ -factorizations or theory of generalized factorizations, using a symmetric relation τ over $D^\#$, the set of elements distinct to zero and the units of an integral domain D . This idea can be interpreted as the study of the factorization of elements that are related with respect to a symmetric relation τ . This concept generalized many cases of factorizations previously studied, such as prime factorizations, factorizations in irreducible elements, comaximal factorizations, and more.

Let $\mathcal{P}(D^\#)$ be the power set of $D^\#$, $\alpha \in \mathcal{P}(D^\#)$ and τ a symmetric relation over $D^\#$. This research considers the subrelation $\tau^\alpha = \{(x, y) : x, y \in \alpha \text{ and } x\tau y\}$ of τ and presents some of its characteristics and properties. It is defined the graph of factors of an element of $D^\#$ as a generalization of the graph of irreducible divisors of Coykendall and Maney, the graph of τ -irreducible τ -factors and the graph of α - β -divisors of Mooney. It is shown some examples and properties of the graphs of factors, and the implications of the relation τ^α in their subgraphs.

Keywords: Graphs of factors, generalized factorizations.

Resumen de disertación a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
requerimientos para el Grado de Maestría en Ciencias

Grafos de factores en dominios con integridad

Por

Offir Neil Romero Castro

Julio, 2022

Consejero: Reyes Matiel Ortiz Albino

Departamento: Ciencias Matemáticas

Resumen

Anderson y Frazier (2006) definieron la teoría de τ -factorizaciones o de factorizaciones generalizadas utilizando una relación simétrica τ sobre $D^\#$, el conjunto de elementos distintos de cero y de unidades de un dominio con integridad D . La idea se puede interpretar como el estudio del producto de elementos que se relacionan con respecto a τ . Este concepto generalizó muchos casos de factorizaciones previamente estudiadas como: factorizaciones primas, factorizaciones en elementos irreducibles, factorizaciones comaximales, entre otras.

Sea $\mathcal{P}(D^\#)$ el conjunto potencia de $D^\#$, $\alpha \in \mathcal{P}(D^\#)$ y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Este trabajo considera la subrelación $\tau^\alpha = \{(x, y) : x, y \in \alpha \text{ y } x\tau y\}$ de τ y presenta algunas de sus características y propiedades. Se define el grafo de factores de un elemento en $D^\#$ como una generalización del grafo de divisores irreducibles de Coykendall y Maney, del grafo de τ -factores τ -irreducibles y del grafo de α - β -divisores de Mooney. Se muestran algunos ejemplos y propiedades de los grafos de factores, así como las implicaciones de la

relación τ^α en sus subgrafos.

Palabras clave: Grafos de factores, factorizaciones generalizadas.

Copyright © 2022

por

Offir Neil Romero Castro

Al Dios Todopoderoso. A mis padres Juan Carlos Romero Landa y Jenny Xiomara Castro García. A mi hermano Abiel Romero Castro. A mis abuelos, tíos y primos.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco al Dios Todopoderoso por darme la oportunidad de desarrollar exitosamente este trabajo. Por la inteligencia, la sabiduría, la fuerza física y de voluntad que ha provisto a mi vida para descubrir y desarrollar los resultados de esta investigación.

A mi mentor, el Dr. Reyes M. Ortiz Albino, por su apoyo incondicional y magnífico a lo largo del proceso de este trabajo. Por sus acertadas y trascendentales sugerencias, las cuales se evidencian en la excelencia de este escrito.

Al Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico-Recinto de Mayagüez, por la oportunidad de admisión al programa graduado de Matemática Pura, por el apoyo financiero y su disponibilidad incondicional. A los profesores, por su entrega al proveerme de conocimiento matemático en los espacios pedagógicos. Dicho conocimiento es fundamental para que este trabajo tenga la rigurosidad matemática que posee.

A mi familia por su apoyo incondicional y consejos que sobrepasaron barreras de la distancia o el tiempo para hacerme sentir respaldado. Este trabajo es el fruto de todo lo que han sembrado amorosa y pacientemente en mí.

A muchas otras personas que han sido de influencia en mi desarrollo académico y profesional: mis profesores subgraduados, compañeros del programa graduado, líderes espirituales y amigos.

Índice general

Abstract	II
Resumen	III
Agradecimientos	VII
Índice de figuras	XI
Lista de símbolos	XII
1. Conceptos Iniciales	1
1.1. La τ -factorización y sus propiedades	1
1.2. Teoría básica de grafos	5
1.3. Algunos grafos de τ -factores	6
1.4. Resumen de los capítulos	8
2. El τ-grafo	9
2.1. Definición e ilustración del τ -grafo	10
2.2. Los τ -grafos salvo asociados	14
2.3. Interconectividad del τ -grafo	25
3. La τ^α-factorización y el τ^α-grafo	30
3.1. Definición de una τ^α -factorización	34
3.2. Definición e ilustración del τ^α -grafo	40
3.3. Contenencia entre τ^α -grafos	41
4. El $\tau_1^{\alpha_1}$-$\tau_2^{\alpha_2}$-grafo	46
4.1. Contenencia entre $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafos	51

5. Aportaciones y valoraciones finales	56
5.1. Grafos de factorizaciones con propiedades especiales	56
5.2. Conclusiones	58
5.3. Preguntas abiertas	59
5.3.1. Sobre la comparación entre grafos de τ -factores	60
5.3.2. Sobre la comparación entre el grafo de τ y el τ -grafo	60
5.3.3. Sobre los aspectos topológicos de un τ -grafo	62
Bibliografía	64

Índice de figuras

1.1.	El grafo de divisores irreducibles de 18 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, [10].	6
2.1.	El grafo $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}}(44)$	11
2.2.	El grafo $G_{\partial}((xy)^2)$ en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[z]/\langle z^2+z+1 \rangle[x, y]$	12
2.3.	El grafo $G_{\tau}((xy)^2)$ en $D = \mathbb{Z}_5[x, y^2, xy]$	13
2.4.	El grafo $G_c(18)$	15
2.5.	El grafo $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}}(18)}$	17
2.6.	El grafo $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}}(44)}$	18
2.7.	Los grafos de factores salvo asociados de 44	24
2.8.	Otros dos grafos de factores salvo asociados de 44	24
2.9.	Los ∂ -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ en $\mathbb{F}_4[x, y]$	25
3.1.	El grafo $G_{\tau_{(5)}^{\mathbb{Z}}}(66)$	40
3.2.	El grafo $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}}^p(44)$	41
3.3.	La Figura 1 en [2]	43
3.4.	Los ∂^α -grafos de $(xy)^2$ salvo asociados de $(xy)^2$ con $\alpha \in \{p, a, D^\#\}$	44
4.1.	Los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}$ - $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$	47
4.2.	Los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}$ - $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 salvo asociados con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$	48
4.3.	Los τ^{α_1} - ∂^{α_2} -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$	49
4.4.	Los ∂^{α_1} - τ^{α_2} -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$	50
4.5.	Los τ - τ -grafos salvo asociados de $(xy)^2$	51
4.6.	El diagrama de contención entre τ^{α_1} - τ^{α_2} -grafos de x para $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$	52

4.7.	El diagrama de contenencia entre τ^{α_1} - τ^{α_2} -grafos de x donde α_1 y α_2 pertenecen a $\{p, pp, pq, prim, pack, D^\#\}$	53
4.8.	El diagrama de contenencia entre τ^{α_1} - τ^{α_2} -grafos de x donde α_1 y α_2 pertenecen a $\{prim, t-puro, h, D^\#\}$	54
4.9.	El diagrama de contenencia entre τ^{α_1} - τ^{α_2} -grafos de x donde α_1, α_2 pertenecen a $\{pq, cpr, pr, D^\#\}$	55
4.10.	El diagrama de contenencia entre τ^{α_1} - τ^{α_2} -grafos de x donde α_1, α_2 pertenecen a $\{rig, sh, h, D^\#\}$	55
5.1.	Los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}$ - $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, c, D^\#\}$	58
5.2.	El grafo salvo asociados de $\tau = \{(\lambda x^2, \mu y^2), (\lambda y^2, \mu x^2), (\lambda xy, \mu xy), (\lambda x, \mu x)\}$	61

Lista de símbolos

Símbolo	Descripción
D	Dominio con integridad
$U(D)$	Conjunto de unidades de D
$D^\#$	Conjunto de elementos de D excepto su cero y sus unidades
τ	Relación simétrica
\sim	Relación asociados
$G_\tau(x)$	Grafo de τ -factores de x
$\overline{G_\tau(x)}$	Grafo de τ -factores salvo asociados de x
$\overline{G_\tau(x)}^\lambda$	Grafo de τ -factores salvo asociados de x para $\lambda \in U(D)$
$G_{\tau^\alpha}(x)$	Grafo de τ^α -factores de x
$G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}}(x)$	El $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafo de factores de x
τ^a	Restricción de τ a elementos irreducibles en $D^\#$
$\tau^{\tau(a)}$	Restricción de τ a elementos τ -irreducibles en $D^\#$
τ^p	Restricción de τ a elementos primos en $D^\#$
$\tau^{\tau(p)}$	Restricción de τ a elementos τ -primos en $D^\#$
τ^{pp}	Restricción de τ a potencia de primos en $D^\#$
τ^{pq}	Restricción de τ a elementos prime quantum en $D^\#$
τ^{pack}	Restricción de τ a elementos packet en $D^\#$
τ^{prim}	Restricción de τ a elementos primarios en $D^\#$
τ^{t-puro}	Restricción de τ a elementos t-puro en $D^\#$
τ^h	Restricción de τ a elementos homogéneos en $D^\#$
τ^{sh}	Restricción de τ a fuertemente homogéneos en $D^\#$
τ^{pr}	Restricción de τ a elementos primales en $D^\#$
τ^{cpr}	Restricción de τ a elementos completamente primales en $D^\#$
τ^{rig}	Restricción de τ a elementos rígidos en $D^\#$
$G(\tau)$	Grafo de τ
$\overline{G(\tau)}$	Grafo salvo asociados de τ

Capítulo 1

Conceptos Iniciales

En este capítulo se hallan algunos conceptos que se enmarcan dentro de la teoría de factorizaciones generalizadas, la teoría de grafos y algunos resultados de investigaciones previas sobre grafos de τ -factorizaciones. Estos conceptos orientan al lector para la comprensión de los resultados provistos en el presente trabajo y las diversas formas de clasificar las factorizaciones generalizadas. Además, se provee un resumen sobre el enfoque de cada uno de los capítulos.

1.1. La τ -factorización y sus propiedades

En álgebra abstracta existe una estructura conocida como *dominio con integridad* (en otras fuentes como *dominio con identidad*, *dominio entero* o *dominio integral*). Según Dummit y Foote en [11], un anillo conmutativo D con identidad $1 \neq 0$ sin divisores de cero es llamado un dominio con integridad. Un ejemplo de dominios integrales es un dominio de factorización única (o mejor conocido como UFD, por sus siglas en inglés). En [11], un UFD es un dominio con integridad cuyos elementos distintos de cero pueden expresarse como un producto único de elementos irreducibles salvo asociados y reorden. Todo elemento distinto de cero y de unidades en un UFD tiene una factorización de primos. Otro ejemplo de dominio con integridad es el dominio de factorización finita (o mejor conocido como FFD, por sus siglas en inglés). En [4], un FFD es un dominio cuyos elementos distintos de cero y de unidad tienen una cantidad finita de factores salvo

asociados (y por ende, una cantidad finita de factorizaciones salvo asociados y reorden). Todo UFD es FFD, pero el converso es falso (véase [4] para más detalles).

En 2006, se definió y desarrolló la teoría de factorizaciones generalizadas sobre dominios con integridad. Este documento utiliza la notación y definición de τ -factorización o *factorización generalizada* establecida por Anderson y Frazier en [1], donde τ es una relación simétrica sobre $D^\# = D - (U(D) \cup \{0\})$ (el conjunto de los elementos distintos de cero que no son unidades), donde $U(D)$ es el conjunto de las unidades o elementos invertibles multiplicativamente. La teoría de τ -factorizaciones se puede interpretar como el estudio de todas las posibles operaciones que se puedan definir sobre D , o como una regla que solo permite el producto de elementos que se relacionen con respecto a la relación τ . Formalmente, la Definición 1.1.1. recoge el concepto de τ -factorización en [1].

Definición 1.1.1. [1] *Sea τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Una τ -factorización de $x \in D^\#$ es una expresión de la forma $x = \lambda \cdot x_1 * x_2 * * * x_n$, donde $\lambda \in U(D)$ y para todo $i \neq j$, $x_i \tau x_j$.*

De la Definición 1.1.1. de τ -factorización se le llama a cada x_i como un τ -factor de x o que x_i τ -divide a x (usualmente, denotado por $x_i |_\tau x$), y a x se le conoce como un τ -producto de los x_i 's. La expresión " $x \cdot y$ " (respectivamente, $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$) denota el producto usual de x e y (respectivamente, de x_1, x_2, \dots, x_n). Además, la expresión " $x * y$ " (respectivamente, $x_1 * x_2 * * * x_n$) denota el τ -producto de x e y (respectivamente, de x_1, \dots, x_n). Esta notación permite identificar qué factorización es una τ -factorización o no.

Un elemento $x \in D^\#$ es llamado elemento τ -irreducible o un τ -átomo si y solo si las únicas τ -factorizaciones de x son las τ -factorizaciones triviales (las cuales son $x = x$ y $x = \lambda(\lambda^{-1}x)$). Se dice que D es un dominio τ -atómico, si cada $x \in D^\#$ tiene una τ -factorización de elementos τ -irreducibles.

Con el objetivo de estudiar las τ -factorizaciones, la presente investigación se apoya en las definiciones y notaciones expuestas por Juett en [14], que incluye todas las nociones de Anderson en [1].

Definición 1.1.2. [14] *Sea τ una relación simétrica sobre $D^\#$.*

- (i) La relación τ es multiplicativa, si para todo $x, y, z \in D^\#$ tal que $x\tau y$ y $x\tau z$, entonces $x\tau yz$.
- (ii) La relación τ es divisiva, si para todo $x, x', y \in D^\#$ tal que $x'|x, x\tau y$, entonces $x'\tau y$.
- (iii) Se dice que la relación τ preserva asociados, si para todo $x, y, y' \in D^\#$ tal que $y \sim y', x\tau y$, entonces $x\tau y'$.
- (iv) La relación τ se conoce como refinable, si siempre que $x = \lambda \cdot x_1 *** x_n$ y $x_i = y_1 *** y_m$ (τ -factorizaciones de x y x_i respectivamente), se cumple que

$$x = \lambda \cdot x_1 *** x_{i-1} * y_1 *** y_m * x_{i+1} *** x_n \text{ (\tau-factorización de } x \text{)}.$$

La τ -factorización obtenida se conoce como τ -refinamiento de la τ -factorización $\lambda \cdot x_1 *** x_n$ o simplemente un τ -refinamiento de x .

- (v) La relación τ se dice ser combinable, si siempre que $x = \lambda \cdot x_1 *** x_n$ (τ -factorización de x), se cumple que $x = \lambda \cdot x_1 *** x_{i-1} * (x_i \cdot x_{i+1}) * x_{i+2} *** x_n$ (τ -factorización de x).

Si τ es divisiva (respectivamente, multiplicativa), entonces es refinable y preserva asociados (respectivamente, combinable). Si $A \subseteq D^\#$ y $\tau_A = A \times A$, entonces se cumple que $x\tau_A y \iff x, y \in A$. En este caso, el estudio de τ_A -factorizaciones es el estudio de las factorizaciones usuales de elementos de A . Este tipo de factorizaciones son las que dieron nombre a esta teoría en [1], la teoría de factorizaciones generalizadas. Particularmente, si se considera $\tau_{D^\#} = D^\# \times D^\#$ (en [1] se denota como τ_D), la relación $\tau_{D^\#}$ es multiplicativa, divisiva, preserva asociados y la noción de $\tau_{D^\#}$ -factorización resulta la factorización usual de elementos. Por ejemplo, si $D = \mathbb{Z}$, entonces algunas $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorizaciones de 44 son $4 * 11$, $(-4) * (-11)$, $2 * 22$, $2 * 2 * 11$, $(-2) * (-2) * 11$, $(-2) * 2 * (-11)$ y $(-1) \cdot (-2) * 2 * 11$.

Otro ejemplo considerado en [1] es la relación $\tau_{(n)}$ en $\mathbb{Z}^\#$, que se define por $x\tau_{(n)}y$ si y solo si $x - y \in (n)$, donde (n) es el ideal principal generado por n . Si $x, y \in \mathbb{Z}^\#$, $x\tau_{(n)}y$ si y solo si $x \equiv_n y$ (relación de equivalencia módulo n). En el estudio de la relación $\tau_{(n)}$ con $n = 5$, algunas de las $\tau_{(5)}$ -factorizaciones de 44 son $(-4) * 11$ y $2 * 22$.

La relación $\tau_{(n)}$, cuando $n = 1$, coincide con la relación $\tau_{\mathbb{Z}\#}$; por ende, es divisible y multiplicativa. Cuando $n = 2$, la relación $\tau_{(n)}$ es multiplicativa, no es divisiva, preserva asociados, es refinable y combinable. Cuando $n > 2$, la relación $\tau_{(n)}$ no es divisiva, no es multiplicativa y no preserva asociados. Aunque $\tau_{(n)}$ no preserva asociados, Serna en [19] pudo demostrar que es posible suponer que preserva asociados. Serna construyó la clausura que preserva asociados, denotada y dada por $\tau'_{(n)} = \{(\lambda x, \mu y) : (x, y) \in \tau_{(n)} \wedge \lambda, \mu \in U(\mathbb{Z})\}$.

Se demostró que $\tau'_{(n)}$ es una relación de equivalencia y que si $\lambda \cdot x_1 * * * x_k$ es una $\tau'_{(n)}$ -factorización, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in U(\mathbb{Z})$ tal que $\lambda \cdot (\lambda_1 \cdot x_1) * (\lambda_2 \cdot x_2) * * * (\lambda_k \cdot x_k)$ es una $\tau_{(n)}$ -factorización. De esta manera, $x|_{\tau_{(n)}} y$ (respectivamente, x es $\tau_{(n)}$ -átomo) si y solo si $x|_{\tau'_{(n)}} y$ (respectivamente, x es $\tau'_{(n)}$ -átomo). Mas aún, $\tau'_{(n)}$ es una relación multiplicativa si y solo si $n \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Por otro lado, una τ -factorización puede o no poseer un τ -refinamiento. Se dice que $x = \lambda \cdot x_1 * * * x_{i-1} * y_1 * * * y_m * x_{i+1} * * * x_n$ es un τ -refinamiento de $x = \lambda \cdot x_1 * * * x_n$ donde $x_i = y_1 * * * y_m$. Cabe notar que $\lambda \cdot x_1 * * * x_n$, de acuerdo a la definición, es un τ -refinamiento de x (ya que vagamente, $x_i = x_i$ es una τ -factorización) y esto da espacio a lo que se puede conocer como τ -refinamiento trivial. La idea de este concepto no fue para el desarrollo de τ -refinamientos triviales, sino para el desarrollo de τ -refinamientos donde las τ -factorizaciones reducidas de los x_i son no triviales (a este tipo de τ -refinamiento se le califica como *propio*), aunque en [1] el concepto no fue aclarado en cuanto a la irreducibilidad de las τ -factorizaciones.

Para evitar cualquier ambigüedad, en este trabajo se hace referencia de τ -refinamiento a uno propio mientras no sea necesario hablar de un τ -refinamiento trivial. Como ejemplo basado en las $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorizaciones de 44, $2 * 2 * 11$ es un $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -refinamiento de $2 * 22$ ya que $2 * 11$ es una $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización de 22. Por otro lado, $4 * 11$ no tiene $\tau_{(5)}$ -refinamiento propio. Lo anterior se debe a que la única factorización posible sería $2 \cdot 2 \cdot 11$, pero este no es un $\tau_{(5)}$ -refinamiento de $4 * 11$ dado que $\pm 2 \not\equiv_5 11$.

Otros componentes de estudio en la teoría de τ -factorizaciones son: la representación de conjuntos de τ -factorizaciones por sistemas de factorización Γ y una relación de orden parcial sobre el conjunto de relaciones simétricas τ . Con respecto al primer componente,

Juett en [13] denota al conjunto de factorizaciones en un monoide H por $fact(H)$. También denota al conjunto de factorizaciones de un elemento no unidad a del monoide H por $fact(a)$. De forma similar en esta investigación, se denota al conjunto de factorizaciones en $D^\#$ por $fact(D^\#)$, al conjunto de τ -factorizaciones en $D^\#$ por $\tau\text{-}fact(D^\#)$, y al conjunto de τ -factorizaciones de un elemento $x \in D^\#$ por $\tau\text{-}fact(x)$. Para efectos de ilustración, si considera a p un número primo, entonces

$$\tau_{Z^\#} fact(2p) = \{2 * p, (-2) * (-p), (-1) \cdot 2 * (-p), (-1) \cdot (-2) * p\}.$$

En [14], $\tau\text{-}fact(D^\#)$ fue representado por un sistema de factorización $\Gamma \subseteq fact(D^\#)$. De manera análoga a lo descrito en [14], el sistema de τ -factorización en x está representando a $\tau\text{-}fact(x)$ y está definido por $\Gamma(x) = \Gamma \cap \tau\text{-}fact(x)$.

Con respecto al segundo componente, Anderson en [1] definió que $\tau_1 \leq \tau_2 \iff \tau_1 \subseteq \tau_2$ (como teoría de conjuntos) y concluyó que $\tau_1 \leq \tau_2$, más que una notación, se convierte en una relación de orden parcial que no es total sobre el conjunto de relaciones simétricas en $D^\#$. Esta definición no fue estudiada en tal trabajo, sino que en [6] y [14] hubo mayor desarrollo al respecto. Ortiz-Albino demostró que, $\tau_1 \leq \tau_2$ si y solo si cada τ_1 -factorización es una τ_2 -factorización; dicho resultado fue el que motivó a Anderson en [6] para crear las Γ -factorizaciones sobre dominios con integridad.

1.2. Teoría básica de grafos

El objetivo de este estudio no solamente se centra en las τ -factorizaciones sino que también en los grafos que pueden ser creados a partir de éstas. A continuación es presentada la definición de *grafo*.

Definición 1.2.1. [21] *Un grafo es un triple ordenado $G_\tau = (V, E, \phi)$ que consiste de los conjuntos arbitrarios V y E , y un mapa de incidencia ϕ que asigna a cada elemento $e \in E$ un conjunto no vacío $\phi(e) \subseteq V$ de cardinalidad a lo más dos.*

Los elementos de V se denominan *vértices del grafo* y los elementos de E *aristas del grafo*. A la cardinalidad de V , se le denota por $|V|$ y se le conoce como el *orden de G* . Los

elementos de E son preimágenes del mapa ϕ , de modo que si $\phi(e) = \{x_1, x_2\}$, entonces $e = (x_1, x_2) \in E$ donde $x_1, x_2 \in V$. Un lazo es una arista e tal que $|\phi(e)| = 1$; es decir, $\phi(e) = \{x\}$ o $(x, x) \in E$. Se dice que dos vértices x_1, x_2 son *adyacentes* si (x_1, x_2) es una arista. El *grado* de un vértice x es la cantidad de vértices adyacentes a x . El mapa ϕ determina cómo los vértices se relacionan por medio de aristas. Por simplicidad, en la literatura, el grafo $G = (V, E, \phi)$ se reescribe como $G = (V, E)$.

