TRASLACIONES Y SEMIGRUPOS C_0 TOPOLÓGICAMENTE MEZCLANTES

Por

Rafael A. Aparicio Cuello

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICA PURA

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

Junio de 2008

Aprobada por:

Héctor N. Salas Olaguer, Ph.D Presidente, Comité Graduado	Fecha
Krzyszof Rozga, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Omar Colón Reyes, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Maharaj S. Tomar, Ph.D Representante de Estudios Graduados	Fecha
Julio C. Quintana Díaz, Ph.D Director del Departmento	Fecha

Abstract of Disertation Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Science

TOPOLOGICALLY MIXING SHIFTS AND C_0 SEMIGROUPS

By

Rafael A. Aparicio Cuello

June 2008

Advisor: Héctor N. Salas Olaguer
Major Department: Mathematical Sciences

In this work we give a characterization of the topologically mixing bilateral weighted shifts, a partial answer to the problem of characterizing the bilateral shifts T such that $I + T$ is hypercyclic, a sufficient conditions for the C_0 semigroup for being topologically mixing, and a sufficient conditions on the infinitesimal generator of the C_0 semigruop for being topologically mixing C_0 semigroup.

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

TRASLACONES Y SEMIGRUPOS C_0 TOPOLÓGICAMENTE MEZCLANTES

Por

Rafael A. Aparicio Cuello

Junio de 2008

Consejero: Héctor N. Salas Olaguer
Departamento: Ciencias Matemáticas

En este trabajo caracterizamos las traslaciones bilaterales que son topológicamente mezclantes, damos una respuesta parcial al problema de caracterizar las traslaciones bilaterales T tal que $I+T$ es hipercíclico, damos una condición suficiente para que un semigrupo C_0 sea topológicamente mezclante y damos condiciones al generador infinitesimal de un semigrupo C_0 para que el semigrupo C_0 sea hipercíclico.

A mis hijos Carlos David, Luis Fernando y Diego Andrés.

A mi esposa Aura Rosa Mestra Hernández.

A mis padres Rafael Aparicio Hernandez y Aura Cuello Díaz.

A mis hermanos.

AGRADECIMIENTOS

A Dios porque en cada paso que he dado, él me ha protegido.

A mi consejero, el Dr. Héctor N. Salas Olaguer, por el tiempo que invirtió en mí tratando de transmitirme un poco de su conocimiento, por sus consejos académicos y personales que me permitieron lograr este objetivo, a pesar de las dificultades.

A todos los profesores que han hecho parte de mi formación académica y personal.

A todos mis compañeros del Departamento de Ciencias Matemáticas por toda la ayuda incondicional que me brindaron. De manera muy especial a las siguientes personalidades: Gabriel D. Uribe Guerra (Gabo), Julián D. Rodríguez Arango (el July), Leonid Sepúlveda Avendaño (Don Leo), Jonathan Ho Fung (el Chino), Angy C. Coronel Suárez (la niña Angy), Edwin Flores Gómez (Don Edwin), Luis R. Fuentes Castilla (Don Lucho), Sindy Díaz Hernández (la niña Sindy), Juan C. Orozco García (el Diablo).

Y otras personas que siempre estuvieron dispuestas a colaborarme y animarme moralmente para poder lograr este triunfo.

A todos ellos de verdad muchas gracias.

Índice general

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{H}$	Espacio de Hilbert.
X	Espacio de Fréchet ó de Banach.
X^*	Espacio dual.
x	Elemento de X.
T	Operador lineal continuo en X.
I	Operador identidad en X.
$T-\lambda$	Operador T menos λ veces I.
$\mathcal{T}$	Semigrupo de operadores.
$\overline{U}$	Clausura del conjunto U.
$Orb(T,x)$	Órbita de x bajo T.
T^*	Adjunto de T.
$\mathcal{L}(X)$	Espacio de los operadores lineales continuos en X.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números enteros no negativos.
$\mathbb{N}^*$	Conjunto de los números enteros positivos.
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de los números reales positivos.
$\mathbb{R}^-$	Conjunto de los números reales negativos.
$\mathbb{R}_0^+$	Conjunto de los números reales no negativos.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$B(y,\varepsilon)$	Bola abierta centrada en Y y radio $\varepsilon > 0$.
$\mathbb{D}$	El disco abierto unitario.
$\mathcal{G}_\delta$	Intersección contable de abiertos.
$\ell^p(\mathbb{N})$	Espacio de sucesiones en $\mathbb{C}$ p-sumables con indices en $\mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$.
$c_0(\mathbb{N})$	Espacio de sucesiones en $\mathbb{C}$ que tienden a 0 con indices en $\mathbb{N}$.
$\ell^p(\mathbb{Z})$	Espacio de sucesiones en $\mathbb{C}$ p-sumables con indices en $\mathbb{Z}$ y $1 \leq p < \infty$.
$c_0(\mathbb{Z})$	Espacio de sucesiones en $\mathbb{C}$ que tienden a 0 con indices en $\mathbb{Z}$.
$\rho(T)$	La resolvente de T.
$\sigma(T)$	Espectro de T.
$r(T)$	Radio espectral de T.
$\sigma_p(T)$	Espectro puntual de T.
$\sigma_{ap}(T)$	Espectro puntual aproximado de T.
$\sigma_{su}(T)$	Espectro sobreyectivo de T.
$\sigma_{com}(T)$	Espectro de compresión de T.
$\rho_T(x)$	Resolvente local de T.
$\sigma_T(x)$	Espectro local de T en x.
$H(U,X)$	Espacio de funciones X-valuadas definida en un abierto U de $\mathbb{C}$.
$X_T(F)$	Subespacio espectral local.

$T\|Y$	Restricción de T a Y.
(β)	Propiedad de Bishop.
SVEP	Propiedad de extensión univaluada.
(C)	Propiedad de Dunford.
$\mathcal{X}_T(F)$	Espacio espectral glocal.
(δ)	Propiedad de descomposición.
$Lat(T)$	Reticulado de subespacios cerrados T-invariantes de X.
$\mathcal{T}$	Semigrupo de operadores acotados con indices en $\mathbb{R}^+$.
$\mathcal{T}^-$	Semigrupo de operadores acotados con indices en $\mathbb{R}^-$.
C_0	Semigrupo fuertemente continuo.
A	Generador infinitesimal.
$D(A)$	Dominio de A.

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

Los operadores hipercíclicos han sido estudiados por muchos matemáticos en las últimas décadas, aunque el concepto estaba latente. Por ejemplo en 1929, G. D. Birkhoff probó que el operador traslación $(T_\alpha f)(z) = f(z-\alpha)$ con $\alpha \neq 0$ sobre $H(\mathbb{C})$, el espacio de las funciones enteras con la topología compacta abierta es hipercíclico, aunque el no lo llamó con este nombre.

Con el concepto de hiperciclicidad se puede unificar, extender y complementar diversos resultados de la teoría de funciones clásicas y la teoría de operadores.
La importancia de estudiar operadores hipercíclicos radica en que así podemos conocer cuándo el operador admite o no un conjunto cerrado invariante no trivial. En verdad el concepto surgió al tratar de resolver el problema de *subconjuntos cerrados invariantes* bajo un operador.

Estudiando la teoría de operadores hipercíclicos surgieron conceptos más fuertes como: operadores que satisfacen el criterio de hipercíclicidad, operadores que satisfacen el criterio de Kitai y operadores topológicamente mezclantes. Este último será nuestro principal tópico de estudio.

En el capítulo 2 mostramos una gran variedad de resultados previos concernientes a operadores hipercíclicos y operadores topológicamente mezclantes, damos los resultados preliminares para caracterizar las traslaciones bilaterales con pesos positivos que son topológicamente mezclantes.

En el capítulo 3 presentamos resultados preliminares de teoría espectral local para con estos resultados poder dar una respuesta parcial al problema 2 planteado en [24] que consiste en caracterizar las traslaciones bilaterales T tal que $I+T$ es hipercíclico.

