FACTORIZACIONES DONDE CADA FACTOR DE UN ELEMENTO PERTENECE A SOLO UNA CLASE DE EQUIVALENCIA

Por

César Alberto Serna Rapello

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS (PURA)

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2014

Aprobada por:

Julio E. Barety, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Gabriele Castellini, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Reyes M. Ortiz-Albino, Ph.D Presidente, Comité Graduado	Fecha
Rogelio Palomera, Ph.D Representante de Estudios Graduados	Fecha
Omar Colón-Reyes, Ph.D Director del Departamento	Fecha

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

FACTORIZACIONES DONDE CADA FACTOR DE UN ELEMENTO PERTENECE A SOLO UNA CLASE DE EQUIVALENCIA

Por

César Alberto Serna Rapello

Diciembre 2014

Consejero: Reyes M. Ortiz-Albino Ph.D
Departamento: Ciencias Matemáticas

En el año 2006, Anderson y Frazier desarrollaron la teoría de τ-factorizaciones sobre dominios integrales, como una extensión de las factorizaciones comaximales de McAdam y Swan. La teoría de τ-factorizaciones generaliza el concepto de factorizaciones en la forma usual, y consiste en restringir el dominio de la operación producto de un dominio integral D a una relación simétrica sobre el conjunto de elementos distintos de cero y no unidades de D. Esta teoría ha sido estudiada por Hamon, Ortiz-Albino, Juett, Florescu, entre otros.

Este trabajo se enfoca en estudiar la teoría de τ-factorizaciones cuando τ es una relación de equivalencia. Existen diversas razones para considerar relaciones de equivalencia en el estudio de las τ-factorizaciones, la principal es el historial de importacia no sólo en el álgebra abstracta, si no también en las matemáticas en general. Por el aspecto de la teoría, considerar relaciones de equivalencia marca el estudio de relaciones que no son "artificiales", es decir, aquellas relaciones cuyo

dominio es casi toda la estructura algebraica (esto es más difícil que lo que los autores principales consideraron). Además, los principales resultados en la teoría de τ-factorizaciones, se han obtenido para relaciones divisibles; cuando se trabaja con relaciones de equivalencia no se puede asumir la propiedad de divisibilidad de la relación. Por último, hallar ejemplos de relaciones de equivalencia multiplicativas y que preserven asociados. Hamon estudió parcialmente las relaciones de equivalencia módulo n en el dominio de los números enteros. En base a su investigación y otros acercamientos de Juett, se creía que no había muchos ejemplos de relaciones de equivalencia que sean multiplicativas y preserven asociados. En este trabajo se presentan tres familias infinitas de relaciones de equivalencia que satisfacen estas condiciones. Además, se proveen resultados de propiedades de factorizaciones, bajo estas condiciones, demostrando que ser una relación divisible es una condición suficiente, pero no necesaria para hacer τ-refinamientos.

Además, se estudian relaciones de equivalencia que no necesariamente satisfacen la propiedad de preservar asociados. Cuando se extendieron las relaciones de equivalencia unitarias a relaciones de equivalencia que preservan asociados, se obtuvo que las propiedades de factorizaciones, tanto en la relación original como en la de su extensión, son equivalentes. En conclusión, se puede asumir que si la relación de equivalencia es unitaria, preserva asociados. Al factorizar, se obtiene un resultado equivalente al que posee la relación unitaria que no preserva asociados.

Por último, se presenta una extensión multiplicativa para las relaciones de equivalencia módulo n. La misma puede servir de modelo para hallar varias propiedades y se presentan algunos posibles trabajos futuros con respecto a este tipo de extensiones de relaciones de equivalencia.

Abstract of Dissertation Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Sciences

FACTORIZATIONS WHERE EACH FACTOR OF ON ELEMENT BELONG TO ONLY ONE EQUIVALENCE CLASS

By

César Alberto Serna Rapello

December 2014

Chair: Reyes M. Ortiz-Albino Ph.D
Major Department: Mathematical Sciences

In 2006, Anderson and Frazier developed the theory of τ-factorizations on integral domains, as a extension of the McAdam and Swan's comaximal factorizations. This theory is a generalization of the usual theory of factorization, which is based on restricting the domain of the usual multiplicative operation of the integral domain to a symmetric relation on the nonzero nonunit elements of D. This theory has been studied by Hamon, Ortiz, Juett, Florescu, and others.

This work's main focus is to study the theory of τ-factorizations, when τ is an equivalence relation. There are reasons why equivalence relations into study of τ-factorizacions, the main reason is the history and importance of equivalence relations in abstract algebra and in mathematics in general. From the point view of this theory, the study of τ-factorization with relations that are not " artificial", that is relations whose domain is almost the algebraic structure (this setting is more difficult than the work done by previous authors). Moreover, the main results in the theory of τ-factorizations were obtained assuming the relation was divisible; such

hypothesis can not be assume when working with equivalence relations. Hamon studied some topics of the equivalence relation $\tau_{(n)}$, that is, the relation modulo n on the set of integers. Based on this work and other studies by Juett, it was thought that there were very few examples of multiplicative equivalence relations that preserve associates. In this report, three infinite families of such types of relations are shown. Some results of factorization properties under these types of relations are given. Moreover, such results give evidence to show that divisible relations is a sufficient, but not a necessary condition to obtain τ-refinements.

Additionally, the equivalence relations that do not satisfy the associated-preserving condition were studied. The associated-preserving extension of a unitary equivalence relation, which does not preserves associates, has exactly the same equivalent factorization properties as the original relation. In conclusion, there is no harm in assuming that a unitary equivalence relation may preserve associates.

Finally, a multiplicative extension of the equivalence relation modulo n is presented. This work is an example of the begining of the study of this type of extension. Hence some properties and observations regarding this work could result in future work for multiplicative extensions of an arbitrary equivalence relation.

A mi abuelo Julio César Serna y

a la memoria de mi abuela Josefa Zarza.

"Un buen padre vale por cien maestros".

Jean-Jacques Rousseau

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Reyes Ortiz-Albino por brindarme la confianza y el respaldo necesario para realizar este trabajo.

Al departamento de Matemáticas de la UPRM por darme esta gran oportunidad y a sus profesores por brindarme sus conocimientos.

A mis compañeros y amigos del recinto, a Glow, Jimmy, Hilda Rosa, José Manuel, Gererdo, José Fuentes, Mario, Devis, Carlos Molina, Gustavo, Daiver, Einstein, Roxana, Ricela y en especial a Karina Gelis y Jessika Trespalacios, por los chistes y bromas que hicieron amena esta carrera.

A mis eternos amigos, Alex, Kathy, David, Yesid, Ana, Jaison y Verónica, que a pesar de la distancia siempre me apoyaron.

Finalmente, un agradecimiento muy especial a la familia Serna Zarza, mi familia. A mi abuelo Julio Serna, a mi tía Etelvina Serna, a mis hermanos Álvaro Serna y Lauren Pacheco, a mis padres, a mis tías, primos y demás familiares por todo el cariño y afecto que me han brindado.

A todas esas personas que con su apoyo y ayuda hicieron esto posible.

Índice general

Página

LISTA DE SÍMBOLOS Y ABREVIACIONES

D	Dominio integral.
$U(D)$	Grupo de unidades de D.
$D*$	Los elementos distintos de cero del dominio integral D.
$D^\sharp$	Conjunto de los elementos distintos de cero y de unidades de D.
τ	Relación simétrica sobre $D^\sharp$.
$[x]_\tau$	La clase de equivalencia del elemento x con respecto a τ (si τ es una relación de equivalencia).
$\sim$	Significa asociado a
UFD	Dominio de factorización única.
BFD	Dominio de factorización acotada.
HFD	Dominio de factorizaciones de igual longitud.
FFD	Dominio de factorización finita.

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

En la teoría usual de factorizaciones el interés principal radica en la representación única, de elementos distintos de cero y unidades, como producto de elementos irreducibles (también conocidos como átomos). En las últimas décadas se ha estudiado otro tipo de factorizaciones las cuales resultan ser únicas bajo ciertas condiciones, por ejemplo, representaciones en elementos primales, rígidos, primarios y comaximales, entre otros (para más detalle ver [7] y [11]). Extender resultados como el teorema fundamental de la aritmética a este nuevo tipo de factorizaciones ha dado como resultado la generalización de la teoría usual de factorizaciones sobre dominios integrales y, recientemente, sobre anillos conmutativos con unidad y posiblemente con divisores de cero.

En el año 2006, Anderson y Frazier, motivados por el trabajo de factorizaciones comaximales de McAdam y Swan, publicado en el 2004 [11], desarrollan una teoría de factorizaciones más general que la tradicional, llamada la teoría de τ-factorizaciones [5]. La misma consiste en restringir el dominio del producto a una relación simétrica τ sobre el conjunto $D^\sharp$, el conjunto de los elementos distintos de cero y de unidades del dominio integral D.

En su trabajo inicial, Anderson y Frazier introducen el concepto de τ-factorización de un elemento x, distinto de cero y no unidad, y la definen como una expresión de la forma $x = \lambda x_1 \cdots x_n$, donde $x_i \tau x_j$ para todo $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq n$ y $\lambda \in U(D)$ (el conjunto de la unidades de D). En [2] y [5], los autores muestran cómo la nueva teoría generaliza la teoría tradicional y las factorizaciones en elementos primales, primarios, rígidos, etc. Por ejemplo, si $\tau = D^\sharp \times D^\sharp$ se obtiene el producto usual; y si se define $x\tau y$ si y solo si x y y son elementos primales (resp. primarios, rígidos, etc.), se obtienen las factorizaciones en elementos primales (resp. primarios, rígidos). Las factorizaciones comaximales, estudiadas por McAdam y Swan, también se pueden obtener a partir de esta nueva teoría definiendo $x\tau y$ si y solo si $(x, y) = D$. En este caso, las τ-factorizaciones son de la forma $x = x_1 \cdots x_n$, donde x_i y x_j son elementos comaximales para $i \neq j$ (se omite λ, pues la relación ayuda a no necesitarla).

La principal dificultad en el estudio de la teoría de τ-factorizaciones, se presenta en que muchas de las propiedades obtenidas con las factorizaciones usuales no se conservan en esta teoría. Para este inconveniente Anderson y Frazier describieron tres tipos especiales de relaciones llamadas multiplicativas, que preservan asociados y divisibles. Sea τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$. La relación simétrica τ se dice multiplicativa si dados $x, y, z \in D^\sharp$, si $x\tau y$ y $x\tau z$, entonces $x\tau(yz)$. Se dice que τ preserva asociados si para cualesquiera $x, y, x' \in D^\sharp$, si $x\tau y$ y $x \sim x'$, entonces $x'\tau y$. Finalmente, la relación τ es divisible si para todo $x, y, x' \in D^\sharp$, $x\tau y$ y $x'|x$ implica que $x'\tau y$. Con estas relaciones se consigue preservar algunas propiedades algebraicas que con el producto usual se ignora su utilidad. Por ejemplo, si la relación es multiplicativa, cualquier τ-factorización es de la forma $x = \lambda x_1 \cdot x_2$. Si la relación preserva asociados, las τ-factorizaciones son de la forma $x = x_1 \cdots x_n$, o sea se puede omitir λ en el frente de la expresión. Por otro lado, si τ es una relación divisible, dado un elemento x, cualquier τ-factor de un τ-factor de x también es un τ-factor de x. Para este último tipo de relaciones, Anderson y Frazier obtuvieron resultados muy similares a los obtenidos con las factorizaciones usuales, mostrando que para relaciones divisibles la teoría de τ-factorizaciones hereda muchas propiedades estructurales de la teoría usual de factorizaciones.

Desde 2006 otros algebristas han estudiado las τ-factorizaciones, como es el caso de Hamon, Juett, Florescu, Ortiz-Albino, entre otros. En el 2007 Hamon, desarrolló en su tesis doctoral tópicos en la teoría de τ-factorizaciones. El centro de su trabajo fueron las relaciones τ_J, donde J es un ideal del dominio integral D; definidas por $x\tau_J y$ si y solo si $x - y \in J$. Hamon presentó condiciones suficientes y necesarias (sobre el ideal J) para que la relación τ_J sea una relación multiplicativa, divisible y/o preserve asociados, y demostró que toda relación τ_J divisible también es una relación multiplicativa (de hecho $\tau_J = D^\sharp \times D^\sharp$). Dos ejemplos importantes de relaciones τ_J estudiados por Hamon, fueron las relaciones modulares $\tau_{(n)}$ sobre $\mathbb{Z}$, donde $J = (n)$ y $n \geq 0$; y la relación $\tau_{(x)}$ sobre el anillo de polinomios de un dominio integral. En la discusión de la relaciones modulares, Hamon trabajó en detalle las relaciones para $n \leq 6$ y en cada una de ellas caracterizó los elementos $\tau_{(n)}$-irreducibles, $\tau_{(n)}$-primos y $|_{\tau_{(n)}}$-primos, los cuales se definirán más adelante. Además, desarrolló una demostración que indicaba que para $n \leq 6$ y $n = 8, 10, \cancel{12}$, $\mathbb{Z}$ era un dominio $\tau_{(n)}$-atómico, esto es, todo elemento en $D^\sharp$ tiene una $\tau_{(n)}$-factorización en $\tau_{(n)}$-átomos (note que 12 está tachado, pues hoy se conoce que $\mathbb{Z}$ no es un dominio $\tau_{(12)}$-atómico, ver [1]). Por otro lado, para la relación $\tau_{(x)}$ sobre $D[x]$ demostró que nunca será divisible y determinó los elementos τ-irreducibles para los casos en los que D era sólo un dominio integral o el caso en el que D fuese un campo.

Un año después, R. Ortiz-Albino expone una teoría de factorizaciones no atómicas que resume la teoría presentada por Anderson y Frazier (ver [9]). Ortiz-Albino definió nuevos conceptos, como los elementos τ-primales, τ-rígidos y definió lo que es el τ-GCD entre dos elementos en $D^\sharp$ (el máximo τ-factor en común). Además, generalizó muchos de los resultados obtenidos en [2], especialmente los referentes a propiedades de estructuras, y estudió las τ-factortizaciones reducidas (las cuales no requieren la unidad λ enfrente de los τ-productos). Adicionalmente, desarrolló la teoría de Γ-factorizaciones, que garantiza mucho más la teoría de factorizaciones; actualmente es el tipo de factorizaciones más general que se conoce. Esta nueva teoría fue estudiada más en detalle por Juett en su tesis doctoral [8]. En su trabajo Juett extiende las Γ-factorizaciones de monoides conmutativos con propiedad cancelativa.

Por último, en el 2013 Florescu [1] retoma las relaciones modulares sobre $\mathbb{Z}$, enfocándose en las $\tau_{(n)}$-factorizaciones reducidas sobre $\mathbb{Z}$ y las $\tau_{(n)}$-factorizaciones sobre $\mathbb{N}$. Su principal objetivo fue ver cómo se extiende el Teorema fundamental de la aritmética a las $\tau_{(n)}$-factorizaciones, en otras palabras, identificar los valores de n para los cuales cada entero se puede expresar como producto de $\tau_{(n)}$-irreducibles. Sus resultados fueron hallados usando la misma técnica de Hamon en [10], el teorema de la infinitud de primos de la forma $a + bn$, donde a y b son relativamente primos, por Dirichlet.

Como se ha visto, estos autores han estudiado las τ-factorizaciones con diferentes enfoques específicos. Sin embargo, ninguno de ellos consideró las relaciones de equivalencia de manera general (aunque Hamon y Florescu trabajaron con relaciones de equivalencia particulares). El lector debe notar que las relaciones de equivalencia han sido de gran importancia y es uno de los tipos de relaciones más trabajadas en las matemáticas en general. En este trabajo se estudian las τ-factorizaciones sobre dominios integrales, cuando τ es una relación de equivalencia. Dada la generalidad de las τ-factorizaciones, se buscarán condiciones que ayuden a desarrollar herramientas para el estudio de la teoría; por ejemplo, se consideran relaciones de equivalencia multiplicativas y/o que preservan asociados. En el desarrollo de este trabajo, se evitarán las relaciones divisibles, debido a que si τ es reflexiva y divisible, la teoría de las τ-factorizaciones coincide con la teoría usual. A pesar de no considerar relaciones divisibles, se obtienen resultados similares a los que se obtienen en la teoría cuando se asumen este tipo de relaciones. Se presentan familias de relaciones de equivalencia que son multiplicativas y que preservan asociados, como también extensiones con propiedades específicas de algunas relaciones de equivalencia conocidas.

1.1. Resumen de los Capítulos

En este trabajo se desarrolla un marco de la teoría de factorizaciones generalizadas: la caracterización de la teoría de τ-factorizaciones sobre un dominio integral D, cuando τ es una relación de equivalencia.

En el segundo capítulo se introducen las definiciones básicas de la teoría de τ-factorizaciones. Se presentan ejemplos que ayudan al lector a familiarizarse con la terminología y las notaciones. Además, se dan algunos resultados que sirven de base para el posterior desarrollo de este trabajo.