Zwillinger en [21] considera que $H = (V_H, E_H)$ y $G = (V_G, E_G)$ son grafos, y define a H como *subgrafo* de G si $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$. La notación para afirmar que H es subgrafo de G es $H \subseteq G$. También, Zwillinger expresa que un isomorfismo entre dos grafos H y G es una función biyectiva $\psi : V_H \rightarrow V_G$ tal que $(x, y) \in E_H$ si y solo si $(\psi(x), \psi(y)) \in E_G$. Si existe tal isomorfismo, entonces H y G son isomorfos, denotado por $H \cong G$.

1.3. Algunos grafos de τ -factores

La primera conexión de la teoría de factorizaciones en factores irreducibles en dominios integrales y la teoría de grafos fue presentada por Coykendall (2005). En [10], un *grafo de divisores irreducibles* de x se define de la forma $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de clases de equivalencia de elementos irreducibles salvo asociados (en un dominio integral D , y es un asociado de z , si $y = \lambda z$ para algún $\lambda \in U(D)$). Dados $x_1, x_2 \in V$, se cumple que $(x_1, x_2) \in E$ si y solo si $x_1 x_2 | x$. Por ejemplo, en [10], consideran $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y determinan el grafo de 18, es decir $G(18)$. Las factorizaciones en irreducibles de 18 en este dominio son $2 \cdot 3^2$, $3 \cdot (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$ y $2 \cdot (2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5})$. La Figura 1 muestra el grafo $G(18)$. Se puede observar que no hay una arista de 2 a $1 + \sqrt{-5}$ (o $1 - \sqrt{-5}$), pues no hay una factorización que contenga a ambos. Similarmente, no hay aristas entre 3 y $2 + \sqrt{-5}$ (o $2 - \sqrt{-5}$).

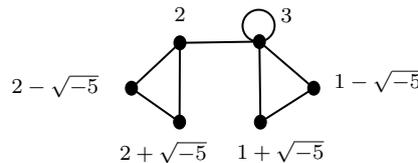


Figura 1.1: El grafo de divisores irreducibles de 18 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, [10].

Mooney en [17], extendió de la definición de Coykendall a la teoría de τ -factorizaciones en dominios con integridad. Mooney definió el *grafo de τ -divisores τ -irreducibles* de x de la forma

$$G_\tau(x) = (V_\tau(x), E_\tau(x)) \text{ donde } V_\tau(x) = \{y : y|_\tau x \wedge y \text{ es } \tau\text{-irreducible}\}$$

$$\text{y } E_\tau(x) = \{(x_1, x_2) : x = \lambda \cdot x_1 * x_2 * * * x_n\}.$$

Notar que Coykendall exigía que el producto de los factores irreducibles fuese un factor; en cambio Mooney (2013) exige una τ -factorización en τ -irreducibles donde ambos τ -factores τ -irreducibles ocurren. Luego en [18], lo extendió a anillos conmutativos con divisores de cero. En los anillos conmutativos existen diferentes tipos de irreducibilidad y elementos asociados. Por esa razón, Mooney creó otra definición que selecciona a los factores de x que son un tipo de irreducible determinado por α , un conjunto de elementos que cumplen un tipo de irreducibilidad. Estos son escogidos salvo asociados y determinados por β , un conjunto de algún tipo de asociados. A partir de lo anterior, surgen más formas de representar al grafo de x . Él definió el *grafo de α - β -divisores* de x de la forma

$$G_\alpha^\beta(x) = (V_\alpha^\beta(x), E_\alpha^\beta(x)) \text{ donde } V_\alpha^\beta(x) = \{y \in D - U(D) : (y \in^\alpha / \sim_\beta) \wedge (y|x)\}$$

y $(x_1, x_2) \in E_\alpha^\beta(x)$ si y solo si $x_1, x_2 \in V_\alpha^\beta(x)$ y existe una α -factorización de x que los contiene.

Aunque los grafos de factores irreducibles se empezaron a estudiar en 2005 por Coykendall en [10], formalmente fue hasta en 2013 cuando Mooney combinó ambas teorías para estudiar el grafo de τ -factores τ -irreducibles y el grafo de α - β -factores. Estos avances indican que el estudio de los grafos de factores es joven y que las definiciones están restringidas a la selección de factores.

Por otra parte, los vértices de los grafos que están en los trabajos de Coykendall y Mooney representan a elementos que pertenecen a distintas clases de equivalencia con respecto a la relación asociado. Esta característica en sus definiciones no fue justificada y no abarca factores en general. En este trabajo se explica una posible razón de la definición

de grafo de factores irreducibles en [10] y se concluye que las propiedades principales del grafo de factores son las del grafo obtenido por dicha definición. Lo anterior implica que los grafos obtenidos son otra forma representativa de hacer un grafo de factores de un elemento en un dominio con integridad. Esta investigación ofrece una nueva definición, la cual considera cualquier tipo de factor existente en el dominio sin alguna restricción. La misma puede ser ajustada a otras estructuras como anillos conmutativos con identidad o monoides multiplicativos con propiedad cancelativa.

1.4. Resumen de los capítulos

Este trabajo consta de cinco capítulos. El primer capítulo fue el resultado de la revisión bibliográfica de los temas relacionados a la investigación, con el fin de colocar en contexto y justificar la esencia del trabajo como un avance en la teoría de grafos de factores.

El segundo capítulo se enfoca en el grafo de τ -factores de cualquier elemento en un dominio con integridad, el cual se conoce como τ -grafo. Se presenta la definición de los grafos de factores ofreciendo un resumen de los expuestos en el primer capítulo. Además, se proveen ejemplos y propiedades generales de estos grafos.

En el tercer capítulo se estudia la definición, se proveen ejemplos y propiedades de dos elementos inéditos de esta investigación: la τ^α -factorización y el τ^α -grafo. Estos inicialmente fueron creados con el objetivo de localizar la caracterización del τ -grafo a partir de subgrafos, proveer propiedades afines o localizadas, y representar a x con un grafo de sus factores.

El cuarto capítulo presenta una forma de estudiar los grafos con características similares a las de los τ^α -grafos, cuyo conjunto de vértices y aristas están determinados por dos relaciones simétricas (no necesariamente iguales) sobre $D^\#$. A estos grafos se les conoce como $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafos. Se presentan ejemplos y relaciones de contención, así como también la relación entre el $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafo y el τ^α -grafo.

En el quinto capítulo se establecen consideraciones finales de la investigación, como conclusiones y otros interrogantes que surgieron de los resultados de la investigación.

Capítulo 2

El τ -grafo

Coykendall y Maney, en [10], establecieron el concepto de grafo de factores irreducibles (ver definición en la Sección 1.3.). El mismo concepto se visualiza como un grafo donde los vértices representan factores irreducibles y las aristas la existencia de una factorización (no necesariamente en elementos irreducibles) donde el producto de irreducibles ocurre. Algunos años más tarde, Mooney, en [17], estableció formalmente una definición de grafo de τ -factores τ -irreducibles tomando de referencia lo que Coykendall y Maney hicieron. La modificación de la definición (ver en la Sección 1.3.) era ajustar los términos factor, factorización y elemento irreducible por τ -factor, τ -factorización y elemento τ -irreducible.

Sin embargo, la definición de Mooney presentó ambigüedad con respecto a que no aclara si para obtener una arista entre dos vértices que representan τ -factores, existe una τ -factorización donde ambos elementos son τ -factores ó el producto de estos elementos es un τ -factor. De hecho, se puede interpretar de su definición que sí se relacionan pues indica que $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n$ es una τ -factorización. Esta ambigüedad no ocurre en la definición de Coykendall debido a que solamente considera el producto usual.

Para entender mejor porqué es importante aclarar este asunto, no siempre al reemplazar un τ -factor por una τ -factorización se obtiene una τ -factorización. Es decir, que $x = (y_1 \cdot y_2) * * * y_n$ no implica necesariamente que $x = y_1 * y_2 * * * y_n$. Como ejemplo, $(22) * 2$ es $\tau_{(5)}$ -factorización de 44 mas $2 \cdot 11 \cdot 2$ no lo es. De igual forma el converso no necesariamente es cierto. Como ejemplo, $2 * (-3) * 17$ es una $\tau_{(5)}$ -factorización de 102, mas $(-6) \cdot 17, 2 \cdot (-51)$ y $(-3) \cdot 34$ no son $\tau_{(5)}$ -factorizaciones.

El concepto de reemplazar un τ -factor con una τ -factorización se le conoce como τ -refinamiento (ver en la Definición 1.1.2.(iv)), que no necesariamente resulta en una τ -factorización (si esto sucede, la relación τ es refinable). Otra forma de que siempre exista un τ -refinamiento de una τ -factorización es que la relación τ sea divisiva. El concepto de obtener una τ -factorización cuando se combinan los factores ocurre cuando τ es multiplicativa o combinable (ver Definición 1.1.2.). Por ende, para obtener ambas implicaciones ($x = (y_1 \cdot y_2) * * * y_n \iff x = y_1 * y_2 * * * y_n$) es necesario que τ sea refinable (o divisiva), que $y_1 \tau y_2$ y combinable (o multiplicativa). Solamente así la definición de Mooney no sería ambigua en interpretación. Por ejemplo, debido a que la relación $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ es multiplicativa, divisiva, refinable y combinable, se cumple que $(2 \cdot 11) * 2$ y $2 * 11 * 2$ son $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorizaciones de 44. Por otro lado, $\tau_{(5)}$ solo es una relación de equivalencia y los conceptos no son equivalentes.

Así que, por la ambigüedad expuesta y la necesidad de tener una definición que no deje espacio a dudas de interpretación, se presenta en este capítulo otra definición para el grafo de τ -factores de x (o conocido en este trabajo como τ -grafo) conforme a la notación respectiva de este trabajo. La Definición 2.1.1. que se presenta es más general que la definición de Mooney. Esto es en el sentido de que en la de Mooney los factores son elementos irreducibles (o tipos de elementos irreducibles), mientras que en ésta los factores pueden ser cualquier elemento de $D^\#$. Además, se presenta la relación entre el grafo cuando son considerados los τ -factores salvo asociados, y el grafo cuando los τ -factores no necesariamente son salvo asociados.

2.1. Definición e ilustración del τ -grafo

En esta sección, se considera a τ como una relación simétrica sobre $D^\#$. Al considerar un τ -producto o una τ -factorización, se está determinando implícitamente tipos de factores de un elemento en $D^\#$. Por ende, al grafo de factores se le denota como τ -grafo, donde los factores están implícitamente determinados por la relación τ .

Definición 2.1.1. *Sea D un dominio con integridad y $x \in D^\#$. El τ -grafo de x es el*

Ejemplo 2.1.3. Sea $D = \mathbb{F}_4 = \{0, 1, z, z + 1\}$ un cuerpo finito de cuatro elementos determinado por la extensión finita ${}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}[\mathbb{Z}]/\langle z^2+z+1 \rangle$. Sean $f, g \in D[x, y]$ polinomios, $\deg(f)$ el grado monomial de f y ∂ una relación sobre $D[x, y]$ definida por $f \partial g$ si y solo si $\deg(f) = \deg(g)$. Esta relación está descrita en el Ejemplo 2.1.(7) de [1] como una relación simétrica, que preserva asociados pero que no es divisiva ni multiplicativa. En este caso particular, el conjunto de unidades del dominio está dado por $\{1, z, z + 1\}$.

Las ∂ -factorizaciones de $(xy)^2$ son de la forma $(\lambda_1 \cdot xy) * (\lambda_2 \cdot xy)$, $(\lambda_1 \cdot x^2) * (\lambda_2 \cdot y^2)$, o $(\lambda_1 \cdot x) * (\lambda_2 \cdot x) * (\lambda_3 \cdot y) * (\lambda_4 \cdot y)$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in U(D)$. Esto implica que $V_{\partial}((xy)^2) = \{\lambda \cdot (xy)^2, \lambda xy, \lambda x^2, \lambda y^2, \lambda x, \lambda y\}$ con $\lambda \in U(D)$, y el conjunto de aristas $E_{\partial}((xy)^2) = \{(\lambda_1 \cdot xy, \lambda_2 \cdot xy), (\lambda_1 \cdot x^2, \lambda_2 \cdot y^2), (\lambda_1 \cdot x, \lambda_2 \cdot x), (\lambda_1 \cdot x, \lambda_2 \cdot y), (\lambda_1 \cdot y, \lambda_2 \cdot y)\}$.

Por lo tanto, el ∂ -grafo de $(xy)^2$ puede dibujarse como en la Figura 2.2. El grafo de ∂ -factores ∂ -irreducibles de $(xy)^2$, de Mooney, está determinado por la arista que une al x e y . De modo que la complejidad de los grafos en estudio se sigue manteniendo en comparación con los grafos de las definiciones anteriores.

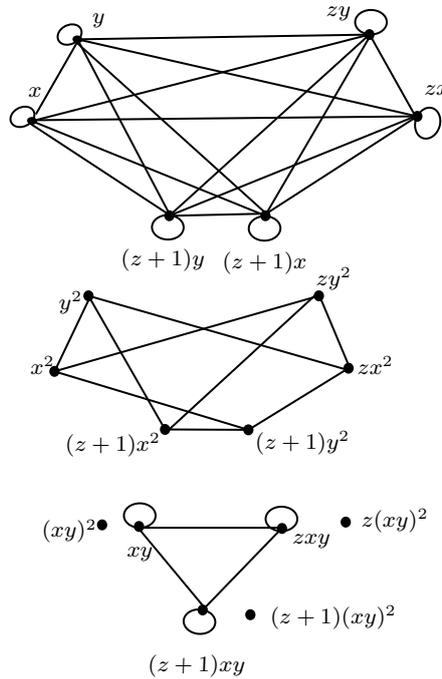


Figura 2.2: El grafo $G_{\partial}((xy)^2)$ en ${}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}[\mathbb{Z}]/\langle z^2+z+1 \rangle[x, y]$

Ejemplo 2.1.4. Sea $D = \mathbb{Z}_5[x, y^2, xy]$ y τ la relación simétrica en $D^{\#}$ que contiene solo los elementos $(\lambda \cdot x^2, \mu \cdot y^2)$, $(\lambda \cdot y^2, \mu \cdot x^2)$, $(\lambda \cdot xy, \mu \cdot xy)$, $(\lambda \cdot x, \mu \cdot y^2)$, $(\lambda \cdot y^2, \mu \cdot x)$, $(\lambda \cdot x, \mu \cdot x)$

donde $\lambda, \mu \in U(D)$. Notar que τ no es multiplicativa. De lo contrario, como $(\lambda x^2)\tau(\mu y^2)$, entonces $(\lambda x^2)\tau(\mu y^4)$, lo cual es falso. Tampoco es divisiva, pues $x|\lambda x^2$ y $(\lambda x^2)\tau(\mu y^2)$ pero $(\lambda x) \nmid \tau(\mu y^2)$. Claramente, preserva asociados. Es refinable, pues x^2 es el único componente en las duplas de la definición de τ que puede τ -refinarse ($x^2 = x * x$), y dado que $(\lambda \cdot x)\tau(\mu \cdot x), (\lambda \cdot x)\tau(\mu \cdot y^2)$, entonces es posible obtener el τ -refinamiento $x^2 * y^2 = x * x * y^2$. No es combinable, pues $x * x * y^2$ es τ -factorización pero $x \cdot (x \cdot y^2)$ no lo es.

Las τ -factorizaciones salvo reorden no triviales de $(xy)^2$ son de la forma $(\lambda \cdot x^2)*(\mu \cdot y^2), (\lambda \cdot xy)*(\mu \cdot xy), (\lambda \cdot x)*(\mu \cdot x)*(\nu \cdot y^2)$ donde $\lambda, \mu, \nu \in U(D)$. El resto de las factorizaciones de $(xy)^2$ son de la forma $(\lambda \cdot x) \cdot (\mu \cdot x) \cdot (\nu \cdot y) \cdot (\psi \cdot y), (\lambda \cdot x^2) \cdot (\mu \cdot y) \cdot (\nu \cdot y)$ donde $\psi \in U(D)$. Estas últimas no son τ -factorizaciones pues $(\lambda \cdot x, \mu \cdot y), (\lambda \cdot x^2, \mu \cdot y) \notin \tau$. Como los elementos de $V_\tau((xy)^2)$ son los factores de las τ -factorizaciones de $(xy)^2$, entonces $V_\tau((xy)^2) = \{\lambda \cdot (xy)^2, \lambda \cdot x^2, \lambda \cdot y^2, \lambda \cdot xy\}$, así como $E_\tau((xy)^2) = \tau$. Por lo tanto, dado que $U(D) = \{1, 2, 3, 4\}$, el τ -grafo de $(xy)^2$ se puede dibujar como en la Figura 2.3. El grafo de τ -factores τ -irreducibles de $(xy)^2$, de Mooney, está determinado por un lazo en el único vértice xy . De modo que la complejidad de los grafos en estudio se sigue manteniendo en comparación con los grafos de las definiciones anteriores.

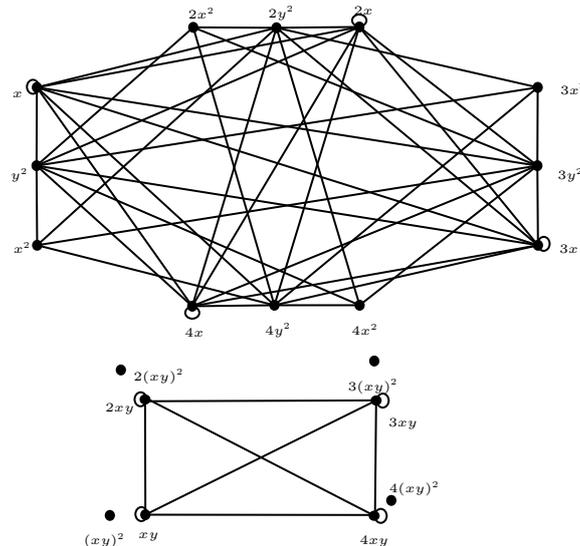


Figura 2.3: El grafo $G_\tau((xy)^2)$ en $D = \mathbb{Z}_5[x, y^2, xy]$

2.2. Los τ -grafos salvo asociados

Se dice que dos elementos x e y son asociados, denotado por $x \sim y$, si $x|y$ e $y|x$. Claramente, esta relación es reflexiva ya que $x|x$ para todo $x \in D^\#$. Esta relación es simétrica ya que si $x \sim y$ para cualesquiera $x, y \in D^\#$, entonces $x|y$ e $y|x$; así que $y \sim x$. También es transitiva ya que si $x \sim y$ e $y \sim z$ para cualesquiera $x, y, z \in D^\#$, entonces ocurren dos cosas. Primero, que $x|y$ e $y|z$, implicando que $x|z$. Segundo, que $z|y$ e $y|x$, implicando que $z|x$. Estos dos comportamientos implican que $x \sim z$. Por lo tanto, \sim es una relación de equivalencia. Un resultado bien conocido es: si $x|y$ e $y|x$ en un dominio con integridad, entonces existe $\lambda \in U(D)$ tal que $x = \lambda y$. Este concepto de asociado solo es interesante en los casos donde $|U(D)| > 1$. El mismo surge como una generalización de la relación de equivalencia “ $=$ ”. Por eso siempre que se utiliza es porque $|U(D)| > 1$.

La relevancia de esta relación para el tema es que el grafo de factores irreducibles salvo asociados que definió Coykendall en [10], y posteriormente la extensión que hizo Mooney en [17] de este grafo a los τ -factores τ -irreducibles salvo asociados, son realmente un cociente del grafo, es decir, G/\sim . No obstante, en los trabajos de Coykendall y Mooney no se detalla este hecho ya que su enfoque era más algebraico que de teoría de grafos. Ahora bien, este hecho explica la razón por la que en sus grafos, cada vértice representa un factor irreducible y a todos sus asociados (es decir, que el conjunto de vértices va en correspondencia con los factores irreducibles, tal y como se hace en la definición de UFD, que las factorizaciones son únicas salvo reorden y asociados).

Por otro lado, Axtell, Baeth y Stickles, en [7], definieron el *grafo comprimido de factores irreducibles*, el cual se acerca un poco más a la noción y representación de grafo cociente considerando la noción de grafo de factores irreducibles de Coykendall y una relación definida por $\sim_x = \{(x_i, x_j) \in \overline{Irr}(D) : \text{si } x_i \text{ es factor de } x, \text{ entonces } x_j \text{ es factor en la misma factorización, y viceversa}\}$. El grafo comprimido de x es el grafo definido de la forma $G_c(x) = (V_c, E_c)$ donde

$$V_c = \{[x_i]_x : (x_i \in \overline{Irr}(D)) \wedge (x_i|x)\} \text{ y}$$

$$E_c = \{([x_i]_x, [x_j]_x) : ([x_i]_x \neq [x_j]_x) \wedge (x_i x_j | x)\}.$$

Para efectos de comprensión de la construcción del grafo bajo esta definición, se provee el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. [7] Sean $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $x = 18$. Las factorizaciones salvo asociados de 18 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ son $2 \cdot 3^2$, $3 \cdot (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$, $2 \cdot (2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5})$. Claramente, $1 + \sqrt{-5} \sim_{18} 1 - \sqrt{-5}$ y $2 + \sqrt{-5} \sim_{18} 2 - \sqrt{-5}$. Esto implica que $[1 + \sqrt{-5}]_{18} = [1 - \sqrt{-5}]_{18}$ y $[2 + \sqrt{-5}]_{18} = [2 - \sqrt{-5}]_{18}$. Sin embargo, $2 \not\sim_{18} 3$ ya que 2 no aparece en la factorización $3 \cdot (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$. Esto implica que $[2]_{18} \neq [3]_{18}$. Por ende, para este caso

$$V_c = \{[1 + \sqrt{-5}]_{18}, [2 + \sqrt{-5}]_{18}, [2]_{18}, [3]_{18}\} \text{ y}$$

$$E_c = \{([2]_{18}, [3]_{18}), ([3]_{18}, [1 + \sqrt{-5}]_{18}), ([2]_{18}, [2 + \sqrt{-5}]_{18})\}.$$

El grafo comprimido de 18 puede dibujarse como se muestra en la Figura 2.4.

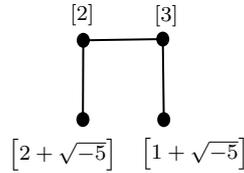


Figura 2.4: El grafo $G_c(18)$

Es posible calcular el grafo cociente $G_{\tau(x)}/\sim = (V_{\tau(x)}/\sim, E_{\sim})$, donde $V_{\tau(x)}/\sim = \{[x_i] : x_i \in V_{\tau(x)}, [x_i] = x_i \cdot U(D)\}$. Es decir, $V_{\tau(x)}/\sim$ es el conjunto de clases de equivalencia de $V_{\tau(x)}$ bajo la relación \sim . Mientras que $E_{\sim} = \{([x_i], [x_j]) \in (V_{\tau(x)}/\sim)^2 : (x_i, x_j) \in E_{\tau(x)}\}$. Una forma de representar este grafo es el grafo propuesto en la siguiente definición.

Definición 2.2.2. El τ -grafo salvo asociados de x es el grafo definido de la forma $\overline{G_{\tau}(x)} = (\overline{V_{\tau}(x)}, E_{\tau}(x))$, donde los elementos de $\overline{V_{\tau}(x)}$ son representantes de los τ -factores salvo asociados, es decir, escogidos arbitrariamente de manera que ningún par de ellos pertenezca a la misma clase de equivalencia en $V_{\tau(x)}/\sim$.