En el capítulo 4 se dan algunos preliminares para: semigrupos de operadores lineales acotados, semigrupos fuertemente continuos hipercíclicos y semigrupos fuertemente continuos topológicamente mezclantes, damos una condición suficiente para que un semigrupo fuertemente continuo sea topológicamente mezclantes y también probamos que las condiciones dadas en [9] y en [10] al generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo para que el semigrupo sea hipercíclico, son suficientes para que el semigrupo sea topológicamente mezclante.

Capítulo 2
TRASLACIONES BILATERALES CON PESOS TOPOLÓGICAMENTE MEZCLANYES

Este capítulo lo desarrollaremos en la siguiente forma. En la sección 1 daremos algunos resultados preliminares de operadores hipercíclicos y operadores topológicamente mezclantes. En la sección 2 damos resultados de traslaciones con pesos positivos y caracterizamos las traslaciones bilaterales con pesos positivos que son topológicamente mezclantes.

2.1. Operadores hipercíclicos y topológicamente mezclantes.

En esta sección llamaremos X a un espacio de Fréchet; esto es un espacio metrizable completo localmente conexo, T a un operador lineal continuo en X, $\mathcal{L}(X)$ al conjunto de los operadores lineales continuos en X, $\mathbb{N}$ al conjunto de los números enteros no negativos y $\mathbb{N}^*$ al conjunto de los números enteros positivos.

Si T está en $\mathcal{L}(X)$ y x pertenece a X, entonces el conjunto cerrado más pequeño que contiene a x y es invariante bajo T es $\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}$, donde

$$\mathrm{Orb}(T,x) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$$

es la *órbita* de x bajo T.

Así, $T \neq 0$ tiene un conjunto cerrado invariante no trivial si y solo si existe un elemento x en X, $x \neq 0$ tal que $Orb(T,x)$ no es densa en X.

Definición 2.1.1. Un operador T en $\mathcal{L}(X)$ se dice que tiene un *vector hipercíclico* x en X, si $\mathrm{Orb}(T,x)$ es densa en X. Si un operador T tiene un vector hipercíclico decimos que T es un *operador hipercíclico.*

Así, un operador no hipercíclico tiene una gran variedad de conjuntos cerrados invariantes no triviales.

De la definición podemos concluir de inmediato que si $\mathcal{L}(X)$ tiene un operador hipercíclico, entonces X es separable.

El siguiente resultado que es bien conocido nos muestra que todo operador en un espacio finito dimensional, tiene muchos conjuntos cerrados invariantes no triviales.

Proposición 2.1.2. *Si X es finito dimensional, entonces $\mathcal{L}(X)$ no tiene operadores hipercíclicos.*

Es natural hacernos la pregunta: ¿qué espacios infinito dimensionales admiten operadores hipercíclicos?

Por un lado S. I. Ansari [2] y por otro lado L. Bernal-Gonzales [4] pudieron probar el siguiente resultado para el caso de espacios de Banach. Pero más tarde J. Bonet y A. Peris [5] dieron una prueba completa de este.

Teorema 2.1.3. *Caulquier espacio separable de Fréchet admite un operador lineal continuo hipercíclico. En particular, cualquier espacio separable de Banach admite un operador continuo hipercíclico.*

R. M. Gethner y J. H. Shapiro [12] probaron el siguiente resultado.

Teorema 2.1.4. *Si T en $\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces el conjunto de vectores hipercíclicos es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ denso en X.*

Por un lado C. Kitai [16] y por otro R. M. Gethner y J. H. Shapiro [12] probaron, en forma independiente el siguiente resultado el cual nos da una condición suficiente para que un operador sea hipercíclico, este es llamado el *criterio de Kitai.*

Teorema 2.1.5. *(Criterio de Kitai) Sea T en $\mathcal{L}(X)$. Si existen dos subconjuntos densos A y B de X, y una función $S : B \to B$ tales que:*

1. $T^n a \to 0$, $\forall a \in A$;
2. $S^n b \to 0$, $\forall b \in B$;
3. $TSb = b$, $\forall b \in B$.

Entonces T es hipercíclico.

D. Herrero and C. Kitai [15] probaron el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Sea T en $\mathcal{L}(X)$. Si T es invertible, entonces T^{-1} es hipercíclico si y solo si T lo es.*

Sea T en $\mathcal{L}(X)$. Definimos el *espectro* de T como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ es no invertible } \}$$

C. Kitai [16] obtuvo también los siguientes resultados que nos permite verificar, en algunos casos de forma fácil, si un operador no es hipercíclico.

Teorema 2.1.7. *Si T en $\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces*

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \neq \emptyset$$

Teorema 2.1.8. *Si T en $\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces cada componente conexa del espectro de T intersecta a $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

De la definición de operador hipercíclico es inmediato que si una potencia de un operador es hipercíclico, entonces el operador es hipercíclico. Pero el recíproco de este no es trivial, sin embargo, pudo ser probado por S. I. Ansari [1]. A continuación lo presentamos como un teorema.

Teorema 2.1.9. *Si T en $\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico, entonces T^m es hipercíclico para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Mas aún T^m y T tienen los mismos vectores hipercíclicos.*

L. Drewnowski sugirió el siguiente criterio de hiperciclicidad más general que el criterio de Kitai, conocido como el criterio de hiperciclicidad.

Teorema 2.1.10. *(Criterio de Hiperciclicidad) Sea T en $\mathcal{L}(X)$. Si existen una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos, dos subconjuntos densos A y B de X, y una sucesión $\{S_{n_k}\}$ de funciones $S_{n_k} : B \to B$, tales que:*

1. *$T^{n_k}a \to 0$, $\forall a \in A$;*
2. *$S_{n_k}b \to 0$, $\forall b \in B$;*

3. $T^{n_k} S_{n_k} b \to b$, $\forall b \in B$.

Entonces T es hipercíclico.

Se conoce hoy en día un operador hipercíclico que no satisface el Criterio de Hipercicliciad, dejando a la luz que este criterio es una condición suficiente pero no necesaria para que un operador sea hipercíclico.

Un operador T se dice *topológicamente transitivo* si para cada par de conjuntos abiertos U y V no vacíos de X existe un n en $\mathbb{N}^*$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

G. Godefroy y J. H. Shapiro [14] probaron el siguiente resultado.

Teorema 2.1.11. *Si X es un espacio de Banach separable y T está en $\mathcal{L}(X)$, entonces T es hipercíclico si y solo si T es topológicamente transitivo.*

Luego se generalizó un poco más el concepto de hiperciclicidad, como se muestra en la siguiente definición.

Definición 2.1.12. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores en $\mathcal{L}(X)$. Decimos que $x \in X$ es hipercíclico para $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si la colección de imágenes $\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en X. Si tal x existe, decimos que la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *universal*.

Así, T es hipercíclico si y solo si la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $T_n = T^n$, es universal.

G. Godefroy y J. H. Shapiro extendieron muchos de los resultados conocidos para la hiperciclicidad de un operador al caso de una sucesión universal.

Definición 2.1.13. Sea T en $\mathcal{L}(X)$ y $\{n_k\}$ una sucesión de enteros positivos estrictamente creciente, entonces T es *hereditariamente hipercíclico* con respecto a la sucesión $\{n_k\}$ si para cada subsucesión $\{n_{k_j}\}$ de $\{n_k\}$, la sucesión $\{T^{n_{k_j}}\}$ es universal.

Definición 2.1.14. Una sucesión de enteros positivos estrictamente creciente $\{n_k\}$ es *sindética* si $\sup_k \{n_{k+1} - n_k\} < \infty$. Decimos que un operador satisface el Criterio de Hipeciclicidad para una sucesión sindética, si en el Criterio de Hiperciclicidad la sucesión $\{n_k\}$ es sindética.

Definición 2.1.15. Un operador T en $\mathcal{L}(X)$ se dice *sindéticamente hipercíclico*, si para cada sucesión sindética de enteros positivos $\{n_k\}$, la sucesión $\{T^{n_k}\}$ es universal.

Por un lado A. Peris y L. Saldivia [20] y por otro S. Grivaux [13] probaron el siguiente teorema.