En el capítulo 3 se presentan los resultados del estudio de las relaciones de equivalencia en la teoría de τ-factorizaciones, de una manera general, por ejemplo, la caracterización de las relaciones de equivalencia multiplicativas y/o que preserven asociados, la relación entre las clases de equivalencia y los τ-factores de los elementos de dicha clase, la posibilidad de los τ-refinamientos para algunas relaciones de equivalencia, etc. Se proveen algunos ejemplos importantes de relaciones de equivalencia que satisfacen alguna propiedad algebraica (por ejemplo preservar asociados). Además, se demuestran teoremas y proposiciones con respecto a algunas propiedades de estructuras. El capítulo finaliza con algunos resultados importantes del concepto de τ-GCD de dos elementos distintos de cero y no unidades.

En el cuarto capítulo, se proporcionan extensiones de relaciones de equivalencia, que satisfacen una de las condiciones: preservar asociados y ser multiplicativa. Las extensiones que preservan asociados ayudan a caracterizar las τ-factorizaciones y determinar cuándo un elemento distinto de cero y no unidad, es un elemento τ-irreducible o τ-primo. Por otro lado, solo se presenta una pequeña conclusión con respecto a las extensiones multiplicativas.

En el último capítulo se encuentran las conclusiones de este trabajo y se resumen los principales aportes a la teoría. Finalmente, se establece cual será el siguiente paso para continuar estudiando esta teoría sobre relaciones de equivalencia.

Capítulo 2
ASPECTOS TEÓRICOS

Este capítulo es una introducción a una teoría de factorizaciones generalizadas, definida en 2006 por Anderson y Frazier, llamada la teoría de τ-factorizaciones. El lector encontrará la definición del concepto de una τ-factorización, y algunos ejemplos y resultados necesarios para obtener una idea más clara del propósito de esta teoría.

2.1. Definiciones Básicas

Sea D un dominio integral (anillo conmutativo con identidad y sin divisores de cero), $D^* = D - 0$ y $U(D)$ el conjunto de las unidades (elementos con inverso multiplicativo) de D. Sea $D^\sharp$ el conjunto de los elementos, no unidades y distintos de cero de D, es decir, $D^\sharp = D^* - U(D)$. En [5], los autores consideran los siguientes tipos de relaciones: multiplicativas, divisibles y relaciones que preservan asociados. En Definición 1 se presentan de manera formal de cada uno de estos tipos de relaciones.

Definición 1. Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$. Se dice que τ es una relación:

1. *Multiplicativa*; si para todo $x, y, z \in D^\sharp$ con $x\tau y$ y $x\tau z$, entonces $x\tau yz$,

2. *Que preserva asociados*; si dados $x, y, z \in D^\sharp$ donde $y \sim z$, $x\tau y$ implica que $x\tau z$,

3. *Divisible*; si para cada $x, y, z \in D^\sharp$ tales que $z|y$ y $x\tau y$, entonces $x\tau z$.

Se debe aclarar que en [2] y [5], los autores definen “divisive relation” (relación divisiva) y no “divisible relation” (relación divisible); sin embargo, en este trabajo la definición de relación divisible coincide con la definición de relación divisiva (que se podría considerar la mejor traducción de “divisive relation”) dada por Anderson y Frazier. La relaciones definidas anteriormente inducen propiedades en la teoría de τ-factorizaciones útiles para obtener resultados. Algunas de estas propiedades ignoradas en el estudio de factorizaciones en la forma usual son el hecho de que el producto de factores primos (no asociados) de un elemento es también un factor de ese elemento, y los factores de factores de un elemento también son factores. Esto no necesariamente ocurre en la teoría de τ-factorizaciones. La primera propiedad se cumple si τ es una relación multiplicativa, mientras que la segunda propiedad se satisface si τ es una relación divisible. Estas propiedades fueron descubiertas en [2] y están resumidas en los próximos teoremas. Antes de presentar cualquier resultado, se define el concepto de τ-factorización de un elemento en $D^\sharp$.

Definición 2. Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$. Una expresión de la forma $x = \lambda x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ se llama una τ-*factorización* de x, si $\lambda \in U(D)$ y $x_i \tau x_j$ para todo $i \neq j$.

Si $\lambda = 1$ en el producto anterior, es decir $x = x_1 \cdots x_n$, entonces esta expresión se llama una τ-factorización reducida de x. Se dice que x es un τ-producto de los x_i y cada x_i es un τ-factor de x.

Sean $x, y \in D^\sharp$, se dice que x τ-*divide* a y o x es un τ-*factor* de y (se escribe $x|_\tau y$) si y solo si existe una τ-factorización $y = \lambda x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ donde algún $x_i = x$. Se escribirá xy para denotar el *producto usual* de x con y, mientras que $x \cdot y$ denota el τ-*producto* de x con y. Cualquier expresión de la forma $x = x$ o $x = \lambda(\lambda^{-1}x)$, donde

$\lambda \in U(D)$, se le conoce como una τ-*factorización trivial* de $x \in D^\sharp$. Dado que el estudio de factorizaciones usualmente se reduce al estudio de elementos irreducibles, surge la necesidad de definir los elementos τ-irreducibles.

Definición 3. Sea D un dominio integral, se dice que $x \in D^\sharp$ es un τ-*átomo* o un elemento τ-*irreducible* si sus únicas τ-factorizaciones son las triviales. El dominio integral D es un *dominio τ-atómico* si cada $x \in D^\sharp$ tiene una τ-factorización en τ-átomos.

Teorema 1. [Teorema 2.1, [2]] Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$.

1. Si τ es una relación divisible, entonces τ es una relación que preserva asociados.

2. Si τ es una relación divisible, $x = \lambda x_1 \cdots x_n$ es una τ-factorización de $x \in D^\sharp$ y $x_i = y_1 \cdots y_m$ es una τ-factorización reducida de x_i para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $x = \lambda x_1 \cdots x_{i-1} \cdot y_1 \cdots y_m \cdot x_{i+1} \cdots x_n$ es una τ-factorización de x.

3. Suponer que τ es una relación multiplicativa. Si $x = \lambda x_1 \cdots x_n$ es una τ-factorización, entonces $x = \lambda x_1 \cdots x_{i-1} \cdot (x_i x_{i+1}) \cdot x_{i+2} \cdots x_n$ es también una τ-factorización de x. Más aún, si $\{1, 2, \ldots, n\} = A_1 \dot{\bigcup} \ldots \dot{\bigcup} A_s$ (unión de conjuntos mutuamente exclusivos) y $b_i = \prod_{j \in A_i} x_j$, entonces $x = \lambda b_1 \cdots b_s$ es una τ-factorización de x.

De (3) se deduce que toda τ-factorización de un elemento $x \in D^\sharp$ se puede re-escribir como un τ-producto de dos τ-factores. Además, si $\underbrace{x_1 \cdots x_1}_{k_1 - veces} \cdots \underbrace{x_n \cdots x_n}_{k_n - veces}$ es una τ-factorización, entonces $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ también es una τ-factorización.

Definición 4. Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$. El dominio D admite τ-*refinamientos reducidos* si para cualquier τ-factorización $x = \lambda x_1 \cdots x_n$ y cualquier τ-factorización reducida $x_i = y_1 \cdots y_m$ (si existe), entonces la expresión $x = x_1 \cdots x_{i-1} \cdot y_1 \cdots y_m \cdot x_{i+1} \cdots x_n$ también es una τ-factorización de x.

Si τ es una relación que preserva asociados y el dominio D admite τ-refinamientos reducidos, se dice que D admite τ-refinamientos y τ es llamada una relación refinable. En el enunciado (2) del Teorema 1, la expresión $x = x_1 \cdots x_{i-1} \cdot y_1 \cdots y_m \cdot x_{i+1} \cdots x_n$ es un τ-refinamiento del τ-producto $x = x_1 \cdots x_n$. Por consiguiente, si τ es una relación divisible, entonces el dominio integral D acepta τ-refinamientos y τ es refinable. Este tipo de relaciones es una de las más "importantes" en la teoría de τ-factorizaciones.

Teorema 2. [Proposición 2.1 [9]] Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$. Entonces para todo $x, y, z \in D^\sharp$ se tiene que

1. $x|_\tau y \Rightarrow x|y$.

2. $x|_\tau x$.

3. $x|_\tau y$ y $y|_\tau x$ si y sólo si $x \sim y$.

4. Si $y \sim z$, entonces $x|_\tau y \iff x|_\tau z$.

5. Si τ preserva asociados y $x \sim z$, entonces $x|_\tau y \iff z|_\tau y$.

El lector debe tener cuidado al pensar en términos de τ-productos o τ-factores, dado que no todos los resultados usuales de divisibilidad del dominio integral son preservados. El Teorema 2 provee las propiedades que se preservan en general. Para obtener la transitividad es necesario que τ sea una relación refinable, lo que no necesariamente se obtiene siempre. Sin embargo, observe que "$|_{\tau_D}$" coincide con "$|$" en la forma usual (para elementos en $D^\sharp$). La necesidad de extender "$|_\tau$" como operador es de gran importancia en todos los aspectos de la teoría de τ-factorizaciones, como lo es "$|$" en la teoría usual. Más aún, las distintas factorizaciones estudiadas (en elementos primales, primarios, rígidos, etc.) dependen de "$|$". El estudio de "$|_\tau$" ayuda a extender el concepto de primalidad de la teoría usual a la teoría de τ-factorizaciones. La generalización de los elementos primos son los elementos $|_\tau$-primos (concepto definido en [2] y estudiado más en detalle en [9]).

Definición 5. Sean τ_1, τ_2, τ_3 relaciones simétricas sobre $D^\sharp$. Se dice que $x \in D^\sharp$ es un elemento τ_1-τ_2-τ_3-*primo* si $x|_{\tau_2}\lambda x_1 \cdots x_n$, donde $\lambda x_1 \cdots x_n$ es una τ_1-factorización, entonces $x|_{\tau_3}x_i$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dos casos especiales que se han estudiado, cuando $\tau_2 = \tau_3 = \tau_D$ ($\tau_D = D^\sharp \times D^\sharp$) y $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$. En el primer caso, se dice que x es un τ-primo; y en el segundo caso x es llamado un elemento $|_\tau$-primo. El siguiente teorema provee algunas propiedades sobre cuándo un elemento es τ-átomo, τ-primo o $|_\tau$-primo.

Teorema 3. [Teorema 2.2 [2]] Suponer que τ es una relación multiplicativa sobre $D^\sharp$ y $x \in D^\sharp$.

1. Entonces, x es un τ-átomo si y sólo si para cualquier τ-factorización $\lambda y \cdot z$, se tiene que $x \neq \lambda y \cdot z$.

2. Entonces, x es τ-primo (resp. $|_\tau$-primo) si y sólo si $x|(\lambda y \cdot z)$ (resp. $x|_\tau \lambda y \cdot z$), entonces $x|y$ o $x|z$ (resp. $x|_\tau y$ o $x|_\tau z$).

3. Si además τ es una relación divisible, entonces x es τ-primo implica que x es $|_\tau$-primo.

Se debe observar que un elemento τ-primo (resp. $|_\tau$-primo) es un τ-átomo, pero el recíproco es falso. En el Teorema 3 se indica que bajo relaciones simétricas y multiplicativas, el concepto de τ-primo es similar al concepto usual de primo.

2.2. Algunos Ejemplos

Sea D un dominio integral; los siguientes ejemplos de relaciones simétricas sobre $D^\sharp$, ayudarán a una mejor comprensión de la definición de τ-factorizaciones. Los ejemplos a continuación fueron estudiados por Frazier y Anderson en [2] y [5]; y por Ortiz-Albino en [9].

Ejemplo 1. Sea D un dominio integral.

1. Sea $\tau = \phi \subseteq D^\sharp \times D^\sharp$, entonces τ es una relación divisible y multiplicativa. Note que ningún $x \in D^\sharp$ posee una τ-factorización no trivial, por tanto todos los elementos no unidades y distintos de cero son τ-átomos. Además, $x|_\tau y$ si y solo si $x \sim y$.

2. La relación más grande posible sobre $D^\sharp$, $\tau_D = D^\sharp \times D^\sharp$, es una relación de equivalencia divisible y multiplicativa. Bajo esta relación las nociones usuales de factorización y divisibilidad coinciden con los conceptos de τ_D-factorización y τ_D-divisibilidad. De hecho, los elementos τ_D-átomos (resp. τ_D-primos) son exactamente los elementos irreducibles (resp. primos) en el dominio integral D.

3. Considere $\phi \neq S \subseteq D^\sharp$ y la relación $\tau_S = S \times S$, definida por: $x\tau y$ si y solo si $x, y \in S$. La relación τ es multiplicativa (resp. divisible) si y solo si S es un conjunto cerrado bajo el producto (resp. cerrado bajo factores no unidades). Note que las τ_S-factorizaciones de un elemento $x \in D^\sharp$ son productos de elementos de S. Un ejemplo particular es cuando S es el conjunto de los elementos irreducibles en D; resultando las factorizaciones usuales en elementos irreducibles. Por lo tanto, todo elemento $x \in D^\sharp$ tiene una τ_S-factorización en τ_S-átomos si y solo si D es un dominio atómico. Otros casos de interés especial se obtienen al considerar S como el conjunto formado por los elementos primos, primales, primarios o rígidos del dominio integral D; dado que factorizaciones en este tipo de elementos han sido estudiadas extensamente.

4. Sean $f, g \in (D[x])^\sharp$, se define ∂ por, $f\partial g$ si y solo si $deg(f) = deg(g)$. Note que ∂ es una relación de equivalencia y preserva asociados; sin embargo no es una relación multiplicativa ni divisible.

5. Sea $\tau_{[]}$ la relación sobre $D^\sharp$ definida por $x\tau_{[]}y$ si y sólo si $[x, y] = 1$, donde $[x, y]$ es el máximo común divisor de x y y. En cualquier dominio integral, $\tau_{[]}$ es una relación divisible, sin embargo esta relación no siempre es multiplicativa. De hecho, $\tau_{[]}$ es una relación multiplicativa si y solo si para $x, y, z \in D^\sharp$, $[x, y] = 1$ y $[x, z] = 1$ implica que $[x, yz] = 1$, es decir el dominio integral tiene la propiedad de producto de primitivos es primitivo. Por ejemplo, si $D = \mathbb{Z}$, entonces $\tau_{[]}$ es multiplicativa. La relación $\tau_{[]}$ fue estudiada más detalladamente en [5] y [9].

6. Sea $\mathbb{Z}$ el dominio de los enteros y $n \geq 0$ arbitrario. Sea $\tau_{(n)}$ sobre $\mathbb{Z}^\sharp$ dada por $x\tau_{(n)}y$ si y solo si $x - y \in (n)$. La relación $\tau_{(n)}$ es multiplicativa y preserva asociados si $n = 1$ ó $n = 2$, mientras que es divisible solo cuando $n = 1$, para más detalle ver [2], [9] y [10].

2.3. Propiedades Estructurales

Recientemente se han estudiado propiedades estructurales de las factorizaciones (en elementos irreducibles) más débiles que las de un UFD (Dominio de Factorización Única por sus iniciales del inglés). Por ejemplo: Dominios de Factorización Finita (FFD), Dominios de Factorización Acotada (BFD), Dominios de Factorizaciones Irreducibles de Igual Longitud (HFD), Dominios con la Condición Ascendente de Cadenas de Ideales Principales (ACCP) (para las definiciones de estas estructuras, considerar $\tau = \tau_D$ en la definición 6). Estas propiedades de factorizaciones fueron estudiadas en detalle en [6] y las implicaciones entre ellas se muestran en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \text{FFD} \arrow[dr] & & & \\
\text{UFD} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{BFD} \arrow[r] & \text{ACCP} \arrow[r] & \text{Atómico} \\
& \text{HFD} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Figura 2–1: Propiedades de factorizaciones usuales en un dominio integral.

de la Figura 2–1.

Cada una de las anteriores propiedades estructurales pueden redefinirse en la teoría de τ-factorizaciones de la siguiente manera.

Definición 6. Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$.

1. D satisface la *condición* de *cadenas ascendentes de ideales principales con respecto* a τ (τ-$ACCP$) si para cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $D^\sharp$, con $a_{n+1}|_\tau a_n$ para todo $n \geq 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ (el cual depende de la sucesión) tal que $a_{k+1} \sim a_k$ para cada $k \geq N$.

2. Se dice que D es un *dominio de* τ-$factorización$ *única* (τ-UFD), si D es un dominio τ-atómico y para cualesquiera dos τ-factorizaciones τ-atómicas, tales que $\lambda x_1 \cdots x_n = \mu y_1 \cdots y_m$, entonces $n = m$ y $x_i \sim y_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ (después de un reorden si es necesario).

3. El dominio D se llama un *dominio de* τ-$factorización$ *acotada* (τ-BFD) si D es τ-atómico y para cada $x \in D^\sharp$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que si $x = \lambda x_1 \cdots x_n$ es una τ-factorización de x, entonces $n \leq N_x$.

4. El dominio D es llamado un *dominio de* τ-$factorizaciones$ *de igual longitud* (τ-HFD) si D es τ-atómico y para cualesquiera dos τ-factorizaciones τ-atómicas, $\lambda x_1 \cdots x_n = \mu y_1 \cdots y_m$ implica que $m = n$.

5. El dominio D es un *dominio de* τ-*factorización finita* (τ-FFD) si D es un dominio τ-atómico y cada $x \in D^\sharp$ tiene solo un número finito de τ-factorizaciones en elementos τ-irreducibles, salvo orden y asociados.

6. El dominio D es llamado un *dominio con un número de* τ-*factores* τ-*irreducibles* (dominio con τ-*idf*) si cada $x \in D^\sharp$ tiene un número de τ-factores no asociados que son τ-átomos.