Al analizar la notación que utilizó Coykendall para el conjunto de co-conjuntos representativos de los irreducibles de D , se concluye que utilizó $Irr(D)$ para todos los elementos

irreducibles e $\overline{Irr(D)}$ para los elementos irreducibles salvo asociados. De la misma manera, Coykendall denotó con G al grafo de factores de elementos irreducibles (incluyendo lazos) y con \overline{G} al grafo de factores de elementos irreducibles excluyendo lazos. Teniendo en cuenta los objetivos de la presente investigación, se cambia esta notación con el propósito de extenderla a la definición formal de τ -grafo (no solamente de factores irreducibles, sino de cualquier factor).

Observación 2.2.2.1. *Si $x_i \in V_\tau(x)$ tal que $(x_i, x_i) \in E_\tau(x)$, entonces $[x_i] \in V_\tau(x) / \sim$ y $([x_i], [x_i]) \in E_\sim$. Por la Definición 2.2.2., esto implica que $\overline{G_\tau(x)}$ tiene lazo en $[x_i]$. Dicha conclusión es una diferencia de construcción entre la noción de τ -grafo salvo asociados y la noción de grafo de divisores irreducible reducido (presentada por Coykendall en [10]). Estas nociones son representadas por el mismo símbolo, pero para este trabajo, la notación corresponde a la noción de τ -grafo salvo asociados.*

Una de las diferencias con el grafo de factores (respectivamente, τ -factores) irreducibles (respectivamente, τ -irreducibles) de Coykendall en [10] (respectivamente, Mooney en [17]) es que los vértices no representan a clases de equivalencia. Cada vértice representa a un τ -factor, y cada dos τ -factores pertenecen a clases de equivalencia distintas del conjunto de factores módulo \sim . Para tener una mejor comprensión, ver los ejemplos en las Figuras 2.5 y 2.6; los mismos proveen la idea visual y los párrafos que indican la selección de factores.

Los siguientes ejemplos sirven para tener una idea de la construcción de $\overline{G_\tau(x)}$ y su representación de $G_\tau(x) / \sim$. En cuanto al Ejemplo 2.2.1., es claro que $\sim \neq \sim_x$, por su definición. En este ejemplo de [7], se trabaja con la multiplicación usual, implicando que al aplicar este ejemplo a la definición de τ -grafo se considera a $\tau = \tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}$. Dado que las factorizaciones salvo asociados de 18 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ son $2 \cdot 3^2, 3 \cdot (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}), 2 \cdot (2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5})$, entonces

$$V(18) = \{\pm(1 + \sqrt{-5}), \pm(1 - \sqrt{-5}), \pm(2 + \sqrt{-5}), \pm(2 - \sqrt{-5}), \pm 2, \pm 3\}.$$

Esto implica que

$$V_c(18) = {}^{V(18)} / \sim_{18} \neq {}^{V(18)} / \sim = \{[1 + \sqrt{-5}], [1 - \sqrt{-5}], [2 + \sqrt{-5}], [2 - \sqrt{-5}], [2], [3]\}.$$

Una representación de $G_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)} / \sim$ es un grafo isomorfo dado por $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}}$ donde

$$\overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}} = \{1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}, 2 + \sqrt{-5}, 2 - \sqrt{-5}, 2, 3\}$$

y $E_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}$ aplicado a los elementos de $\overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}}$ es equivalente al conjunto

$$\left\{ \begin{array}{l} (2, 3), (3, 1 + \sqrt{-5}), (3, 1 - \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5}, 1 + \sqrt{-5}), \\ (2, 2 + \sqrt{-5}), (2, 2 - \sqrt{-5}), (2 - \sqrt{-5}, 2 + \sqrt{-5}) \end{array} \right\}.$$

Por ende, $G_c(18) \neq \overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}}$. La Figura 2.5 presenta a $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}}$, el cual puede ser comparado con la Figura 2.4 para comprobar que el grafo comprimido es distinto al τ -grafo salvo asociados, y que $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}}$ posee mayor complejidad que $G_c(18)$.

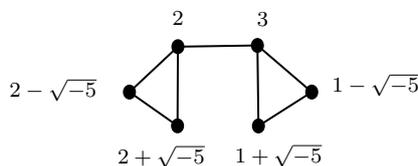


Figura 2.5: El grafo $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\#}(18)}}$

Por otro lado, en el Ejemplo 2.1.2., dado que $V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}(44)} = \{\pm 2, \pm 4, \pm 11, \pm 22, \pm 44\}$, entonces $V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}(44)} / \sim = \{[2], [4], [11], [22], [44]\}$ y $E_{\sim} = \{([2], [22]), ([2], [11]), ([4], [11])\}$. Por ende, $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}(44)} / \sim \cong \overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}(44)}}$ donde el conjunto de vértices es $\overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}(44)}} = \{2, 4, 11, 22, 44\}$ y el de aristas es $E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}(44)} = \{(2, 2), (2, 11), (2, 22), (4, 11)\}$. A continuación se presenta el τ -grafo salvo asociados construido. Cada vértice representa solo a un τ -factor y de x y todos sus asociados ya están representados por ese τ -factor y . Notar que el $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -grafo salvo asociados de 44 posee mayor complejidad que el grafo de divisores irreducibles de 44, de Coykendall (el cual, está determinado por la arista que une al 2 y 11).

Por los ejemplos, la teoría de grafos de factores irreducibles (en cuanto al grafo salvo asociados) se debe interpretar que son más simples que los τ -grafos salvo asociados

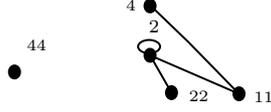


Figura 2.6: El grafo $\overline{G_{\tau_{z\#}}(44)}$

definidos en este trabajo. No obstante, para cada $\lambda_i \in U(D)$ se define un τ -grafo salvo asociado, el cual se denota como

$$\overline{G_{\tau}(x)}^{\lambda_i} = (\lambda_i \cdot \overline{V_{\tau}(x)}, E_{\tau}(x)) \text{ donde } \lambda_i \cdot \overline{V_{\tau}(x)} = \{\lambda_i \cdot x_j : x_j \in \overline{V_{\tau}(x)}\}.$$

Ahora bien, $\overline{G_{\tau}(x)}^{\lambda_i}$ y $\overline{G_{\tau}(x)}$ son isomorfos e isomorfos a $G_{\tau}(x)/\sim$. De manera que se escoge (sutilmente pero de forma arbitraria) a $\overline{V_{\tau}(x)}$ para generar a $\overline{G_{\tau}(x)}$, y así obtener $\overline{G_{\tau}(x)}^{\lambda_i}$ para cada λ_i . Las siguientes propiedades detallan la relación entre el τ -grafo y sus respectivos τ -grafos salvo asociados.

Teorema 2.2.3. Sean D un dominio con integridad, τ una relación simétrica sobre $D^{\#}$, y $G_{\tau}(x)$ el τ -grafo de $x \in D^{\#}$. Sea $\overline{V_{\tau}(x)}$ el conjunto de representantes de los elementos de $V_{\tau}(x)/\sim$. Entonces $\{\lambda_i \cdot \overline{V_{\tau}(x)} : \lambda_i \in U(D)\}$ es una partición de $V_{\tau}(x)$.

Demostración. Para cada $x_k \in V_{\tau}(x)$, se define un mapa $g : U(D) \rightarrow x_k \cdot U(D)$ definido por $\lambda \mapsto x_k \cdot \lambda$. Este mapa g es una función (por su definición) e inyectivo. Para ello, notar que para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in U(D)$, $\lambda_1 = \lambda_2$ si y solo si $x_k \cdot \lambda_1 = x_k \cdot \lambda_2$. Si $y = x_k \cdot \lambda_1 \in x_k \cdot U(D)$, es claro que $\lambda_1 \in U(D)$ y g es sobreyectivo. Por ende, g es una función biyectiva. Si $x_k \in V_{\tau}(x)$, entonces existe $y \in \overline{V_{\tau}(x)}$ que sea el representante de $[x_k]_{\sim} \in V_{\tau}(x)/\sim$. Es decir, existe un $\lambda_j \in U(D)$ tal que $x_k = \lambda_j \cdot y$. Esto indica que, $x_k \in \lambda_j \cdot \overline{V_{\tau}(x)}$. Por ende,
$$V_{\tau}(x) = \bigcup_{\lambda_i \in U(D)} \lambda_i \cdot \overline{V_{\tau}(x)}.$$

Por otro lado, suponer que existen $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$ distintos tal que $x_k \in \lambda_i \cdot \overline{V_{\tau}(x)} \cap \lambda_j \cdot \overline{V_{\tau}(x)}$. Dado que $x_k \in V_{\tau}(x)$, entonces existe $y \in \overline{V_{\tau}(x)}$ que es el representante de $[x_k]_{\sim} \in V_{\tau}(x)/\sim$, tal que $x_k = \lambda_i \cdot y = \lambda_j \cdot y$. Esto indica que $\lambda_i = \lambda_j$, lo que contradice que son distintos. Por ende, los elementos de $\{\lambda_i \cdot \overline{V_{\tau}(x)} : \lambda_i \in U(D)\}$ son disjuntos dos a dos.

Como $x|_{\tau}x$, $V_{\tau}(x) \neq \emptyset$. Esto implica que $\overline{V_{\tau}(x)} \neq \emptyset$ y $\lambda_i \cdot \overline{V_{\tau}(x)} \neq \emptyset$ para todo $\lambda_i \in U(D)$. □

Corolario 2.2.3.1. Sean D un dominio con integridad donde $|U(D)| > 1$ y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Entonces $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} \subsetneq G_\tau(x)$.

Demostración. Por el Teorema 2.2.3., $\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)} \subseteq V_\tau(x)$. Dado que $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i}$ y $G_\tau(x)$ preservan la misma relación de adyacencia (la cual es $E_\tau(x)$), entonces $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} \subseteq G_\tau(x)$.

Suponer por contradicción que $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} = G_\tau(x)$. Si $|U(D)| > 1$, entonces para cada $\lambda_i \cdot x_k \in \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}$ con $\lambda_i \in U(D)$, existe $\lambda_j \cdot x_k \in \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}$ con $\lambda_j \in U(D)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Esto implica que $\lambda_j \cdot x_k \in V_\tau(x)$ y $\lambda_j \cdot x_k \notin \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}$. Por ende, $V_\tau(x) \not\subseteq \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}$, implicando que $G_\tau(x) \neq \overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i}$. Esto contradice que $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} = G_\tau(x)$. \square

Si $|U(D)| = 1$, entonces no tendría sentido estudiar los τ -grafos salvo asociados porque la partición del Teorema 2.2.3. $V_\tau(x)$ tendría solamente un elemento. El τ -grafo salvo asociados es el mismo τ -grafo. Por esta razón, as propiedades restantes en este capítulo suponen el caso no trivial, es decir, $|U(D)| > 1$. Aunque algunas de estas propiedades no dejan de cumplirse cuando $|U(D)| = 1$.

Teorema 2.2.4. Sean D un dominio con integridad y τ una relación simétrica que preserva asociados sobre $D^\#$. Si x tiene una cantidad finita de τ -factores, entonces

(i) $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} \cong \overline{G_\tau(x)}^{\lambda_j}$ para todo $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$.

(ii) Existen $|U(D)|^{|\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}|}$ arreglos de vértices que proveen subgrafos de $G_\tau(x)$ isomorfos a $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i}$.

Demostración. Sea $\overline{V_\tau(x)} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Se define un mapa $f : \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)} \rightarrow \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}$ de la forma $f : z \mapsto \lambda_j \cdot (\lambda_i^{-1} \cdot z)$, donde $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$. Es claro por su definición, que este mapa es una función. Si $z \in \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}$, entonces $\lambda_i^{-1} \cdot z \in \overline{V_\tau(x)}$. Esto implica que $\lambda_j \cdot \lambda_i^{-1} \cdot z \in \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}$. Si $\lambda_j \cdot \lambda_i^{-1} \cdot z = \lambda_j \cdot \lambda_i^{-1} \cdot w$, entonces $z = w$. Por ende, f es inyectiva. Por otro lado, como en $\overline{V_\tau(x)}$ los elementos son salvo asociados, entonces los elementos de $\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}$ son salvo asociados y $|V_\tau(x)| = |\lambda_j \cdot V_\tau(x)| < \infty$. Esto implica que $|\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}| = |\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}|$. Entonces f es una función sobreyectiva, y por ende, biyectiva.

Si $(x_c, x_d) \in E_\tau(x)$, entonces existe una τ -factorización $x = \lambda_k \cdot x_a * * * x_c * x_d * * * x_b$ de x con $1 \leq a \leq c \leq d \leq b \leq n$ y $\lambda_k \in U(D)$. Dado que τ es una relación que preserva

asociados, entonces dicha τ -factorización puede expresarse de la siguiente forma:

$$\lambda_k \cdot x_a *** x_c * x_d *** x_b = \lambda \cdot (\lambda_a \cdot x_a) *** (\lambda_c \cdot x_c) * (\lambda_d \cdot x_d) *** (\lambda_b \cdot x_b) \text{ con } \lambda_i, \lambda_l \in U(D). \quad (2.1)$$

En particular, si $\lambda_c = \lambda_i = \lambda_d$, entonces $(\lambda_i \cdot x_c, \lambda_i \cdot x_d) \in E_\tau(x)$. Esta nueva τ -factorización también se indica que para todo $\lambda_c, \lambda_d \in U(D)$, $\lambda_c \cdot x_c$ y $\lambda_d \cdot x_d$ son factores en una τ -factorización de x . Por ende, $(\lambda_c \cdot x_c, \lambda_d \cdot x_d) \in E_\tau(x)$. Esto demuestra que $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} \cong \overline{G_\tau(x)}^{\lambda_j}$.

Notar que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es solo una selección de los elementos de $V_\tau(x)$ para formar a $\overline{V_\tau(x)}$. Por el Principio Multiplicativo de conteo, existen $|U(D)|^{|\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}|}$ conjuntos distintos de elementos de $V_\tau(x)$ que pueden ser $\overline{V_\tau(x)}$. Por la definición de $\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}$, se concluye que $|\overline{V_\tau(x)}| = |\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}|$. Esto implica que existen $|U(D)|^{|\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}|}$ conjuntos distintos de elementos de $V_\tau(x)$ que pueden ser $\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}$. Como $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} \cong \overline{G_\tau(x)}^{\lambda_j}$ y $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_j} \subsetneq G_\tau(x)$ (por el Corolario 2.2.3.1.), entonces existe esa cantidad de subgrafos de $G_\tau(x)$ isomorfos a $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i}$ (incluyendo la isomorfía trivial). \square

Si $D = \mathbb{Z}$ y $\tau = \{(2, 3), (-2, 3), (3, 2), (3, -2)\}$, entonces τ no preserva asociados pues $(-2, 3) \in \tau$ y $(-2, -3) \notin \tau$. Notar que $V_\tau(6) = \{\pm 2, \pm 3\}$. Si se considera a $\overline{V_\tau(6)} = \{2, 3\} = 1 \cdot \overline{V_\tau(6)}$, entonces $-1 \cdot \overline{V_\tau(6)} = \{-2, -3\}$. Sin embargo, $E_\tau(6)|_{1 \cdot \overline{V_\tau(6)}} = \{(2, 3)\}$ y $E_\tau(6)|_{-1 \cdot \overline{V_\tau(6)}} = \emptyset$, pues $(-2, -3) \notin \tau$. Por lo tanto, $\overline{G_\tau(6)}^1 \not\cong \overline{G_\tau(6)}^{-1}$. Este ejemplo argumenta la necesidad de que τ preserve asociados para que los τ -grafos salvo asociados sean isomorfos.

Debido a este isomorfismo que existe entre τ -grafos salvo asociados, solamente es necesario estudiar a profundidad uno de estos para conocer el comportamiento de los demás y así conocer la mayor información posible acerca del τ -grafo en cuestión. Uno de los aspectos a estudiar en este comportamiento es el grado de cada vértice. Suponiendo que $x_k \in \overline{V_\tau(x)}$, en este trabajo se denotan dos tipos de grados para cada vértice en el τ -grafo: $deg(\lambda_i \cdot x_k)$ (que es el grado de x_k en $\overline{G_\tau(x)}$, al cual en este trabajo se conoce como *grado de x_k*) y $edeg(\lambda_i \cdot x_k)$ (que es el grado de x_k en $G_\tau(x)$, al cual se conoce como *grado extendido de x_k*). Esto implica claramente que $deg(\lambda_i \cdot x_k) \leq edeg(\lambda_i \cdot x_k)$. Se pudo

llamar a $deg(x_k)$ como grado reducido y llamar a $edeg(x_k)$ como el grado. No obstante, se decidió llamar a $edeg(x_k)$ como grado extendido, pues de esta manera se evita una posible confusión con la noción de grafo reducido en las teorías de grafos de Coykendall en [10], Mooney en [17] y López en [15].

Dado que el τ -grafo es un grafo no dirigido, entonces no hay claridad de las entradas y salidas que generan los lazos a un vértice. Para efecto de conteo del grado de vértices, tanto en $deg(x_k)$ como en $edeg(x_k)$ se cuentan 2 aristas adyacentes al vértice por cada lazo. El siguiente teorema presenta una ecuación en términos de ambos tipos de grados, la cual argumenta la desigualdad anterior.

Corolario 2.2.4.1. *Sean D un dominio con integridad con $|U(D)| < \infty$ y τ una relación simétrica que preserva asociados sobre $D^\#$. Sean $x_k \in V_\tau(x)$, $b(x_k)$ la cantidad de lazos que tiene x_k en $G_\tau(x)$ (por cada lazo se consideran 2 aristas adyacentes al vértice, este dato aplica para los grados) y*

$$c(b(x_k)) = \begin{cases} 2b(x_k) - 1 & \text{si } b(x_k) > 0 \\ 0 & \text{si } b(x_k) = 0 \end{cases}. \quad (2.2)$$

Si x tiene una cantidad finita de τ -factores, entonces

$$edeg(x_k) = |U(D)| \cdot deg(x_k) - [|U(D)| - 1] \cdot c(b(x_k)).$$

Demostración. Es fácil ver que $edeg(x_k) = deg(x_k) + d(x_k)$, donde $d(x_k)$ es la cantidad de aristas tales que x_k es adyacente con vértices de distintos τ -grafos salvo asociados (es decir, las aristas (x_k, y) donde $x_k \in \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}$ e $y \in \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$). En cualquier τ -grafo salvo asociados distinto al τ -grafo salvo asociados al que x_k pertenece, la cantidad de vértices adyacentes a x_k está descrita por la expresión $deg(x_k) - c(b(x_k))$. Notar que $deg(x_k)$ incluye la cantidad de entradas en x_k que los lazos de x_k generan, y que no son necesarias en la adyacencia de x_k con sus asociados (por eso es que esta cantidad se resta a $deg(x_k)$). Dado que por cada lazo se consideran 2 aristas adyacentes al vértice, entonces dicha cantidad de entradas está dada por $2(b_k) - 1$, si la cantidad de lazos $b(x_k) > 0$

(el '-1' es por la arista que se forma entre x_k y su asociado en el τ -grafo salvo asociados seleccionado); o la función da 0, si $b(x_k) = 0$, pues no habrían aristas entre x_k y sus asociados.

Si $(x_k, x_j) \in E_\tau(x)$, por el isomorfismo f de la demostración del Teorema 2.2.4., x_k, x_j son τ -factores en una misma τ -factorización de x . Esto implica que cualquier vértice que represente a un τ -factor de la forma $\lambda \cdot x_j$ donde $\lambda \in U(D)$ es tal que $(x_k, \lambda \cdot x_j) \in E_\tau(x)$, pues τ preserva asociados. Existen $|U(D)| - 1$ vértices con dicha descripción que no pertenecen al τ -grafo salvo asociados al que pertenece x_k . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} edeg(x_k) &= deg(x_k) + d(x_k) = deg(x_k) + [|U(D)| - 1] \cdot [deg(x_k) - c(b(x_k))] \\ &= deg(x_k) + [|U(D)| - 1] \cdot deg(x_k) - [|U(D)| - 1] \cdot c(b(x_k)) \\ &= |U(D)| \cdot deg(x_k) - [|U(D)| - 1] \cdot c(b(x_k)). \end{aligned}$$

□

Si $|U(D)| = \infty$ y $deg(x_k) > 0$, entonces $edeg(x_k) = \infty$. El siguiente corolario refiere a la relación existente entre los grados de los vértices que representan factores asociados, cuando el elemento solo tiene un número finito de factores salvo asociados.

Corolario 2.2.4.2. *Sean D un dominio con integridad y τ una relación simétrica que preserva asociados sobre $D^\#$. Si x tiene una cantidad finita de τ -factores y x_k es un τ -factor de x , entonces $deg(\lambda_i \cdot x_k) = deg(\lambda_j \cdot x_k)$ para todo $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.4.(i), $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i} \cong \overline{G_\tau(x)}^{\lambda_j}$ para $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$ bajo la función f . Si $\overline{V_\tau(x)} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, entonces $\overline{\lambda_i \cdot V_\tau(x)} = \{\lambda_i \cdot x_1, \lambda_i \cdot x_2, \dots, \lambda_i \cdot x_n\}$ y $\overline{\lambda_j \cdot V_\tau(x)} = \{\lambda_j \cdot x_1, \lambda_j \cdot x_2, \dots, \lambda_j \cdot x_n\}$. Por el isomorfismo f , $(\lambda_i \cdot x_k, \lambda_i \cdot x_a) \in E_\tau(x)$ si y solo si $(\lambda_j \cdot x_k, \lambda_j \cdot x_a) \in E_\tau(x)$, para $1 \leq a \leq n$. Por lo tanto, $deg(\lambda_i \cdot x_k) = deg(\lambda_j \cdot x_k)$. □

Para efectos de ilustración de las propiedades anteriores, se presentan a continuación los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.5. *Con referencia en el Ejemplo 2.1.2., si $\overline{V_{\tau_{z\#}}(44)} = 1 \cdot \overline{V_{\tau_{z\#}}(44)} = \{2, 4, 11, 22, 44\}$, entonces $-1 \cdot \overline{V_{\tau_{z\#}}(44)} = \{-2, -4, -11, -22, -44\}$. Por ende, $\overline{G_{\tau_{z\#}}(44)}^1 \neq$*

$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}^{-1}$, aunque ambos sean $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -grafos salvo asociados isomorfos de 44. En la Figura 2.7 se representa con color negro a $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}^{-1}$ y con color rojo a $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}^{-1}$. Dicha figura denota la partición de $V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}$ que refiere el Teorema 2.2.3. No obstante, la función $f : 1 \cdot \overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}} \rightarrow -1 \cdot \overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}$ definida por $f(x_i) = -x_i$ cumple con las condiciones de la función f en la demostración del Teorema 2.2.4. Esto implica que f es un isomorfismo, y por ende, $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}^{-1} \cong \overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}^{-1}$, cumpliéndose así el Corolario 2.2.4.1.