Teorema 2.1.16. *Sea T en $\mathcal{L}(X)$. T satisface el Criterio de Hiperciclicidad si y solo si T es sindéticamente hipercíclico.*

Sea X un espacio de Banach separable, sabemos que un operador T en $\mathcal{L}(X)$ es hipercíclico si y solo si para cada par de conjuntos abiertos U y V no vacíos de X existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
Así surge la siguiente definición más fuerte de hiperciclicidad que presentamos a continuación.

Definición 2.1.17. T en $\mathcal{L}(X)$ se dice *topológicamente mezclante*, si para cada par de conjuntos abiertos U y V no vacíos de X existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tal que para $n \geq N$, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$

G. Costaki y M. Sambarino [8] probaron el siguiente resultado.

Teorema 2.1.18. *Sea T en $\mathcal{L}(X)$. Si T satisface el Criterio de Hiperciclicidad para una sucesión sindética, entonces T es topológicamente mezclante.*

Así todo operador que satisface el criterio de Kitai es topológicamente mezclante.

T. Bermúdez, A. Bonilla, J. A. Conejero y A. Peris [3] probaron que:

Proposición 2.1.19. *T satisface el Criterio de Hiperciclicidad para una sucesión sindética si y solo si T satisface el Criterio de Hipercíclicidad para la sucesión completa $\mathbb{N}$.*

S. Grivaux [13] dió ejemplos de operadores que son topológicamente mezclantes pero que no satisfacen el criterio de Kitai. Tambien dió una caracterización de los operadores topológicamente mezclantes, mediante hereditariedad hipercíclica que presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.20. *T en $\mathcal{L}(X)$ es topológicamente mezclante si y solo si es hereditariamente hipercíclico para la sucesión completa de los enteros positivos.*

2.2. Traslaciones unilaterales y bilaterales.

El estudio de operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach empezó en 1969 cuando S. Rolewicz [22] probó que cualquier múltiplo λB, con $|\lambda| > 1$, del operador de traslación a izquierda en $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ ó $c_0(\mathbb{N})$ es hipercíclico.

Definición 2.2.1. Sea X el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ ó el espacio $c_0(\mathbb{N})$. El operador T es un operador de *traslación unilateral* a izquierda con pesos positivos acotados $\{w_n\}$ con respecto a la base canónica $\{e_n\}$ de X, si $Te_n = w_n e_{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}^*$ y $Te_0 = 0$, y extendido linealmente en todo X . Para referirnos a este operador simplemente decimos traslación unilateral a izquierda con pesos positivos.

Denotemos por $r(T)$ el *radio espectral* de un operador T:

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

En A. L. Shields [25] se pueden encontrar los dos siguientes teoremas junto con sus pruebas.

Teorema 2.2.2. *Si T es una traslación unilateral con pesos positivos acotados, entonces el espectro de T es el disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(T)\}$.*

Sean $c = \liminf_{n\to\infty}(w_1 \cdots w_n)^{1/n}$, $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ es no inyectiva}\}$ el *espectro puntual* del operador T y T^* el operador *adjunto* de T.

Teorema 2.2.3. *Sea T una traslación unilateral a izquierda con pesos positivos acotados $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ inyectiva, entonces*

1. $\sigma_p(T^*) = \emptyset$
2. $\{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < c\} \subset \sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq c\}$

El siguiente teorema es una caracterización de las traslaciones unilaterales a izquierda con pesos positivos que son hipercíclicas dada por H. Salas [23].

Teorema 2.2.4. *Sea T una traslación unilateral a izquierda con pesos positivos acotados $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, entonces T es hipercíclica si y solo si* $\sup_n \prod_{s=1}^{n} w_s = \infty$.

Luego de conocerse el concepto de operadores topológicamente mezclantes G. Costakis y M. Sambarino [8] dieron una caracterización de las traslaciones unilaterales a izquierda que son topológicamente mezclante en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5. *Sea T una traslación unilateral a izquierda con pesos positivos acotados $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. T es topológicamente mezclante si y solo si* $\lim_n \prod_{s=1}^{n} w_s = \infty$

H. Salas [23] probó también que:

Teorema 2.2.6. *Si T es una traslación unilateral a izquierda con pesos positivos, entonces $I + T$ es hipercíclico.*

La prueba que el dió no utiliza ninguno de los criterios de hiperciclicidad antes mencionados sino que es constructiva basada en los siguientes lemas.

Lema 2.2.7. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden 2^k con $a_{ij} = \frac{1}{(2^k+j-i)!}$, entonces A es invertible.*

Lema 2.2.8. *Sean $C_n = (c_{ij}(n))$ una matriz de orden 2^k cuyas entradas $C_{ij}(n)$ son el número combinatorio $\binom{n}{2^k+j-i}$ y $B_n = (b_i(n))$ un vector columna tal que $b_i(n)$ es un polinomio en n de grado a lo más $2^k - i$, donde $i = 1, \ldots, 2^k$, entonces para n suficientemente grande existe una solución $X_n = (x_i(n))$ de la ecuación $B_n = C_n X_n$ y las entradas $x_i(n)$ satisfacen $|x_i(n)| \leq P/n^i$, donde P es una constante.*

Sin embargo más tarde F. León-Saavedra y A. Montes-Rodríguez [18] probaron que $I + T$ satisface el criterio de Hiperciclicidad. Para lograr dicha prueba usaron el lema 2.2.8 y una versión más general de este, que enunciamos a continuación.

Lema 2.2.9. *Sean $C_n = (c_{ij}(n))$ una matriz de orden 2^k cuyas entradas $C_{ij}(n)$ son el número combinatorio $(-1)^{j-i}\binom{n+2^k+j-i-1}{2^k+j-i}$ y $B_n = (b_i(n))$ un vector columna tal que $b_i(n)$ es un polinomio en n de grado a lo más $2^k - i$, donde $i = 1, \ldots, 2^k$, entonces para n suficientemente grande existe una solución $X_n = (x_i(n))$ de la ecuación*

$B_n = C_n X_n$ y las entradas $x_i(n)$ satisfacen $|x_i(n)| \leq P/n^i$, donde P es una constante.

Luego S. Grivaux [13] probó que $I + T$ no solo es hipercíclico sino que también es topológicamente mezclante.

Definición 2.2.10. Sea X el espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p < \infty$ ó el espacio $c_0(\mathbb{Z})$. El operador T es un operador de *traslación bilateral* a izquierda (derecha) con pesos positivos acotados $\{w_n : n \in \mathbb{Z}\}$ en la base canónica $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de X, si $Te_n = w_n e_{n-1}$ ($Te_n = w_n e_{n+1}$) respectivamente y extendido linealmente en todo X. Para referirnos a este operador simplemente decimos traslación bilateral a izquierda (derecha) con pesos positivos.

No hay diferencia esencial entre las traslaciones bilaterales a izquierda o a derecha.

De manera similar podemos definir traslaciones en cualquier espacio separable de Hilbert $\mathcal{H}$.

Trataremos de extender en forma natural los resultados de operadores unilaterales al caso bilateral.

En A. L. Shields [25] podemos ver junto con su prueba el siguiente teorema.