El lector puede verificar que para cualquier dominio integral D y cualquier relación simétrica τ sobre $D^\sharp$, se tiene que si D satisface la condición ACCP, entonces D satisface τ-ACCP; y la propiedad BFD implica τ-BFD.

En la teoría de τ-factorizaciones se pueden obtener conexiones entre estas propiedades estructurales, parecidas a las obtenidas en la teoría usual de factorizaciones. Anderson y Frazier en [2] y [5] presentan resultados donde muestran para qué tipos de relaciones se dan implicaciones entre las τ-propiedades estructurales mencionadas anteriormente; y bajo qué condiciones las propiedades se heredan de la teoría usual a la nueva teoría.

Teorema 4. [Teoremas 2.4, 2.5 y 2.6 [2]] Sea D un dominio integral.

1. Si todo $x \in D^\sharp$ tiene una τ-factorización en $|_\tau$-primos, entonces D es un τ-UFD. Además, $x \in D^\sharp$ es τ-irreducible si y solo si es asociado a un elemento $|_\tau$-primo.

2. Si τ es una relación divisible y D es un τ-UFD, entonces todo elemento τ-átomo es $|_\tau$-primo. Por lo tanto, D es τ-UFD si y solo si D es τ-atómico y cada τ-irreducible es un $|_\tau$-primo.

3. Si D satisface τ-ACCP, donde τ es una relación divisible, entonces D es un dominio τ-atómico.

4. Si τ es una relación divisible y D es un τ-BFD, entonces D satisface la condición τ-ACCP.

Ortiz-Albino [9] generalizó los resultados obtenidos por Anderson y Frazier, considerando dos relaciones divisibles $\tau_1 \leq \tau_2$ $(\tau_1 \subseteq \tau_2)$ y demostró qué tipo de estructuras se heredan.

Teorema 5. [Teorema 4.11 [9]] Sea D un dominio integral, τ_1 y τ_2 relaciones simétricas sobre $D^\sharp$, tales que $\tau_1 \leq \tau_2$. Si D satisface τ_2-ACCP, entonces satisface τ_1-ACCP.

Teorema 6. Sea D un dominio integral y $\tau_1 \leq \tau_2$ relaciones divisibles sobre $D^\sharp$.

1. (Teorema 4.12 [9]) Si τ_2 es una relación multiplicativa y D es un τ_2-UFD, entonces D es un τ_1-UFD.

2. (Lema 4.13 [9]) Si D es un τ_2-BFD, entonces D es un τ_1-BFD.

3. (Lema 4.14[9]) Si D es un τ_2-FFD, entonces D es un τ_1-FFD.

Los resultados de Anderson y Frazier, y posteriormente los de Ortiz-Albino, se resumen en el diagrama de la Figura 2–2. En esta, las flechas marcadas con un * indican que es suficiente que τ_1 y τ_2 sean relaciones divisibles para que se dé la implicación determinada por la flecha; mientras que el resto de las implicaciones se obtienen de manera natural.

Note que si τ_1 y τ_2 son relaciones divisibles, la mayoría de las τ_2-propiedades estructurales implican las correspondientes τ_1-propiedades. Además, para relaciones divisibles se obtiene un diagrama estructural similar al obtenido por Anderson, Anderson y Zafrullah en [6] para la teoría usual de factorizaciones (ver Figura 2–1). En resumen, la teoría de τ-factorizaciones es más parecida a la teoría usual, cuando τ

$$\begin{tikzcd}
\tau_2\text{-UFD} \arrow[r] \arrow[dd, "*"'] & \tau_2\text{-FFD} \arrow[r] \arrow[d, "*"'] & \tau_2\text{-BFD} \arrow[r, "*"] \arrow[dd, "*"'] & \tau_2\text{-ACCP} \arrow[r, "*"] \arrow[dd] & \tau_2\text{-Atómico} \\
 & \tau_1\text{-FFD} \arrow[dr] & & & \\
\tau_1\text{-UFD} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau_1\text{-BFD} \arrow[r, "*"] & \tau_1\text{-ACCP} \arrow[r, "*"] & \tau_1\text{-Atómico} \\
 & \tau_1\text{-HFD} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Figura 2–2: Propiedades estructurales cuando $\tau_1 \leq \tau_2$ (* significa que τ_1 y/o τ_2 son relaciones divisibles).

es una relación divisible. Lo que hace que las relaciones divisibles sean muy útiles en esta teoría. Dado esto, la pregunta que queda por resolver es ¿qué pasa con las τ-factorizaciones si la relación τ no es divisible?

Capítulo 3
τ-FACTORIZACIONES, τ RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

El objetivo de esta investigación es caracterizar la teoría de τ-factorizaciones cuando τ es una relación de equivalencia. En este capítulo se mostrarán los primeros resultados obtenidos, algunos teoremas y proposiciones referentes a las relaciones de equivalencia y sus efectos en la teoría de τ-factorizaciones. Además, se presentan algunos ejemplos de relaciones de equivalencia que preservan asociados o son multiplicativas. Un ejemplo de una relación de equivalencia que es divisible, se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 1. Sea D un dominio integral y $\tau \subseteq D^\sharp \times D^\sharp$. Si τ es reflexiva y divisible, entonces $\tau = \tau_D$.

Demostración.
Suponer que τ es una relación divisible y reflexiva. Entonces, $(xy)\tau(xy)$ para todo $x, y \in D^\sharp$. Note que $x|(xy)$ y como τ es divisible, entonces $x\tau(xy)$. Igualmente, $y|(xy)$ y por la divisibilidad de τ, se concluye que $x\tau y$. Por tanto $\tau = \tau_D$.

$\square$

En consecuencia, dado un dominio integral D, τ_D es la única relación de equivalencia de elementos de $D^\sharp$ que es divisible, esto es, al considerar una relación de equivalencia divisible τ se obtiene la teoría usual de factorizaciones. El objetivo principal de este trabajo se centra en relaciones de equivalencia que no son divisibles, es decir, relaciones de equivalencia distintas de τ_D.

Ejemplo 2. Sean $x, y \in \mathbb{Z}^\sharp$, se define $x\tau y$ si y sólo si $|xy|$ es un cuadrado perfecto, esto es, si y sólo si existe $a \in \mathbb{Z}^\sharp$ tal que $|xy| = a^2$. Entonces, τ es una relación de equivalencia que preserva asociados pero no es una relación multiplicativa.
En las $XVIII$ Olimpiadas Colombianas de Matemáticas (nivel intermedio) se definió una relación similar sobre el conjunto de números enteros de la siguiente manera: $x, y \in \mathbb{Z}$ se dicen números amigos si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $xy = k^2$, en este caso la relación que se obtiene es una relación de equivalencia pero no preserva asociados.

Notación. Si τ es una relación de equivalencia sobre $D^\sharp$, la clase de equivalencia del elemento $x \in D^\sharp$ con respecto a τ, se denota por $[x]_\tau$, o simplemente $[x]$, cuando no haya duda con respecto a que relación se está considerando la clase de equivalencia.

Proposición 2. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia sobre $D^\sharp$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. τ es una relación multiplicativa.

2. El dominio D admite τ-refinamientos reducidos.

3. Para cada $x \in D^\sharp$, la clase de equivalencia $[x]$ es un conjunto cerrado bajo el producto.

Demostración.

(1)$\Longrightarrow$(2) Sea $\lambda x_1 \cdots x_n$ una τ-factorización. Suponer que para algún $l \in \{1, \ldots, n\}$ existe una τ-factorización reducida $x_l = y_1 \cdots y_k$. Como τ es reflexiva y $y_1 \tau y_2$, dado que τ es multiplicativa, se tiene que $y_1 \tau y_1 \cdot y_2$. Por lo tanto, $y_1 \tau y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$. Continuando con este proceso se obtiene que $y_1 \tau x_l$, por lo tanto $y_j \tau x_l$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Luego, $y_j \tau x_i$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ y todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, por ende, $x_1 \cdots x_{l-1} \cdot y_1 \cdots y_k \cdot x_{l+1} \cdots x_n$ es una τ-factorización. En consecuencia, D admite τ-refinamientos reducidos.

(2)$\Longrightarrow$(3) Sea $x \in D^\sharp$ arbitrario. Si $y, z \in [x]$, entonces los productos $y \cdot z$ y $(yz) \cdot (yz)$ son τ-factorizaciones, por lo tanto $y \cdot z \cdot (yz)$ es una τ-factorización. Así, $yz \in [y] = [x]$. Esto demuestra que $[x]$ es un conjunto cerrado bajo el producto.

(3)$\Longrightarrow$(1) Si $x\tau y$ y $x\tau z$, entonces $y, z \in [x]$. Luego $yz \in [x]$, esto implica que $x\tau(yz)$. Entonces τ es una relación multiplicativa.

$\square$

En [3], los autores definen el τ-centralizador de un elemento $x \in D^\sharp$ como el conjunto $Z_\tau(x) = \{y \in D^\sharp : y\tau x\}$. El lector puede obsevar que para relaciones de equivalencia, el τ-centralizador $Z_\tau(x)$ coincide con la clase de equvalencia $[x]$, para cualquier $x \in D^\sharp$. Por lo tanto, (3) en la Proposición 2 se puede reescribir como "para todo $x \in D^\sharp$, $Z_\tau(x)$ es un conjunto cerrado bajo el producto". Este último enunciado es equivalente al enunciado (1) de la Proposición 2, aunque τ no sea una relación de equivalencia.

Definición 7 (Relaciones Primas)**.** Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica en $D^\sharp$. Se dice que τ es *prima* si dados $x, y, z \in D^\sharp$, $x\tau(yz)$ implica que $x\tau y$ o $x\tau z$. (Ver Capítulo 5 en [3]).

Proposición 3. Sea D un dominio integral y τ una relación prima sobre $D^\sharp$. Entonces τ preserva asociados. Si además τ es una relación de equivalencia, τ es multiplicativa. En conclusión, una relación de equivalencia prima es una relación multiplicativa y que preserva asociados.

Demostración.

Sean $x, y \in D^\sharp$ y $\lambda \in U(D)$. Si $x\tau y$, entonces $x\tau\lambda^{-1}(\lambda y)$, por lo tanto $x\tau\lambda^{-1}$ o $x\tau\lambda y$. Pero $(x, \lambda^{-1}) \notin \tau$, así que $x\tau\lambda y$. Esto prueba que τ es una relación que preserva asociados. Si $x, y, z \in D^\sharp$, τ es una relación de equivalencia prima y $x\tau y$ y $x\tau z$. Entonces $(yz)\tau(yz)$ por reflexividad; y de la primalidad de τ se deduce que $(yz)\tau y$ o $(yz)\tau z$. Sin pérdida de generalidad, suponer que $(yz)\tau y$; como τ es transitiva y $x\tau y$, entonces $x\tau(yz)$. Por ende τ es una relación multiplicativa.

□

Proposición 4. Sea D un dominio integral. Suponer que para todo $\lambda \in U(D)$, existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{n_\lambda} = 1$. Si τ es una relación de equivalencia multiplicativa sobre $D^\sharp$, entonces τ preserva asociados.

Demostración.

Sea $x \in D^\sharp$ y $\lambda \in U(D)$, entonces $x\tau(x^{n_\lambda})$ y $\lambda x\tau(\lambda x)^{n_\lambda}$, dado que τ es reflexiva y multiplicativa, así que $\lambda x\tau x^{n_\lambda}$. Por lo tanto, dado que τ es transitiva se tiene $\lambda x\tau x$.

□

Note que no es necesario asumir que τ es una relación simétrica, pero si debe ser una relación multilicativa por ambos lados, es decir, si $x\tau y$ y $x\tau z$, entonces $x\tau(yz)$; $y\tau x$ y $z\tau x$ implica que $(yz)\tau x$. Si $x\tau y$, se obtiene que $y\tau(\mu y)$ para cualquier $\mu \in U(D)$ (de forma similar a como se hizo para x). Por transitividad se obtiene $(\lambda x)\tau(\mu y)$. Más aún, la Proposición 4 indica que si $|U(D)| < \infty$, entonces toda relación de equivalencia multiplicativa sobre $D^\sharp$, preserva asociados.

Teorema 7. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia prima sobre $D^\sharp$.

1. Si $x|_\tau y$, entonces $x\tau y$.

2. Si $x|_\tau y$ y $y|_\tau z$ entonces $x|_\tau z$.

3. Si $x|_\tau y$ y $y\tau z$, entonces $(x \cdot z)|_\tau(y \cdot z)$.

Demostración.

Sean $x, y, z \in D^\sharp$. (1) Si x es un τ-factor de y, entonces existe $z \in D^\sharp$ tal que $y = x \cdot z$ es una τ-factorización de y (se puede asumir que es una τ-factorización con sólo dos τ-factores, dado que τ es una relación multiplicativa). Dado que $x\tau x$, $x\tau z$ y τ es una relación multiplicativa se obtiene que $x\tau(x \cdot z)$, esto es, $x\tau y$. (2) Si $x|_\tau y$ y $y|_\tau z$, existen $y_1, z_1 \in D^\sharp$ tales que $y = x \cdot y_1$ y $z = y \cdot z_1$ son τ-factorizaciones de y, z respectivamente, entonces por la primera parte $y\tau x$ y $y\tau y_1$. Por lo tanto $z_1\tau x$ y $z_1\tau y_1$. Entonces z admite el siguiente τ-refinamiento $z = y \cdot z_1 = x \cdot y_1 \cdot z_1$ que es lo deseado. (3) Si x es un τ-factor de y y $z \in [y]$, entonces $x \cdot z$ es un τ-producto. Si $y = \lambda x$, como $z\tau y$ y τ preserva asociados entonces $z\tau x$, y $y \cdot z = \lambda x \cdot z$. Por lo tanto $(x \cdot z)|_\tau(y \cdot z)$. Suponer que x no es un asociado de y, entonces $y = x \cdot y_1$ es una τ-factorización de y para algún $y_1 \in D^\sharp$; así que

$$y \cdot z = x \cdot y_1 \cdot z = (x \cdot z) \cdot y_1$$

son todos τ-productos. Por lo tanto $x \cdot z$ es un τ-factor de $y \cdot z$.

$\square$

Note que en la demostración de estos resultados se utiliza el hecho de que τ es una relación multiplicativa y que preserva asociados. Por ende, el Teorema 7 es válido para relaciones de equivalencia que preserven asociados y sean multiplicativas. Además, note que todos los τ-factores de un elemento $x \in D^\sharp$ pertenecen a $[x]$, o sea, las clases de equivalencia son conjuntos cerrados bajo los τ-factores. Por (2) se tiene que cualquier τ-factorización admite τ-refinamientos, entonces el ser una relación divisible es una condición suficiente, pero no necesaria para que el dominio D admita τ-refinamientos.

Corolario 1. Sean D y τ como en el Teorema 7 y sean $x, y, x', y' \in D^\sharp$.

1. Si $x\tau y$, $x'|_\tau x$ y $y'|_\tau y$, entonces $x'\tau y'$.

2. Si $x'\tau x$ y $x'|_\tau y$, entonces $x\tau y$.

Ejemplo 3. Sean $x, y \in D^\sharp$, donde D es un dominio de factorización única; se define $x\tau_1 y$ si y sólo si existen $\lambda, \mu \in U(D)$, $n, m \in \mathbb{N}$ y $z \in D^\sharp$ tales que $x = \lambda z^n$ y $y = \mu z^m$. Si $x\tau_1 y$ y $y\tau_1 v$, con $x, y, v \in D^\sharp$, entonces existen $m, n, r, s \in \mathbb{N}$; $\lambda, \mu, \gamma, \delta \in U(D)$ y $z, w \in D^\sharp$ tales que $x = \lambda z^n$, $y = \mu z^m = \gamma w^r$ y $v = \delta w^s$. Entonces $\mu z^m = \gamma w^r$. Como D es un UFD, w y z tienen factorizaciones atómicas únicas (salvo orden y asociados). Suponer que dichas factorizaciones son $w = \gamma_1 p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ y $z = \mu_1 q_1^{m_1} \cdots q_l^{m_l}$, donde los p_i (resp. q_i) son primos no asociados.

Reemplazando, se obtiene que $y = \gamma\gamma_1 p_1^{r_1 r} \cdots p_k^{r_k r} = \mu\mu_1 q_1^{m_1 m} \cdots q_l^{m_l m}$. Por la unicidad de las factorizaciones atómicas $k = l$ y después de un reorden (si es necesario) $p_i \sim q_i$ para todo $i = \{1, \ldots, k\}$. Esto implica que $r_i r = m_i m$ para todo $i\{1, \ldots, k\}$. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $(a, b) = 1$ y $\frac{a}{b} = \frac{r}{m} = \frac{m_i}{r_i}$. Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $c_i \in \mathbb{N}$ tal que $m_i = ac_i$ y $r_i = bc_i$. Por lo tanto $w = \gamma_1 u^b$ y $z = \mu_1 u^a$, donde $u = p_1^{c_1} \cdots p_k^{c_k}$. Como $x = \lambda(\mu_1 u^a)^n = \lambda_1 u^{an}$ y $v = \delta(\gamma_1 u^b)^s = \delta_1 u^{bs}$, se tiene que $x\tau_1 v$. De manera que τ_1 es una relación transitiva.