Por otro lado, existen 32 conjuntos de vértices que podrían ser elegibles para $\overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}$, y así formar subgrafos de $G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}$ que son isomorfos a $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}$, implicando que existen 32 formas de representar a $G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}/\sim$. Estos conjuntos de vértices son: $\{2, 4, 11, 22, 44\}$, $\{2, 4, 11, 22, -44\}$, $\{2, 4, 11, -22, 44\}$, $\{2, 4, -11, 22, 44\}$, $\{2, -4, 11, 22, 44\}$, $\{-2, 4, 11, 22, 44\}$, $\{2, 4, 11, -22, -44\}$, $\{2, 4, -11, 22, -44\}$, $\{2, -4, 11, 22, -44\}$, $\{-2, 4, 11, 22, -44\}$, $\{2, 4, -11, -22, 44\}$, $\{2, -4, 11, -22, 44\}$, $\{-2, 4, 11, -22, 44\}$, $\{2, -4, -11, 22, 44\}$, $\{-2, 4, -11, 22, 44\}$, $\{-2, -4, 11, 22, 44\}$, $\{2, 4, -11, -22, -44\}$, $\{2, -4, 11, -22, -44\}$, $\{-2, 4, 11, -22, -44\}$, $\{2, -4, -11, 22, -44\}$, $\{-2, 4, -11, 22, -44\}$, $\{-2, -4, 11, 22, -44\}$, $\{2, 4, -11, -22, 44\}$, $\{-2, 4, -11, -22, 44\}$, $\{-2, -4, 11, -22, 44\}$, $\{2, -4, -11, -22, -44\}$, $\{-2, 4, -11, -22, -44\}$, $\{-2, -4, 11, -22, -44\}$, $\{2, -4, -11, -22, -44\}$. La cantidad de subgrafos de $G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}$ que son isomorfos a $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}$, que es 32, puede expresarse de la forma 2^5 , lo cual comprueba la fórmula que determina dicha cantidad en el Teorema 2.2.4., pues $|U(D)| = 2$ y $|\lambda_i \cdot \overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}| = 5$.

En el factor 2, es claro en la Figura 2.7 que $\deg(2) = 4 = \deg(-2)$, lo que concuerda con el Corolario 2.2.4.2.. También se puede ver en dicha figura que $\text{edeg}(2) = 7$. Notar que 7 puede expresarse $2 * 4 - (2(1) - 1) * 1$ sabiendo que $|U(D)| = 2$ y $c(b(2)) = (2(1) - 1) * 1$ pues el vértice que representa a 2 posee un lazo. Esto concuerda con la fórmula para $\text{edeg}(x_k)$ descrita en el Corolario 2.2.4.1.

No obstante, si se considera al conjunto $\overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}} = \{2, -4, 11, -22, 44\}$, entonces $1 \cdot \overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}} = \overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}$ y $-1 \cdot \overline{V_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}} = \{-2, 4, -11, 22, -44\}$. En la Figura 2.8 se representa con color negro a $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}^{-1}$ y con color rojo a $\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}\#}(44)}}^{-1}$. Estos $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -grafos

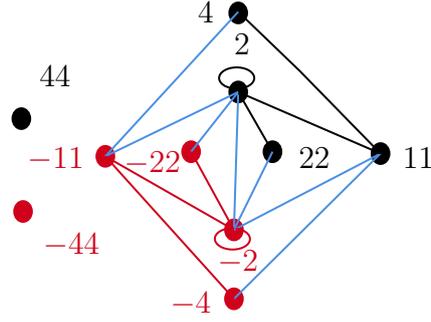


Figura 2.7: Los grafos de factores salvo asociados de 44

salvo asociados son otras dos de las 32 formas existentes, de representar a $\overline{G_{\tau_{z\#}}(44)}$.

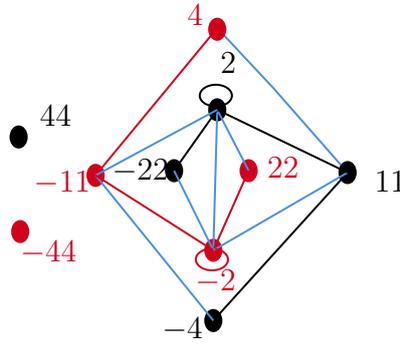


Figura 2.8: Otros dos grafos de factores salvo asociados de 44

Ejemplo 2.2.6. Considerando el Ejemplo 2.1.3., se tiene que el conjunto de vértices es $V_{\partial}((xy)^2)/\sim = \{[x], [y], [xy], [x^2], [y^2], [(xy)^2]\}$. Dado que para este caso $U(D) = \{1, z, z+1\}$, si se selecciona a $\overline{V_{\partial}((xy)^2)} = \{x, y, xy, x^2, y^2, (xy)^2\}$, entonces $1 \cdot \overline{V_{\partial}((xy)^2)} = \overline{V_{\partial}((xy)^2)}$, $z \cdot \overline{V_{\partial}((xy)^2)} = \{z \cdot x, z \cdot y, z \cdot (xy), z \cdot x^2, z \cdot y^2, z \cdot (xy)^2\}$, y por último, $(z+1) \cdot \overline{V_{\partial}((xy)^2)} = \{(z+1) \cdot x, (z+1) \cdot y, (z+1) \cdot (xy), (z+1) \cdot x^2, (z+1) \cdot y^2, (z+1) \cdot (xy)^2\}$. Esto muestra la partición de vértices del grafo que son factores de $(xy)^2$ en D , tal como lo indicó el Teorema 2.2.3. Dado que $\overline{G_{\partial}((xy)^2)^1}$, $\overline{G_{\partial}((xy)^2)^z}$, $\overline{G_{\partial}((xy)^2)^{z+1}}$ preservan la misma relación de adyacencia (la cual está basada en la biyectividad entre los vértices de factores asociados), entonces estos τ -grafos salvo asociados son isomorfos. Esto provee un ejemplo de lo que dice el Teorema 2.2.4.(i) En particular, el factor x^2 en la Figura 2.9 nos muestra que $\deg(x^2) = \deg(z \cdot x^2) = \deg((z+1) \cdot x^2) = 1$ y $\text{edeg}(x^2) = 3 * (1) - 2(0) = 3$. En dicha figura se muestra en color negro a $\overline{G_{\partial}((xy)^2)^1}$, en color rojo a $\overline{G_{\partial}((xy)^2)^z}$ y en color verde a $\overline{G_{\partial}((xy)^2)^{z+1}}$.

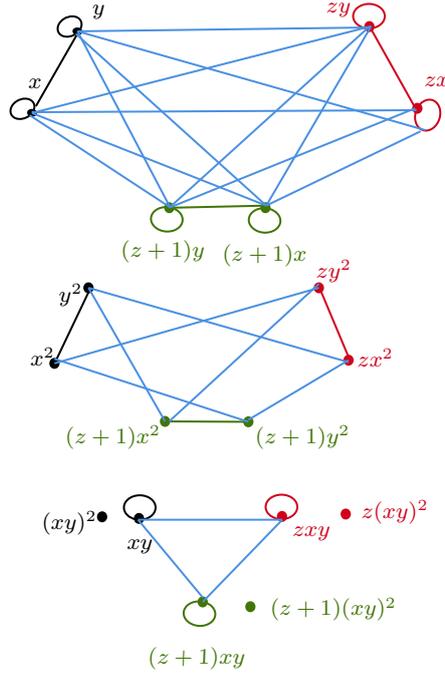


Figura 2.9: Los ∂ -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ en $\mathbb{F}_4[x, y]$

2.3. Interconectividad del τ -grafo

Dado que se ha hecho hasta el momento un análisis sobre los τ -grafos salvo asociados de x (los cuales son subgrafos del τ -grafo de x y brindan muchas características generales de éste) es necesario hacer estudio de las aristas de conexión entre los τ -grafos salvo asociados que existen con el objetivo de conocer el comportamiento entre artistas y las generalidades del τ -grafo. Notar que ninguna de las aristas representadas en color azul en las figuras de los ejemplos 2.2.7. y 2.2.8. fueron estudiadas en su totalidad. En esta sección se estudia la naturaleza y comportamiento de este conjunto de aristas, al cual se denomina *interconectividad del τ -grafo de x* . Los elementos de este conjunto son aristas que no pertenecen a cualquier $\overline{G_\tau(x)}^{\lambda_i}$ con $\lambda_i \in U(D)$ habiendo seleccionado los elementos de $\overline{V_\tau(x)}$. Para realizar el estudio, se define la relación $\sim_V := \{(a, b) : a, b \in \lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}, \lambda \in U(D)\}$. Se denota que $a \sim_V b$ si y solo si $(a, b) \in \sim_V$.

Es fácil verificar que $a \sim_V a$ para todo $a \in D^\#$, implicando que \sim_V es reflexiva. También es claro por definición que \sim_V simétrica. Además, si $a \sim_V b$ y $b \sim_V c$ para $a, b, c \in D^\#$, entonces $a, b, c \in \lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}$. Esto implica que $a \sim_V c$, significando que \sim_V es transitiva. Por ende, \sim_V es una relación de equivalencia.

A causa de esto, es posible una estructura bien definida $G_\tau(x)/\sim_V = (V_\tau(x)/\sim_V, E_{\sim_V})$. Cabe recalcar que los vértices $V_\tau(x)/\sim_V = \{\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)} : \lambda_i \in U(D)\}$, mientras que las aristas $E_{\sim_V} = \{(\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}, \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}) : \lambda_i \neq \lambda_j\}$. Evidentemente, E_{\sim_V} es una expresión genérica y representativa de la interconectividad del τ -grafo. A continuación se presenta la definición formal de la interconectividad.

Definición 2.3.1. *Sea D un dominio con integridad y $x \in D^\#$. Considerar $\overline{V_\tau(x)}$ el conjunto de vértices determinado. La interconectividad de $G_\tau(x)$ es el subconjunto de $E_\tau(x)$ definido y denotado de la forma*

$$\begin{aligned} Int(G_\tau(x)) &= \{(\lambda_i \cdot x_i, \lambda_j \cdot x_j) : x_i, x_j \in \overline{V_\tau(x)} \text{ y } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ en } U(D)\} \\ &= \{(x_i, x_j) : \chi_{E_V}(x_i, x_j) = 1\} \text{ donde} \end{aligned}$$

$$\chi_{E_V}(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)} \text{ y } x_j \in \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)} \text{ con } \lambda_i \neq \lambda_j \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}. \quad (2.3)$$

En el Ejemplo 2.2.7. se aprecia que $(-11, 4) \in Int(G_{\tau_{z\#}}(44))$ cuando $\overline{V_{\tau_{z\#}}(44)} = \{2, 4, 11, 22, 44\}$, pues $\chi_{E_V}(-11, 4) = 1$. Pero cuando $\overline{V_{\tau_{z\#}}(44)} = \{2, -4, 11, -22, 44\}$, entonces $\chi_{E_V}(-11, 4) = 0$, y por ende, $(-11, 4) \notin Int(G_{\tau_{z\#}}(44))$. Este concepto depende de la selección de los elementos de $\overline{V_\tau(x)}$ para que una determinada arista sea parte de la interconectividad del τ -grafo de x o de uno de los τ -grafos salvo asociados de x . Para cualquier arista $(x_i, x_j) \in Int(G_\tau(x))$ bajo un conjunto $\overline{V_\tau(x)}$ predefinido, es posible redefinir el conjunto $\overline{V_\tau(x)}$ de modo que x_i, x_j sean elementos de este nuevo conjunto, y entonces $(x_i, x_j) \in E_\tau(x) \in \overline{G_\tau(x)}$. Por ende, el comportamiento de las aristas en la interconectividad del τ -grafo es el mismo que el de las aristas en los τ -grafos salvo asociados.

Existen algunas propiedades interesantes del τ -grafo que se argumentan del concepto de interconectividad. Estas propiedades se describen en el resto de la sección.

Teorema 2.3.2. (Fórmula de Interconectividad) *Sean D un dominio con integridad*

con $|U(D)| > 1$ y τ una relación simétrica que preserva asociados sobre $D^\#$. Sea $\overline{V_\tau(x)} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Para cada $x_k \in V_\tau(x)$, se define $b(x_k)$ como la cantidad de lazos que tiene x_k en $G_\tau(x)$ (por cada lazo se consideran 2 aristas adyacentes al vértice, este dato aplica para los grados) y

$$c(b(x_k)) = \begin{cases} 2b(x_k) - 1 & \text{si } b(x_k) > 0 \\ 0 & \text{si } b(x_k) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Entonces en términos de \deg de los vértices:

$$|Int(G_\tau(x))| = \frac{1}{2}|U(D)| \sum_{k=1}^m [deg(x_k) - c(b(x_k))].$$

Demostración. Notar que la función $d(x_k)$ que aparece en la demostración del Corolario 2.2.4.2. representa a la cantidad de aristas que pertenecen a la $Int(G_\tau(x))$ que tienen a x_k como uno de sus vértices. Por el Teorema 2.2.3., existen $|U(D)|$ conjuntos de vértices de la forma $\lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}$ con $\lambda \in U(D)$ que particionan a $V_\tau(x)$. Por el Corolario 2.2.4.1., $|\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}| = |\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}|$ para todo $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$. Y dado que τ preserva asociados, entonces

$$\begin{aligned} d(\lambda_i \cdot x_k) &= |\{x_a \in V_\tau(x) - \lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)} : (x_a, \lambda_i \cdot x_k) \in E_\tau(x)\}| \\ &= |\{x_a \in V_\tau(x) - \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)} : (x_a, \lambda_j \cdot x_k) \in E_\tau(x)\}| \\ &= d(\lambda_j \cdot x_k). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si $\overline{V_\tau(x)} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, entonces $\sum_{k=1}^m d(x_k) = \sum_{k=1}^m d(\lambda_i \cdot x_k) = \sum_{k=1}^m d(\lambda_j \cdot x_k)$. Esto implica que la expresión $|U(D)| \sum_{k=1}^m d(x_k)$ equivale al doble de las aristas entre vértices que no pertenecen a un mismo τ -grafo salvo asociados, es decir, el doble de la cardinalidad de la interconectividad.

Por la demostración del Corolario 2.2.4.2., $d(x_k) = deg(x_k) - c(b(x_k))$, entonces el conjunto $|Int(G_\tau(x))|$ equivale a la mitad de $\sum_{k=1}^m d(x_k)$ multiplicada por $|U(D)|$. Por ende,

$$|Int(G_\tau(x))| = \frac{1}{2}|U(D)| \sum_{k=1}^m d(x_k) = \frac{1}{2}|U(D)| \sum_{k=1}^m [deg(x_k) - c(b(x_k))].$$

□

Corolario 2.3.2.1. Sean D un dominio con integridad con $|U(D)| > 1$ y τ una relación simétrica que preserva asociados sobre $D^\#$. Si x tiene una cantidad finita de τ -factores y x_k es un τ -factor de x , entonces $\text{edeg}(\lambda_i \cdot x_k) = \text{edeg}(\lambda_j \cdot x_k)$ para todo $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$.

Demostración. Por la demostración del Corolario 2.2.4.1., $\text{edeg}(x_k) = \text{deg}(x_k) + d(x_k)$. Por el Teorema 2.3.2. $d(\lambda_i \cdot x_k) = d(\lambda_j \cdot x_k)$ y por el Corolario 2.2.4.2., $\text{deg}(\lambda_i \cdot x_k) = \text{deg}(\lambda_j \cdot x_k)$ para $\lambda_i \neq \lambda_j$. Por lo tanto, $\text{edeg}(\lambda_i \cdot x_k) = \text{deg}(\lambda_i \cdot x_k) + d(\lambda_i \cdot x_k) = \text{deg}(\lambda_j \cdot x_k) + d(\lambda_j \cdot x_k) = \text{edeg}(\lambda_j \cdot x_k)$. □

Lema 2.3.3. Sean D un dominio con integridad con $|U(D)| > 1$ y τ una relación simétrica que preserva asociados sobre $D^\#$. Sea $E_\tau(x)|_{\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}}$ es el conjunto de aristas de $G_\tau(x)$ entre elementos de $\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}$ con $\lambda_i \in U(D)$. Si x tiene una cantidad finita de τ -factores, entonces

$$\{E_\tau(x)|_{\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}} : \lambda_i \in U(D)\} \cup \text{Int}(G_\tau(x))$$

es una partición de $E_\tau(x)$, siempre que $E_\tau(x) \neq \emptyset$.

Demostración. Por la definición de $\text{Int}(G_\tau(x))$, es claro que $E_\tau(x)|_{\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}} \cup \text{Int}(G_\tau(x))$ está contenido en $E_\tau(x)$ para todo $\lambda_i \in U(D)$. Por otro lado, suponer que existe $(x_p, x_q) \in E_\tau(x)$ tal que $(x_p, x_q) \notin E_\tau(x)|_{\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}} \cup \text{Int}(G_\tau(x))$. Dado que $(x_p, x_q) \in E_\tau(x)$, entonces existe una τ -factorización de x en la que x_p y x_q son factores. Sean $y_p, y_q \in \overline{V_\tau(x)}$ los representantes de x_p y x_q , respectivamente. Dado que τ preserva asociados, entonces $x_p = \lambda_j \cdot y_p$ y $x_q = \lambda_l \cdot y_q$ donde $\lambda_j, \lambda_l \in U(D)$. Si $(x_p, x_q) \notin E_\tau(x)|_{\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}}$ para todo $\lambda_i \in U(D)$, entonces no existe una τ -factorización de la forma $x = \lambda_h \cdot (\lambda_i \cdot y_p) *** (\lambda_i \cdot y_q)$ donde $\lambda_h \in U(D)$. Dado que $(x_p, x_q) \notin \text{Int}(G_\tau(x))$, entonces no existe una τ -factorización de la forma $x = \lambda_h \cdot (\lambda_j \cdot y_p) *** (\lambda_l \cdot y_q)$ donde $\lambda_h \in U(D)$. Esto implica que no existe τ -factorización de x en la que x_p y x_q sean factores, pero esto contradice que $(x_p, x_q) \in E_\tau(x)$. Por ende, $E_\tau(x) = \text{Int}(G_\tau(x)) \cup \bigcup_{\lambda_i \in U(D)} E_\tau(x)|_{\lambda_i \cdot \overline{V_\tau(x)}}$.

Por otro lado, suponer que existe $(x_p, x_q) \in E_\tau(x)|_{\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}} \cap E_\tau(x)|_{\lambda_l \cdot \overline{V_\tau(x)}}$ donde $\lambda_j, \lambda_l \in U(D)$ y $\lambda_j \neq \lambda_l$. Esto implica que $x_p, x_q \in \lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)} \cap \lambda_l \cdot \overline{V_\tau(x)}$, una contradicción del Teorema 2.2.3. Por ende, $E_\tau(x)|_{\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}} \cap E_\tau(x)|_{\lambda_l \cdot \overline{V_\tau(x)}} = \emptyset$. En otro caso, suponer que

$(x_p, x_q) \in E_\tau(x)|_{\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}} \cap \text{Int}(G_\tau(x))$ para algún $\lambda_i \in U(D)$. Esto implica (denotando a $y_p, y_q \in \overline{V_\tau(x)}$ como los representativos de x_p y x_q respectivamente) que $x_p = \lambda_j \cdot y_p$ y $x_q = \lambda_j \cdot y_q$. Lo cual significa (por la Definición 2.3.1.) que $(x_p, x_q) \notin \text{Int}(G_\tau(x))$, que contradice que $(x_p, x_q) \in E_\tau(x)|_{\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}} \cap \text{Int}(G_\tau(x))$. Por ende, $E_\tau(x)|_{\lambda_j \cdot \overline{V_\tau(x)}} \cap \text{Int}(G_\tau(x)) = \emptyset$.

Finalmente, dado que $E_\tau(x) \neq \emptyset$, entonces existe $(x_p, x_q) \in E_\tau(x)$ con p, q posiblemente iguales. Esto implica que $x_p, x_q \in V_\tau(x)$ y que x_p, x_q pertenecen a una τ -factorización de x . Por la definición de $\overline{V_\tau(x)}$, existen $\lambda_k, \lambda_l \in U(D)$ tal que $\lambda_k \cdot x_p, \lambda_l \cdot x_q \in \overline{V_\tau(x)} \subseteq V_\tau(x)$ y que $\lambda_k \cdot x_p, \lambda_l \cdot x_q$ pertenecen a una τ -factorización de x , pues τ preserva asociados. Entonces para cualquier $\lambda \in U(D)$ se tiene que $\lambda \cdot \lambda_k \cdot x_p, \lambda \cdot \lambda_l \cdot x_q \in \lambda \cdot \overline{V_\tau(x)} \subseteq V_\tau(x)$, implicando que $(\lambda \cdot \lambda_k \cdot x_p, \lambda \cdot \lambda_l \cdot x_q) \in E_\tau(x)|_{\lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}}$. Por ende, $E_\tau(x)|_{\lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}} \neq \emptyset$. Como τ preserva asociados, entonces existe $\lambda_h \in U(D)$ tal que $(\lambda \cdot \lambda_k \cdot x_p, \lambda_h \cdot \lambda \cdot \lambda_l \cdot x_q) \in E_\tau(x)$ y $\lambda_h \cdot \lambda \neq \lambda$. Esto implica que $(\lambda \cdot \lambda_k \cdot x_p, \lambda_h \cdot \lambda \cdot \lambda_l \cdot x_q) \in \text{Int}(G_\tau(x))$. Por lo tanto, $\text{Int}(G_\tau(x)) \neq \emptyset$. □

Capítulo 3

La τ^α -factorización y el τ^α -grafo

En la teoría de τ -factorizaciones existen conceptos diversos y específicos que permiten clasificar o distinguir una τ -factorización. La Figura 1 en [2] y los capítulos 2 y 4 en [14] (así como otros artículos) detallan tipos de factorización que pueden ser aplicados a las τ -factorizaciones. Estos tipos de factorización (los cuales en este trabajo se conocen como “tipos de τ -factorización”) pueden clasificarse en dos categorías: según la naturaleza que determina que dos o más elementos se pueden multiplicar o según la naturaleza de los factores. Los siguientes son ejemplos ya estudiados en la literatura que dependen de la naturaleza de los factores en dominios con integridad.

- La τ -factorización *irreducible*: es una τ -factorización en la que todos sus factores son irreducibles. Por ejemplo, $2 * 22$ no es una $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización irreducible de 44, pues 22 no es irreducible al tener a $2 * 11$ como $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización (la cual es no trivial). No obstante, $2 * 2 * 11$ es una $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización irreducible de 44 pues 2 y 11 son τ -irreducibles (primos son irreducibles).
- La τ -factorización τ -irreducible: es una τ -factorización en la que todos sus factores son τ -irreducibles. Por ejemplo, $6 * 11$ es una $\tau_{(5)}$ -factorización mas no una $\tau_{(5)}$ -factorización $\tau_{(5)}$ -irreducible de 66, pues 6 no es $\tau_{(5)}$ -irreducible al tener a $(-1) \cdot (-2) * 3$ como $\tau_{(5)}$ -factorización $\tau_{(5)}$ -irreducible. No obstante, $(-1) \cdot (-2) * 33$ y $3 * 22$ son $\tau_{(5)}$ -factorizaciones $\tau_{(5)}$ -irreducibles pues 2, 3, 22 y 33 son $\tau_{(5)}$ -irreducibles. Aunque 22 y 33 no son irreducibles, pues $2 \cdot 11$ y $3 \cdot 11$ son factorizaciones no

triviales, respectivamente. Los enteros 22 y 33 son $\tau_{(5)}$ -irreducibles, porque dichas factorizaciones no son $\tau_{(5)}$ -factorizaciones, dado que $5 \nmid 2 - 11$ y $5 \nmid 3 - 11$.