Teorema 2.2.11. *Sea T una traslación bilateral a derecha con pesos positivos acotados $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*

1. *Si T es invertible, entonces el espectro de T es la arandela*

$$\{z \in \mathbb{C} : [r(T^{-1})]^{-1} \leq |z| \leq r(T)\}$$

2. *Si T no es invertible, entonces el espectro de T es el disco*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r(T)\}$$

Al igual que para traslaciones unilaterales, H. Salas [23] caracterizó las traslaciones bilaterales que son hipercíclicas como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.2.12. *Sea T una traslación bilateral a derecha con pesos positivos acotados $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, entonces T es hipercíclico si y solo si dado $\varepsilon > 0$ y $q \in \mathbb{N}$, existe n suficientemente grande tal que para todo j con $|j| \leq q$,*

$$\prod_{s=0}^{n-1} w_{s+j} < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \prod_{s=1}^{n} w_{s-j} > 1/\varepsilon.$$

Como un pequeño aporte nosotros pudimos caracterizar las traslaciones bilaterales que son topológicamente mezclantes extendiendo el teorema 2.2.5 al caso bilateral, el cual presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.13. *Sea T una traslación bilateral a derecha con pesos positivos acotados $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p < \infty$ ó $c_0(\mathbb{Z})$. Entonces:*

T es topológicamente mezclante si y solo si

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{s=0}^{n-1} w_s = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{s=1}^{n} w_{-s} = \infty.$

Demostración. Sea X uno de los espacios $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p < \infty$ ó $c_0(\mathbb{Z})$. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{s=0}^{n-1} w_s = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{s=1}^{n} w_{-s} = \infty$. El conjunto $D = \{g_k = \sum_{|j|\leq k} g_{kj} e_j : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en X, donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la base canónica de X y

$$\begin{aligned} T^n(g_k) &= T^n(\sum_{|j|\leq k} g_{kj} e_j) \\ &= \sum_{|j|\leq k} g_{kj} T^n e_j \\ &= \sum_{|j|\leq k} g_{kj} (\prod_{s=0}^{n-1} w_{j+s}) e_{j+n} \\ \|T^n(g_k)\| &\leq (\text{máx}\{\prod_{s=0}^{n-1} w_{j+s} : |j| \leq k\}) \|g_k\| \to 0 \end{aligned}$$

Tomemos S el operador en X definido por

$$S(e_{n+1}) = w_n^{-1} e_n$$

$$\begin{aligned}
S^n(g_k) &= S^n(\sum_{|j|\leq k} g_{kj}e_j) \\
&= \sum_{|j|\leq k} g_{kj}S^n e_j \\
&= \sum_{|j|\leq k} g_{kj}(\prod_{s=1}^{n} w_{j-s})^{-1}e_{j-n} \\
\|S^n(g_k)\| &\leq (\text{máx}\{(\prod_{s=1}^{n} w_{j-s})^{-1} : |j| \leq k\})\|g_k\| \to 0
\end{aligned}$$

así que T satisface el criterio de hiperciclicidad para la sucesión sindética $\{n_k\} = \mathbb{N}$, por lo tanto, dado a 2.1.18 T es topológicamente mezclante.

Recíprocamente, supongamos que T es topológicamente mezclante y veamos que se cumplen (1) y (2).

Sea $\varepsilon > 0$, tomemos

$$U = \{x \in X : |x_o| > 1\} \qquad \text{y} \qquad V = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$$

los cuales son subconjuntos abiertos no vacíos de X, entonces, como T es topológicamente mezclante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, tenemos que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, esto es, existe $x \in U$ tal que $T^n(x) \in V$. Pero como $x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e_j$, tenemos que $|x_o| > 1$ dado que $x \in U$ y $T^n(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j(\prod_{s=0}^{n-1} w_{j+s})e_{j+n}$, se tiene que:

$$|\prod_{s=0}^{n-1} w_s| < |x_o \prod_{s=0}^{n-1} w_s| \leq \|T^n(x)\| < \varepsilon.$$

Con esto hemos probado (1). Probemos ahora (2)

Razonando por el absurdo supongamos que $\lim_{n\to\infty} \prod_{s=1}^{n} w_{-s} \neq \infty$, entonces $\underline{\lim} \prod_{s=1}^{n} w_{-s} < \infty$. En otras palabras, existe $M > 0$ y $n_k \to \infty$ tal que $\prod_{s=1}^{n_k} w_{-s} < M$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon < \frac{1}{2}$, tomemos $\delta < \frac{1}{2M}$,

$$U = \{x \in X : \|x\| < \delta\} \qquad \text{y} \qquad V = \{x \in X : \|x - e_0\| < \varepsilon\}$$

Dado que T es topológicamente mezclante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Tomando $n_k \geq N$ tenemos que $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$, así que existe $x \in U$ tal que $T^{n_k}(x) \in V$, pero como $x = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} x_j e_j$ tenemos que $|x_{-n_k}| < \delta$ y $T^{n_k}(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} x_j (\prod\limits_{s=0}^{n_k-1} w_{j+s}) e_{j+n_k}$.

La 0-ésima componente de $T^{n_k}(x)$ es $(\prod\limits_{s=0}^{n_k-1} w_{-n_k+s}) x_{-n_k} = (\prod\limits_{s=1}^{n_k} w_{-s}) x_{-n_k}$, así que $|x_{-n_k} \prod\limits_{s=1}^{n_k} w_{-s}| < \delta M < \frac{1}{2}$. Pero

$$\|T^{n_k}(x) - e_{-n_k}\| \geq |(\prod_{s=1}^{n_k} w_{-s}) x_{-n_k} - 1| > \frac{1}{2} > \varepsilon$$

De donde $T^{n_k}(x) \notin V$. Absurdo. $\square$

Capítulo 3
OPERADORES COHIPONORMALES HIPERCÍCLICOS

En este capitulo en la sección 1 presentamos resultados preliminares de teoría espectral local. En la seción 2 mostramos resultados de operadores cohiponormales hipercíclicos y damos una respuesta parcial al problema 2 planteado en [24].

3.1. Preliminares de teoría espectral local.

El problema 2 planteado en [24] es: *Caracterizar las traslaciones bilaterales con pesos positivos T tal que $I+T$ es hipercíclico.* Para tratar de responder este problema estudiaremos en esta sección un poco de teoría espectral local. La gran mayoría de los resultados aquí presentados pueden encontrarse en [17].

En esta sección X representa un espacio de Banach complejo y T un operador lineal acotado en X. Si U es un conjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, denotemos por $H(U,X)$ el espacio Fréchet de funciones holomorfas X-valuadas en U. T induce una aplicación continua T_U en cada $H(U,X)$ definida por $T_U f(\lambda) = (T-\lambda)f(\lambda)$ para todo f en $H(U,X)$ y λ en U.

Definición 3.1.1. T tiene la propiedad de *Bishop* (β), si dado cualquier subconjunto U de $\mathbb{C}$ y toda sucesión de funciones analíticas $f_n : U \to X$ con la propiedad que $(T-\lambda)f_n(\lambda) \to 0$, uniformemente en todo subconjunto compacto de U, entonces $f_n(\lambda) \to 0$, uniformemente en todo subconjunto compacto de U cuando $n \to \infty$.

Esta condición sin embargo se puede enunciar en una forma más sencilla como lo podemos ver en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *T tiene la propiedad de Bishop (β) si y solo si para cada subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$, la aplicación T_U es inyectiva y tiene rango cerrado en $H(U, X)$.*

Sea $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ el conjunto *resolvente de T*.

Ahora hablaremos de la ecuación resolvente local. Dado T y un elemento x en X estamos interesados en soluciones analíticas $f : U \to X$ de la ecuación $(T-\lambda)f(\lambda) = x$ en algún subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$. En el conjunto resolvente $\rho(T)$ de T, la solución es fácil y está dada por la función $f(\lambda) = (T - \lambda)^{-1}x$ para todo λ en $\rho(T)$, esta función es única. Sin embargo es a veces posible para ciertos x en X obtener soluciones analíticas de la ecuación $(T - \lambda)f(\lambda) = x$ en conjuntos abiertos que contienen puntos del espectro $\sigma(T)$. En este caso, la unicidad de la solución analítica es un hecho no trivial que observamos en la siguiente definición.

Definición 3.1.3. T tiene la *propiedad de extención univaluada*, con siglas del inglés *SVEP*, si para cada subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$, la única solución analítica $f : U \to X$ de la ecuación $(T - \lambda)f(\lambda) = 0$ para todo λ en U es la función cero en U.

Esto es, que para todo conjunto abierto U de $\mathbb{C}$, el operador T_U es inyectivo en $H(U, X)$. Evidentemente la propiedad (β) implica SVEP. Es claro que un operador que tiene el conjunto de autovalores con interior vacío tiene la propiedad SVEP.

El siguiente resultado nos muestra que todo operador sobreyectivo no invertible no puede tener SVEP.