Para demostrar que τ_1 preserva asociados, suponer que $x\tau_1 y$ y $x' \sim x$ entonces $x' = \gamma x$ para algún $\gamma \in U(D)$. Por ende $x' = \gamma\lambda z^n$, dado que $x = \lambda z^n$ y $y = \mu z^m$, y así $x'\tau_1 y$. En conclusión τ_1 es una relación que preserva asociados.

Para demostrar que τ_1 es multiplicativa, suponer que $x\tau_1 y$ y $y\tau_1 w$ entonces

$$x = \lambda z^n, \quad y = \mu z^m, \quad w = \gamma z^r,$$

para ciertos $m, n, r \in \mathbb{N}$; $\lambda, \mu, \gamma \in U(D)$ y $z \in D^\sharp$. Así $yw = \mu\gamma z^{m+r}$, por lo tanto $x\tau_1 y$. Por lo que se concluye que τ_1 es una relación multiplicativa.

Note que si p y q son elementos primos de D, $(pq)\tau_1(pq)$ pero $(p, pq) \notin \tau_1$ y $(q, pq) \notin \tau_1$. Lo que implica que τ_1 no es una relación prima.

Conclusión τ_1 es un ejemplo de una relación de equivalencia que es multiplicativa, preserva asociados pero no es una relación prima.

Se debe tener cuidado cuando se escribe $(x \cdot y)|_\tau z$ y $x \cdot y$ es un τ-producto. Se dice que $(x \cdot y)|_\tau z$ como una τ-factorización, si existen $x_1, \ldots, x_m \in D^\sharp$ y $\lambda \in U(D)$ tales que $z = \lambda x \cdot y \cdot x_1 \cdots x_m$ es una τ-factorización de z. De otra manera se dice que $(x \cdot y)|_\tau z$ como un elemento. La aclaración tiene necesidad cuando se considera el τ-producto de varios elementos que está τ-dividiendo. La Proposición 5 establece cuándo un producto τ-divide como una τ-factorización a un elemento z en $D^\sharp$.

Proposición 5. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados. Sean $p_1, \ldots, p_k$ elementos $|_\tau$-primos no asociados y $x \in D^\sharp$. Entonces,

1. Si cada $p_i|_\tau x$, entonces $p_1 \cdots p_k|_\tau x$ (como una τ-factorización).

2. Si $p_i|_\tau x$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, y $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}|_\tau x$ como un elemento, entonces $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}|_\tau x$ como una τ-factorización.

Demostración.

1. Existe $x_1 \in D^\sharp$ tal que $x = p_1 \cdot x_1$ es una τ-factorización. Como p_2 es un τ-factor de x, entonces $p_2|_\tau p_1$ o $p_2|_\tau x_1$, de esta manera $p_2|_\tau x_1$ ya que $p_2 \nmid_\tau p_1$. Por lo tanto, existe $x_2 \in D^\sharp$ tal que $x_1 = p_2 \cdot x_2$; por tal razón $p_2 \tau x_1$ y $x_2 \tau x_1$. Luego, $x = p_1 \cdot p_2 \cdot x_2$ es una τ-factorización de x. Por inducción se obtiene que existe $x_k \in D^*$ tal que $p_1 \cdots p_n \cdot x_k$ (o $\lambda p_1 \cdots p_k$, $x_k = \lambda \in U(D)$, en caso de que $x \sim p_1 \cdots p_k$) es una τ-factorización.

2. Por la parte anterior $p_1 \cdots p_k|_\tau x$ como una τ-factorización, así que $p_i \tau x$ para todo i y debido a que τ es multiplicativa, se tiene que $p_i^{n_i} \tau x$ para todo i.

Por hipótesis $(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k})|_\tau x$ (como elemento), entonces existe $y \in D^\sharp$ tal que $x = (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}) \cdot y$ es una τ-factorización de x. Esto implica que $y \tau x$ por transitividad $p_i^{n_i} \tau y$ para todo i. Por lo que se puede construir $x = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \cdot y$ como una τ-factorización de x.

$\square$

Teorema 8. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados. Si $x_1 \cdots x_n = p_1 \cdots p_m$ son dos τ-factorizaciones, donde cada p_i es un $|_\tau$-primo. Entonces,

1. $m \geq n$,

2. Si cada x_i es un τ-átomo, entonces $n = m$ y $x_i \sim p_i$, después de un reorden (si es necesario).

3. Si $m = n$ y los p_i son elementos $|_\tau$-primos no asociados, entonces $x_i \sim p_i$.

Demostración.

1. (Por inducción sobre m) Supóngase que para cualesquiera dos τ-factorizaciones $y_1 \cdots y_k = q_1 \cdots q_{m-1}$ se tiene que $m - 1 \geq k$, donde cada uno de los q_i es un elemento $|_\tau$-primo y $m \geq 2$ (hipótesis de inducción). Dado que $x_1 \cdots x_n = p_1 \cdots p_m$, entonces (sin pérdida de generalidad) $p_i|_\tau x_1$. Existe $a_1 \in D^*$ tal que $x_1 = p_1 \cdot a_1$ ($x_1 = a_1 p_1$ en caso de que $a_1 \in U(D)$). Entonces, $a_1 \cdot p_1 \cdot x_2 \cdots x_n = p_1 \cdots p_m$ (resp. $a_1 p_1 \cdot x_2 \cdots x_n = p_1 \cdots p_m$), cancelando p_1 se obtiene $a_1 \cdot x_2 \cdots x_n = p_2 \cdots p_m$ (resp. $a_1 x_2 \cdots x_n = p_2 \cdots p_m$). Por la hipótesis de inducción se deduce que $m - 1 \geq n$. Entonces $m \geq n + 1 > n$, esto es $m > n$

2. Si los x_i son τ-átomos, entonces $p_1|_\tau x_i$ para algún i, y así $p_1 \tau x_i$. Supóngase que $p_1 \tau x_1$, existe $\lambda_1 \in U(D)$ tal que $x_1 = \lambda_1 p_1$. Luego, $\lambda_1 x_2 \cdots x_n = p_2 \cdots p_m$ y $p_2|_\tau x_2$. por lo que existe $\lambda_2 \in U(D)$ tal que $x_2 = \lambda_2 p_2$; entonces $\lambda_1 \lambda_2 x_3 \cdots x_n = p_3 \cdots p_m$. Continuando con este proceso se obtiene que $m = n$ y $p_1 \sim x_i$ para cada i.

3. Para esta parte, suponer que $m = n$. Entonces existe $a_1 \in D^*$ tal que $x_1 = a_1 \cdot p_1$ si $a_1 \in D^\sharp$; o $x_1 = a_1 p_1$, si $a_1 \in U(D)$. Si $a_1 \in D^\sharp$, entonces $a_1 \cdot p_1 \cdot x_2 \cdots x_n = p_1 \cdots p_n$. Cancelando p_1 se obtiene que $a_1 \cdot x_2 \cdots x_n = p_2 \cdots p_n$, pero esto contradice (1). Por lo tanto, $a_1 \in U(D)$, y así $p_1 \sim x_1$. Cancelando, $\lambda_1 x_2 \cdots x_n = p_2 \cdots p_n$. Sin pérdida de generalidad $p_2|_\tau x_2$, por lo tanto $p_2 \sim x_2$, continuando con este proceso se obtiene lo pedido.

$\square$

3.1. Estructuras

En esta sección, se logra establecer un análogo al Teorema 6 para relaciones de equivalencia que son multiplicativas y que preservan asociados.

Teorema 9. Sea D un τ-UFD, donde τ es una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados. Si x es τ-átomo, entonces x es un elemento $|_\tau$-primo.

Demostración.

Sea x un τ-átomo. Suponer que $x|_\tau x_1 \cdot x_2$, donde $x_1 \cdot x_2$ es una τ-factorización. Entonces, existe $y \in D^\sharp$ tal que $x\tau y$ y $x \cdot y = x_1 \cdot x_2$. Como D es un dominio de τ-factorización única, los elementos y, x_1 y x_2 tienen τ-factorizaciones únicas en τ-átomos (salvo asociados). Esto es,

$$y = y_1 \cdots y_n, \quad x_1 = z_1 \cdots z_m \quad \text{y} \quad x_2 = v_1 \cdots v_k;$$

entonces $x \cdot y_1 \cdots y_n = z_1 \cdots z_m \cdot v_1 \cdots v_k$ (las expresiones $x \cdot y_1 \cdots y_n$ y $z_1 \cdots z_m \cdot v_1 \cdots v_k$ son τ-refinamientos de $x \cdot y$ y $x_1 \cdot x_2$, respectivamente; es decir, ambos productos son τ-factorizaciones). Por lo tanto, $n + 1 = k + m$ y x es asociado a algún z_i o asociado a algún v_j. Esto implica que $x|_\tau x_1$ o $x|_\tau x_2$. Por lo tanto, x es un elemento $|_\tau$-primo.

$\square$

Este teorema garantiza que en un τ-UFD, donde τ es una relación de equivalencia, multiplicativa y preserva asociados, los elementos $|_\tau$-primos son exactamente los τ-átomos del dominio. En el siguiente resultado se dan unas equivalencias para determinar cuándo un dominio integral D es un dominio de τ-factorización única.

Teorema 10. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia que preserva asociados y es multiplicativa. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes

1. D es τ-UFD.

2. Todo $x \in D^\sharp$ tiene una τ-factorización en elementos $|_\tau$-primos.

3. D es un dominio τ-atómico y todo elemento τ-irreducible es un $|_\tau$-primo.

Demostración.

(1)$\Longrightarrow$(2) Se deduce del Teorema 9.

(2)$\Longrightarrow$(3) Como todo elemento en el dominio D tiene una τ-factorización en elementos $|_\tau$-primos y cada elemento $|_\tau$-primo es un τ-átomo, entonces D es un dominio τ-atómico. Sea x un elemento τ-irreducible. Por hipótesis x posee una τ-factorización en $|_\tau$-primos, pero al ser un elemento τ-irreducible los únicos elementos τ-primos que lo dividen son asociados, es decir $x \sim y$, donde y es un elemento τ-primo. Suponer que $x|_\tau(v \cdot z)$, donde $v \cdot z$ es una τ-factorización, entonces por la parte (5) del Teorema 2 se obtiene que $y|_\tau(v \cdot z)$. Por lo tanto, $y|_\tau v$ o $y|_\tau z$, y por la parte (4) del Teorema 2, $x|_\tau v$ o $x|_\tau z$. Esto demuestra que x es un elemento $|_\tau$-primo.

(3)$\Longrightarrow$ (1) Por hipótesis, D es un dominio τ-atómico, entonces el Teorema 8 garantiza que D es un τ-UFD.

□

Teorema 11. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados. Si D satisface la condición τ-ACCP, entonces D es un dominio τ-atómico.

Demostración.

Supóngase que D no es un dominio τ-atómico. Entonces, existe un elemento x distinto de cero y no unidad, que no es un elemento τ-irreducible. Por ende, posee una τ-factorización, pero no en τ-átomos. Por lo tanto, $x = x_1 \cdot x_2$ para algún $x_1, x_2 \in D^\sharp$. Al menos uno de estos τ-factores de x no es un τ-átomo. Sin pérdida de generalidad, suponga que x_1 no es un τ-átomo. Sea $y_1 = x_1$, entonces $y_1 = x_{21} \cdot x_{22}$ para algún $x_{21}, x_{22} \in D^\sharp$. Al menos uno de estos τ-divisores de y_1 no es un τ-átomo (de lo contrario x tiene una τ-factorización τ-atómica). Si $y_2 = x_{21}$ no es τ-irreducible, entonces existen $x_{31}, x_{32} \in D^\sharp$ tales que $y_2 = x_{21} = x_{31} \cdot x_{32}$. Siguiendo con este proceso, se obtiene una sucesión infinita $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $D^\sharp$ tal que $y_{n+1}|_\tau y_n$ y $y_n \not\approx y_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto contradice la hipótesis, por ende D es τ-atómico.

$\square$

Teorema 12. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia, multiplicativa y que preserva asociados. Si D es un τ-BFD, entonces D satisface la condición τ-ACCP.

Demostración.

Suponer que D es un dominio τ-atómico que no satisface la condición τ-ACCP. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos distintos de cero y de unidades, tal que $x_{n+1}|_\tau x_n$ y $x_{n+1} \not\approx x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, ningún x_n es un τ-átomo.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in D^\sharp$ tal que $x_n = y_n \cdot x_{n+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 \cdot x_2 &= y_1 \cdot y_2 \cdot x_3 \\ &\vdots \\ &= y_1 \cdot y_2 \cdots y_{n-1} \cdot x_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se obtiene que cada una de estas expresiones es una τ-factorización (pero ninguna es una τ-factorización τ-atómica). Debido a que D es un dominio τ-atómico, cada uno de los τ-productos en la Ecuación 3.1 se puede reescribir como una τ-factorización τ-atómica. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_1 tiene una τ-factorización con al menos n τ-factores τ-irreducibles, esto demuestra que D no es un τ-BFD.

$\square$

Ejemplo 4. Sea D un UFD y para cada $x \in D^\sharp$ sea $I_x = \{p \in D^\sharp : p \,\text{es primo y}\; p|x\}$. Si $x, y \in D^\sharp$, se define $x\tau_2 y$ si y sólo si $I_x = I_y$. En consecuencia, τ_2 es una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados. Además, si $x = p_1p_2 \in D^\sharp$ donde p_1, p_2 son primos, entonces $x\tau(p_1p_2)$, $(x, p_1) \notin \tau$ y $(x, p_2) \notin \tau$; por lo tanto τ_2

no es una relación prima. Ahora, dado que D es un UFD entonces D es un dominio τ_2-atómico, τ_2-BFD, τ_2-FFD y satisface τ_2-ACCP.

Proposición 6. Si D es un τ-FFD, donde τ es una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados, entonces D es un dominio con τ-idf

Demostración.

Todo $x \in D^\sharp$ posee sólo un número finito de τ-factorizaciones en τ-átomos (salvo asociados). Sean las τ-factorizaciones τ-atómicas de x:

$$\begin{aligned} x &= x_{11}\cdots x_{1k_1} \\ &\vdots \\ &= x_{n1}\cdots x_{nk_n}, \end{aligned}$$

Entonces, x posee a lo más $k_1+\cdots+k_n$ τ-divisores que son τ-átomos. En conclusión, D es un dominio con τ-idf.

$\square$

Observación 1. En un dominio de τ-factorización finita, todo $x \in D^\sharp$ posee un número finito de τ-factorizaciones τ-atómicas aunque el número de τ-factorizaciones puede no ser finito. Sin embargo, si la relación τ es una relación de equivalencia multiplicativa que preserva asociados, imitando la demostración del Teorema 5.1 en [6], se tiene que en un τ-FFD todo elemento no cero y no unidad posee un número finito de τ-factorizaciones (salvo asociados). Este hecho permite demostrar el siguiente resultado.

Proposición 7. Si D es un dominio τ-atómico con τ-idf, donde τ es una relación como en la proposición anterior, entonces D es un τ-FFD.

$\square$

Teorema 13. Sea D un dominio integral y $\tau_1 \leq \tau_2$ relaciones de equivalencia multiplicativas y que preservan asociados. Si D es un τ_2-BFD entonces D es τ_1-BFD.

Demostración.

Sea $x \in D^\sharp$ arbitrario, como D es un τ_2-BFD, entonces D satisface τ_2-ACCP y D es un dominio τ_1-atómico. Cualquier τ_1-factorización τ_1-atómica $x = x_1 \cdots x_k$ de x, se puede τ_2-refinar. Es decir, si $x_i = x_{i1} \cdots x_{in_i}$ es una τ_2-factorización τ_2-atómica para cada x_i, $1 \leq i \leq k$; $x = x_{11} \cdots x_{1n_1} \cdots x_{k1} \cdots x_{kn_k}$ es una τ_2-factorización τ_2-atómica de x. Luego, $k \leq n_1 + \cdots + n_k \leq N_{\tau_2}(x)$. Entonces, toda τ_1-factorización τ_1-atómica de x es de longitud menor o igual que $N_{\tau_2}(x)$; por tanto D es un τ_1-BFD.

$\square$

Teorema 14. Sean D, τ_1 y τ_2 como en el Teorema 13. Si D es un τ_2-FFD, entonces D es un τ_1-FFD.

Demostración.

Es claro que D es un dominio τ_1-atómico. Sea $x \in D^\sharp$ arbitrario, entonces x posee sólo un número finito de τ_2-factorizaciones (salvo asociados), por lo tanto x tiene un número finito de τ_1-factorizaciones en τ_1-átomos. Por consiguiente, D es τ_1-FFD.

$\square$

$$\begin{tikzcd}
\tau_2\text{-UFD} \arrow[r] & \tau_2\text{-FFD} \arrow[r] \arrow[d, "+"'] & \tau_2\text{-BFD} \arrow[r, "+"] \arrow[dd, "+"'] & \tau_2\text{-ACCP} \arrow[r, "+"] \arrow[dd] & \tau_2\text{-Atómico} \\
 & \tau_1\text{-FFD} \arrow[dr] & & & \\
\tau_1\text{-UFD} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau_1\text{-BFD} \arrow[r, "+"] & \tau_1\text{-ACCP} \arrow[r, "+"] & \tau_1\text{-Atómico} \\
 & \tau_1\text{-HFD} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Figura 3–1: Propiedades estructurales cuando $\tau_1 \leq \tau_2$ (+ significa que τ_1 y/o τ_2 son relaciones de equivalencia multiplicativas y que preservan asociados).