- La τ -factorización prima: es una τ -factorización en la que todos sus factores son primos. Por ejemplo, $2 * 2 * 3 * 3 * 7$ es una $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorización prima de 252, mas $2 * 2 * 3 * 21$ no lo es, pues 21 no es un primo. Este tipo de τ -factorización en \mathbb{Z} es el que se estudia desde la escuela elemental con la teoría de números. Respecto a ello, el Teorema Fundamental de la Aritmética implica que todo número $x \in \mathbb{Z}^\#$ posee una $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorización, la cual es la $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorización de mayor longitud de x . Si P es el conjunto de todos los primos en D , entonces este tipo de factorización en [1] se denotaba por τ_P -factorización donde $\tau_P = P \times P$. Además, estas son las factorizaciones que caracterizan a los UFD's.
- La τ -factorización τ -prima: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos τ -primos. Se considera a x un elemento τ -primo, si $x|x_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, cuando $x|\lambda \cdot x_1 * * * x_n$ (una τ -factorización). Definido por primera vez por Anderson y Frazier en [1], pero no fue hasta 2014 en [14] que se demostró formalmente que tales τ -factorizaciones son únicas, si existen (no necesariamente un elemento tiene τ -factorización en τ -primos).
- La τ -factorización prima potencial: es una τ -factorización en la que cada uno de sus factores es potencia de un primo. Por ejemplo, $2^4 * 3^4 * 7^2$ es una $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorización $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -prima potencial de 63504. Pero $48 * 3^3 * 7^2$ no es, porque 48 no es potencia de algún primo. El Teorema Fundamental de la Aritmética afirma que todo número $x \in \mathbb{Z}^\#$ posee una $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorización $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -prima potencial.
- La τ -factorización homogénea: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos homogéneos. En [2], se considera a x homogéneo si $y_1, y_2|x$ e $(y_1, y_2)_v = D$ (recordar que D es el dominio con integridad) implican que y_1 o y_2 es unidad de D . Por ejemplo, en [2] se describe que para $D = K_1 + xK_2[x]$ donde $K_1 \subsetneq K_2$ es un campo extendido con $[K_2 : K_1] < \infty$, el elemento x^2 es homogéneo pues es primario, pero no primo o irreducible (ya que x es primo). Por ende, $x^2 * x^2$ es una

τ_D -factorización homogénea.

- La τ -factorización fuertemente homogénea: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos fuertemente homogéneos. En [2], se considera a x τ -fuertemente homogéneo si $y_1, y_2|x$ e $[y_1, y_2] = 1$ (recordar que D es el dominio con integridad) implican que y_1 o y_2 es unidad de D . Considerando el ejemplo anterior, en [2] se describe que x^2 no es un elemento fuertemente homogéneo, pues aunque $x, lx|x^2$ para cada $l \in K_2 - \{0_{K_2}\}$, $[x, lx] = 1$ para $l \in K_2 - K_1$. Por ende, cualquier τ_D -factorización que tiene a x^2 como factor no es fuertemente homogénea. Por otro lado, si se considera a $D = \mathbb{Z}_{(p)} + (x, y)\mathbb{Q}[x, y]$ donde p es primo, el elemento xy es fuertemente homogéneo. Por ende, $(xy) * (xy)$ es una $\tau_{D^\#}$ -factorización fuertemente homogénea.
- La τ -factorización primal: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos primales. En [8], se considera a $x \in D^\#$ un elemento primal si y solo si $x = yz$ implica que existen $x_1, x_2 \in D^\#$ tales que $x = x_1x_2$ donde $x_1|y$ y $x_2|z$. Por ejemplo, el elemento $x^2 \in D = K_1 + xK_2[x]$ claramente es primal bajo la multiplicación usual. Por ende, la factorización $x^2 * x^2$ es una factorización primal.
- La τ -factorización completamente primal: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos completamente primales. En [8], se considera a $x \in D^\#$ un elemento completamente primal si y solo si cada factor $y \in D^\#$ de x es primal. Todo elemento completamente primal es primal.
- La τ -factorización primaria: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos primarios. En [5], se considera a x un elemento primario si genera un ideal primario (es decir, si (x) es un ideal primario). Por ejemplo, si p_1, p_2, \dots, p_k son primos y $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $p_1^{n_1} * p_2^{n_2} * \dots * p_k^{n_k}$ es una $\tau_{\mathbb{Z}}$ -factorización primaria pues según Coleman y Zwald en [9], (0) y (p^i) donde p es primo e $i > 0$, son ideales primarios en \mathbb{Z} . Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, esto implica que todo entero distinto de cero y de unidad posee una τ -factorización primaria. Un ejemplo de $\tau_{\mathbb{Z}}$ -factorización no primaria es $75 * 4 * 27$, pues a pesar de que 4 y 27

son potencias de primos (y por ende, elementos primarios), 75 no es un elemento primario porque no es potencia de primos (lo que implica que no genera un ideal primario).

- La τ -factorización *packet*: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos packet. En [20], se considera a x un elemento packet, si \sqrt{x} es un elemento primo, es decir que solo hay un primo minimal sobre (x) . Por ejemplo, $16 * 25$ es una $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorización packet de 400 pues $\sqrt{(16)} = (2)$ y $\sqrt{(25)} = (5)$. Como los ideales (2) y (5) son generados por primos, son ideales primos. Pero $4 * 10 * 10$ no lo es porque $\sqrt{(10)}$ no es ideal primo. Lo interesante de estos elementos es que en dominios con integridad con GCD, proveen representación única y todo elemento se puede expresar como producto de packets.
- La τ -factorización *t-pura*: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos t-puros. En [2], se considera a x un elemento t-puro si x está contenido en un único t-ideal maximal. Un ideal I es llamado t-ideal si $I = \cup\{J_v : 0 \neq J \subseteq I \text{ es un ideal finitamente generado}\}$ donde $J_v = (J^{-1})^{-1}$, y un t-ideal maximal es un ideal maximal propio en el conjunto de t-ideales. Todo elemento en $D^\#$ en un “Valuation Domain” D es t-puro.
- La τ -factorización *rígida*: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos rígidos. En [20], se considera a $x \in D^\#$ un elemento rígido si y solo si $a, b|x \implies a|b$ o $b|a$. En [2], todo elemento en $D^\#$ en un “Valuation Domain” D es rígido.
- La τ -factorización *“prime quanta”*: es una τ -factorización en la que todos sus factores son elementos “prime quanta”. En [2], se considera a x un elemento “prime quanta” si satisface Q_1 : Para todo elemento no unidad $r|x$, existe un número natural n con $x|r^n$, Q_2 : Para todo número natural n , si $r|x^n$ y $s|x^n$, entonces $r|s$ o $s|r$, y Q_3 : Para todo número natural n , cada elemento t con $t|x$ tiene la propiedad que si $t|ab$, entonces $t = t_1t_2$ donde $t_1|a$ y $t_2|b$. El elemento es el resultado de la combinación de varias propiedades que generan los “Generalized Unique Factorization Domains”,

que son un poco más débiles que los UFD's.

En este capítulo se generaliza el concepto de una τ -factorización aplicado a tipos de τ -factorización como las descritas anteriormente. Además, se define y se exponen algunas propiedades del grafo de τ -factores que resulte de este estudio localizado.

3.1. Definición de una τ^α -factorización

La teoría de τ -factorizaciones considera en su estudio a todos los τ -factores de un elemento de $D^\#$. No obstante, tipos de factorizaciones como las anteriores requieren de un estudio localizado para obtener resultados más concretos o particulares. Los factores de cualquier tipo de τ -factorización siempre son elementos de $D^\#$. En el caso de las τ -factorizaciones que son estudiadas según la naturaleza de sus factores, dichos factores pertenecen a un determinado subconjunto de $D^\#$. En este trabajo se propone estudiar los tipos de τ -factorizaciones considerando una subrelación de τ localizada en el subconjunto provisto.

Definición 3.1.1. *Sea $\mathcal{P}(D^\#)$ es el conjunto potencia de $D^\#$ y $\alpha \in \mathcal{P}(D^\#)$. Se dice que $a\tau^\alpha b$ si y solo si $a\tau b$ donde $a, b \in \alpha$.*

Por su definición, si $a\tau^\alpha b$, entonces $a\tau b$. Se puede ver la relación τ^α como una relación en $D^\#$ tal que $\tau^\alpha = \tau|_\alpha$. Si $\alpha = D^\#$, entonces $\tau = \tau^\alpha$. El siguiente teorema muestra la comparación entre τ^α y τ con respecto a sus características como relaciones de conjuntos.

Proposición 3.1.2. *Sean τ una relación simétrica sobre $D^\#$ y $\alpha \in \mathcal{P}(D^\#)$. Entonces los siguientes anunciados se satisfacen.*

- (i) *La relación τ^α es simétrica.*
- (ii) *Si τ divisiva y α cerrado bajo factores, entonces τ^α divisiva.*
- (iii) *Si τ preserva asociados y α cerrado bajo conjugados, entonces τ^α preserva asociados.*
- (iv) *Si τ refinable, entonces τ^α refinable.*

(v) Si τ combinable y α cerrado multiplicativamente, entonces τ^α combinable.

Demostración. (i) Si $x\tau^\alpha y$, entonces $x, y \in \alpha$ y $x\tau y$. Como τ es simétrica, $y\tau x$. Por lo tanto, $y\tau^\alpha x$.

(ii) Suponer que τ divisiva y que α es cerrado bajo factores. Suponer que $x\tau^\alpha y$ y $x_1|x$. Como $x\tau^\alpha y$, entonces $(x, y) \in \tau$ y $x, y \in \alpha$. Dado que $x \in \alpha$ y α es cerrado bajo factores, entonces $x_1 \in \alpha$. Como τ es divisiva, entonces $x_1\tau y$. Por ende, $x_1\tau^\alpha y$ y τ^α es divisiva.

(iii) Suponer que τ preserva asociados y α cerrado bajo conjugados. Suponer que $x\tau^\alpha y$. Entonces $x, y \in \alpha, x_1 \sim x$, y $x_1\tau y$ (pues τ preserva asociados). Como α es cerrado bajo conjugados y $x \in \alpha$, entonces $x_1 \in \alpha$. Por ende, $x_1\tau^\alpha y$. Por lo tanto, τ^α preserva asociados.

(iv) Suponer que τ es refinable. Sean $x = \lambda_1 \cdot x_1 * * * x_n$ y $x_i = \lambda_2 \cdot y_1 * * * y_m$ para algún x_i ambas τ^α -factorizaciones. Claramente, ambas son τ -factorizaciones de elementos en α . Por ende

$$x = \lambda \cdot x_1 * * * x_{i-1} * y_1 * * * y_m * x_{i+1} * * * x_n$$

es una τ -factorización de elementos de α . Es decir, es una τ^α -factorización. Por lo tanto, τ^α es refinable.

(v) Suponer que τ es combinable y α es un conjunto cerrado bajo la multiplicación. Sea una τ^α -factorización de $x = \lambda \cdot x_1 * * * x_n$ (claramente τ -factorización). Esto implica que $x_1, \dots, x_n \in \alpha$ y

$$x = \lambda \cdot x_1 \cdots x_{i-1} \cdot (x_i \cdot x_{i+1}) \cdot x_{i+2} \cdots x_n$$

es τ -factorización, pues τ es combinable. Como α es un conjunto cerrado multiplicativamente, entonces $x_i \cdot x_{i+1} \in \alpha$. Esto implica que

$$x = \lambda \cdot x_1 \cdots x_{i-1} \cdot (x_i \cdot x_{i+1}) \cdot x_{i+2} \cdots x_n$$

es τ^α -factorización. Por lo tanto, τ^α es combinable. □

En los siguientes ejemplos se comprueba que no siempre que τ es multiplicativa implica que τ^α lo sea en general. Considerar la relación simétrica $\tau = \emptyset$, es una relación multiplicativa (vagamente, pues no hay nada que verificar). Esto implica que para cualquier $\alpha \subseteq D^\#$, $\tau^\alpha = \emptyset$, la cual es multiplicativa. Por otro lado, considerar $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ y $\alpha = \{2\}$. A pesar de que $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ es multiplicativa y que $2\tau_{\mathbb{Z}^\#}2$, no se cumple que $2\tau_{\mathbb{Z}^\#}^\alpha(2 * 2) = 4$ pues $4 \notin \alpha$. Lo que implica que $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^\alpha$ no es multiplicativa ni combinable.

Por otro lado, la relación $\tau = \emptyset$ preserva asociados y esto implica que $\tau^\alpha = \emptyset$ preserva asociados para cualquier α . Si se consideran la relación simétrica $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ y $\alpha = \mathbb{Z}^+$. A pesar de que $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ preserva asociados, que $2 \sim -2$ y que $2\tau_{\mathbb{Z}^\#}^\alpha 2$, no se cumple que $2\tau_{\mathbb{Z}^\#}^\alpha - 2$ pues $-2 \notin \alpha$. Lo que implica que $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^\alpha$ no preserva asociados ni es divisiva.

Proposición 3.1.3. *Sean D un dominio con integridad y $\alpha, A \in \mathcal{P}(D^\#) - \{\emptyset\}$. Entonces $\tau_A^\alpha = \tau_A$ si y solo si $A \subseteq \alpha$.*

Demostración. Para esta demostración, considerar que $\tau_A^\alpha = \{(x, y) : (x, y \in A) \wedge (x, y \in \alpha)\} = \tau_A \cap \tau_\alpha$. Si $A \subseteq \alpha$, entonces $\tau_A \subseteq \tau_\alpha$. Por ende, $\tau_A^\alpha = \tau_A \cap \tau_\alpha = \tau_A$. Por otro lado, suponer que $\tau_A^\alpha = \tau_A$. Como $\tau_A^\alpha = \tau_A \cap \tau_\alpha$, entonces $\tau_A \cap \tau_\alpha = \tau_A$ y $\tau_A \subseteq \tau_\alpha$. Como $A \neq \emptyset$, $\tau_A \neq \emptyset$. Sea $x \in A$, entonces $(x, x) \in \tau_A$. Por lo tanto, $(x, x) \in \tau_\alpha$, $x \in \alpha$ y $A \subseteq \alpha$. □

Si $A = \emptyset$ y $\tau_A^\alpha = \emptyset$, entonces $\tau_A^\alpha = \tau_A \subsetneq \tau_\alpha$. El siguiente teorema describe cómo esta nueva subrelación se comporta bajo operaciones de conjuntos.

Teorema 3.1.4. *Sean D un dominio con integridad y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(D^\#)$. Entonces*

$$(i) \quad \tau^\alpha \cup \tau^\beta \subseteq \tau^{\alpha \cup \beta}.$$

$$(ii) \quad \tau^\alpha \cap \tau^\beta = \tau^{\alpha \cap \beta}.$$

$$(iii) \quad \tau^\alpha - \tau^\beta \supseteq \tau^{\alpha - \beta}.$$

$$(iv) \quad (\tau^\alpha)^C \supseteq \tau^{(\alpha^C)}.$$

Demostración. Si $\alpha = \emptyset$, $\tau^\alpha = \emptyset$ y por ende, $\tau^\alpha \cup \tau^\beta = \tau^\beta = \tau^{\alpha \cup \beta}$, $\tau^\alpha \cap \tau^\beta = \emptyset = \tau^\emptyset = \tau^{\alpha \cap \beta}$, $\tau^\alpha - \tau^\beta = \emptyset = \tau^{\alpha - \beta}$, $D^\# = (\tau^\alpha)^c = \tau^{D^\#}$ y $\tau^\alpha \Delta \tau^\beta = \tau^\beta = \tau^{\alpha \Delta \beta}$. Si $\beta = \emptyset$ todo es similar, excepto $\tau^\alpha - \tau^\beta = \tau^\alpha - \emptyset = \tau^\alpha = \tau^{\alpha - \beta}$. Suponer que $\alpha, \beta \neq \emptyset$.

- (i) Suponer que $(x, y) \in \tau^\alpha \cup \tau^\beta$. Esto implica que (x, y) está en τ^α o τ^β . Sin pérdida de generalidad, suponer que $(x, y) \in \tau^\alpha$. Por la Definición 3.1.1., $x, y \in \alpha$, así como $x\tau y$. Por ende, $x, y \in \alpha \cup \beta$ y $(x, y) \in \tau^{\alpha \cup \beta}$. Por lo tanto, $\tau^\alpha \cup \tau^\beta \subseteq \tau^{\alpha \cup \beta}$.
- (ii) Suponer que $(x, y) \in \tau^\alpha \cap \tau^\beta$. Por la definición de intersección, $(x, y) \in \tau^\alpha$ y $(x, y) \in \tau^\beta$. Entonces $x, y \in \alpha \cap \beta$ y $x\tau y$. Por la Definición 3.1.1. que $(x, y) \in \tau^{\alpha \cap \beta}$, por ende $\tau^\alpha \cap \tau^\beta \subseteq \tau^{\alpha \cap \beta}$. Por otro lado, si $(x, y) \in \tau^{\alpha \cap \beta}$, entonces $x, y \in \alpha \cap \beta$ y $x\tau y$. Esto es $x, y \in \alpha$ y $x, y \in \beta$. Por ende, $(x, y) \in \tau^\alpha \cap \tau^\beta$ y $\tau^\alpha \cap \tau^\beta \supseteq \tau^{\alpha \cap \beta}$. Por lo tanto, $\tau^\alpha \cap \tau^\beta = \tau^{\alpha \cap \beta}$.
- (iii) Suponer que $(x, y) \in \tau^{\alpha - \beta}$, entonces $x, y \in \alpha - \beta$ y $x\tau y$. Por ende, $x, y \in \alpha$ pero $x, y \notin \beta$. O sea, $(x, y) \in \tau^\alpha - \tau^\beta$. Por lo tanto, $\tau^\alpha - \tau^\beta \supseteq \tau^{\alpha - \beta}$.
- (iv) Notar que $(\tau^\alpha)^C = D^\# \times D^\# - \tau^\alpha = (\tau^{D^\#})^C \cup \tau^{D^\#} - \tau^\alpha$ y $\tau^{(\alpha^C)} = \tau^{D^\# - \alpha}$. Si $(a, b) \in \tau^{(\alpha^C)}$, entonces $a\tau b$ y $a, b \in D^\# - \alpha$. Esto implica que $a, b \notin \alpha$, y entonces $(a, b) \in \tau^{D^\#} - \tau^\alpha$. Por ende, $(a, b) \in (\tau^\alpha)^C$ y $(\tau^\alpha)^C \supseteq \tau^{(\alpha^C)}$.

□

Dado que τ^α es una relación simétrica, es posible hablar de conceptos como τ^α -factorización o τ^α -grafo, los cuales son adaptados a dicha subrelación. Es por eso que en lo que resta de esta sección, se hace un estudio de la definición y propiedades de las τ^α -factorizaciones.

Definición 3.1.5. *Se dice que $x = \lambda \cdot x_1 * * * x_n$ es τ^α -factorización de x si y solo si $x_i \tau^\alpha x_j$ para todo i, j con $1 \leq i, j \leq n$.*

Si $\alpha = D^\#$, entonces los conceptos de τ^α -factorización y τ -factorización son equivalentes. Por ende, y para efectos de simplicidad, se utiliza la notación τ para representar a $\tau^{D^\#}$. De modo que toda la teoría de τ -factorizaciones y lo estudiado en el Capítulo 2

de esta investigación es aplicable a las τ^α -factorizaciones. A continuación se discuten dos componentes de la teoría de τ -factorizaciones, ahora aplicados a las τ^α -factorizaciones.

El primer componente: los sistemas de factorización Γ . De forma similar que en la Sección 1.1. en este trabajo, se denota al conjunto de factorizaciones en $D^\#$ por $fact(D^\#)$, al conjunto de τ^α -factorizaciones (para un α determinado) en $D^\#$ por $\tau^\alpha\text{-}fact(D^\#)$, y al conjunto de τ^α -factorizaciones de un elemento $x \in D^\#$ por $\tau^\alpha\text{-}fact(x)$. Para efectos de ilustración, si se considera a p un número primo con $\tau = \tau_{Z^\#}$ y $\alpha = D^\#$, entonces

$$\tau_{Z^\#}^{D^\#}\text{-}fact(2p) = \{2 * p, (-2) * (-p), (-1) \cdot 2 * (-p), (-1) \cdot (-2) * p\}.$$

Es necesario enfatizar que no todo sistema de factorización Γ es un conjunto de τ -factorizaciones, pues τ (en el contexto de este trabajo) es una relación simétrica y no todo Γ está regido por una relación simétrica. Juett en [13] utilizó los sistemas de factorización Γ con el objetivo de resumir los tipos de factorización sobre monoides. La ventaja de utilizar τ^α es la manipulación para seleccionar el conjunto de τ^α -factorizaciones de x que está dentro del sistema de factorización que representa a $\tau\text{-}fact(x)$, conforme a la aleatoriedad que se le da a α . En otras palabras, τ^α responde a dos preguntas independientes acerca de los factores que Γ y τ no responden de manera específica. Estas preguntas son: ¿qué elementos se relacionan? y ¿cómo los elementos se relacionan?

Más aún, el uso de τ^α permite la creación de subconjuntos del sistema Γ sin crear o definir más de un tipo de sistemas. No obstante, si se consideran a $\tau_1^{\alpha_1}$ y $\tau_2^{\alpha_2}$ posiblemente distintos operando sobre $D^\#$, entonces podría definirse el sistema Γ que representa a $\tau_1^{\alpha_1}\text{-}fact(D^\#)$ (respectivamente, a $\tau_2^{\alpha_2}\text{-}fact(D^\#)$) y denotarse por Γ_1 (respectivamente, por Γ_2). La estructura de notación dada en [13] para los sistemas Γ se conserva.

El segundo componente: la comparación entre dos relaciones $\tau_1^{\alpha_1}$ y $\tau_2^{\alpha_2}$. Aplicando τ^α a lo discutido de este componente en la Sección 1.1., se obtiene que $\tau_1^{\alpha_1} \leq \tau_2^{\alpha_2}$ si y solo si toda $\tau_1^{\alpha_1}$ -factorización es una $\tau_2^{\alpha_2}$ -factorización, o equivalentemente,

$$\tau_1^{\alpha_1} \leq \tau_2^{\alpha_2} \iff \tau_1^{\alpha_1}\text{-}fact(D^\#) \subseteq \tau_2^{\alpha_2}\text{-}fact(D^\#).$$

De igual manera se obtiene que $\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \implies \tau^{\alpha_1} \leq \tau^{\alpha_2}$. De esto sale que $\tau^\alpha \leq \tau = \tau^{D^\#}$ para cualquier α , ya que $\alpha \subseteq D^\#$. Para efectos de ilustración de esto, considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.6. *Los τ -primos son τ -irreducibles. Si x es τ -primo y se supone que x no sea τ -irreducible, entonces existe la τ -factorización no trivial $\lambda \cdot x_1 *** x_k = x$. Esto implica por definición de τ -primo que $x | x_i$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$, por ende $x_1 *** x_{i-1} * x_{i+1} *** x_k = 1$. Entonces $\lambda \cdot x_1 *** x_k = \lambda \cdot x_i$ es una τ -factorización trivial de x , lo que implica que x es un τ -irreducible. Pero esto contradice que x no es τ -irreducible.*

A partir de lo anterior, se expone el siguiente par de implicaciones, denotando a $\tau(a)$ como el conjunto de elementos τ -irreducibles y a $\tau(p)$ como el conjunto de τ -primos

$$\tau^{\tau(p)}\text{-factorización} \implies \tau^{\tau(a)}\text{-factorización} \implies \tau\text{-factorización} \quad (3.1)$$

Esto es fácil de verificar. Si $\lambda \cdot x_1 *** x_n$ es una $\tau^{\tau(p)}$ -factorización, entonces x_1, \dots, x_n son τ -primos. Como los τ -primos son τ -irreducibles, entonces $\lambda \cdot x_1 *** x_n$ es una $\tau^{\tau(a)}$ -factorización. Por otro lado, si $\lambda \cdot x_1 *** x_n$ es una $\tau^{\tau(a)}$ -factorización, entonces x_1, \dots, x_n son τ -irreducibles, significando que cada uno de ellos no posee alguna τ -factorización no trivial.