Proposición 3.1.4. *Si T es sobreyectivo y satisface SVEP, entonces T es invertible.*

Así por ejemplo la traslación unilateral a izquierda en $\ell^2(\mathbb{N})$ no tiene SVEP, ya que es sobreyectiva y no invertible.

Si x está en X, la resolvente local de T en x se define como el conjunto $\rho_T(x)$ de los $\lambda \in C$ para el cual existe una vecindad U de λ y f una función analítica $f : U \to X$ tal que $(T - z)f(z) = x$ para todo $z \in U$.

El espectro local de T en x es $\sigma_T(x) = \mathbb{C}\backslash\rho_T(x)$.

Es claro que $\rho_T(x)$ es abierto y por lo tanto $\sigma_T(x)$ es cerrado. También es claro que $\rho(T) \subseteq \rho_T(x)$, así las soluciones analíticas en la resolvente local pueden ser pensadas como extensiones locales de la función $f(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}x$. Esto no implica la unicidad. En efecto, las soluciones analíticas son únicas para toda x en X si y solo si T tiene la propiedad SVEP y en este caso se define la solución como la función analítica en $\rho_T(x)$, la cual es la máxima extención analítica de $f(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}x$ de $\rho(T)$ a $\rho_T(x)$.

A esta función la llamamos *la función resolvente local.*

El siguiente lema se obtiene aplicando el teorema de Cauchy y las propiedades del cálculo funcional de Riesz.

Lema 3.1.5. *Sea X un espacio de Banach, $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y Γ un contorno en $U := \mathbb{C} \setminus K$ que bordea a K. Si T es un operador en X, x en X y f en $H(U, X)$ que satisfacen la ecuación $T_U f \equiv x$, entonces*

$$T^n x = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^n f(\lambda) d\lambda \textit{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definición 3.1.6. Dado T, definimos el subespacio *espectral local* de T por

$$X_T(F) := \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq F\}$$

para todo conjunto $F \subseteq \mathbb{C}$.

Es claro que $X_T(F) = X_T(\sigma(T) \cap F)$ y $X_T(F) \subseteq X_T(G)$ cuando $F \subseteq G \subseteq \mathbb{C}$. En efecto, sigue de la definición que

$$X_T(\cap\{F_\alpha : \alpha \in A\}) = \cap\{X_T(F_\alpha) : \alpha \in A\}$$

para toda colección de conjuntos $F_\alpha \subseteq \mathbb{C}$.

- *Un subespacio lineal cerrado Y de X se dice T-invariante si $TY \subseteq Y$.*

- *Sea Y un subespacio lineal cerrado T-invariante de X, $T|Y$ en $\mathcal{L}(Y)$ denota el operador dado por la restricción de T a Y.*
- *Un subespacio lineal Y de X se dice T-hiperinvariante, si $SY \subseteq Y$ para todo operador lineal acotado S en X que conmuta con T.*

El siguiente resultado nos muestra que $X_T(F)$ es en verdad un subespacio lineal, pero no siempre cerrado.

Proposición 3.1.7. *Dado T. Para todo subconjunto cerrado F de $\mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son ciertas.*

1. *$X_T(F)$ es un subespacio lineal, T-hiperinvariante de X.*
2. *$(T-\lambda)X_T(F) = X_T(F)$ para todo λ en $\mathbb{C} \setminus F$.*
3. *Si x en X satisface que $(T-\lambda)x$ esá en $X_T(F)$ para algún $\lambda \in F$, entonces x está en $X_T(F)$.*
4. *$\ker(T-\lambda)^n \subseteq X_T(\{\lambda\}$ para toda λ en $\mathbb{C}$ y n en $\mathbb{N}$.*
5. *Si Y es un subespacio lineal cerrado T-invariante de X con la propiedad de que $\sigma(T|Y) \subseteq F$, entonces $Y \subseteq X_T(F)$.*
6. *T satisface SVEP si y solo si $X_T(\emptyset) = \{0\}$, y este es el caso si y solo si $X_T(\emptyset)$ es cerrado.*
7. *Si T satisface SVEP y F_1, $F_2 \subseteq \mathbb{C}$ son cerrados y disjuntos, entonces la descomposición $X_T(F_1 \cup F_2) = X_T(F_1) \oplus X_T(F_2)$ es cierta como una suma directa algebraica.*

Definición 3.1.8. T tiene la propiedad de *Dunford* (C) si y solo si el subespacio espectral $X_T(F)$ es cerrado para todo conjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{C}$.

La siguiente proposición nos da las implicaciones entre las propiedades (β), (C) y SVEP.

Proposición 3.1.9. *Si T tiene la propiedad β, entonces T tiene la propiedad (C), y si T tiene la propiedad (C), entonces T satisface SVEP.*

La siguiente proposición nos dice que la propiedad C es hereditaria bajo restricciones sobre subespacios lineales cerrados T-invariantes.

Proposición 3.1.10. *Supongamos que T tiene la propiedad (C), y sea $S := T|Y$ la restricción de T a un subespacio Y lineal cerrado T-invariante cualquiera de X, entonces S tiene la propiedad (C).*

Dado T y un subconjunto cerrado F de $\mathbb{C}$, denotemos por $\mathcal{X}_T(F)$ al conjunto consistente de todos los x en X tales que para cada x existe una función analítica $f : \mathbb{C} \setminus F \to X$ tal que $(T - \lambda)f(\lambda) = x$ para todo λ en $\mathbb{C} \setminus F$.
La identidad $\mathcal{X}_T(F) = X_T(F)$ es cierta para todo subconjunto cerrado F de $\mathbb{C}$ cuando T satisface SVEP, pero en general $\mathcal{X}_T(F)$ podría ser estrictamente más pequeño que el correspondiente subespacio local espectral $X_T(F)$. El espacio $\mathcal{X}_T(F)$ podría ser llamado *subespacio espectral glocal*, dado que las funciones analíticas en su definición estan globalmente definidas en el conjunto $\mathbb{C} \setminus F$, pero dependen de x. $\mathcal{X}_T(F)$ es un subespacio lineal de X, pero aún para un operador con SVEP, este subespacio no es necesariamente cerrado. Sin embargo la representación

$$\mathcal{X}_T(F) = \{x \in X : x \in T_{\mathbb{C}\setminus F}(H(\mathbb{C} \setminus F, X))\}$$

nos muestra que $\mathcal{X}_T(F)$ siempre lleva con el un espacio topológico de Fréchet asociado con el espacio $H(\mathbb{C} \setminus F, X)$.
Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, entonces definimos

$$\mathcal{X}_T(U) = \cup\{\mathcal{X}_T(F) : F \text{ es un subconjunto cerrado de } U\}$$

De esta definición vemos que si U y V son abiertos de $\mathbb{C}$ tal que $U \subseteq V$, entonces $\mathcal{X}_T(U) \subseteq \mathcal{X}_T(V)$.
Definición 3.1.11. T tiene la propiedad de *descomposición* (δ) si

$$X = \mathcal{X}_T(\overline{U}) + \mathcal{X}_T(\overline{V})$$

para todo cubrimiento abierto $\{U, V\}$ de $\mathbb{C}$.

Los siguientes conjuntos son subconjuntos clásicos del espectro del operador T.

- El *espectro puntual* $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ es no inyectiva}\}$,
- El *espectro puntual aproximado* $\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} :$ existen vectores unitarios $x_n \in X$ para el cual $(T - \lambda)x_n \to 0$ cuando $n \to \infty\}$,
- El *espectro sobreyectivo* $\sigma_{su}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)X \neq X\}$ y
- El *espectro de compresión* $\sigma_{com}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)X \text{ no es denso en } X\}$.

La siguiente proposición nos muestra que el espectro local de un operador está relacionado con su espectro sobreyectivo.