Ejemplo 5. $\mathbb{Z}$ es un UFD y por lo tanto un FFD. Si $\tau_2 = \tau_D$ y $\tau_1 = \tau_{(2)}$ (definida en la parte (6) del Ejemplo 1), entonces por los teoremas anteriores se tiene que $\mathbb{Z}$

es $\tau_{(2)}$-FFD, $\tau_{(2)}$-BFD, satisface $\tau_{(2)}$-ACCP y es un dominio $\tau_{(2)}$-atómico. Por otra parte, $60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 30$ son dos $\tau_{(2)}$-factorizaciones $\tau_{(2)}$-atómicas de 60, sin embargo ninguno de los dos $\tau_{(2)}$-factores del $\tau_{(2)}$-producto del lado izquierdo es asociado a los $\tau_{(2)}$-factores del lado derecho. Este ejemplo demuestra que, $\mathbb{Z}$ no es un dominio de $\tau_{(2)}$-factorización única.

La Figura 3–1 resume los teoremas anteriores y provee un diagrama similar al que Ortiz-Albino demostró en [9]. Desafortunadamente no se obtiene el mismo diagrama dado que la propiedad de τ-factorizaciones τ-atómicas únicas no se hereda, sin embargo es un resultado muy aceptable para relaciones que no son divisibles.

3.2. τ-GCD

El objetivo de esta sección es definir el concepto de máximo común τ-factor y establecer propiedades cuando τ es una relación de equivalencia.

Definición 8 (τ-GCD)**.** Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$. Un elemento $d \in D^\sharp$ se dice un *máximo común* τ-*factor* de $x, y \in D^\sharp$ (se denota por $[x, y]_\tau$) si

1. $d|_\tau x$ y $d|_\tau y$.

2. Si $c|_\tau x$ y $c|_\tau y$, entonces $c|_\tau d$.

Si para cada $x, y \in D^\sharp$, $[x, y]_\tau$ existe, entonces se dice que D es un *dominio con* τ-*GCD*. Por notación se escribe $[x, y]_\tau = 1$, si x, y no poseen τ-factores comunes.

En [9], el autor estudió el τ-GCD mayormente cuando τ es una relación divisible, aunque se puede estudiar sin asumir divisibilidad. Note que para cambiar el artículo “un” al artículo “el” en la definición, se debe asumir, por lo menos, que τ es una relación que preserva asociados. Ortiz-Albino, también demostró que el τ-GCD no necesariamente existe. Por ejemplo, 2 y 6 son los $\tau_{(2)}$-factores en común de 12 y 36 sobre $\mathbb{Z}$. Pero, $6 \nmid_{\tau_{(2)}} 2$ y $2 \nmid_{\tau_{(2)}} 6$, por lo que el $\tau_{(2)}$-GCD de 12 y 36 no existe.

Teorema 15. Sea D un dominio con τ-GCD, donde τ es una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados. Sea $x, y, z \in D^\sharp$. Entonces

1. Si $x\tau y$, $x\tau z$ y $[xy, xz]_\tau \neq 1$, entonces $[xy, xz]_\tau = x \cdot [y, z]_\tau$.

2. Si $x\tau y$ y $x\tau z$ con $[x, y]_\tau = 1$ y $[x, z]_\tau = 1$, entonces $[x, y \cdot z]_\tau = 1$.

3. Si $[x, y]_\tau = d$, entonces $[\frac{x}{d}, \frac{y}{d}]_\tau = 1$.

4. Si $[x, y]_\tau = 1$ y $x\tau z$, entonces $x|_\tau y \cdot z$ implica que $x|_\tau z$.

Demostración.

Sean $x, y, z \in D^\sharp$,

1. Suponer que $[xy, xz]_\tau = d \neq 1$ y $c = [y, z]_\tau$. Dado que $x|_\tau(x \cdot y)$ y $x|_\tau(x \cdot z)$, entonces $x|_\tau d$. Por ende, $d = x \cdot c_1$, $y = c \cdot y_1$ y $z = c \cdot z_1$ para ciertos $c_1, y_1, z_1 \in D^*$; por lo tanto, $c\tau x$. Por Teorema 7 se obtiene que $x \cdot c$ es un τ-factor común de xy y xz. De esta manera $x \cdot c|_\tau d$ y por ende, $c|_\tau c_1$.

Por otra parte, $c_1|_\tau y$ dado que $x \cdot c_1|_\tau xy$. De manera similar se prueba que $c_1|_\tau z$. De aquí que $c_1|_\tau c$, y así $c_1 \sim c$.

2. Si $[x, y \cdot z]_\tau = d \neq 1$, entonces $y|_\tau x \cdot y$ y $y|y \cdot z$. Como D es un dominio con τ-GCD, $[x \cdot y, y \cdot z]_\tau \neq 1$. Por la parte anterior se obtiene que $[x \cdot y, y \cdot z]_\tau = y \cdot [x, z]_\tau = y$. Observe que $d|_\tau x \cdot y$ y $d|_\tau y \cdot z$, entonces $d|_\tau y$; lo cual es una contradicción, debido a que $d|_\tau x$ y $[x, y]_\tau = 1$. Por lo tanto, $[x, y \cdot z]_\tau = 1$.

3. Suponer que $[x, y]_\tau = d$ y $[\frac{x}{d}, \frac{y}{d}]_\tau = c$. Entonces, existen $x_1, x_2 \in D^*$ tales que $x_1 = \frac{x}{d} = c \cdot x_2$. Luego $x = d \cdot c \cdot x_2$. Similarmente, $y = d \cdot c \cdot y_2$ para algún $y_2 \in D^*$. Es decir, $d \cdot c$ es un τ-factor común de x y y. Entonces $d \cdot c|_\tau d$, y así $d \sim d \cdot c$. Por lo tanto, $c \in U(D)$ y $[\frac{x}{d}, \frac{y}{d}]_\tau = 1$

4. Si $[x, y]_\tau = 1$ y $x|_\tau y \cdot z$, entonces $z = z \cdot [x, y]_\tau = [x \cdot z, z \cdot y]_\tau$; pero $x|_\tau z \cdot x$ y $x|_\tau z \cdot y$, por consiguiente $x|_\tau z$.

□

Teorema 16. Si D es τ-UFD, donde τ es una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados, entonces D es un dominio con τ-GCD.

Demostración.

Sean $x, y \in D^\sharp$. Si x, y no tienen τ-divisores en común entonces $[x, y]_\tau = 1$. Asúmase que x, y tienen un τ-factor en común. Si $x \sim y$, entonces $[x, y]_\tau = 1$. Suponer que x y y no son asociados. Sean $x = \lambda \underbrace{x_1 \cdots x_1}_{r_1 veces} \cdots \underbrace{x_n \cdots x_n}_{r_n veces}$ y $y = \mu \underbrace{x_1 \cdots x_1}_{s_1 veces} \cdots \underbrace{x_n \cdots x_n}_{s_n veces}$ τ-factorizaciones τ-atómicas de x y y respectivamente, donde $r_i \geq 0$ y $s_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como τ es una relación multiplicativa, entonces $x = \lambda x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ y $y = \mu x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$ también son τ-factorizaciones. Por lo tanto, si $d = x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n}$, donde $v_i = min\{r_i, s_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces por la parte (1) del Teorema 7, $x_1 \tau (x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})$ para todo $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$. Dado que τ es transitiva, $x = d \cdot x_1^{r_1 - v_1} \cdots x_n^{r_n - v_1}$ y $y = d \cdot x_1^{s_1 - v_1} \cdots x_n^{s_n - v_1}$ son ambas τ-factorizaciones. En consecuencia, d es un τ-factor en común de x y y. Sea c un τ-factor común de x y y, entonces $x = z \cdot c$ es una τ-factorización de x para algún $z \in D^*$, esto es, $\lambda x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} = z \cdot c$. Dado que cada x_i es un elemento $|_\tau$-primo, entonces c es un elemento divisible por x_i para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir, c se puede escribir en la forma $c = \delta x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$, donde $\delta \in U(D)$ y $q_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $c|_\tau x$ y $c|_\tau y$, entonces $q_i \leq v_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $c|_\tau d$. Esto demuestra que $d = [x, y]_\tau$.

□

Se conoce que $\mathbb{Z}$ es un dominio con $\tau_{(0)}$-GCD, pero la relación $\tau_{(0)}$ no satisface las condiciones del Teorema 16. Si $n > 1$, $\mathbb{Z}$ no es un dominio con $\tau_{(n)}$-GCD. Más aún, $\mathbb{Z}$ es un dominio con $\tau_{(n)}$-GCD si y sólo si $\mathbb{Z}$ es un $\tau_{(n)}$-UFD. Pero $\mathbb{Z}$ es un $\tau_{(n)}$-UFD sólo si $n = 0, 1$; por ende, las relaciones $\tau_{(n)}$ no satisfacen las condiciones del Teorema 16. Un ejemplo de una relación de equivalencia que es multiplicativa y cumple las condiciones del anterior teorema es τ_D, donde D es un dominio con

GCD. Otro ejemplo de un dominio integral con τ-GCD, donde τ es una relación de equivalencia multiplicativa, se presenta en el Teorema 19 en el capítulo 4.

Capítulo 4
ALGUNAS EXTENSIONES DE RELACIONES DE EQUIVALENCIA

En este capítulo, el lector encontrará algunas extensiones que satisfacen propiedades específicas, tales como preservar asociados o ser multiplicativas. Aunque se pueden definir tales extensiones en forma general, se definen para relaciones de equivalencia (a menos que se indique lo contrario). Primero, se demuestra que toda relación simétrica sobre el conjunto de elementos no unidades y distintos de cero de un dominio integral D, puede extenderse a una relación simétrica sobre $D^\sharp$ que preserva asociados. Se examina qué características de τ conserva esta extensión; y se demuestra que cierto tipo de relaciones de equivalencia se comportan como relaciones que preservan asociados. Finalmente, se presenta una extensión multiplicativa para las relaciones modulares sobre $\mathbb{Z}$. Se debe tener cuidado cuando se consideran las clases de equivalencia $[n]_{\tau_{(n)}}$ y $[n+1]_{\tau_{(n)}}$, para $n \geq 0$. Dado que, aunque $0 \equiv n\, mod(n)$ y $1 \equiv n+1\, mod(n)$; $0 \notin [n]_{\tau_{(n)}}$ y $1 \notin [n+1]_{\tau_{(n)}}$.

4.1. Extensiones que Preservan Asociados

Ejemplo 6. Sea $n \geq 0$, $n \neq 1$ fijo. Se define la relación $\tau'_{(n)}$ sobre $\mathbb{Z}^\sharp$ por

$$\begin{aligned} x\tau'_{(n)}y &\iff x - y \in (n) \quad \text{ó} \quad x + y \in (n) \\ &\iff x\tau_{(n)}y \quad \text{ó} \quad x\tau_{(n)}(-y). \end{aligned}$$

Entonces, $\tau'_{(n)}$ es una relación de equivalencia que preserva asociados y contiene a $\tau_{(n)}$. Jay Latterman usó $\tau'_{(n)}$ para caracterizar los $\tau_{(n)}$-átomos para los casos en los que

$n = 6, 7, 12$, utilizando el hecho de que $\tau'_{(n)}$ reduce el problema a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ clases de equivalencia distintas. Latterman se percató que si $(x, y) \notin \tau_{(n)}$, donde $x \equiv (-y)\ mod(n)$, entonces $(-1)x \cdot (-y)$ es una $\tau_{(n)}$-factorización (al igual que $(-1)(-x) \cdot y)$, y de esta forma observó que es suficiente estudiar qué pasa si $x \not\equiv (\pm y)\ mod(n)$.

Se puede demostrar que $\tau'_{(n)}$ es la menor relación sobre $\mathbb{Z}^\sharp$ que preserva asociados y contiene a $\tau_{(n)}$. Note que para el caso $n = 2$ se obtiene que $\tau'_{(n)} = \tau_{(n)}$.

Proposición 8. Sea D un dominio integral y τ una relación simétrica sobre $D^\sharp$. Si

$$\begin{aligned} \tau' &= \{(x, y) : \exists \lambda, \mu \in U(D) \quad \text{tales que} \quad (\lambda x)\tau(\mu y)\} \\ &= \{(\lambda x, \mu y) : \lambda, \mu \in U(D) \quad \text{y} \quad x\tau y\}. \end{aligned}$$

Entonces τ' es la menor relación simétrica sobre $D^\sharp$ que contiene a τ y preserva asociados.

Demostración.

La relación τ' es simétrica y $\tau \subseteq \tau'$. Si $x\tau' y$, entonces existen $\lambda, \mu \in U(D)$ tales que $(\lambda x)\tau(\mu y)$. Para cualesquiera $\gamma, \sigma \in U(D)$, se tiene que $(\lambda\gamma^{-1}\gamma x)\tau(\mu\sigma^{-1}\sigma y)$; por lo que $(\gamma x)\tau'(\sigma y)$. La relación τ' preserva asociados. Note que para demostrar que τ' es la menor relación con esta propiedad, es suficiente con demostrar que τ' está en todas las relaciones simétricas que preservan asociados y contienen a τ. Sea R una relación simétrica que contiene a τ y preserva asociados. Si $x\tau' y$, entonces $(\lambda x)\tau(\mu y)$ para ciertos $\lambda, \mu \in U(D)$. Entonces $(x, y) = (\lambda^{-1}(\lambda x), \mu^{-1}(\mu y)) \in R$, dado que R preserva asociados. Esto garantiza que $\tau' \subseteq R$.

$\square$

Note que si τ es reflexiva, τ' también lo es. Además, si τ preserva asociados, entonces $\tau = \tau'$. El objetivo principal de este trabajo son las relaciones de equivalencias. En la próxima sección se estudian las extensiones que preservan asociados de relaciones de equivalencias.

4.1.1. Extensiones de Relaciones de Equivalencia

En el siguiente ejemplo se muestra que dado un dominio integral D y una relación transitiva sobre $D^\sharp$, la relación τ' no necesariamente es transitiva. En esta sección se dará una condición suficiente para que la extensión τ', de una relación de equivalencia τ, sea también una relación de equivalencia.

Ejemplo 7. Sean $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ y $h = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$ polinomios sobre $\mathbb{Z}$. Sea τ la relación sobre $(\mathbb{Z}[x])^\sharp$ (lo cual es $\mathbb{Z}[x] - \{0, \pm 1\}$) definida por

$$f\tau g \Longleftrightarrow \prod_{i=0}^{n} a_i = \prod_{j=0}^{m} b_j.$$

Si $f = x^2 + 2$ y $g = 2x^3 + x^2 + 1$, entonces $f\tau g$, pero $(-f, -g) \notin \tau$, así que τ es una relación de equivalencia que no preserva asociados. Por lo tanto $\tau \neq \tau'$. Observe que, $f\tau' g$ si y solo si existen $\lambda, \mu \in U(\mathbb{Z}[x])$ tales que $(\lambda f)\tau(\mu g)$, en otras palabras,

$$f\tau' g \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^{n} a_i = \mu^{m+1} \prod_{j=0}^{m} b_j.$$

Considere $f = x + 2$, $g = x - 2$ y $h = 2$, entonces $f\tau h$ y $(-h)\tau g$: Pero $(\lambda f, \mu g) \notin \tau$, para cualesquiera $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$. De aquí se obtiene que $f\tau' h$, $g\tau' h$ y $(f, g) \notin \tau'$. Por lo tanto τ' no es una relación transitiva.

Definición 9. Sea D un dominio integral. Una relación simétrica τ sobre $D^\sharp$ se llama *unitaria*, si $x\tau y$ implica que $(\lambda x)\tau(\lambda y)$ para cualquier $\lambda \in U(D)$. Note que si la relación preserva asociados, entonces es unitaria. El recíproco es falso, pues $2\tau_{(3)}2$ y $(-2)\tau_{(3)}(-2)$, pero $(-2, 2) \notin \tau_{(3)}$. El lector puede verificar que si τ es unitaria, entonces $\tau' = \{(x, \lambda y) : \lambda \in U(D) \text{ y } (x, y) \in \tau\}$. Lo cual provee flexibilidad para poder manejar elementos más libremente con respecto a τ.

Proposición 9. Sea τ una relación unitaria sobre $D^\sharp$. Si τ es transitiva (resp. multiplicativa), entonces τ' es una relación transitiva (resp. multiplicativa).

Demostración.

Sean $x, y, z \in D^\sharp$ tales que $x\tau'y$ y $y\tau'z$, entonces $(\lambda x)\tau(\mu y)$ y $(\sigma y)\tau(\gamma z)$, para ciertos $\lambda, \mu, \sigma, \gamma \in U(D)$. Dado que τ es una relación unitaria se obtiene que $(\mu^{-1}\lambda x, \mu^{-1}\mu y) = (\mu^{-1}\lambda x, y) \in \tau$ y $(\sigma^{-1}\sigma y, \sigma^{-1}\gamma z) = (y, \sigma^{-1}\gamma z) \in \tau$. Si τ es transitiva, $(\mu^{-1}\lambda x)\tau(\sigma^{-1}\gamma z)$, en otras palabras, $x\tau'z$. Si τ es una relación multiplicativa, entonces $y\tau(\lambda\gamma\sigma^{-1}\mu^{-1}xz)$, por ende $y\tau'xz$.