Para efectos de ilustración, notar que particularmente en \mathbb{Z} , $p = \tau_{\mathbb{Z}^\#}(p)$ y $a = \tau_{\mathbb{Z}^\#}(a)$. Es por eso que $2 * 2 * 11$, que es $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p$ -factorización de 44, también es $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a$ -factorización de 44 pues 2 y 11 son $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -átomos. Más aún, todo primo es τ -primo y todo irreducible es τ -irreducible, según Anderson y Frazier. Esto implica que $p \subseteq \tau(p)$ y $a \subseteq \tau(a)$. Por ende, se concluye que

$$\tau^p \leq \tau^{\tau(p)} \leq \tau^{\tau(a)} \leq \tau^{D^\#} \quad (3.2)$$

$$\tau^p \leq \tau^a \leq \tau^{\tau(a)} \leq \tau^{D^\#} \quad (3.3)$$

La Figura 1 en [2] provee más relaciones de orden parcial entre subconjuntos especiales del dominio. A partir de estas relaciones de orden, se pueden denotar algunas cadenas de

comparación, como las siguientes.

$$\tau^p \leq \tau^{pp} \leq \tau^{pq} \leq \tau^{prim} \leq \tau^{pack} \leq \tau^{D\#} \quad (3.4)$$

$$\tau^{prim} \leq \tau^{t-puro} \leq \tau^h \leq \tau^{D\#} \quad (3.5)$$

$$\tau^{pq} \leq \tau^{cpr} \leq \tau^{pr} \leq \tau^{D\#} \quad (3.6)$$

$$\tau^{rig} \leq \tau^{sh} \leq \tau^h \leq \tau^{D\#} \quad (3.7)$$

3.2. Definición e ilustración del τ^α -grafo

En la sección anterior se estudió la aplicación de τ^α a las factorizaciones, generando el concepto de τ^α -factorizaciones. En esta nueva sección se estudia la aplicación de la relación τ^α a la teoría de τ -grafos, lo que genera el concepto de τ^α -grafo.

Definición 3.2.1. *Un τ^α -grafo de $x \in D^\#$ es un grafo definido de la forma $G_{\tau^\alpha}(x) = (V_{\tau^\alpha}(x), E_{\tau^\alpha}(x))$ donde $V_{\tau^\alpha}(x) = \{x_k : x_k |_{\tau^\alpha} x\}$ y $E_{\tau^\alpha}(x) = \{(x_1, x_2) : x = \lambda \cdot x_1 * x_2 * * * x_n \text{ } (\tau^\alpha\text{-factorización de } x)\}$.*

Considerar para efectos de ilustración de la Definición 1.2.3. al $\tau_{(5)}$ -grafo de 66, en este caso $\alpha = \mathbb{Z}^\#$. Como $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$, las $\tau_{(5)}$ -factorizaciones de 66 (salvo reorden y asociados) son $(-2) * 33, (-3) * 22$ y $6 * 11$. Por ende, el $\tau_{(5)}$ -grafo de 66 es el que se presenta en la Figura 3.1.

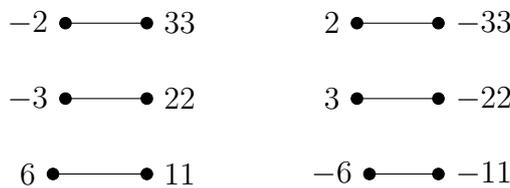


Figura 3.1: El grafo $G_{\tau_{(5)}^{\mathbb{Z}}}(66)$

Considerando el Ejemplo 2.1.2. y $\alpha = p$ (el conjunto de primos en $\mathbb{Z}^\#$), se obtiene que el conjunto de vértices $V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44) = \{\pm 2, \pm 11\}$ y el conjunto de aristas está dado por

$$E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44) = \{(2, 11), (2, -11), (-2, 11), (-2, -11), (2, -2), (2, 2), (-2, -2)\}.$$

Por ende, el $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p$ -grafo de 44 es el que se presenta en color rojo en la Figura 3.2. Lo representado en color gris es lo que aparece en $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}}(44)$ que no es parte del $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p$ -grafo de 44.

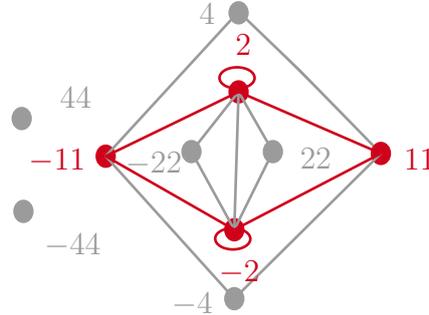


Figura 3.2: El grafo $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}}^p(44)$

La Figura 3.2 muestra que el τ^α -grafo funge como una especie de lente que solo muestra una parte del τ -grafo, parte que está determinada por α . A su vez, el τ^α permite estudiar los subgrafos que representan a x mediante el reconocimiento de sus elementos en τ^α -factorizaciones.

3.3. Contenencia entre τ^α -grafos

Basado en el estudio realizado en la Sección 3.1. sobre la comparación entre dos relaciones $\tau_1^{\alpha_1}$ y $\tau_2^{\alpha_2}$, así como su influencia en sus respectivos tipos de factorización, en esta sección se exponen resultados acerca de la contenencia entre sus respectivos grafos.

Teorema 3.3.1. Sean D un dominio, $D^\# = D - \{U(D) \cup \{0\}\}$, τ una relación simétrica sobre $D^\#$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}(D^\#)$. Si $\tau_1^{\alpha_1} \leq \tau_2^{\alpha_2}$, entonces $G_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) \subseteq G_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$ para todo $x \in D^\#$.

Demostración. Sea $x \in D^\#$ fijo y $x_i, x_j | x$ con $x_i, x_j \notin U(D)$. Si $\tau_1^{\alpha_1} \leq \tau_2^{\alpha_2}$, entonces toda $\tau_1^{\alpha_1}$ -factorización de x es una $\tau_2^{\alpha_2}$ -factorización de x . Si x_i es un factor en una $\tau_1^{\alpha_1}$ -factorización de x , entonces $x_i \in V_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$ y x_i es un factor en una $\tau_2^{\alpha_2}$ -factorización de x . Por ende, $V_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) \subseteq V_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$.

De igual forma si $\tau_1^{\alpha_1} \leq \tau_2^{\alpha_2}$, entonces la $\tau_1^{\alpha_1}$ -factorización $\lambda \cdot x_1 * * * x_m$ es una $\tau_2^{\alpha_2}$ -factorización de x . Dado que $(x_i, x_j) \in E_{\tau_1^{\alpha_1}}(x)$ con $1 \leq i, j \leq m$, entonces $(x_i, x_j) \in E_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$. Por ende, $E_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) \subseteq E_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$.

Dado que $V_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) \subseteq V_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$ y $E_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) \subseteq E_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$, entonces, por definición de contención de grafos, $G_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) \subseteq G_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)$ \square

La aplicación del teorema anterior permite establecer resultados de contención entre los τ^α -grafos definidos con los tipos de τ -factorización descritos en la introducción de este capítulo. Dado que estos tipos de τ -factorización son estudiados según la naturaleza de sus factores, para efectos de notación, se definen a continuación los subconjuntos de $D^\#$ a los cuales estos factores pertenecen. Sean p el conjunto de primos, a el conjunto de elementos irreducibles, pp el conjunto de potencias de primos, pq el conjunto de elementos prime quanta, $prim$ el conjunto de elementos primarios, $pack$ el conjunto de elementos packet, $t-puro$ el conjunto de elementos t-puro, h el conjunto de elementos homogéneos, cpr el conjunto de elementos completamente primales, pr el conjunto de elementos primales, y rig el conjunto de elementos rígidos.

A partir de estas definiciones, se establece en la siguiente tabla la relación τ^α para cada uno de dichos conjuntos.

Relación	Descripción
τ^a	Restricción de τ a elementos irreducibles en $D^\#$
$\tau^{\tau(a)}$	Restricción de τ a elementos τ -irreducibles en $D^\#$
τ^p	Restricción de τ a elementos primos en $D^\#$
$\tau^{\tau(p)}$	Restricción de τ a elementos τ -primos en $D^\#$
τ^{pp}	Restricción de τ a potencias de primos en $D^\#$
τ^{pq}	Restricción de τ a elementos prime quanta en $D^\#$
τ^{pack}	Restricción de τ a elementos packet en $D^\#$
τ^{prim}	Restricción de τ a elementos primarios en $D^\#$
τ^{t-puro}	Restricción de τ a elementos t-puro en $D^\#$
τ^h	Restricción de τ a elementos homogéneos en $D^\#$
τ^{sh}	Restricción de τ a fuertemente homogéneos en $D^\#$
τ^{pr}	Restricción de τ a elementos primales en $D^\#$
τ^{cpr}	Restricción de τ a elementos completamente primales en $D^\#$
τ^{rig}	Restricción de τ a elementos rígidos en $D^\#$

Cuadro 3.1: Descripción de los τ^α para los α 's descritos

Anderson en [2] estableció a través de la siguiente figura contenciones entre algunos de los α 's expuestos anteriormente.

Es así como en el siguiente corolario se presentan los siguientes resultados de contención entre los τ^α -grafos anteriores.

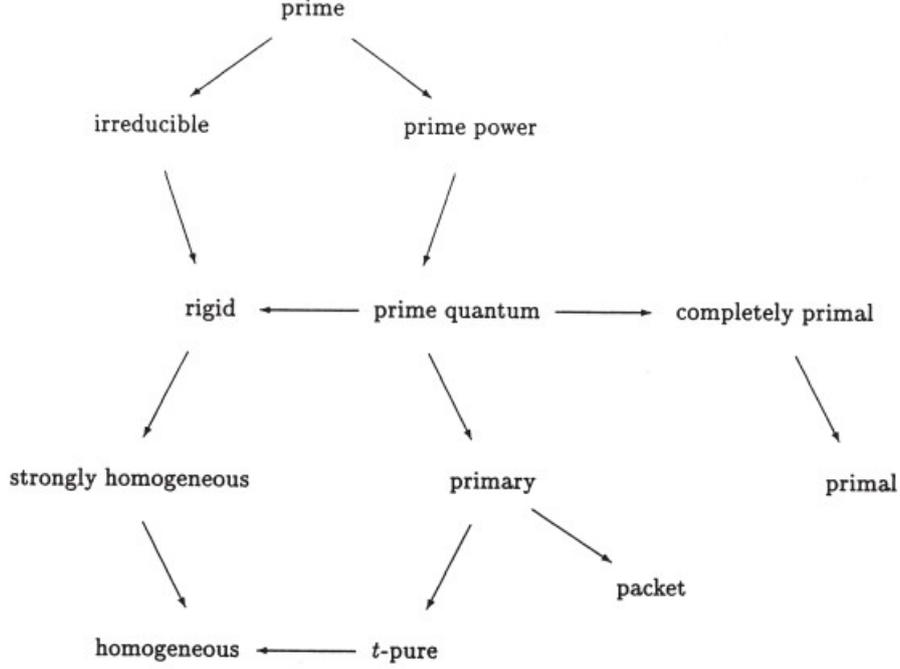


Figura 3.3: La Figura 1 en [2]

Corolario 3.3.1.1. Sea D un dominio, $D^\# = D - \{U(D) \cup \{0\}\}$ y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Sea $x \in D^\#$. Entonces

- (i) $G_{\tau^p}(x) \subseteq G_{\tau^a}(x) \subseteq G_\tau(x)$. Si D es UFD, entonces $G_{\tau^p}(x) = G_{\tau^a}(x)$.
- (ii) $G_{\tau^p}(x) \subseteq G_{\tau^{pp}}(x) \subseteq G_{\tau^{pq}}(x) \subseteq G_{\tau^{prim}}(x) \subseteq G_{\tau^{pack}}(x) \subseteq G_\tau(x)$.
- (iii) $G_{\tau^{prim}}(x) \subseteq G_{\tau^{t-puro}}(x) \subseteq G_{\tau^h}(x) \subseteq G_\tau(x)$.
- (iv) $G_{\tau^{pq}}(x) \subseteq G_{\tau^{cpr}}(x) \subseteq G_{\tau^{pr}}(x) \subseteq G_\tau(x)$.
- (v) $G_{\tau^{pq}}(x) \subseteq G_{\tau^{rig}}(x) \subseteq G_\tau(x)$.

Demostración. Sean p_x el conjunto de τ -factores primos de x y a_x el conjunto de τ -factores irreducibles de x . Claramente $p_x, a_x \in \mathcal{P}(D^\#)$. Si $p_x = a_x$, entonces $p_x \subseteq a_x$ y $a_x \subseteq p_x$. Como $p_x, a_x \in \mathcal{P}(D^\#)$, entonces $\tau^{p_x} \leq \tau^{a_x}$ y $\tau^{a_x} \leq \tau^{p_x}$. Por el Teorema 3.3.1., esto implica que $G_{\tau^{p_x}}(x) \subseteq G_{\tau^{a_x}}(x)$ y $G_{\tau^{a_x}}(x) \subseteq G_{\tau^{p_x}}(x)$. Por ende, $G_{\tau^{p_x}}(x) = G_{\tau^{a_x}}(x)$. Esto justifica la primera contención y el asunto de cuando D es UFD. El resto de los resultados de este corolario se obtienen directamente por el Teorema 3.3.1. y las relaciones de orden en (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7). \square

Ejemplo 3.3.2. Considerar el dominio D y la relación ∂ del Ejemplo 2.1.3. Notar que $(x^2) * (y^2)$ no es ∂^α -factorización de $(xy)^2$, pues x^2 no es ∂ -átomo. Más aún, $(xy) * (xy)$ no es ∂^α -factorización de $(xy)^2$ dado que (xy) puede ∂ -factorizar como $x * y$. No obstante x, y son primos e irreducibles, lo que implica que $x * x * y * y$ es una ∂^p y ∂^a -factorización. Todo lo anterior en este párrafo implica que $V_{\partial^p}((xy)^2) = V_{\partial^a}((xy)^2) = \{\lambda \cdot x, \mu \cdot y\}$ con $\lambda, \mu \in U(D)$. Se definen los conjuntos $\overline{V_{\partial^p}((xy)^2)} = \overline{V_{\partial^a}((xy)^2)} = \{x, y\}$. Dado que los ∂^α -grafos son un poco grandes, en la Figura 3.4 se muestra el comportamiento de los ∂^α -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ en $1 \in U(D)$, tomando en cuenta que los ∂^α -grafos de $(xy)^2$ cumplen la misma cadena de contenencias que es esperada conforme a la cadena de comparaciones de (3.2). En dicha figura, se puede observar que el $\overline{G_{\partial^p}((xy)^2)}^1 = \overline{G_{\partial^a}((xy)^2)}^1$.

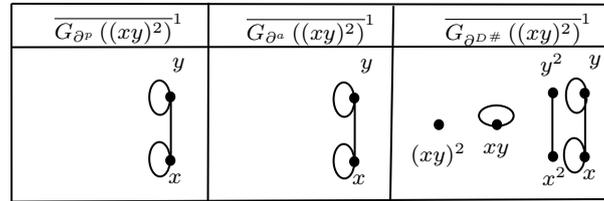


Figura 3.4: Los ∂^α -grafos de $(xy)^2$ salvo asociados de $(xy)^2$ con $\alpha \in \{p, a, D^\#\}$

En la siguiente sección, se provee una definición que intenta expandir este asunto.

Ejemplo 3.3.3. Sea $D = \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{R}[x]$, este es un subanillo conmutativo con $1_R \neq 0_R$ sin divisores de cero. Este es el anillo de polinomios con coeficientes racionales. Notar que para cualesquiera $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, por la conmutatividad en \mathbb{R} se cumple que $(q_1 + x \cdot (r_1x))(q_2 + x \cdot (r_2x)) = q_1q_2 + q_1(x \cdot (r_2x)) + q_2(x \cdot (r_1x)) + (x \cdot (r_1x))(x \cdot (r_2x)) = q_2q_1 + q_2(x \cdot (r_1x)) + q_1(x \cdot (r_2x)) + (x \cdot (r_2x))(x \cdot (r_1x)) = (q_2 + x \cdot (r_2x))(q_1 + x \cdot (r_1x))$. Por ende, D es conmutativo. En adición, $1 = 1 + x \cdot (0x) \in U(D)$ pues $1 \cdot (q_1 + x \cdot (r_1x)) = q_1 + x \cdot (r_1x) = (q_1 + x \cdot (r_1x)) \cdot 1$, por lo que D es un dominio. D no tiene divisores de cero pues si los tuviera, también $\mathbb{R}[x]$. Por lo tanto, D es un dominio con integridad.

Considerando a $2x^2 \in D^\#$ y la relación simétrica $\tau_{D^\#}$ (es decir, la relación que opera en la multiplicación usual de elementos en $D^\#$), se tiene que x es uno de los factores de $2x^2$ bajo la factorización $2x^2 = x \cdot (2x)$. Es claro que x es un elemento irreducible, pero a pesar de que $x \mid 2x^2 = (\sqrt{2}x)^2$, $x \nmid \sqrt{2}x$ pues $\frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Por ende, x no es primo. Esto implica que $x \in V_{\tau_{D^\#}^a}(2x^2)$ y $x \notin V_{\tau_{D^\#}^p}(2x^2)$. Entonces $x \in V_{\tau_{D^\#}^p}(2x^2) \subsetneq x \in V_{\tau_{D^\#}^a}(2x^2)$, y

Por lo tanto, $x \in G_{\tau_{D^\#}^p}(2x^2) \subsetneq x \in G_{\tau_{D^\#}^a}(2x^2)$.

Este es un ejemplo donde para algunos elementos $y \in D^\#$, $G_{\tau^a}(y) \subseteq G_{\tau^p}(y)$ no siempre se cumple. Dado que todo elemento primo es irreducible, Hungerford en la Observación de la Definición 3.5. en [12] expresa todo elemento irreducible es primo en un UFD. Esto implica que para encontrar elementos irreducibles que no sean primos, y así encontrar ejemplos de x en donde $G_{\tau^p}(y) \subsetneq G_{\tau^a}(y)$, el dominio no debe ser UFD.

Por otro lado, D satisface las condiciones suficientes del Teorema 2.9. en [3], lo que implica que D es un dominio atómico. Esto significa que todo elemento distinto de cero en este dominio tiene una factorización de elementos irreducibles. Por ende, se cumple para cualquier $y \in D^\#$ que $E_{\tau_{D^\#}^a}(y) \neq \emptyset$. Esto no solamente ocurre en dominios de la forma $K_1 + XK_2[X]$, donde K_1 es subcampo de K_2 , sino que en cualquier dominio que sea atómico.

Capítulo 4

El $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafo

La definición del τ^α -grafo salvo asociado en este trabajo coincide con la definición de τ -grafos que Ortiz-Albino ha trabajado con algunos de sus estudiantes (tal es el caso de López en [15]) si se considera a α como el conjunto de los elementos τ -irreducibles en $D^\#$. No obstante, en los grafos de Mooney y López una misma relación controla tanto el conjunto de vértices como de aristas. Por otro lado, se visualiza que una relación puede determinar los vértices mientras otra relación determina el conjunto de aristas. De ahí surge el concepto de $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafo, donde $\tau_1^{\alpha_1}$ identifica los $\tau_1^{\alpha_1}$ -factores de un x , y $\tau_2^{\alpha_2}$ determina cómo los $\tau_1^{\alpha_1}$ -factores se relacionan (si se relacionan).

Definición 4.0.1. Sean τ_1, τ_2 dos relaciones simétricas sobre $D^\#$, y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}(D^\#)$. Un $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafo de $x \in D^\#$ es un grafo definido de la forma

$$G_{\tau_1^{\alpha_1}-\tau_2^{\alpha_2}}(x) = (V_{\tau_1^{\alpha_1}}(x), E_{\tau_2^{\alpha_2}}(x)) \text{ donde } V_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) = \{y : y|_{\tau_1^{\alpha_1}}x\} \text{ y}$$

$$E_{\tau_2^{\alpha_2}}(x) = \{(y_1, y_2) : \text{existe } \tau_2^{\alpha_2}\text{-factorización de la forma } x = y_1 * y_2 * * * y_n\}.$$

Notar que esta definición es muy general, tal como en la teoría de τ_1 - τ_2 -factorizaciones en [6]. Es de esperarse que si τ_1 y τ_2 (respectivamente, α_1 y α_2) no tienen nada en común, puede ser que el grafo esté dado por un vértice o más sin aristas. Si $\tau_1 \leq \tau_2$ o $\tau_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$ (respectivamente, $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ o $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \emptyset$), entonces se pueden estudiar más propiedades. A lo largo de esta sección se presentan algunos ejemplos de la construcción de un $\tau_1^{\alpha_1}$ -

$\tau_2^{\alpha_2}$ -grafo a partir de la Definición 4.1.1.. En cada uno de estos ejemplos se analizan ciertos patrones (concernientes a grafos) que en la próxima sección son generalizados.

Ejemplo 4.0.2. Se pretende construir los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}$ - $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$. Notar que $\{\pm 2, \pm 11\} = V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44) = V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)$, pues esos cuatro enteros son los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p$ -factores y $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a$ -factores de 44 (lo que los convierte en primos y elementos irreducibles). Por la descripción de $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -fact(44) y dado que $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$, se obtiene que

$$\{(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \pm 11)\} = E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44) = E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)$$

Por lo tanto, los respectivos $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}$ - $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 son los presentados en la tabla de la Figura 4.1.

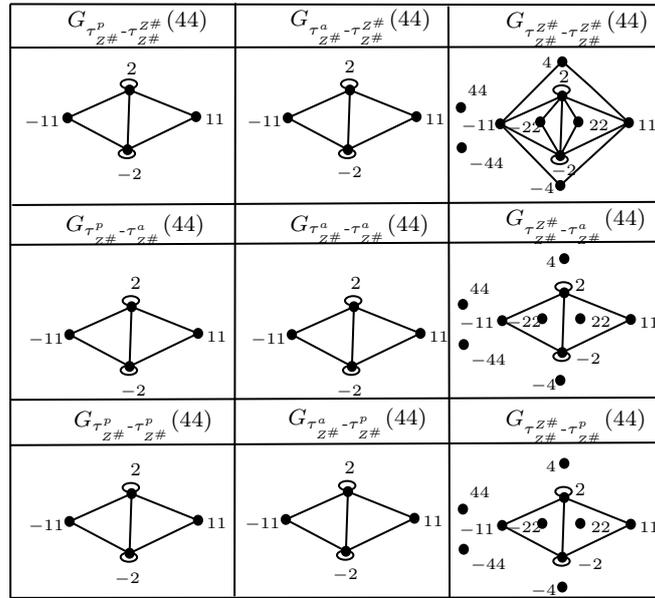


Figura 4.1: Los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}$ - $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$

Al hacer comparaciones entre los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}$ - $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 en cuestión, se concluye que las contencencias de grafos generalizadas en la forma $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44) \subseteq G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_3} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_4}}(44)$ con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{p, a, D^\#\}$ tales que $\alpha_1 \subseteq \alpha_3$ y $\alpha_2 \subseteq \alpha_4$, pueden apreciarse en la Figura 4.1. Estas contencencias son un hecho gracias a que $V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}}(44) \subseteq V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_3}}(44)$, pues $\alpha_1 \subseteq \alpha_3$, y a que $E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44) \subseteq E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_4}}(44)$, pues $\alpha_2 \subseteq \alpha_4$. Más aún, por las Definiciones 2.1.1., 3.2.1. y 4.1.1. se concluye que:

- $$\left(V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}}(44), E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44) \right) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1}}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44).$$

- $(V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44), E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44)) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44).$
- $(V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44), E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44).$

Por otro lado, los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1 \in \{p, a\}$ y $\alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$ son iguales. Esto es debido a que en \mathbb{Z} , $p = a$, lo que implica que $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a = \tau_{\mathbb{Z}^\#}^p$. De manera análoga, la igualdad $p = a$ implica que los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a\}$ sean iguales, como se ve en las primeras dos columnas de la Figura 4.2. Estas igualdades y contenencias entre los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -grafos, $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^\alpha$ -grafos y $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 son heredadas a sus respectivos grafos salvo asociados, tal como lo muestra la Figura 4.2.