Proposición 3.1.12. *Para todo T, los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *$\sigma_{su}(T)$ es cerrado y contiene la frontera de $\sigma(T)$;*
2. *para todo λ en $\mathbb{C} \setminus \sigma_{su}(T)$, existe un número positivo c para el cual $X = \mathcal{X}(\mathbb{C} \setminus B(\lambda, c))$;*
3. *$\sigma_{su}(T) = \cup\{\sigma_T(x) : x \in X\}$;*
4. *el conjunto $\{x \in X : \sigma_T(x) = \sigma_{su}(T)\}$ es de segunda categoría en X;*
5. *si T satisface SVEP y λ en $\sigma_p(T)$, entonces $\sigma_T(x) = \{\lambda\}$ para cada autovector de T relativo a λ;*
6. *$\sigma(T) = \sigma_{su}(T)$, si T tiene SVEP y $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$, si T^* tiene SVEP.*

Sea $X^* = \{\varphi : X \to \mathbb{C} : \varphi \text{ es un funcional lineal continuos }\}$ el *espacio dual* de X. Para un subconjunto M de X, llamemos a

$$M^{\perp} := \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}$$

el aniquilador de M en X^*. Y para un subconjunto N de X^*, llamemos a

$$^{\perp}N := \{x \in X : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \varphi \in N\}$$

el preaniquilador de N en X.

Proposición 3.1.13. *Para todo T, se tiene que*

$$\mathcal{X}_T(F) \subseteq^{\perp} \mathcal{X}^*{}_{T^*}(G) \text{ y } \mathcal{X}^*{}_{T^*}(G) \subseteq \mathcal{X}_T(F)^{\perp}$$

para todo par de subconjunto cerrados disjuntos F y G de $\mathbb{C}$.

En el siguiente resultado vemos como podemos escribir a X^* de la forma $M^\perp + N^\perp$ donde $M + N$ es cerrado y $M \cap N = \emptyset$.

Proposición 3.1.14. *Supongamos que T tiene la propiedad (C), entonces la identidad*

$$X^* = X_T(\mathbb{C} \setminus U)^\perp + X_T(\mathbb{C} \setminus V)^\perp$$

es cierta para todo cubrimiento abierto $\{U, V\}$ de $\mathbb{C}$.

La siguiente proposición nos da la dualidad entre las propiedades β y δ.

Proposición 3.1.15. *Para todo operador T los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *si T tiene la propiedad (β), entonces T^* tiene la propiedad (δ);*
2. *si T tiene la propiedad (δ), entonces T^* tiene la propiedad (β);*
3. *si T^* tiene la propiedad (δ), entonces T tiene la propiedad (β).*

La siguiente proposición nos permite relacionar el subespacio local con el subespacio glocal.

Proposición 3.1.16. *Sea T con la propiedad (β), entonces*

$$X_T(F) =^\perp \mathcal{X^*}_{T^*}(\mathbb{C} \setminus F)$$

para todo subconjunto cerrado F de $\mathbb{C}$. Por otro lado si T tiene la propiedad (δ), entonces

$$X^*_{T^*}(F) = \mathcal{X}_T(\mathbb{C} \setminus F)^\perp$$

para todo subconjunto cerrado F de $\mathbb{C}$.

En el siguiente resultado podemos ver que si el operador T satisface SVEP, entonces el subespacio espectral local y el subespacio espectral glocal coinciden y si el subespacio espectral local y el subespacio espectral glocal coinciden, entonces T satisface SVEP.

Proposición 3.1.17. *Para T en $\mathcal{L}(X)$, T satisface SVEP si y solo si $\mathcal{X}_T(F) = X_T(F)$ para todo conjunto cerrado F de $\mathbb{C}$.*

El siguiente teorema nos muestra que el subespacio glocal se comporta canónicamente con respecto al cálculo funcional de Riesz.

Teorema 3.1.18. *Sean T un operador lineal continuo en un espacio de Banach X y f una función analítica en una vecindad abierta U de $\sigma(T)$, entonces*

$$\mathcal{X}_{f(T)}(F) = \mathcal{X}_T(f^{-1}(F)) \text{ para todo conjunto cerrado } F \text{ de } \mathbb{C}.$$

Más aún, si T tiene la propiedad C, entonces también $f(T)$. Similares resultados para las propiedades (β), (δ) y SVEP.

Estamos tentados a pensar que la propiedad:

$$f(\sigma_T(x)) = \sigma_{f(T)}(x)$$

es cierta. Pero esto no es cierto en general. Por ejemplo si $f \equiv c$ una función constante y $T \in \mathcal{L}(X)$ sin SVEP. Luego por 3.1.7 parte 6, existe un elemento x distinto de cero en X tal que $\sigma_T(x)$ es vacío, mientras que

$$\sigma_{f(T)}(x) = \{c\}$$

Teorema 3.1.19. *Sean T un operador lineal continuo en un espacio de Banach X y f una función analítica en una vecindad abierta U de $\sigma(T)$, entonces*

$$f(\sigma_T(x)) \subseteq \sigma_{f(T)}(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Más aún, la igualdad se da si T tiene SVEP o si f es no constante en cada una de las componentes conexas de U.

3.2. Hiperciclicidad de operadores cohiponormales.

En esta seción mostramos resultados que conectan el espectro local con la hiperciclicidad de un operador, por ejemplo; con el uso de espectros locales N. S. Feldman, V. G. Miller y T. L. Miller en [11] pudieron caracterizar los operadores cohiponormales en un espacio de Hilbert que son hipercíclicos, usando esta caracterización pudimos dar una respuesta parcial al problema 2 en [24]. Tomamos este camino para abordar este problema por una sugerencia que hizo N. S. Feldman personalmente a H. Salas.

Definición 3.2.1. Un operador lineal acotado T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se dice *normal* si $T^*T = TT^*$. Si $T^*T - TT^* \geq 0$ decimos que el operador es *hiponormal*, al operador adjunto de un operador hiponormal se le dice *cohiponormal*.

Si T es hiponormal, los siguientes enunciados son ciertos:

1. Si M es invariante bajo T, $T|M$ es hiponormal.
2. $r(T) = \|T\|$.
3. Si T es invertible, T^{-1} es hiponormal.
4. T tiene la propiedad β.

Definición 3.2.2. T se dice *descomponible* si para cada cubrimiento abierto $\{U, V\}$ de $\mathbb{C}$, existen Y y Z subespacios lineales cerrados T-invariantes de X tales que $\sigma(T|Y) \subseteq U$, $\sigma(T|Z) \subseteq V$ y $X = Y + Z$.

Teorema 3.2.3. *Todo operador descomponible tiene la propiedad* (β)*.*

Se sabe que todo operador normal es descomponible y por lo tanto tiene la propiedad β.

Lema 3.2.4. *Una traslación a derecha en un espacio separable de Hilbert (unilateral o bilateral) con pesos no negativos acotados* $\{w_n\}$ *es hiponormal si y solo si*

$$w_n \leq w_{n+1} \text{ para todo } n$$

Una de traslación bilateral es normal si y solo si $\{w_n\}$ *es constante. Traslaciones unilaterales nunca son normales.*

En el trabajo presentado por M. Putinar [21] se puede ver que todo operador hiponormal tiene la propiedad (β).

Dado T, denotemos por $Lat(T)$ el *latice de subespacios cerrados* T*-invariantes de* X y si $\mathcal{M}$ está en $\mathrm{Lat}(T)$, entonces $T|\mathcal{M}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ es la restricción de T a $\mathcal{M}$. Nos referimos a $T|\mathcal{M}$ como una parte de T y $\sigma(T|\mathcal{M})$ como una parte del espectro de T.

Los siguientes resultados pueden ser vistos junto con sus pruebas en el trabajo presentado por N. S. Feldman, V. G. Miller y T. L. Miller en [11].

La siguiente proposición nos da una relación simple entre las partes del espectro y el espectro local de un operador con la propiedad de Dunford (C).