$\square$

Ejemplo 8. Sea D un dominio integral con char(D)=0 y $f, g \in D[x]$. Se define $f\tau g$ si y solo si $LT(f) = LT(g)$, donde $LT(f)$ es el término líder de f. Entonces τ es una relación de equivalencia unitaria que no preserva asociados y no es multiplicativa. Además $\tau \subseteq \partial$, por lo tanto $\tau' \subseteq \partial$.

1. Sean $D = \mathbb{Z}$, $f = 2x^2 + 4x + 1$ y $g = 3x^2 + 5x$, entonces $f\partial g$. Observe que, $(f, g) \notin \tau'$ dado que $(f, g) \notin \tau$ y $(f, -g) \notin \tau$. Esto demuestra que, $\tau' \subsetneq \partial$.

2. Observe que $\tau' = \partial$ si y solo si D es un cuerpo. ($\Longrightarrow$) Si $a \in D$ y $a \neq 0$, entonces $f\partial(af)$, y así $f\tau'(af)$. Existe $\lambda \in U(D)$ tal que $(\lambda f)\tau(af)$, es decir, $LT(\lambda f) = LT(af)$; por lo tanto $a = \lambda$ es una unidad de D. ($\Longleftarrow$) Asúmase que $f\partial g$, donde $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, entonces, $f\tau\lambda g$, donde $\lambda = \frac{a_n}{b_n}$. Esto garantiza que $f\tau' g$.

Ejemplo 9. Sea $n = 5$ en el Ejemplo 6 y sea $x \in D^\sharp$.

1. Dado que $\tau_{(5)} \subseteq \tau'_{(5)}$, todo $\tau_{(5)}$-factor de x también es un $\tau'_{(5)}$-factor de x. Ahora, suponer que $y|_{\tau'_{(5)}} x$, entonces existe una $\tau'_{(5)}$-factorización $x = y \cdot x_1 \cdots x_k$ de x. Si $y \cdot x_1 \cdots x_k$ es una $\tau_{(5)}$-factorización, se tiene y es un $\tau_{(5)}$-factor de x. Si $y \cdot x_1 \cdots x_k$

no es una $\tau_{(5)}$-factorización, entonces $(y, x_i) \notin \tau_{(5)}$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$. Esto implica que $y\tau_{(5)}(-x_i)$ y así $(-1)y \cdot (-x_i)$ es una $\tau_{(5)}$-factorización. Se puede ver que existe una $\tau_{(5)}$-factorización $\lambda y \cdot x'_1 \cdots x'_k$ con $\lambda = \pm 1$ y $x'_i \sim x_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ escogidos de forma sutil de tal manera que $x = \lambda y \cdot x'_1 \cdots x'_k$. Por lo tanto y es un $\tau_{(5)}$-factor de x.

Luego para todo $x \in D^\sharp$, los $\tau_{(5)}$-factores de x son exactamente los $\tau'_{(5)}$-factores de x. Este es el hecho por el cual Latterman utilizó $\tau'_{(n)}$.

2. En [10], Hamon muestra que los $\tau_{(5)}$-átomos en $\mathbb{Z}$ son los primos usuales, los elementos de la forma $5m$, donde $gcd(5, m) = 1$, y los elementos que se pueden escribir como $y = p_1 \cdots p_k$, donde $p_1 \equiv \pm 2\ mod(5)$ y $p_j \equiv \pm 1\ mod(5)$ para $j \geq 2$. Si x es un elemento primo de $\mathbb{Z}$, entonces x es un $\tau'_{(5)}$-átomo. Ahora, suponer que $x = 5m$ donde $gcd(5, m) = 1$; sea $x = x_1 \cdots x_m$ una $\tau'_{(5)}$-factorización de x, entonces $5|x_i$ para algún $i \in \{1, \dots, m\}$, esto implica que $5|x_j$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Esto muestra que $x_1 \cdots x_m$ es una $\tau_{(5)}$-factorización no trivial de x, lo cual es contradictorio ya que x es un $\tau_{(5)}$-átomo. Luego, las únicas $\tau'_{(5)}$-factorizaciones de x son la triviales. Por lo tanto x es un $\tau'_{(5)}$-átomo. Entonces, x es un $\tau_{(5)}$-átomo si y solo si es un $\tau'_{(5)}$-átomo.

Si $y = p_1 p_2 \cdots p_k$ donde $p_1 \equiv \pm 2\ mod(5)$ y $p_j \equiv \pm 1\ mod(5)$ para $j \geq 2$, entonces $y \equiv \pm 2\ mod(5)$. Sea $y = x_1 \cdots x_l$ una $\tau'_{(5)}$-factorización de y. Entonces, x_i es equivalente a x_j módulo 5, para todo $i \in \{1, \dots, l\}$. Note que $x_i \not\equiv 0\ mod(5)$ de lo contrario $5|p_i$, para todo $i \in \{1, \dots, l\}$, lo que no es posible. Si $x_i \equiv \pm 1\ mod(5)$ para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, entonces $y = x_1 \cdots x_l \equiv \pm 1\ mod(5)$, lo cual es contradictorio. En consecuencia $x_i \equiv \pm 2\ mod(5)$, entonces l debe ser impar; de lo contrario $x_1 \cdots x_l \equiv \pm 1\ mod(5)$. Como y es un τ_5-átomo, existen x_i y x_j, con $i \neq j$, tales que $x_i \equiv 2\ mod(5)$ y $x_j \equiv -2\ mod(5)$. Sin pérdida de generalidad, suponer $x_1, \dots, x_{l_1}$ están en la clase $[2]_{\tau_{(5)}}$. Si l_1 es impar, entonces $x_1 \cdots x_j \cdot (-x_{j+1}) \cdots (-x_l)$

es una $\tau_{(5)}$-factorización de y, lo cual es absurdo, debido a que y es $\tau_{(5)}$-átomo. Por lo tanto, se debe tener que l_1 es par, pero en este caso, se obtiene que $(-x_1)\cdots(-x_j)\cdot x_{j+1}\cdots x_l$ es una $\tau_{(5)}$-factorización. De lo anterior se deduce que el suponer que y posee una $\tau'_{(5)}$-factorización no trivial, siempre conduce a una contradicción. De esta manera, y es un $\tau_{(5)}$-átomo.

3. Sea $x = 5p$ donde p es un número primo positivo no asociado a 5. Suponer que $x|\lambda x_1\cdots x_m$, donde $\lambda x_1\cdots x_m$ es una $\tau'_{(5)}$-factorización. Entonces, $5|x_i$ para algún $i\in\{1,\ldots,m\}$ y por ende $5|x_j$ para todo $j\in\{1,\ldots,m\}$. Por otra parte, $p|x_l$ para algún $l\in\{1,\ldots,m\}$, por consiguiente $x|x_l$. Esto prueba que x es un elemento $\tau'_{(5)}$-primo. Note que los primos usuales también son elementos $\tau'_{(5)}$-primos. Cómo todo elemento $\tau'_{(5)}$-primo es también un elemento $\tau_{(5)}$-primo, y los únicos elementos $\tau_{(5)}$-primos son los primos usuales ó los elementos de la forma $5p$, donde $p \nmid 5$ es un primo (ver [10]); entonces los únicos elementos $\tau'_{(5)}$-primos son los $\tau_{(5)}$-primos. Luego, $x\in D^\sharp$ es $\tau'_{(5)}$-primo si y solo si x es $\tau_{(5)}$-primo.

Teorema 17. Sea D un dominio integral y τ una relación de equivalencia unitaria sobre $D^\sharp$. Si $x, y\in D^\sharp$, entonces

1. $x|_\tau y$ si y solo si $x|_{\tau'} y$,

2. x es un τ-átomo si y solo si x es un τ'-átomo,

3. x es un elemento τ-primo (resp. $|_\tau$-primo) si y solo si x es un elemento τ'-primo (resp. $|_{\tau'}$-primo).

Demostración.

1. ($\Longleftarrow$) Si $x|_{\tau'} y$, entonces existen $y_1,\ldots,y_n\in D^\sharp$ tales que $y = x\cdot y_1\cdots y_n$ es una τ'-factorización de y. Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, existe $\lambda_i\in U(D)$ tal que $x\tau(\lambda_i y_i)$. De aquí que $(\lambda_i y_i)\tau(\lambda_j y_j)$ para todo $i\neq j$.

Luego, $y = \lambda x\cdot y'_1\cdots y'_n$ es una τ-factorización de y, donde $\lambda = (\lambda_1\cdots\lambda_n)^{-1}$ y $y'_i = \lambda_i y_i$ para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. En consecuencia, $x|_\tau y$.

2. ($\Longrightarrow$)En la demostración de (1), se obtuvo que toda τ'-factorización se puede reescribir como una τ-factorización, esto es, si $x_1 \cdots x_n$ es una τ'-factorización, existen $y_1, \ldots, y_n \in D^\sharp$ y $\lambda \in U(D)$ tales que $\lambda y_1 \cdots y_n$ es una τ-factorización, con $y_i \sim x_i$ para cada i y $x_1 \cdots x_n = \lambda y_1 \cdots y_n$. Esto demuestra que si $x \in D^\sharp$ posee una τ'-factorización no trivial, x no es un τ-átomo.

3. ($\Longrightarrow$) Asúmase que x es un elemento τ-primo y $x|x_1 \cdots x_n$ (resp. $x|_\tau x_1 \cdots x_n$), donde $x_1 \cdots x_n$ es una τ-factorización. Escríbase $x_1 \cdots x_n = \lambda y_1 \cdots y_n$, donde la expresión $\lambda y_1 \cdots y_n$ es una τ-factorización, $x_i \sim y_i$ para cada i y $\lambda \in U(D)$. Entonces, $x|(\lambda y_1 \cdots y_n)$ (resp. $x|_\tau \lambda y_1 \cdots y_n$) y así $x|y_i$ (resp. $x|_\tau y_i$) para algún i, de esto se deduce que $x|x_i$ (resp. $x|_\tau x_i$) para algún i. En consecuencia, x es un elemento τ'-primo.

$\square$

Corolario 2. Sea τ una relación de equivalencia unitaria sobre $D^\sharp$. Entonces

1. D es un dominio τ-atómico si y solo si D es τ'-atómico.

2. D es un τ-HFD si y solo si D es un τ'-HFD.

3. D es un τ-UFD si y solo si D es un τ'-UFD.

4. D es un τ-FFD si y solo si D es un τ'-FFD.

5. D es un τ -BFD si y solo si D es un τ'-BFD.

6. D satisface τ-ACCP si y solo si D satisface τ'-ACCP.

7. Si $x, y \in D^\sharp$, se tiene que $[x,y]_\tau$ existe si y solo si $[x,y]_{\tau'}$ existe. En tal caso, $[x,y]_\tau = [x,y]_{\tau'}$.

Demostración.

1. ($\Longrightarrow$) Sea $x \in D^\sharp$, entonces x posee una τ-factorización en τ-átomos, suponer que $x = \lambda x_1 \cdots x_n$ es una τ-factorización en τ-átomos de x; pero toda τ-factorización es una τ'-factorización y por el Teorema 17, cada x_i es un τ'-átomo. En consecuencia, D es un dominio τ'-atómico.

($\Longleftarrow$) Si $x \in D^\sharp$ entonces x posee un τ'-factorización $x = x_1 \cdots x_n$ τ'-atómica, pero existen $y_1, \ldots, y_n \in D^\sharp$ y $\lambda \in U(D)$ tales que $x = \lambda y_1, \ldots, y_n$ es una τ-factorización y $y_i \sim x_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note que cada y_i es un τ'-átomo y por lo tanto un elemento τ-átomo. Esto demuestra que D es un dominio τ-atómico. El lector puede notar que toda τ'-factorización en τ'-átomos se puede reescribir como una τ-factorización τ-atómica, mediante el uso adecuado de unidades.

2. ($\Longrightarrow$) Sea $x \in D^\sharp$, entonces como D es un τ-HFD, D es un dominio τ-atómico y por lo tanto τ'-atómico. Si $x = x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$ son dos τ'-factorizaciones en τ'-átomos, entonces existen τ-factorizaciones $\lambda x'_1 \cdots x'_n = \mu y'_1 \cdots y'_m$ tales que $x_i \sim x'_i$ y $y_j \sim y'_j$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto $\lambda x'_1 \cdots x'_n = \mu y'_1 \cdots y'_m$ son τ-factorizaciones τ-atómicas de x, así se concluye que $n = m$. Luego, D es un τ'-HFD.

($\Longleftarrow$) Si D es un τ'-HFD, entonces D es un dominio τ'-atómico y por consiguiente un dominio τ-atómico. Sea $\lambda x_1 \cdots x_n = \mu y_1 \cdots y_m$ dos τ-factorizaciones en τ-átomos, entonces son τ'-factorizaciones τ'-atómicas. Por ende $n = m$. Así D es un dominio τ-HFD.

3. ($\Longrightarrow$) Sea D un dominio τ-atómico. Sean $x = x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$ τ'-factorizaciones en τ'-átomos, dichas expresiones se pueden re-escribir como τ-factorizaciones τ-atómicas, $\lambda x'_1 \cdots x'_n = \mu y'_1 \cdots y'_m$, donde los x'_i, y'_j son τ-átomos, $x'_i \sim x_i$ y $y'_j \sim y_j$ para todo i, j. Por lo tanto, como D es un τ-UFD entonces $n = m$ y $x'_i \sim y'_i$ (después de un reorden si es necesario), esto es, $x_i \sim y_i$. En consecuencia, D es un τ'-UFD.

($\Longleftarrow$) Sean $\lambda x_1 \cdots x_n = \mu y_1 \cdots y_m$ τ-factorizaciones τ -atómicas, entonces estas expresiones son también τ'-factorizaciones en τ'-átomos. Por lo tanto $n = m$ y $x_i \sim y_i$ (después de un reorden si es necesario). Esto demuestra que D es un τ-UFD.

4. Note que x es un τ-factor τ-átomo de y si y solo si x es un τ'-factor τ'-átomo de y, por lo tanto un elemento $z \in D^\sharp$ posee un número finito de τ-factorizaciones

τ-atómicas (salvo orden y asociados) si y solo si z tiene solo un número finito de τ'-factorizaciones en τ'-átomos (salvo asociados). Esto prueba lo pedido.

5. Para demostrar esta parte, note que es suficiente observar que toda τ-factorización en τ-átomos es una τ'-factorización τ'-atómica; mientras que una τ'-factorización en elementos τ'-irreducibles se puede reescribir como una τ-factorización en τ-átomos de igual longitud.

6. La parte 1 en el Teorema 17, garantiza que las propiedades estructurales τ-ACCP y τ'-ACCP son propiedades equivalentes para una relación de equivalencia unitaria τ.

7. Sean $x, y \in D^\sharp$ y suponer que $d = [x, y]_\tau$ existe. Entonces, d es un τ'-factor común de x y y. Además, si c es un τ'-factor de x y y, c es un τ-factor de estos dos elementos. Por lo tanto $c|_\tau d$, por consiguiente $c|_{\tau'} d$. Esto prueba que $[x, y]_{\tau'}$ existe y es igual a d. El recíproco se demuestra de manera similar.

Note que esto demuestra que si D es un dominio con τ-GCD, entonces D es un dominio con τ'-GCD.

$\square$

Algunos resultados obtenidos en el Corolario 2, se resumen en el diagrama de la Figura 4–1, en el cual τ es una relación de equivalencia unitaria sobre $D^\sharp$.

$$\begin{tikzcd}
\tau'\text{-UFD} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \tau'\text{-FFD} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \tau'\text{-BFD} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \tau'\text{-atómico} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\tau\text{-UFD} \arrow[r] & \tau\text{-FFD} \arrow[r] & \tau\text{-BFD} \arrow[r] & \tau\text{-atómico}
\end{tikzcd}$$

Figura 4–1: Diagrama de estructuras entre τ y τ', cuando τ es una relación de equivalencia unitaria.

Un ejemplo importante de relaciones de equivalencia unitarias son las relaciones modulares $\tau_{(n)}$ sobre $\mathbb{Z}^\sharp$, donde $n \geq 0$ (Ejemplo 6). El siguiente resultado muestra para qué valores de n, la relación $\tau_{(n)}$ es una relación multiplicativa.

Proposición 10. La extensión $\tau'_{(n)}$ es una relación multiplicativa si y solo si $n|6$.

Demostración.

($\Longrightarrow$) Suponer que $\tau'_{(n)}$ es una relación multiplicativa. Por la Proposición 2 se tiene que $[x]_{\tau'_{(n)}}$ es un conjunto cerrado bajo el producto, para cada $x \in \mathbb{Z}^\sharp$, en particular $[2]_{\tau'_{(n)}}$ es un conjunto multiplicativo, así $4\tau'_{(n)}2$. Esto implica que $2 \in (n)$ o $6 \in (n)$. En consecuencia se tiene que $n|6$.

($\Longleftarrow$) Las relaciones $\tau'_{(1)} = \tau_{(1)}$ y $\tau'_{(2)} = \tau_{(2)}$ son multiplicativas. Se demostrará que $\tau'_{(n)}$ es una relación multiplicativa para $n = 3$ y $n = 6$. Note que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $[0]_{\tau'_{(n)}}$ es cerrado bajo el producto; además si $x \equiv \pm 1\ mod(n)$ y $y \equiv \pm 1\ mod(n)$ entonces $xy \equiv \pm 1\ mod(n)$, esto prueba que $[1]_{\tau'_{(n)}}$ es un conjunto cerrado bajo el producto. En consecuencia, dado que $\tau'_{(3)}$ está determinada por las clases $[0]_{\tau'_{(3)}}$ y $[1]_{\tau'_{(3)}}$, se concluye que $\tau'_{(3)}$ es una relación multiplicativa.