$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)}$	$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44)}$	$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44)}$
$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44)}$	$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)}$	$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44)}$
$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44)}$	$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)}$	$\overline{G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)}$

Figura 4.2: Los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 salvo asociados con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$

Ejemplo 4.0.3. Considerar la relación \emptyset descrita en el Ejemplo 2.1 (2) de [1], y la relación $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ y el número 44. Entonces se procede a construir grafos de dos formas.

Primera forma. Considerar a $\tau_1 = \tau_{\mathbb{Z}^\#}$ y $\tau_2 = \emptyset$. Se conoce que el conjunto de vértices $V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}}(44) = \{\pm 2, \pm 4, \pm 11, \pm 22, \pm 44\}$. Es sencillo concluir que $E_{\emptyset}(44) = \emptyset$, así que cada $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \emptyset^{\alpha_2}$ -grafo de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$ está compuesto solamente por los vértices del $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafo de 44. Como p es el conjunto de todos los primos y a el conjunto de todos los elementos irreducibles, entonces $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p - \emptyset^{\alpha_2}}(44) \subseteq G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a - \emptyset^{\alpha_2}}(44) \subseteq G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \emptyset^{\alpha_2}}(44)$. En comparación con la Figura 4.2., todas las columnas cargan el mismo grafo.

Segunda forma. Considerar a $\tau_1 = \emptyset$ y $\tau_2 = \tau_{Z^\#}$. En este caso, y salvo asociados, $V_\emptyset(44) = \{\pm 44\}$ y $E_{\tau_{Z^\#}}(44)|_{V_\emptyset(44)} = \emptyset$. Por lo tanto, ± 44 son factores que representan a los vértices del \emptyset - $\tau_{Z^\#}$ -grafo de 44, sin ser adyacentes ni tener lazos. Por otro lado, dado que ± 44 no son \emptyset^p o \emptyset^a -factores de 44, entonces $G_{\emptyset^{Z^\#} \tau_{Z^\#}^{\alpha_2}}(44) = G_{\emptyset^{Z^\#} \tau_{Z^\#}}(44)$ con $\alpha_2 \in \{p, a\}$, y $G_{\emptyset^{\alpha_1} \tau_{Z^\#}^{\alpha_2}}(44) = G_{\emptyset^{\alpha_3} \tau_{Z^\#}^{\alpha_4}}(44) = \emptyset$ para $\alpha_1, \alpha_3 \in \{p, a\}$ y $\alpha_2, \alpha_4 \in \mathcal{P}(D^\#)$.

Ejemplo 4.0.4. Considerar la relaciones ∂ (citada en el Ejemplo 2.1.3.) y τ (definida en el Ejemplo 2.1.4.) operando sobre $D = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[z] / \langle z^2 + z + 1 \rangle [x, y]$. Entonces se procede a construir grafos de dos formas.

Primera forma. Considerar a $\tau_1 = \tau$ y $\tau_2 = \partial$. Claramente, si α_1 es fijo, entonces lo que puede cambiar entre los τ^{α_1} - ∂^{α_2} -grafos de $(xy)^2$ es el conjunto de aristas conforme a la descripción de ∂ , pues el conjunto de vértices de los τ^{α_1} - ∂^{α_2} -grafos de $(xy)^2$ es el mismo: el conjunto de vértices del τ^{α_1} -grafo de $(xy)^2$. Si α_2 es fijo, entonces el conjunto de vértices varía conforme a τ y el conjunto de aristas se mantiene conforme a ∂ . Todo lo anterior revela el comportamiento de los τ^{α_1} - ∂^{α_2} -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ cuando $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$, expuestos en la Figura 4.3.

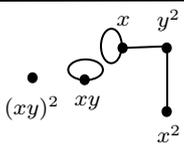
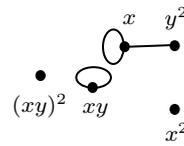
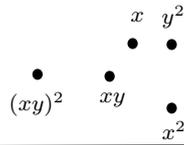
$\overline{G_{\tau^p - \partial}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\tau^a - \partial}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\tau - \partial}((xy)^2)}$
		
$\overline{G_{\tau^p - \partial^a}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\tau^a - \partial^a}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\tau - \partial^a}((xy)^2)}$
		
$\overline{G_{\tau^p - \partial^p}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\tau^a - \partial^p}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\tau - \partial^p}((xy)^2)}$
		

Figura 4.3: Los τ^{α_1} - ∂^{α_2} -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$

Segunda forma. Considerar a $\tau_1 = \partial$ y $\tau_2 = \tau$. Es claro ver que

$$\partial\text{-fact}((xy)^2) = \{(\lambda \cdot xy)^2, (\lambda \cdot xy) * (\mu \cdot xy), (\lambda \cdot x^2) * (\mu \cdot y^2), (\lambda \cdot x) * (\mu \cdot x) * (\nu \cdot y) * (\psi \cdot y)\}$$

donde $\lambda, \mu, \nu, \psi \in U(D)$. Entonces se puede obtener a $\overline{V_{\partial}((xy)^2)} = \{x, y, xy, x^2, y^2, (xy)^2\}$. Por ende, $E_{\tau}((xy)^2)|_{\overline{V_{\partial}((xy)^2)}} = \{(xy, xy), (x^2, y^2)\}$, $E_{\tau^a}((xy)^2)|_{\overline{V_{\partial}((xy)^2)}} = \{(xy, xy)\}$ y $E_{\tau^p}((xy)^2)|_{\overline{V_{\partial}((xy)^2)}} = \emptyset$. Claramente, $V_{\partial^p}((xy)^2) = \emptyset$. Por lo tanto, los $\partial^{\alpha_1 - \tau^{\alpha_2}}$ -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ cuando $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, \emptyset\}$ son los expuestos en la Figura 4.4.

$\overline{G_{\partial^p - \tau}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\partial^a - \tau}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\partial - \tau}((xy)^2)}$
	y \bullet x	y^2 y \bullet \bullet $(xy)^2$ xy \bullet x^2 x
$\overline{G_{\partial^p - \tau^a}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\partial^a - \tau^a}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\partial - \tau^a}((xy)^2)}$
	y \bullet x	y^2 y \bullet \bullet $(xy)^2$ xy \bullet x^2 x
$\overline{G_{\partial^p - \tau^p}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\partial^a - \tau^p}((xy)^2)}$	$\overline{G_{\partial - \tau^p}((xy)^2)}$
	y \bullet x	y^2 y \bullet \bullet $(xy)^2$ xy \bullet x^2 x

Figura 4.4: Los $\partial^{\alpha_1 - \tau^{\alpha_2}}$ -grafos salvo asociados de $(xy)^2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^{\#}\}$

Ejemplo 4.0.5. Considerar el dominio del Ejemplo 2.1.3. y la relación simétrica del Ejemplo 2.1.4.. Para construir a $G_{\tau - \tau}((xy)^2)$, el conjunto de vértices es $V_{\tau}((xy)^2) = \{\lambda(xy)^2, \lambda xy, \lambda x^2, \lambda y^2\}$ y el conjunto de aristas está determinado por $E_{\tau}((xy)^2) = \{(\lambda xy, \mu xy), (\lambda x^2, \mu y^2)\}$ $U(D)$. Dado que $|U(D)| = 3$, el $\tau - \tau$ -grafo de $(xy)^2$ posee 3 grafos salvo asociados que pueden ser descritos de la forma

$$\overline{G_{\tau - \tau}((xy)^2)}^{\lambda} \text{ donde } \overline{V_{\tau}((xy)^2)}^{\lambda} = \{\lambda(xy)^2, \lambda xy, \lambda x^2, \lambda y^2\}.$$

Además, la interconectividad de $G_{\tau - \tau}((xy)^2)$ está conformada por 6 aristas, las cuales en la Figura 4.5 se representan con color azul. En dicha figura se representa con color negro a $\overline{G_{\tau - \tau}((xy)^2)}^1$, con color rojo a $\overline{G_{\tau}((xy)^2)}^z$ y con color verde a $\overline{G_{\tau - \tau}((xy)^2)}^{z+1}$.

Al igual que en el Ejemplo 4.1.2., dado que en este ejemplo $\alpha_1 = \alpha_2 = D^{\#}$, este grafo puede recibir los nombres de $\tau - \tau$ -grafo de $(xy)^2$, τ -grafo de $(xy)^2$ o τ -grafo de $(xy)^2$. Lo cual indica la contención en ambas direcciones entre estos tres grafos que, por obvias

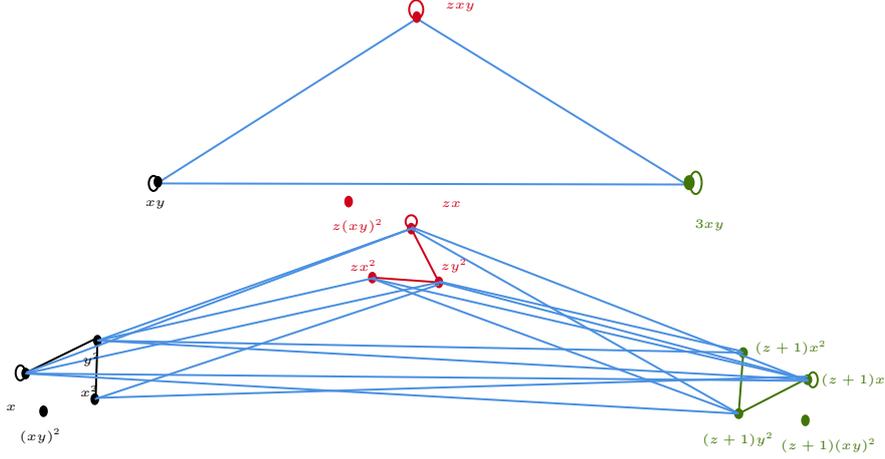


Figura 4.5: Los τ - τ -grafos salvo asociados de $(xy)^2$

razones, son iguales.

4.1. Contenencia entre $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafos

En los ejemplos de la sección anterior, se pudieron establecer resultados de contenencia entre los τ^{α_1} - τ^{α_2} -grafos. Esta nueva sección generaliza algunas de estas contenencias y describe propiedades específicas de contenencia que tienen validez gracias a las afirmaciones (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) en la Sección 3.1. De forma genérica, los resultados de continencia entre $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafos de x son expresados en el siguiente lema.

Lema 4.1.1. Sean D un dominio con integridad y $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ relaciones simétricas sobre $D^\#$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{P}(D^\#)$. Para $x \in D^\#$, si $\tau_1^{\alpha_1} \leq \tau_3^{\alpha_3}$ y $\tau_2^{\alpha_2} \leq \tau_4^{\alpha_4}$, entonces $G_{\tau_1^{\alpha_1}, \tau_2^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau_3^{\alpha_3}, \tau_4^{\alpha_4}}(x)$.

Demostración. Si $\tau_1^{\alpha_1} \leq \tau_3^{\alpha_3}$, entonces una τ^{α_1} -factorización es una τ^{α_3} -factorización. Esto implica que los factores de cualquier $\tau_1^{\alpha_1}$ -factorización de x son factores de una $\tau_3^{\alpha_3}$ -factorización de x . Consecuentemente, $V_{\tau_1^{\alpha_1}}(x) \subseteq V_{\tau_3^{\alpha_3}}(x)$. Si $\tau_2^{\alpha_2} \leq \tau_4^{\alpha_4}$, entonces, por el Teorema 3.3.1., $E_{\tau_2^{\alpha_2}}(x) \subseteq E_{\tau_4^{\alpha_4}}(x)$. Por la definición de subgrafo, el $\tau_1^{\alpha_1}$ - $\tau_2^{\alpha_2}$ -grafo es subgrafo del $\tau_3^{\alpha_3}$ - $\tau_4^{\alpha_4}$ -grafo. \square

En lo que resta de esta sección, se presentan propiedades de contenencia entre algunos τ^{α_1} - τ^{α_2} -grafos, conforme a cadenas de implicaciones entre tipos de factorización resumidas por Anderson, Mott y Zarfullah en la Figura 1 de [2]. Para referencia de los α considerados

en los siguientes corolarios, por favor véase la lista de símbolos en la Página XII o Página 44.

Corolario 4.1.1.1. Sean D un dominio con integridad, τ una relación simétrica sobre $D^\#$ y $x \in D^\#$. Para $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$ fijos, se tiene que

$$(i) \quad G_{\tau^{\alpha_1-\tau^p}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau^a}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau}}(x).$$

$$(ii) \quad G_{\tau^p-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^a-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau-\tau^{\alpha_2}}(x).$$

Demostración. Dado que $\tau^p \leq \tau^a \leq \tau$, por el Lema 4.1.1. los resultados (i) y (ii) son inmediatos. \square

El Corolario 4.1.1.1. habla de relaciones de contención de 9 grafos posiblemente distintos. El mismo puede ser expresado con la Figura 4.6. La simbología del diagrama expresa que $G_1 \rightarrow G_2$ es equivalente a decir que $G_1 \subseteq G_2$. El diagrama permite observar claramente resultados de contención entre $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafos de x (donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$) no descritos en el Corolario 4.1.1.1. por la transitividad de la contención. Por ejemplo, $G_{\tau-\tau^a}(x)$ no solamente está conteniendo a $G_{\tau-\tau^p}(x)$ y $G_{\tau^a-\tau^a}(x)$, sino que también a $G_{\tau^a-\tau^p}(x)$, $G_{\tau^p-\tau^p}(x)$ y $G_{\tau^p-\tau^a}(x)$. Por el diagrama, si $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, c, D^\#\}$, entonces $G_{\tau^p-\tau^p}(x)$ es el $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafo más pequeño de x y subgrafo de los 9 $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafos de x descritos. Mientras que $G_{\tau-\tau}(x)$ es el $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafo más grande y todos los $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafos de x son subgrafos de éste. Lo segundo es claro, pues $G_{\tau-\tau}(x) = G_\tau(x)$ y cualquier $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafo está contenido en este. Esto es lo que afirma el Corolario 4.1.1.2.

$$\begin{array}{ccccc}
 G_{\tau-\tau^p}(x) & \longrightarrow & G_{\tau-\tau^a}(x) & \longrightarrow & G_{\tau-\tau}(x) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 G_{\tau^a-\tau^p}(x) & \longrightarrow & G_{\tau^a-\tau^a}(x) & \longrightarrow & G_{\tau^a-\tau}(x) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 G_{\tau^p-\tau^p}(x) & \longrightarrow & G_{\tau^p-\tau^a}(x) & \longrightarrow & G_{\tau^p-\tau}(x)
 \end{array}$$

Figura 4.6: El diagrama de contención entre $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafos de x para $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, D^\#\}$

Corolario 4.1.1.2. Sean D un dominio con integridad, τ una relación simétrica sobre $D^\#$ y $x \in D^\#$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}(D^\#)$. Si $\alpha_1, \alpha_2 \subseteq \alpha$, entonces $G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}}(x) \subseteq G_{\tau^\alpha}(x)$.

Demostración. Si $\alpha_1, \alpha_2 \subseteq \alpha$, entonces $\tau^{\alpha_1}, \tau^{\alpha_2} \leq \tau^\alpha$. Por el Teorema 3.3.1., esto implica que $G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}}(x) \subseteq G_{\tau^\alpha}(x)$. Por otro lado, si $\alpha = D^\#$, para cualquier $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}(D^\#)$, $G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}}(x) \subseteq G_{\tau^\alpha}(x)$. \square

Corolario 4.1.1.3. *Sean D un dominio con integridad, τ una relación simétrica sobre $D^\#$ y $x \in D^\#$. Para $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, pp, pq, prim, pack, D^\#\}$ fijos, se tiene que*

$$(i) \quad G_{\tau^{\alpha_1-\tau^p}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{pp}}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{pq}}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{prim}}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{pack}}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau}}(x).$$

$$(ii) \quad G_{\tau^p-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^{pp}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^{pq}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^{prim}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^{pack}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau-\tau^{\alpha_2}}(x).$$

Demostración. Dado que $\tau^p \leq \tau^{pp} \leq \tau^{pq} \leq \tau^{prim} \leq \tau^{pack} \leq \tau$, por el Lema 4.2.1., los resultados (i) y (ii) son inmediatos. \square

Este corolario habla de relaciones de contención de 36 grafos posiblemente distintos. El mismo puede ser expresado con la Figura 4.7. La simbología del diagrama expresa que $G_1 \rightarrow G_2$ es equivalente a decir que $G_1 \subseteq G_2$. En este resultado, $G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}}$ es el $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafo más pequeño de los 36 representados.

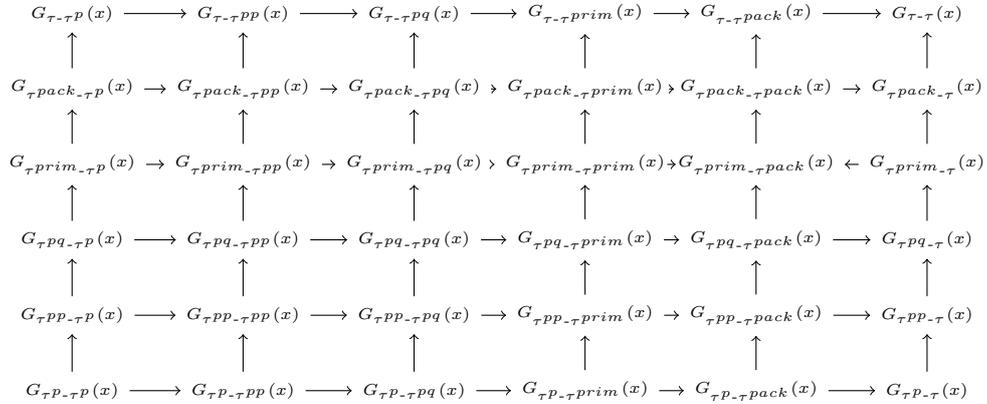


Figura 4.7: El diagrama de contención entre $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafos de x donde α_1 y α_2 pertenecen a $\{p, pp, pq, prim, pack, D^\#\}$

Corolario 4.1.1.4. *Sea D un dominio con integridad y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Sea $x \in D^\#$. Para $\alpha_1, \alpha_2 \in \{prim, t-puro, h, D^\#\}$ fijos, se tiene que*

$$(i) \quad G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{prim}}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau^{t-puro}}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau^h}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1-\tau}}(x).$$

$$(ii) \quad G_{\tau^{prim}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^{t-puro}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^h-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau-\tau^{\alpha_2}}(x).$$

Demostración. Dado que $\tau^{prim} \leq \tau^{t-puro} \leq \tau^h \leq \tau$, por el Lema 4.2.1., los resultados (i) y (ii) son inmediatos. \square

Este corolario habla de relaciones de contención de 16 grafos posiblemente distintos. El mismo puede ser expresado con la Figura 4.8. La simbología del diagrama expresa que $G_1 \rightarrow G_2$ es equivalente a decir que $G_1 \subseteq G_2$.

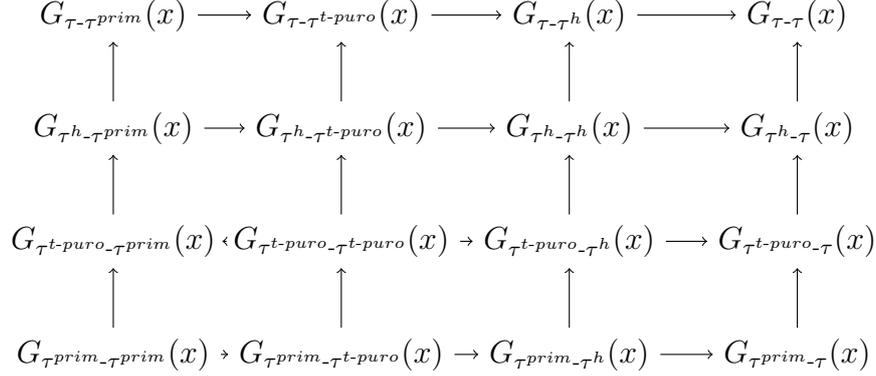


Figura 4.8: El diagrama de contención entre $\tau^{\alpha_1}-\tau^{\alpha_2}$ -grafos de x donde α_1 y α_2 pertenecen a $\{prim, t-puro, h, D^\#\}$

Corolario 4.1.1.5. Sea D un dominio con integridad, $x \in D^\#$ y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Para $\alpha_1, \alpha_2 \in \{pq, cpr, pr, D^\#\}$ fijos, se tiene que

$$(i) \quad G_{\tau^{\alpha_1}-\tau^{pq}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1}-\tau^{cpr}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1}-\tau^{pr}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1}-\tau}(x).$$

$$(ii) \quad G_{\tau^{pq}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^{cpr}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau^{pr}-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau-\tau^{\alpha_2}}(x).$$

Demostración. Dado que $\tau^{pq} \leq \tau^{cpr} \leq \tau^{pr} \leq \tau$, por el Lema 4.2.1., los resultados (i) y (ii) son inmediatos. \square

Este corolario habla de relaciones de contención de 16 grafos posiblemente distintos. El mismo puede ser expresado con la Figura 4.9. La simbología del diagrama expresa que $G_1 \rightarrow G_2$ es equivalente a decir que $G_1 \subseteq G_2$.

Corolario 4.1.1.6. Sea D un dominio con integridad y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Sea $x \in D^\#$. Para $\alpha_1, \alpha_2 \in \{rig, sh, h, D^\#\}$ fijos, se tiene que

$$(i) \quad G_{\tau^{\alpha_1}-\tau^{rig}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1}-\tau^{sh}}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1}-\tau^h}(x) \subseteq G_{\tau^{\alpha_1}-\tau}(x).$$

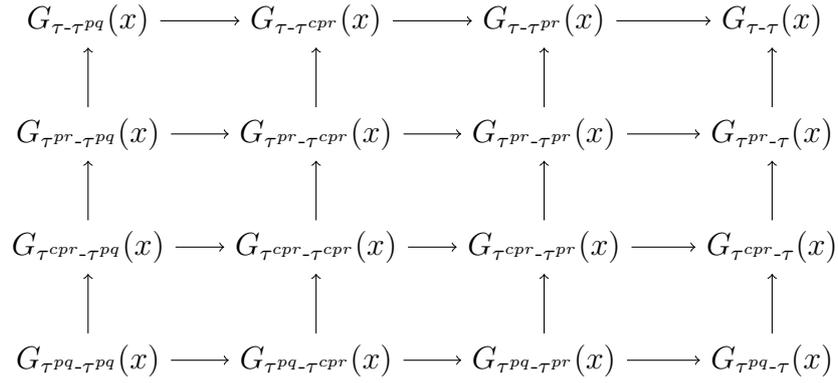


Figura 4.9: El diagrama de contención entre $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafos de x donde α_1, α_2 pertenecen a $\{pq, cpr, pr, D^\#\}$

$$(ii) \quad G_{\tau^{rig-\tau^{\alpha_2}}}(x) \subseteq G_{\tau^{sh-\tau^{\alpha_2}}}(x) \subseteq G_{\tau^h-\tau^{\alpha_2}}(x) \subseteq G_{\tau-\tau^{\alpha_2}}(x).$$

Demostración. Dado que $\tau^{rig} \leq \tau^{sh} \leq \tau^h \leq \tau$, por el Lema 4.2.1., los resultados (i) y (ii) son inmediatos. \square

Este corolario habla de relaciones de contención de 9 grafos posiblemente distintos. El mismo puede ser expresado con la Figura 4.10. La simbología del diagrama expresa que $G_1 \rightarrow G_2$ es equivalente a decir que $G_1 \subseteq G_2$.