Proposición 3.2.5. *Si T tiene la propiedad (C), entonces todo espectro local es una parte del espectro de T y toda parte del espectro de T contiene un espectro local de T no vacío.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$, entonces dado que T tiene la propiedad (C) tenemos que $X_T(F)$ es un subespacio lineal cerrado T-invariante, luego por la proposición 3.1.10 obtenemos que $T|X_T(F)$ tiene la propiedad (C) pero por 3.1.9 $T|X_T(F)$ tiene SVEP, usando ahora 3.1.18 tenemos que $T|X_T(F)-\lambda$ tiene SVEP, luego por 3.1.7 parte 2, $T|X_T(F)-\lambda$ es sobreyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}\setminus F$ así, por 3.1.4 $T|X_T(F)-\lambda$ es invertible para todo λ en $\mathbb{C}\setminus F$, esto es $\mathbb{C}\setminus F \subseteq \rho(T|X_T(F))$ de donde $\sigma(T|X_T(F)) \subseteq F$. Tomando $F = \sigma_T(x)$ para algún x distinto de cero en X tenemos que $\sigma(T|X_T(\sigma_T(x))) \subseteq \sigma_T(x)$ y como $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T|X_T(\sigma_T(x)))$, entonces concluimos que $\sigma_T(x) = \sigma(T|X_T(\sigma_T(x)))$, en otras palabras; todo espectro local de T es una parte del espectro de T.

Veamos ahora que toda parte del espectro de T contiene un espectro local de T no vacío, en efecto, si $\mathcal{M}$ está en $\mathrm{Lat}(T)\setminus\{0\}$, entonces por 3.1.12 partes 4 y 6, existe x en $\mathcal{M}$ tal que $\sigma_{T|\mathcal{M}}(x) = \sigma(T|\mathcal{M})$, pero como $\sigma_T(x) \subseteq \sigma_{T|\mathcal{M}}(x) = \sigma(T|\mathcal{M})$ se concluye el resultado deseado. $\square$

No toda parte del espectro de un operador T con la propiedad C es un espectro local, por ejemplo sea $T = M_z$ el operador multiplicación por z en el espacio de Lebesque $L^2(\partial\mathbb{D})$, T es normal, por lo tanto tiene la propiedad (β). El espacio de Hardy H^2 es invariante bajo T y $\sigma(T|H^2) = \overline{\mathbb{D}}$, donde $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda < 1\}$.

Si $f \in H^2 \setminus \{0\}$, entonces f es analítica en $\mathbb{D}$ y así, $\sigma_{T|H^2}(f) = \overline{\mathbb{D}}$ mientras que $\sigma_T(f) = \partial\mathbb{D}$.

En el siguiente resultado hemos cambiado la coclusión de la versión original que era hipercíclico por topológicamente mezclante, dado que en la prueba presentada en [11] los autores usan 3.1.5 y el criterio de hipercíclicidad para la sucesión completa de los numeros naturales, así, aplicando el teorema 2.1.18 se puede concluir que en verdad es topológicamente mezclante.

Teorema 3.2.6. *Supongamos T en $\mathcal{L}(X)$. Si $\mathcal{X}_T(\mathbb{D})$ y $\mathcal{X}_T(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ son densos en X, entonces T es topológicamente mezclante.*

Corolario 3.2.7. *Supongamos T pertenece a $\mathcal{L}(X)$ y φ es una función analítica en una vecindad de $\sigma(T)$. Si existen dos conjuntos abiertos U y V de $\mathbb{C}$ tal que $\mathcal{X}_T(U)$ y $\mathcal{X}_T(V)$ son densos en X, entonces $\varphi(T)$ es topológicamente mezclante si φ separa U y V, en el sentido que $\varphi(U) \subseteq \mathbb{D}$ y $\varphi(V) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Por 3.1.18, tenemos que $X_{\varphi(T)}(\mathbb{D}) = X_T(\varphi^{-1}(\mathbb{D}) \supseteq X_T(U)$ y $X_{\varphi(T)}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = X_T(\varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \supseteq X_T(V)$. Así, $X_{\varphi(T)}(\mathbb{D})$ y $X_{\varphi(T)}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ son densos en X, luego por teorema 3.2.6 $\varphi(T)$ es hipercíclico. $\square$

Corolario 3.2.8. *Sea T con la propiedad (δ). Si*

$$\sigma_{T^*}(x^*) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset \text{ y } \sigma_{T^*}(x^*) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset$$

para todo x^* en X^* distinto de cero, entonces T es topológicamente mezclante.

Demostración. Dado que T tiene la propiedad (δ), entonces por 3.1.15 T^* tiene la propiedad (β), como $\sigma_{T^*}(x^*) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ y $\sigma_{T^*}(x^*) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset$ para todo x^* en X^* distinto de cero, entonces por 3.1.16 y 3.1.17 se tiene que $X_{\varphi(T)}(\mathbb{D})$ y $X_{\varphi(T)}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ son densos en X, luego por 3.2.6 tenemos que T es hipercíclico. $\square$

Cuando el operador en el corolario anterior es cohiponormal en un espacio de Hilbert se tiene que el recíproco también es cierto, así, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.9. *Si T es un operador hiponormal en un espacio separable de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces T^* es hipercíclico si y solo si $\sigma_T(x) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ y $\sigma_T(x) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset$ para todo x en $\mathcal{H}$ distinto de cero.*

Demostración. Como T es hiponormal, entonces T tiene la propiedad (β), entonces por 3.1.15 T^* tiene la propiedad (δ). Así, como $\sigma_T(x) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ y $\sigma_T(x) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset$ para todo x en $\mathcal{H}$ distinto de cero, entonces por 3.2.8 T^* es hipercíclico. Recíprocamente, supongamos que T^* es hipercíclico. Por la proposición 3.2.5 es suficiente probar que toda parte del espectro de T intersecta a $\mathbb{D}$ y $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Para esto sean $\mathcal{M}$ en $\mathrm{Lat}(T) \setminus \{0\}$ y $S = T|\mathcal{M}$. Si x es un vector hipercíclico para T^*, entonces la proyección $P_{\mathcal{M}}x$ es un vector hipercíco para $S^* = P_{\mathcal{M}}T^*|\mathcal{M}$, pero como $r(S) = \|S\| = \|S^*\| > 1$, entonces $\sigma(S) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset$. Por otro lado, si $\sigma(S) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ entonces $r(S^{-1}) \leq 1$ y así $\|S^{-1}\| \leq 1$. Pero S^* es hipercíclico e invertible, entonces por teorema 2.1.6 se tiene que $(S^*)^{-1}$ es hipercíclico y así $\|(S^*)^{-1}\| > 1$. Absurdo. Por lo tanto $\sigma(S) \cap \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \neq \emptyset$. □

Definición 3.2.10. Sea T en $\mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T) = \sigma_T(x)$ para todo x en X diferente de cero se dice que T tiene la propiedad gorda.

El siguiente teorema fue probado por L. R. Williams [26].

Teorema 3.2.11. *Si T es una traslación con pesos (unilateral o bilateral) hiponormal no normal definida en un espacio separable de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces T tiene la propiedad gorda.*

El próximo teorema es una consecuencia inmediata de los resultados presentados por N. S. Feldman, V. G. Miller y T. L. Miller en [11].

Teorema 3.2.12. *Todo operador cohiponormal en un espacio separable de Hilbert $\mathcal{H}$ es hipercíclico si y solo es topológicamente mezclante.*

Dado el teorema anterior, el siguiente teorema es una caracterización de las traslaciones bilaterales cohiponormales T, tales que $I+T$ son topológicamente mezclantes. Además nos da una respuesta parcial al problema 2 planteado en [24].

Teorema 3.2.13. *Sea T una traslación bilateral a izquierda en un espacio separable de Hilbert H, con pesos positivos acotados no constantes $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $w_n \leq w_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $I+T$ es hipercíclico si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} w_{-n} < 2$.*

Demostración. Como T^* es el operador de traslación bilateral a derecha con pesos positivos crecientes y no constantes $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, entonces por lema 3.2.4, T^* es hiponormal no normal, luego por el teorema 3.2.11 se tiene que $\sigma_{T^*}(x) = \sigma(T^*)$ para todo $x \in H \setminus \{0\}$; si $r = \lim\limits_{n\to\infty} w_{-n}$ entonces por teorema 2.2.11 $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r \leq \lambda \leq r(T)\}$, así que $\sigma_{T^*}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r \leq \lambda \leq r(T)\}$ para todo $x \in H\setminus\{0\}$. Por otro lado, dado el teorema 3.1.19 obtenemos que $\sigma_{I+T^*}(x) = 1 + \sigma_{T^*}(x)$ de donde $\sigma_{I+T^*}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r \leq |\lambda - 1| \leq r(T)\}$ para todo $x \in H \setminus \{0\}$.