Suponer que $n = 6$, se debe probar que $[2]_{\tau'_{(6)}}$ y $[3]_{\tau'_{(6)}}$ son conjuntos multiplicativos. Si $x \equiv \pm 2\ mod(6)$ y $y \equiv \pm 2\ mod(6)$, entonces $xy \equiv \pm 4\ mod(6)$, o equivalentemente, $xy \equiv \pm 2\ mod(6)$. Esto garantiza que $[2]_{\tau'_{(6)}}$ es cerrado bajo la segunda operación en el dominio D. Note que $[3]_{\tau'_{(6)}} = \{x : 3|\ x \text{ y } 2 \nmid x\}$. Por lo tanto $\tau'_{(6)}$ es una relación multiplicativa.

$\square$

4.2. Una Extensión Multiplicativa para $\tau_{(n)}$

La finalidad de esta sección es obtener una extensión multiplicativa $\overline{\tau}_{(n)}$ para cada relación $\tau_{(n)}$, con $n \geq 0$ y $n \neq 1$. Se estudia qué propiedades se preservan entre $\overline{\tau}_{(n)}$ y $\tau_{(n)}$.

Ejemplo 10. Sea D un UFD. Entonces τ_1 (definida en el Ejemplo 3) es la relación multiplicativa más pequeña que contiene a $\tau_{(0)}$. En efecto; Sea τ una relación multiplicativa sobre $D^\sharp$ que contiene a $\tau_{(0)}$. Supóngase que $y\tau_1 z$ entonces existen $x \in D^\sharp$, $n, m \in \mathbb{N}$ y $\lambda, \mu \in U(D)$ tales que $y = \lambda x^n$ y $z = \mu y^m$. Ahora, $x\tau x$ y como τ es una relación multiplicativa y preserva asociados entonces $\lambda x^n \tau \mu x^m$, esto es, $y\tau z$; por lo tanto $\tau_1 \subseteq \tau$. Si $D = Z$, se escribirá $\tau_1 = \overline{\tau}_{(0)}$.

Proposición 11. Toda $\overline{\tau}_{(0)}$-factorización sobre $\mathbb{Z}$ se puede re-escribir como una $\tau_{(0)}$-factorización.

Demostración.

En [10] Hamon demuestra que $x \in \mathbb{Z}^\sharp$ es un $\tau_{(0)}$-átomo si y solo si $x = \pm p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$ donde los p_i son primos no asociados, cada $s_1 \geq 0$ y $[s_1, \ldots, s_n] = 1$, donde $s_1 \geq 0$ y $[s_1, \ldots, s_n] = gcd(s_1, \ldots, s_n)$. Como $\tau_{(0)} \subseteq \overline{\tau}_{(0)}$, se tiene que todo $\overline{\tau}_{(0)}$-átomo es un $\tau_{(0)}$-átomo. Por lo tanto, todos los $\overline{\tau}_{(0)}$-átomos son de la forma anteriormente descrita.

Sean $x, y, z \in D^\sharp$ tales que $x = y \cdot z$ es una $\overline{\tau}_{(0)}$-factorización no trivial de x, entonces existen $v \in D^\sharp$, $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $y = \pm v^m$ y $z = \pm v^n$, por lo tanto

$$x = \pm v^r \text{ donde } r = m + n \geq 2. \tag{4.1}$$

Si $v = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$ es la factorización prima de v, entonces $x = \pm p_1^{r_1 r} \cdots p_n^{r_n r}$ y

$$[r_1 r, \ldots, r_n r] = r[r_1, \ldots, r_n] \neq 1.$$

En la Ecuación 4.1 $x = \pm \underbrace{v \cdots v}_{r-veces}$ es una $\tau_{(0)}$-factorización de x. Toda $\overline{\tau}_{(0)}$-factorización se puede re-escribir como una $\tau_{(0)}$-factorización.

Corolario 3. Sea $x \in \mathbb{Z}^\sharp$. Entonces x es un $\overline{\tau}_{(0)}$-átomo si y solo si $x = \pm p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$ donde los p_i son primos no asociados, cada $s_1 \geq 0$ y $[s_1, \ldots, s_n] = 1$. Por lo tanto x es $\overline{\tau}_{(0)}$-átomo si y solo si x es un $\tau_{(0)}$-átomo.

$\square$

Teorema 18. $\mathbb{Z}$ es un $\overline{\tau}_{(0)}$-UFD.

Demostración.

Por Teoremas 2.1, 3.5 [10], $\mathbb{Z}$ es un $\tau_{(0)}$-UFD (ver Teoremas 2.1, 3.5 [10]). Entonces, como $x \in D^\sharp$ es $\overline{\tau}_{(0)}$-átomo si y solo si es un $\tau_{(0)}$-átomo, se deduce que $\mathbb{Z}$ es un $\overline{\tau}_{(0)}$-UFD.

$\square$

Corolario 4. Si $x \in \mathbb{Z}^\sharp$ es un $\overline{\tau}_{(0)}$-átomo entonces es un elemento $|_{\overline{\tau}_{(0)}}$-primo.

Demostración.

Por Teorema 18, $\mathbb{Z}$ es un $\overline{\tau}_{(0)}$-UFD. Entonces, por el Teorema 10, se obtiene que todos los $\overline{\tau}_{(0)}$-átomos son elementos $|_{\overline{\tau}_{(0)}}$-primos.

$\square$

Teorema 19. $\mathbb{Z}$ es un dominio con $\overline{\tau}_{(0)}$-GCD.

Demostración.

Como $\overline{\tau}_{(0)}$ es una relación de equivalencia que es multiplicativa y $\mathbb{Z}$ es un $\overline{\tau}_{(0)}$-UFD, entonces por el Teorema 16, se concluye que $\mathbb{Z}$ es un dominio con $\overline{\tau}_{(0)}$-GCD.

$\square$

Teorema 20. Sea $x \in \mathbb{Z}^\sharp$. Entonces x es un elemento $\overline{\tau}_{(0)}$-primo si y solo si es un $\tau_{(0)}$-primo.

Demostración.

($\Leftarrow$) Si $x \in \mathbb{Z}$ un $\tau_{(0)}$-primo, $x = \pm p_1 \cdots p_s$, donde los p_i son primos no asociados (Teorema 2.3 [10]). Supóngase que $x|(y \cdot z)$ donde $y \cdot z$ es una $\overline{\tau}_{(0)}$-factorización, entonces para ciertos $v \in D^\sharp$ y $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $y = \pm v^m$ y $x = \pm v^n$. Por lo tanto $x|(\pm\underbrace{v\cdots v}_{r-veces})$, donde $\pm\underbrace{v\cdots v}_{r-veces}$ una $\tau_{(0)}$-factorización y $r=m+n$. Luego, $x|v$ y así $x|y$ y $x|z$.

$\square$

Si $x\in\mathbb{Z}^{\sharp}$ es un elemento $\tau_{(0)}$-primo, entonces x es de la forma $x=\pm p_1\cdots p_s$ donde los p_i son primos no asociados [10]. Por lo tanto hay elementos en $\mathbb{Z}$ que son $\overline{\tau}_{(0)}$-átomos que no son $\overline{\tau}_{(0)}$-primos.

4.2.1. Construcción de $\overline{\tau}_{(n)}$, $n\geq 2$

Sea n un entero mayor o igual a 2 y $x\in\mathbb{Z}^{\sharp}$. Sea I_x como en el Ejemplo 4, esto es, $I_x=\{p\in\mathbb{Z}^{\sharp} : p\,\text{es un número primo y}\,p|x\}$. Considerar I_{xy} el conjunto de los divisores primos comunes de $x,y\in\mathbb{Z}^{\sharp}$, es decir $I_{xy}=I_x\bigcap I_y$.

Definición 10. Sean $x,y\in\mathbb{Z}^{\sharp}$ y $n\geq 2$ fijo. Se define la relación $\overline{\tau}_{(n)}$ de la siguiente manera: $x\overline{\tau}_{(n)}y$ si y solo si $I_{xn}=I_{yn}$.

Proposición 12. Sea $n\geq 2$ fijo. Entonces $\overline{\tau}_{(n)}$ es una relación de equivalencia multiplicativa y contiene a $\tau_{(n)}$.

Demostración.

Trivialmente $\overline{\tau}_{(n)}$ es una relación de equivalencia. Sean $x,y\in\mathbb{Z}$ tales que $x\tau_{(n)}y$, entonces existe $k\in\mathbb{Z}^*$ tal que $x-y=kn$. Sea p un número primo divisor de x y n. Sean $x_1,n_1\in\mathbb{Z}$ tales que $x=px_1$ y $n=pn_1$, entonces $y=p(x_1-kn_1)$. Por lo tanto $I_{xn}\subseteq I_{yn}$. Similarmente se demuestra que $I_{yn}\subseteq I_{xn}$. Entonces $x\overline{\tau}_{(n)}y$ y $\tau_{(n)}\subseteq\overline{\tau}_{(n)}$. Por otra parte, si $x\overline{\tau}_{(n)}y$ y $x\overline{\tau}_{(n)}z$, $I_{xn}=I_{yn}$, $I_{xn}=I_{zn}$. Sea p un primo tal que $p|yz$ y $p|n$, entonces $p|y$ o $p|z$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $p|y$ y $p|n$, entonces $p|y$ y $p|x$ (pues $I_{xn}=I_{yn}$); lo cual implica que $I_{(yz)n}\subseteq I_{xn}$.

Si $p\in I_{xn}$, entonces $p|yz$ y $p\in I_{(yz)n}$. Luego, $I_{(yz)n}=I_{xn}$ y por tanto $x\overline{\tau}_{(n)}yz$.

$\square$

Por la Proposición 4 se deduce que $\overline{\tau}_{(n)}$ preserva asociados para todo $n \geq 0$. Por consiguiente $\tau'_{(n)} \subseteq \overline{\tau}_{(n)}$ para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 11. Sean $x, y \in \mathbb{Z}^\sharp$ y $n = 2^k$ donde $k \geq 1$. Entonces $I_n = \{2\}$ y $I_{xn} = I_{x2}$. Se obtiene que

$$x\overline{\tau}_{(n)}y \Longleftrightarrow I_{xn} = I_{yn} \Longleftrightarrow I_{x2} = I_{y2} \Longleftrightarrow x\tau_{(2)}y.$$

Por lo tanto, $\overline{\tau}_{(n)} = \tau_{(2)}$ para todo $n = 2^k$, $k \geq 1$.

Similarmente se demuestra que $\overline{\tau}_{(p)} = \overline{\tau}_{(p^k)}$ para cualquier primo p y $k \geq 1$. De manera general se tiene que si $n = p_1^{r_1} \cdots p_l^{r_l}$, entonces $\overline{\tau}_{(n)} = \overline{\tau}_{(m)}$, donde $m = \gamma(n)$ es el kernel de n, esto es, $m = p_1 \cdots p_l$. Además, el número de clases de equivalencia de la partición asociada a $\overline{\tau}_{(n)}$ está dado por 2^l.

En el Ejemplo 10 se demostró que $\overline{\tau}_{(0)}$ es la menor relación de equivalencia multiplicativa que contiene a $\tau_{(0)}$. Para $n \geq 3$, $\overline{\tau}_{(n)}$ es una relación de equivalencia que contiene a $\tau_{(n)}$. ¿Es $\overline{\tau}_{(n)}$ la menor relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}^\sharp$ con esta propiedad? Sea τ una relación de equivalencia multiplicativa sobre $\mathbb{Z}^\sharp$ tal que $\tau_{(n)} \subseteq \tau$ y sea $n = p_1^{r_i} \cdots p_k^{r_k}$ la factorización canónica de n sobre $\mathbb{Z}$. Veamos los siguientes tres casos.

1. Si $x \in [n+1]_{\overline{\tau}_{(n)}}$, entonces $(n, x) = 1$ y por lo tanto $x^{\varphi(n)} \equiv 1 \; mod(n)$, donde $\varphi(n)$ es la función de Euler. Esto implica que $x^{\varphi(n)} \in [n+1]_{\tau_{(n)}}$ y así $x^{\varphi(n)} \in [x]_\tau$. Dado que $x\tau x$ y τ es una relación multiplicativa entonces $x\tau x^{\varphi(n)}$. Por transitividad, $x \in [n+1]_\tau$ y $[n+1]_{\overline{\tau}_{(n)}} \subseteq [n+1]_\tau$.

2. Suponer que $x \in [p_i]_{\overline{\tau}_{(n)}}$, entonces $x = p_i m$, donde $p_j \nmid m$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Esto implica que $(n, m) = 1$. Entonces

$$x^{\varphi(n)} = p_i^{\varphi(n)} m^{\varphi(n)} = \underbrace{p_i \cdots p_i}_{\varphi(n)-1 veces} \cdot p_i m^{\varphi(n)}.$$

Como $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \ mod(n)$, entonces $p_i m^{\varphi(n)} \equiv p_i \ mod(n)$. Es decir, $(p_i m^{\varphi(n)})\tau_{(n)} p_i$ y por tanto $(p_i m^{\varphi(n)})\tau p_i$, pues $\tau_{(n)} \subseteq \tau$. Como τ es una relación multiplicativa, se obtiene que $p_i^{\varphi(n)-1}(p_i m^{\varphi(n)})$ es equivalente a p_i módulo n. Es decir, $x^{\varphi(n)} \tau p_i$ y $x \in [p_i]_\tau$. En consecuencia $[p_i]_{\overline{\tau}_{(n)}} \subseteq [p_i]_\tau$.

3. Suponer que $x \in [p_1 \cdots p_k]_{\overline{\tau}_{(n)}} = [n]_{\overline{\tau}_{(n)}}$, entonces $x = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k} \cdot m$, donde $(n, m) = 1$. Sea $r = \max\{r_1, \ldots, r_k\}$, entonces $n | x^r$. Esto implica que $x^r \in [n]_{\tau_{(n)}}$ y por tanto $x^r \in [n]_\tau$. De esto se deduce que $x \in [n]_\tau$ dado que τ es una relación multiplicativa. Luego $[n]_{\overline{\tau}_{(n)}} \subseteq [n]_\tau$.

Los puntos 1, 2 y 3 demuestran que si n tiene a lo más 2 divisores primos, entonces $\overline{\tau}_{(n)}$ es la menor relación de equivalencia multiplicativa que contiene a $\tau_{(n)}$. Hasta el cierre de este trabajo no se ha podido demostrar, de manera general, que $\overline{\tau}_{(n)}$ es la menor relación de equivalencia multiplicativa que contiene a $\tau_{(n)}$. Por la Proposición 10, $\tau'_{(n)}$ es una relación multiplicativa si y solo si $n|6$; luego, dado que $\tau'_{(n)} \subseteq \overline{\tau}_{(n)}$ para todo $n \geq 1$, se concluye que $\tau'_{(n)} = \overline{\tau}_{(n)}$ si y solo si $n|6$. Los siguientes resultados caracterizan los elementos $\overline{\tau}_{(n)}$-átomos y $\overline{\tau}_{(n)}$-primos.

Teorema 21. Sea $n \geq 2$ fijo. Si $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ es la factorización canónica de n en $\mathbb{Z}$, entonces un entero reducible $x \in \mathbb{Z}^\sharp$ es un $\overline{\tau}_{(n)}$-átomo si y solo si $x = \pm(p_{i_1}^{m_1} \cdots p_{i_r}^{m_r})m$ donde $1 \leq r \leq k$, $p_l \nmid m$ para todo $l \in \{1, \ldots, k\}$ y $m_j = 1$ para algún $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Demostración.

$(\Longrightarrow)$ Supóngase que $x = \pm(p_{i_1}^{m_1} \cdots p_{i_r}^{m_r})m$ con $1 \leq r \leq k$, $(n, m) = 1$ y $m_j \geq 2$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Sean $y = p_{i_1} \cdots p_{i_r}$ y $z = (p_{i_1}^{m_1-1} \cdots p_{i_r}^{m_r-1})m$, entonces $y\overline{\tau}_{(n)}z$

y $x = \pm y \cdot z$ es una $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización no trivial de x. Luego, x no es un elemento $\overline{\tau}_{(n)}$-irreducible.

Si $I_{xn} = \phi$, entonces $x = yz$ donde y, z son elementos relativamente primos con n. Así que $x = y \cdot z$ es una $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización no trivial. Por consiguiente x no es un $\overline{\tau}_{(n)}$-átomo.

($\Longleftarrow$) Si $I_{xn} \neq \phi$ y $x = y \cdot z$ es una $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización no trivial de x, entonces $x\overline{\tau}_{(n)}y$ y $x\overline{\tau}_{(n)}z$.

Si $I_{xn} = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_r}\}$ con $1 \leq r \leq k$, entonces $x = (p_{i_1}^{m_1} \cdots p_{i_r}^{m_r})m$, $y = (p_{i_1}^{l_1} \cdots p_{i_r}^{l_r})l$ y $z = (p_{i_1}^{s_1} \cdots p_{i_r}^{s_r})s$; donde $p_j \nmid (mls)$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ y $m_i, l_i, s_i > 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Por lo tanto

$$(p_{i_1}^{m_1} \cdots p_{i_r}^{m_r})m = (p_{i_1}^{l_1+s_1} \cdots p_{i_r}^{l_r+s_r})m;$$

esto implica que $m_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.