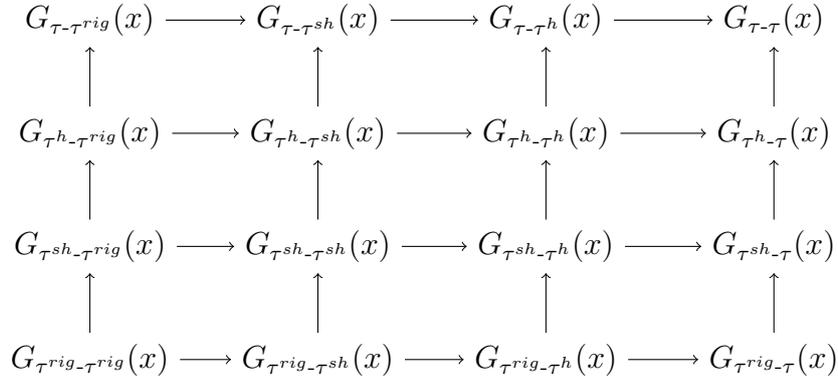


Figura 4.10: El diagrama de contención entre $\tau^{\alpha_1-\tau^{\alpha_2}}$ -grafos de x donde α_1, α_2 pertenecen a $\{rig, sh, h, D^\#\}$

Capítulo 5

Aportaciones y valoraciones finales

En este capítulo se presentan conclusiones fundamentales y una breve descripción de algunos posibles problemas de investigación para ser trabajados en el futuro.

5.1. Grafos de factorizaciones con propiedades especiales

Como se refirió en la introducción del Capítulo 3, los tipos de τ -factorización pueden clasificarse según la naturaleza que determina qué elementos se pueden multiplicar o según la naturaleza del conjunto de los factores. En dicho capítulo, se describieron algunos tipos de τ -factorizaciones que dependía de un conjunto dado de factores. Como por ejemplo, las τ -factorizaciones atómicas y τ -factorizaciones en τ -primos, las cuales se denotan como τ^α -factorizaciones y $\tau^{(p)}$ -factorizaciones, respectivamente.

Pero existen otras que no se pueden describir con la notación de τ^α -factorizaciones. Por ejemplo, las τ -factorizaciones completas, que son τ -factorizaciones que no tienen τ -refinamiento no trivial. Por ejemplo, $2 * 22$ no es una $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -completa de 44 ya que un $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -refinamiento de esa $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización es $2 * 2 * 11$ (que es $\tau_{\mathbb{Z}\#}^p$ -factorización de 44). No obstante, esta nueva $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización es una $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -factorización $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -completa de 44 pues no tiene $\tau_{\mathbb{Z}\#}$ -refinamiento no trivial debido a que sus factores son primos. Por otro lado, si τ es $\tau_{(7)}$ (la relación módulo 7 sobre \mathbb{Z}), entonces $44 = 4 * 11$ es una $\tau_{(7)}$ -factorización

completa, pues 4 no es $\tau_{(7)}$ -irreducible (porque $4 = 2 * 2$). Pero al reemplazar a 4 por $2 * 2$ en la $\tau_{(7)}$ -factorización $44 = 4 * 11 = 2 * 2 * 11$, no se obtiene una $\tau_{(7)}$ -factorización.

La relación τ^α permite que la primera categoría pueda estudiarse fácilmente tanto desde la teoría de factorizaciones generalizadas como desde la teoría de grafos de factores. No obstante, con la relación τ^α se pueden estudiar solo algunos tipos de factorizaciones. Para efectos de ilustración, considerando la τ -factorización completa, se puede notar que su definición no depende de un conjunto de τ -factores (es decir, no existe un conjunto de τ -factores completos en $D^\#$). Esto impide la existencia de un $\alpha \in \mathcal{P}(D^\#)$ pues, procurando construir un subconjunto de $D^\#$ que contenga a los factores que generan factorizaciones o τ -factorizaciones completas. Esto es porque el conjunto de factores de factorizaciones completas puede generar factorizaciones atómicas o que se pueden refinar de otro elemento. En dominios de factorización única (como el caso de \mathbb{Z}) esta posibilidad no ocurre, sin embargo, en dominios con integridad que no poseen esta propiedad, la posibilidad es alta.

A pesar de que estos tipos de τ -factorización no puedan ser estudiadas con una relación τ^α , es posible obtener resultados de contención entre estos tipos de τ -factorización y aquellos que pertenecen a la primera categoría, aún en un dominio de factorización única. Por eso se denota a una τ -factorización completa como una τ^c -factorización.

Considerando siempre el ejemplo del 44, se tiene que $\lambda \cdot (\pm 2) * (\pm 2) * (\pm 11)$ son las únicas $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorizaciones $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -completas de 44 que coinciden con las $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a$ -factorizaciones, el conjunto $V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^c}(44) = \{\pm 2, \pm 11\}$ y el conjunto $E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^c}(44) = \{(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \pm 11)\} = E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44) = E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44)$. Por lo tanto, los respectivos $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, c, D^\#\}$ son los presentados en la tabla de la Figura 5.1.

Al hacer comparaciones entre los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 en cuestión, se concluyen las siguientes contenciones en las cuales el grafo de $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -factorizaciones $\tau_{\mathbb{Z}^\#}$ -completas está involucrada.

- $(V_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^c}(44), E_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^c}(44)) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^c - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^c}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^c}(44)$.
- $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^p}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^a}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^c}(44)$ con $\alpha_1 \in \{p, a, c, D^\#\}$.
- $G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^p - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^a - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44) = G_{\tau_{\mathbb{Z}^\#}^c - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}}(44)$ con $\alpha_2 \in \{p, a, c, D^\#\}$.

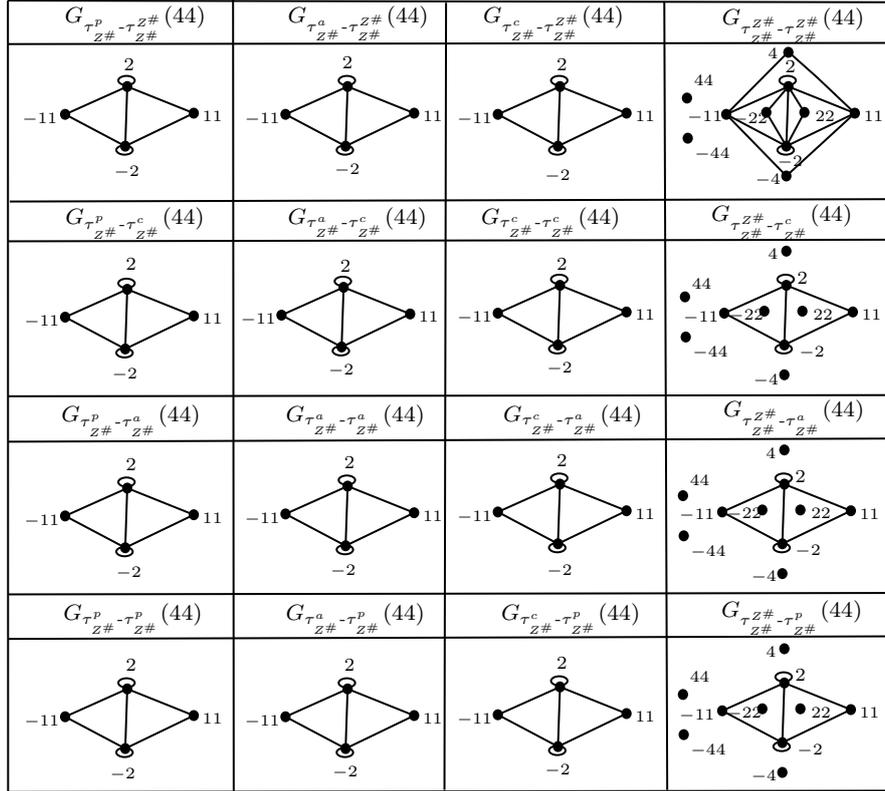


Figura 5.1: Los $\tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_1} - \tau_{\mathbb{Z}^\#}^{\alpha_2}$ -grafos de 44 con $\alpha_1, \alpha_2 \in \{p, a, c, D^\#\}$

Estas igualdades no solamente ocurren en el caso de 44, sino que para cualquier $x \in \mathbb{Z}^\#$. Esto es debido a que $\mathbb{Z}^\#$ es un dominio de factorización única, y en ese tipo de dominios las τ -factorizaciones de primos, de elementos irreducibles y completas son las mismas. Parece ser que las características del dominio con integridad son relevantes para obtener contenencias entre grafos de distintos tipos de naturaleza de τ -factorizaciones. Aunque algunas de las τ -factorizaciones τ -completas han sido estudiadas por autores como Anderson y Juett, esto abre una línea de investigación cuyo enfoque no sea en las factorizaciones sino que la contenencia de sus grafos.

5.2. Conclusiones

A continuación se presenta una lista de afirmaciones que resumen los resultados de esta investigación y que dan respuesta a los principales cuestionamientos realizados en el proceso.

1. Mediante la subrelación τ^α se creó un lenguaje con el que se pretende estudiar

localmente a las τ -factorizaciones cuya definición depende del origen de sus factores. Con este lenguaje es posible conocer cuáles son estos factores y cómo se relacionan.

2. Al ser τ^α una restricción de τ , entonces τ^α hereda ciertas propiedades de τ como relación de conjuntos, para las τ^α -factorizaciones, para los sistemas de τ^α -factorización y para los τ^α -grafos.
3. Cualquier grafo de factores se puede estudiar completamente a través de dos vertientes: los grafos salvo asociados (los cuales son isomorfos entre sí) y la interconectividad del grafo. Con el comportamiento de la interconectividad y de uno de los grafos salvo asociados, es posible determinar el comportamiento del grafo de factores. Esto apoya la idea de Mooney, Coykendall y López al solamente caracterizar los grafos salvo asociados de los grafos que ellos han estudiado y no los grafos en su totalidad.
4. La contención entre grafos de factores cuya construcción depende de relaciones τ^α , es consecuencia de las contenciones que existen entre dichas relaciones.

5.3. Preguntas abiertas

Este trabajo dio una visión más generalizada del estudio de los grafos de factores en dominios con integridad. Con esta nueva visión se abre una gama de preguntas abiertas a desarrollar en el futuro. Por medio de las tres áreas siguientes, se describen algunas de estas preguntas. Cabe mencionar que las preguntas de primer área descrita, surgen del trabajo de los capítulos 2, 3 y 4 de esta investigación. Las preguntas de la segunda área son consecuencia de un estudio comparativo (expuesto en dicha subsección) entre el τ -grafo y el grafo de factores del dominio con integridad descritos en la definición de una relación simétrica τ . Las preguntas de la tercer área surgen de la viabilidad observada durante la investigación, de la realización de un estudio introductorio del τ -grafo desde la perspectiva topológica.

5.3.1. Sobre la comparación entre grafos de τ -factores

En primer lugar, este trabajo dividió a los tipos de τ -factorización en dos categorías, y enfatizó el estudio de grafos de factores que pertenecen a un subconjunto α (estos grafos representan a las τ -factorizaciones de la primera categoría). Las preguntas que surgen de lo que se ha trabajado hasta el momento son: ¿qué características poseen los grafos de factorizaciones con propiedades especiales (que corresponden a la segunda categoría)? ¿qué condiciones deben existir para que la contención entre estos grafos ocurra? En la Sección 5.1. se estableció una pequeña introducción a ese futuro estudio.

En segundo lugar, la línea de contenciones de grafos que fue presentada en los diagramas de los capítulos 3 y 4 presentan una sola dirección. ¿Qué condiciones deben tener la relación simétrica o dominio en cuestión para que ciertos grafos experimenten la contención para el lado contrario, y que de esta forma se exprese las condiciones suficientes o necesarias para asegurar la igualdad entre τ^α -grafos para dos α 's distintos?

5.3.2. Sobre la comparación entre el grafo de τ y el τ -grafo

Durante esta investigación se observó la factibilidad de no solamente estudiar a τ como un subconjunto de $D^\# \times D^\#$, sino también de estudiar un grafo que describa la definición de τ .

Definición 5.3.1. *Sea τ una relación simétrica sobre $D^\#$. El grafo de τ es el grafo (no dirigido) definido por $G(\tau) = (V(\tau), \tau)$ donde $V(\tau) = \text{Dom}(\tau)$.*

El objetivo de esta sección es expresar algunas propiedades de relación entre el grafo de τ y el τ -grafo. Uno de estos resultados es la posible existencia del grafo salvo asociados de τ , una aplicación de la definición del τ -grafo salvo asociados sobre el grafo de τ . Para efectos de formalidad, se describe el siguiente concepto.

Definición 5.3.2. *El grafo salvo asociados de τ es el grafo definido de la forma $\overline{G(\tau)} = (\overline{V(\tau)}, \tau)$, donde los elementos de $\overline{V(\tau)}$ son escogidos arbitrariamente de manera que ningún par de ellos pertenezca a la misma clase de equivalencia en $V(\tau)/\sim$.*

Los siguientes ejemplos ayudan a entender las Definiciones 2.4.1. y 2.4.2.

Ejemplo 5.3.3. Sea R un dominio con integridad, $D = R[x, y^2, xy]$ y τ la relación simétrica en $D^\#$ determinada por $(\lambda x^2)\tau(\mu y^2)$, $(\lambda xy)\tau(\mu xy)$, $(\lambda x)\tau(\mu x)$ para $\lambda, \mu \in U(D)$. Notar que $V(\tau) = \{\lambda \cdot x, \lambda \cdot x^2, \lambda \cdot y^2, \lambda \cdot xy : \lambda \in U(D)\}$. Por ende, $V(\tau)/\sim = \{[x], [x^2], [y^2], [xy]\}$. Si se selecciona a $\overline{V(\tau)} = \{x, x^2, y^2, xy\}$, entonces $\overline{G(\tau)}$ se representa de la forma siguiente.

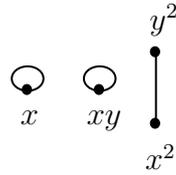


Figura 5.2: El grafo salvo asociados de $\tau = \{(\lambda x^2, \mu y^2), (\lambda y^2, \mu x^2), (\lambda xy, \mu xy), (\lambda x, \mu x)\}$

Ejemplo 5.3.4. Sea D un dominio con integridad. Considerar la relación $\tau_A = A \times A$ donde $A \subseteq D^\#$. Entonces $G(\tau_A)$ es un grafo completo en donde cada elemento de A es representado por un vértice, y cada vértice tiene un lazo. En el caso de $\overline{G(\tau_A)}$, también es un grafo completo en donde cada elemento seleccionado de cada co-conjunto de A/\sim es representado por un vértice, y cada vértice tiene un lazo. A continuación se presentan algunas propiedades que tiene el grafo de τ_A .

(i) $G(\tau_A)$ es finito si y solo si A lo es.

(ii) Si A es finito, entonces $\overline{G(\tau_A)}$ lo es.

(iii) $\bigcup_{x \in A} \overline{G_{\tau_A}(x)} \subsetneq \bigcup_{x \in A} G_{\tau_A}(x)$.

Si todo vértice en $G_{\tau_A}(x)$ que tiene a lo más un lazo, entonces la última propiedad no se cumple. De la misma forma, se generan dos propiedades más bajo esta condición, como se presenta a continuación.

(iv) $G_{\tau_A}(x) \subseteq G(\tau_A)$ para todo $x \in A$

(v) $\bigcup_{x \in A} \overline{G_{\tau_A}(x)} \subsetneq \bigcup_{x \in A} G_{\tau_A}(x) \subseteq G(\tau_A)$.

(vi) $\bigcup_{x \in D^\#} \overline{G_{\tau_{D^\#}}(x)} \subsetneq \bigcup_{x \in D^\#} G_{\tau_{D^\#}}(x) = G(\tau_{D^\#})$.

Aparte de las propiedades de contención, ¿se pueden obtener propiedades directas del grafo de τ a los factores de elementos? ¿Ayudará este grafo a poder construir los elementos a partir de su τ^α -grafo? Se puede tener τ no simétrica y ver cómo los grafos dirigidos se comportan con respecto a τ^α -factores.

5.3.3. Sobre los aspectos topológicos de un τ -grafo

El τ -grafo tiene características especiales que permiten construir de éste diversas topologías en $V_\tau(x)$ y, a partir de ello, estudiar elementos topológicos respectivos como bases topológicas y conexidad. El propósito de esta sección es efectuar un estudio general de dichos elementos.

Se puede concluir que el conjunto vacío, $V_\tau(x)$, los conjuntos de la forma $\lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}$ (con $\lambda \in U(D)$) y sus respectivas uniones, forman una topología en $V_\tau(x)$. Otra topología formada en este conjunto es la compuesta por el mismo, el conjunto vacío, los conjuntos definidos y denotados de la forma $A(x_i) = \{\lambda \cdot x_i : (x_i \in \overline{V_\tau(x)}) \wedge (\lambda \in U(D))\}$ y sus respectivas uniones. En este sentido, se consideran al vacío, a $V_\tau(x)$, a los conjuntos de la forma $\lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}$ ó los conjuntos $A(x_i)$, y a sus respectivas uniones como abiertos de sus topologías. Por ende, se considera a $V_\tau(x)$ como un espacio topológico. Además, los conjuntos de la forma $\lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}$, y los conjuntos $A(x_i)$ son bases respectivas para las topologías descritas. Porque todo vértice del τ -grafo pertenece tanto a un conjunto de la forma $\lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}$ como a un conjunto $A(x_i)$. Y dado que las intersecciones entre conjuntos de la misma forma son vacías. También estos tipos de conjuntos son componentes conexos de $V_\tau(x)$ bajo las relaciones $\sim_V = \{(a, b) : a, b \in \lambda \cdot \overline{V_\tau(x)}, \lambda \text{ fijo}\}$ y \sim , respectivamente.

Otro aspecto topológico que se pudo estudiar en el τ -grafo es la conexidad por caminos. Los siguientes teoremas refieren a condiciones para que el τ -grafo sea cumplan con este aspecto.

Teorema 5.3.5. *Sean D un dominio con integridad y τ una relación simétrica sobre $D^\#$. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen.*

- (i) *El grafo $G_\tau(x)$ es disconexo por caminos para cualquier $x \in D^\#$ irreducible, si $U(D) > 1$.*

(ii) El grafo $\overline{G_\tau(x)}$ es conexo por caminos, si x es irreducible.

Demostración. (i) Por las factorizaciones triviales de x , las cuales son τ -factorizaciones, se concluye que $\{\lambda \cdot x : \lambda \in U(D)\} \in V_\tau(x)$. Esto implica que $|V_\tau(x)| \geq 1$, porque $|U(D)| \geq 1$. Si $|U(D)| > 1$, entonces para $\lambda_i \cdot x$ y $\lambda_j \cdot x$ (donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ y $\lambda_i, \lambda_j \in U(D)$) no son factores en una misma τ -factorización de x , pues x es irreducible. Por ende, no existe un camino por aristas que los conecte. Por lo tanto, $G_\tau(x)$ es desconexo por caminos.

(ii) Si x es irreducible, entonces x no tiene τ -factorizaciones más que las factorizaciones triviales. Esto implica que $|\overline{V_\tau(x)}| = 1$. Por ende, $\overline{G_\tau(x)}$ es conexo por caminos.

□

Siendo los resultados anteriores obtenidos a partir del estudio combinado de la teoría de grafos de factores y la topología, esto abre la visión para que en futuros trabajos se estudien los grafos de factores desde perspectivas de otras ramas de la matemática, así como también, el descubrimiento de aplicaciones en otras áreas científicas y disciplinarias.

Bibliografía

- [1] Anderson, D.D. y Frazier, A. *On a general theory of factorization in integral domains*. Revista de Matemáticas 4, 3 (2011). 2011.
- [2] Anderson, D.D., Mott, J. y Zafrullah, M. *Unique factorization in non-atomic integral domains*. Boletín de la Unión Matemática Italiana B. 1999.
- [3] Anderson, D.D., Anderson, D.F. y Zafrullah, M. *Rings between $D[X]$ and $K[X]$* . Revista de Matemáticas Houston. 1991.
- [4] Anderson, D.D., Anderson, D.F. y Zafrullah, M. *Factorization in integral domains*. Revista de Álgebra Pura y Aplicada, 69 (1990). 1990.
- [5] Anderson, D.D., Anderson, D.F. y Zafrullah, M. *On primary factorizations*. Revista de Álgebra Pura y Aplicada, 54 (1988). 1988.
- [6] Anderson, D.D., y Ortiz-Albino, R.M. *Three frameworks for a general theory of factorization*. Revista Árabe de Matemáticas. 2012.
- [7] Axtell, M., Baeth, N. y Stickles, J. *Irreducible divisor graphs and factorization properties of domains*. Revista Comunicaciones en Álgebra. 2011.
- [8] Cohn, P.M. *Bezout rings and their subrings*. Mathematical Proceedings. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968.
- [9] Coleman, R. y Zwald, L. *Primary ideals*. 2020. hal-03040606.
- [10] Coykendall, J. y Maney, J. *Irreducible divisor graphs*. Revista Comunicaciones en Álgebra. 2005.

- [11] Dummit, D. y Foote, R. *Abstract algebra*. John Wile y Sons, Inc. 3ra. edición. 2004.
- [12] Hungerford, T.W. *Graduate texts in Mathematics*. Springer. 1974.
- [13] Juett, J. *Some topics in abstract factorization*. Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Iowa. 2013.
- [14] Juett, J. *Two counterexamples in abstract factorization*. Revista de Matemáticas Rocky Mountain. 2014.
- [15] López, C. *Grafos de divisores irreducibles*. Tesis de maestría, Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico - Recinto Universitario de Mayagüez. 2020.
- [16] Mooney, C. *Generalized factorization in commutative rings with zero-divisors*. Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Iowa. 2013.
- [17] Mooney, C. *Generalized irreducible divisor graphs*. Centro Reinhart, Universidad de Viterbo. 2010.
- [18] Mooney, C. *On irreducible divisor graphs in commutative rings with zero-divisors*. Revista de Matemáticas Tamkang. 2013.
- [19] Serna. *Factorizaciones sobre particiones de un dominio integral*. Tesis de maestría, Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico - Recinto Universitario de Mayagüez. 2014.
- [20] Zafrullah, M. *Unique representation domains*. J. Natur. Sci. Math., 18 (1978). 1978.
- [21] Zwillinger, D. *CRC Standard Mathematical Tables end Formulae*. Chapman and Hall/CRC, 31va. edición. 2003.