$\square$

Teorema 22. Sea $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \geq 2$ la factorización canónica de n en $\mathbb{Z}$, entonces x es un elemento $\overline{\tau}_{(n)}$-primo si y solo si $x = \pm(p_{i_1} \cdots p_{i_r})p$ donde $0 \leq r \leq k$ y $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo que no divide a n.

Demostración.

($\Longleftarrow$) Supóngase que $(p_{i_1} \cdots p_{i_r})p | x_1 \cdots x_s$, donde $x_1 \cdots x_s$ es una $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización. Sea $l \in \{1, \ldots, r\}$ arbitrario, entonces $p_{i_l} | x_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, s\}$. Por lo tanto $p_{i_l} \in I_{x_j n}$ para algún $j \in \{1, \ldots, s\}$, así que $p_{i_l} \in I_{x_j n}$ para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$. Como l es arbitrario, entonces $p_{i_l} | x_j$, para cada l, j. Esto implica que $p_{i_1} \cdots p_{i_r} | x_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Como p es primo, entonces $p | x_m$ para algún $m \in \{1, \ldots, s\}$. Luego, $x | x_m$ para algún $m \in \{1, \ldots, s\}$. El elemento x es $\overline{\tau}_{(n)}$-primo.

($\Longrightarrow$) Si $x \in \mathbb{Z}^\sharp$ es un elemento $\overline{\tau}_{(n)}$-primo, entonces x es $\tau_{(n)}$-primo. Por lo tanto $x = \pm(p_{i_1} \cdots p_{i_r})p$ donde $0 \leq r \leq k$ y p es un número primo (Teorema 2.16 [10]).

$\square$

Los teoremas anteriores caracterizan a los elementos $\overline{\tau}_{(n)}$-átomos y $\overline{\tau}_{(n)}$-primos para $n \geq 2$. En el caso de los elementos $\overline{\tau}_{(n)}$-primos se tiene que x es $\overline{\tau}_{(n)}$-primo si y solo si $\tau_{(n)}$-primo (Teorema 2.16 [10]). La próxima proposición conecta las relaciones $\overline{\tau}_{(n)}$, $n \geq 2$, con la relación definida en el Ejemplo 4.

Proposición 13. Sea τ_2 la relación del Ejemplo 4 (en este caso $D = \mathbb{Z}$). Entonces

$$\tau_2 = \bigcap_{n \geq 2} \overline{\tau}_{(n)}.$$

Demostración.

Si que $x\tau_2 y$, entonces $I_x = I_y$ y $I_{xn} = I_{yn}$ para todo $n \geq 2$. Esto prueba que $x\overline{\tau}_{(n)}y$ para cada $n \geq 2$. Recíprocamente, si $(x, y) \in \bigcap_{n \geq 2} \overline{\tau}_{(n)}$, entonces, $x\overline{\tau}_{(|x|)}y$ y por tanto $I_{|x|x} = I_{|x|y}$, es decir, $I_x \bigcap I_x = I_x \bigcap I_y$, esto implica que $I_x \subseteq I_y$. Análogamente se prueba que $I_{|y|y} = I_{|x|y}$ y $I_y \subseteq I_x$. Luego, $x\tau_2 y$.

$\square$

Proposición 14. Sea D un UFD y τ_2 como en el Ejemplo 4. Si $x = \lambda p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \in D^\sharp$ donde los p_i son primos no asociados y $r_i \geq 1$ para cada i, entonces

1. x es τ_2-átomo si y solo si $r_i = 1$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$.

2. x es τ_2-primo si y solo si $r_i = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Demostración.

1. ($\Longrightarrow$) Suponer que $x = y \cdot z$ es una τ_2-factorización no trivial de x. Como τ_2 es una relación de equivalencia que es multiplicativa y que preserva asociados, por Teorema 7 se obtiene que $x\tau_2 y$ y $x\tau_2 z$. Por lo tanto, $y = \mu p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ y $z = \gamma p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}$, donde $s_i \geq 1$ y $l_i \geq 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces,

$$\lambda p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} = (\mu\gamma) p_1^{s_1+l_1} \cdots p_k^{s_k+l_k}.$$

En consecuencia, $r_i = s_i + l_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, y como $s_i \geq 1$ y $l_i \geq 1$, entonces $r_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

($\Longleftarrow$) Si $x = \lambda p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, donde $r_i \geq 2$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces la expresión $x = \lambda(p_1 \cdots p_k) \cdot (p_1^{r_1-1} \cdots p_k^{r_k-1})$ es una τ_2-factorización de x. Consecuentemente x no es un τ_2-átomo.

2. ($\Longrightarrow$) Si $r_i \geq 2$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces

$$x|(p_1 \cdots p_i \cdots p_k) \cdot (p_1^{r_1} \cdots p_i^{r_i-1} \cdots p_k^{r_k}),$$

pero $x \nmid (p_1 \cdots p_i \cdots p_k)$ y $x \nmid (p_1^{r_1} \cdots p_i^{r_i-1} \cdots p_k^{r_k})$. Por lo tanto, x no es un elemento τ_2-primo.

($\Longleftarrow$) Como cada p_i es primo, entonces $p_i|y$ o $p_i|z$. Pero, $y\tau_2 z$ por lo que $p_i \in I_y = I_z$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por consiguiente $x|y$ y $x|z$.

□

Teorema 23. $\mathbb{Z}$ es un dominio $\overline{\tau}_{(n)}$-atómico para todo $n \geq 2$.

Demostración.

Sea $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ la factorización canónica de n. Si $x \in \mathbb{Z}^\sharp$ no es un $\overline{\tau}_{(n)}$-átomo, entonces por el Teorema 21 $x = \pm p_1^{r_1} \cdots p_j^{r_j} y$ donde $0 \leq j \leq k$, $r_i \geq 2$ y $p_i \nmid y$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto, $x = \pm(p_1^{r_1-1} \cdot p_2 \cdots p_j y) \cdot (p_1 \cdot p_2^{r_2-1} \cdots p_j^{r_j-1})$, es una $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización $\overline{\tau}_{(n)}$-atómica de x.

Esto demuestra que $\mathbb{Z}$ es un dominio $\overline{\tau}_{(n)}$-atómico para cada $n \geq 2$.

□

Sea $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ con $k \geq 2$ y sea $x = p_1^3 \cdots p_k^3$. Entonces,

$$\begin{aligned} x &= (p_1^2 p_2^2 \cdots p_{k-1}^2 p_k) \cdot (p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_k^2) \\ &= (p_1 \cdots p_k) \cdot (p_1 \cdots p_k) \cdot (p_1 \cdots p_k), \end{aligned}$$

son $\overline{\tau}_{(n)}$-factorizaciones en $\overline{\tau}_{(n)}$-átomos de x. Así que para $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ con $k \geq 2$, $\mathbb{Z}$ no es un dominio $\overline{\tau}_{(n)}$-HFD. Esto demuestra que si D es un HFD y τ es una relación de equivalencia sobre $D^\sharp$ que preserva asociados y es multiplicativa, entonces no necesariamente D es un τ-HFD.

Teorema 24. Si $n = p^k$ donde p es un número primo y $k \geq 1$, entonces $\mathbb{Z}$ es un $\overline{\tau}_{(n)}$-HFD.

Demostración.

Sean $x = x_1 \cdots x_k = y_1 \cdots y_m$ dos $\overline{\tau}_{(n)}$-factorizaciones $\overline{\tau}_{(n)}$-atómicas de x. Si $p \nmid x$, entonces $p \nmid x_i$ para todo i. Suponer que algún x_i no es un elemento irreducible, estos es, $x_i = z_1 \cdots z_k$ es factorización no trivial en elementos irreducibles. Entonces, $p \nmid z_j$ para todo j y esto implica que $z_1 \cdots z_k$ es $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, cada x_i es irreducible.

Análogamente, se prueba que cada y_j es un elemento irreducible. Como $\mathbb{Z}$ es un dominio de factorización única, se deduce que $m = n$. Ahora si $p|x$, entonces $p|x_i$ para algún i. Como $x_1 \cdots x_k$ es una $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización, entonces $p|x_i$ para todo i. De igual manera se tiene $p|y_j$ para todo j. Además, $p^r \nmid x_i$ y $p^r \nmid y_j$, para cada i, j y todo $r \geq 2$ (pues si $p^r|x_i$ para algún $r \geq 2$, donde r es mayor entero con esta propiedad, entonces $x_i = p^r y$, con $p \nmid y$; se obtiene que $x_i = p \cdot (p^{r-1}y)$ es una $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización de x_i, lo cual no es posible). Por lo tanto, $x = p^n z_1 = p^m z_2$ donde $p \nmid z_1$ y $p \nmid z_2$. En consecuencia, $z_1 = z_2$ y $n = m$. Luego, $\mathbb{Z}$ es un $\overline{\tau}_{(n)}$-HFD.

□

Ejemplo 12. Sea $n = p^k$ y $x = 10p^2$ donde p es un número primo y $k \geq 1$, entonces $x = (5p)(2p) = (10p)(p)$ son dos $\overline{\tau}_{(n)}$-factorizaciones en $\overline{\tau}_{(n)}$-átomos distintas de x. De aquí que $\mathbb{Z}$ no es un dominio de $\overline{\tau}_{(n)}$-factorización única para $n = p^k$. Por lo tanto, $\overline{\tau}_{(n)}$ no es un $\overline{\tau}_{(n)}$-UFD para cualquier $n \geq 2$.

Proposición 15. La extensión multiplicativa de τ_n dada en la Definición 10, es una relación prima si y solo si $n = p^k$ con p un número primo y $k \geq 1$.

Demostración.

($\Longleftarrow$) Sea $x, y, z \in \mathbb{Z}^\sharp$ tales que $x\overline{\tau}_{(n)}yz$. Si $p \nmid x$, entonces $p \nmid yz$, así que $p \nmid y$ y $p \nmid z$. Por lo tanto, $x\overline{\tau}_{(n)}y$ y $x\overline{\tau}_{(n)}z$. Ahora, si $p|x$ entonces $p|yz$, esto implica que $p|y$ o $p|z$; $x\overline{\tau}_{(n)}y$ o $x\overline{\tau}_{(n)}z$. Por ende, $\overline{\tau}_{(n)}$ es una relación prima.

($\Longrightarrow$) Supóngase que $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ con $k \geq 2$, es la factorización canónica de n en $\mathbb{Z}$, entonces $(p_1p_2)|(p_1p_2)$ pero $(p_1p_2, p_1) \notin \overline{\tau}_{(n)}$ y $(p_1p_2, p_2) \notin \overline{\tau}_{(n)}$. Por lo tanto, $\overline{\tau}_{(n)}$ no es una relación prima.

$\square$

Capítulo 5
CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este capítulo el lector encontrará las conclusiones de este trabajo y sus aportes en la teoría de τ-factorizaciones. Adicionalmente, se presentan los problemas no resueltos durante esta investigación.

5.1. Conclusiones

Este trabajo es el primer estudio con profundidad del efecto de las relaciones de equivalencia, tal vez las relaciones más importantes en el área, no solo de álgebra, sino de las matemáticas en general, en la teoría de τ-factorizaciones. Este estudio demostró tres aspectos importantes en la teoría de factorizaciones. El primer resultado de importancia, fue la existencia de relaciones de equivalencia que son multiplicativas y que preservan asociados. En [8] el autor sostiene que no existen muchos ejemplos de relaciones de este tipo, implicando que $\tau_{(2)}$ en $\mathbb{Z}$ y $\tau_{(0)}$ en un anillo Booleano son los únicos ejemplos. En este proyecto se encontró que τ_2 en un dominio de factorización única y las relaciones $\overline{\tau}_{(n)}$ sobre $\mathbb{Z}$, son relaciones de equivalencia con las propiedades anteriormente descritas.

El segundo resultado importante fue la conexión entre una relación de equivalencia unitaria y su extensión que preserva asociados. Se obtuvo que se puede asumir que las relaciones de equivalencia unitarias preservan asociados, pues si la relación en cuestión no satisface esta propiedad, se considera su extensión que preserva asociados y las propiedades de factorizaciones obtenidas son equivalentes a las propiedades de factorizaciones en la relación de equivalencia original.

Por último, se demostró que las relaciones divisibles no son las únicas relaciones refinables, lo que confirma lo escrito por Juett en su trabajo de Γ-factorizaciones [8]. Es decir, él demostró que se pueden obtener los Γ-refinamientos sin la necesidad de asumir la propiedad de divisibilidad. Más aún, se pudo obtener gran parte del diagrama de estructuras de la teoría de factorizaciones, ver Figura 3–1.

5.2. Trabajos Futuros

En este trabajo se definieron dos tipos de relaciones útiles en algunos de los resultados obtenidos: las relaciones unitarias y las relaciones primas. Pero no se estudiaron a profundidad qué consecuencias se pueden obtener si se consideran estas relaciones en otro tipo de planteamientos y/o problemas. Esto sería un material interesante para estudiar en un futuro.

Otro asunto a tratar en investigaciones posteriores es considerar el nexo de una relación simétrica (en general) τ y su extensión que preserva asociados τ'. Además, determinar qué otras propiedades algebraicas y estructurales se heredan de τ' a τ y las consecuencias de prescindir de las unidades en las factorizaciones.

Finalmente, el lector puede observar que dada una relación de equivalencia τ, el conjunto de las relaciones de equivalencia multiplicativas que contienen a τ es no vacío. Por lo tanto, cualquier relación de equivalencia posee una extensión multiplicativa; dicha extensión está dada por:

$$\dot{\tau} = \bigcap \{R : R \text{ es una relación de equivalencia multiplicativa y } \tau \subseteq R\}.$$

Sería importante estudiar en detalle esta extensión, determinando las propiedades heredables de $\dot{\tau}$ a τ. En este trabajo se demostró que $\overline{\tau}_{(n)}$ en $\mathbb{Z}$ es igual a $\dot{\tau}_{(n)}$ para los casos en los que $n = 0$, $n = p_1^{k_1}$ o $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, donde p_1 y p_2 son primos no asociados y $k_1, k_2 > 0$. Más aún, dado que $\dot{\tau}_{(n)}$ es una relación multiplicativa, la Proposición 4 garantiza que también es una relación que preserva asociados. Por lo tanto, $\dot{\tau}_{(n)}$ y $\overline{\tau}_{(n)}$ son relaciones de equivalencia que contienen a $\tau_{(n)}$ y son multiplicativas y preservan asociados. Estas igualdades y propiedades sugieren que $\overline{\tau}_{(n)} = \dot{\tau}_{(n)}$ en general, aunque no se ha podido demostrar de manera algebraica. Como trabajo futuro este concepto tiene prioridad, dado que puede servir para buscar propiedades y luego generalizarlas a cualquier relación de equivalencia.

Bibliografía

[1] A. Florescu, *"Reduced $\tau_{(n)}$-factorizations in $\mathbb{Z}$ and $\tau_{(n)}$-factorizations in $\mathbb{N}$".* Tesis Doctoral, Universidad de Iowa, Agosto 2013.

[2] A. Frazier, *"Generalized Factorizations in Integral Domains".* Tesis Doctoral, Universidad de Iowa, Mayo 2006.

[3] A. G. Vargas Jimenez, "τ-multiplicative Sets". Tesis de Maestría, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, Mayo 2014.

[4] D. D. Anderson, *"Extensions of Unique Factorizations: a Survey".* Volumen 205, Notas de Matemática Pura y Aplicada, Páginas 31-53. Dekker, New York, 1999.

[5] D. D. Anderson y A. M. Frazier, *"On a General Theory of Factorization in Integral Domains".* Revista de Matemáticas de Rocky Mountain. Volumen 41, Número 3 (2011), 663-705.

[6] D. D. Anderson, D. F. Anderson y M. Zafrullah, "Factorization in Integral Domains". Revista de Algebra Pura y Aplicada, 69 (1990) 1-19. North-Holland

[7] D. D. Anderson, J. L. Mott y M. Zafrullah, *"Unique Factorization in Nonatomic Integral Domains".* Boll. Unione Math. Ital. sez. B. Artic. Ric. Mat (8). 2(2):341-352, 1999.

[8] J. Juett, "Some Topics in Abstract Factorization". Tesis Doctoral, Universidad de Iowa, Mayo 2013.

[9] R. Ortiz, *"On Generalized Nonatomic Factorizations".* Tesis Doctoral, Universidad de Iowa, Mayo 2008.

[10] S. M. Hamon, *"Some Topics in τ-Factorizations".* Tesis Doctoral, Universidad de Iowa, Mayo 2007.

[11] S. McAdam y R. G. Swan, *“Unique Comaximal Factorization”.* J. Algebra, 276 (1):180-192, 2004.

FACTORIZACIONES DONDE CADA FACTOR DE UN ELEMENTO PERTENECE A SOLO UNA CLASE DE EQUIVALENCIA

César Alberto Serna Rapello
cesar.serna@upr.edu
Departamento de Ciencias Matemáticas
Consejero: Reyes M. Ortiz-Albino Ph.D
Grado: Maestría en Ciencias
Fecha de Graduación: Diciembre 2014