Ahora supongamos que $r < 2$, entonces $\sigma_{I+T^*}(x)\cap\mathbb{D} \neq \emptyset$ y $\sigma_{I+T^*}(x)\cap(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset$ para todo $x \in H\setminus\{0\}$ y como T^* es hiponormal entonces también lo es $I+T^*$, luego por teorema 3.2.9, $I+T$ es hipercíclico.

Recíprocamente supongamos que $I+T$ es hipercíclico, entonces nuevamente por el teorema 3.2.9 tenemos que $\sigma_{I+T^*}(x) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$, así se concluye que $r < 2$. $\square$

Capítulo 4
SEMIGRUPOS C_0 TOPOLÓGICAMENTE MEZCLANTES

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la sección 1 daremos algunos preliminares de semigrupos de operadores lineales acotados. En la sección 2 presentamos algunos resultados de semigrupos C_0 hipercíclicos y de semigrupos C_0 topológicamente mezclantes, entre los resultados de semigrupos C_0 topológicamente mezclantes, damos una condición suficiente para que un semigrupo sea topológicamente mezclante y usando esta, probamos que las condiciones dadas en [9] y en [10] al generador infinitesimal de un semigrupo C_0 para que el semigrupo sea hipercíclico, son suficientes para que el semigrupo sea topológicamente mezclante.

En todo este capítulo, X representa un espacio de Banach.

4.1. Semigrupos de operadores lineales acotados.

Los resultados aquí presentados se pueden ver en el libro de A. Pazy [19]

Definición 4.1.1. Sea X un espacio de Banach. Una familia $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados en X es un semigrupo de operadores lineales en X si:

1. $T_0 = I$, donde I es el operador identidad en $\mathcal{L}(X)$.
2. $T_{t+s} = T_t T_s$, para todo $t, s \geq 0$.

Un semigrupo de operadores lineales acotados se le dice semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales acotados si

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T_t - I\| = 0.$$

Al operador lineal A definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} = \frac{d^+ T_t x}{dt}|_{t=0}$$

para todo $x \in D(A)$, donde

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existe } \}$$

es el operador infinitesimal del semigrupo $\mathcal{T}$ y $D(A)$ es el dominio de A.

De la definición es claro que si $\mathcal{T}$ es un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales acotados entonces

$$\lim_{s \to t} \|T_s - T_t\| = 0.$$

Ahora presentamos la caracterización del generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo.

Teorema 4.1.2. *Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales acotados si y solo si A es un operador lineal acotado.*

El siguiente teorema nos dice que si dos semigrupos uniformemente continuos tienen el mismo generador infinitesimal, entonces los semigrupos son iguales.

Teorema 4.1.3. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$ semigrupos uniformemente continuos de operadores lineales acotados. Si*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t - I}{t} = A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S_t - I}{t}$$

entonces $T_t = S_t$ para todo $t \geq 0$.

Corolario 4.1.4. *Sea $\mathcal{T}$ un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales acotados, entonces:*

1. *Existe una constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T_t\| \leq e^{\omega t}$.*
2. *Existe un único operador lineal acotado A tal que $T_t = e^{tA}$.*
3. *El operador en la parte 2 es el generador infinitesimal de $\mathcal{T}$.*

4. $t \to T_t$ es diferenciable en norma y

$$\frac{dT_t}{dt} = AT_t = T_tA$$

Definición 4.1.5. Un semigrupo $\mathcal{T}$ de operadores lineales acotados en X se dice un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados si

$$\lim_{t\downarrow 0} T_tx = x \text{ para todo } x \in X.$$

A los semigrupos fuertemente continuos se les llama también semigrupos de clase C_0 o simplemente semigrupos C_0.

Teorema 4.1.6. *Sea $\mathcal{T}$ un semigrupo C_0, entonces existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que*

$$\|T_t\| \leq Me^{\omega t} \text{ para } 0 \leq t < \infty.$$

Corolario 4.1.7. *Si $\mathcal{T}$ es un semigrupo entonces para todo $x \in X$, la función $t \to T_tx$ es continua en $\mathbb{R}_0^+$ (el conjunto de los números reales no negativos) en X.*

Teorema 4.1.8. *Sea A el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T}$, entonces*

1. Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_sxds = T_tx.$$

2. Para todo $x \in X$,

$$\int_0^t T_sxds \in D(A) \text{ y } A(\int_0^t T_sxds) = T_tx - x.$$

3. Para todo $x \in D(A)$,

$$T_tx \in D(A) \text{ y } \frac{dT_t}{dt}x = AT_tx = T_tAx.$$

4. Para todo $x \in D(A)$,

$$T_tx - T_sx = \int_s^t T_\tau Axd\tau = \int_s^t AT_\tau xd\tau.$$

Corolario 4.1.9. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T}$, entonces $D(A)$, el dominio de A, es denso en X y A es un operador lineal cerrado.*

El siguiente teorema nos dice que si dos semigrupos de clase C_0 tienen el mismo generador infinitesimal, entonces los semigrupos son iguales .

Teorema 4.1.10. *Sean $\mathcal{T}$ y S semigrupos C_0 con generador infinitesimal A y B respectivamente. Si $A = B$, entonces $T_t = S_t$ para todo $t \geq 0$.*

El siguiente teorema es una caracterización del generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0

Teorema 4.1.11. *Un operador A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T}$ que satisface $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$, si y solo si*

1. *A es cerrado y $D(A)$ es denso en X.*
2. *La resolvente $\rho(A)$ contiene el rayo (ω, ∞) y*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq M/(\Re\lambda - \omega)^n \text{ para todo } \Re\lambda > \omega,\ n = 1, 2, \ldots$$

El siguiente lema nos permite obtener una relación entre el espectro de A y el espectro de cada miembro de $\mathcal{T}$. Y más aún, una relación entre el espectro puntual de A y el espectro puntual de cada miembro de $\mathcal{T}$.

Lema 4.1.12. *Sea A el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T}$. Si*

$$B_t^\lambda x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T_s x ds$$

entonces

$$(\lambda - A)B_t^\lambda x = e^{\lambda t}x - T_t x \text{ para todo } x \text{ en } X$$

y

$$B_t^\lambda(\lambda - A)x = e^{\lambda t}x - T_t x \text{ para todo } x \text{ en } D(A).$$

El siguiente teorema nos da una relación entre el espectro del generador infinitesimal y el espectro de cada miembro del semigrupo.

Teorema 4.1.13. *Sea A el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T}$, entonces*

$$\sigma(T_t) \supset e^{t\sigma(A)} \text{ para todo } t \geq 0$$

El siguiente teorema nos da una relación entre el espectro puntual del generador infinitesimal y el espectro puntual de cada miembro del semigrupo.

Teorema 4.1.14. *Sea A el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T}$, entonces $e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(T_t) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}$.*
Más precisamente, si λ en $\sigma_p(A)$, entonces $e^{\lambda t}$ está en $\sigma_p(T_t)$ y si $e^{\lambda t}$ está en $\sigma_p(T_t)$ existe un k en $\mathbb{Z}$ tal que $\lambda_k = \lambda + 2\pi\imath k/t$ está en $\sigma_p(A)$.

4.2. Semigrupos C_0 hipercíclicos y topológicamente mezclantes.

En esta sección $\mathcal{T}$ representa un semigrupo de operadores lineales acotados fuertemente continuo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ y A representa su generador infinitesimal.
$\mathcal{T}$ se dice un *semigrupo hipercíclico* si existe x en X tal que $\{T_t x : t \geq 0\}$ es denso en X.
Es inmediato de la definición que si para algun $t > 0$, T_t es hipercíclico entonces $\mathcal{T}$ es hipercíclico. Surge entonces la pregunta: si $\mathcal{T}$ es hipercíclio, ¿es T_t hipercíclico para cada $t > 0$?
J. A. Conejero, V. Müler y A. Peris [7] probaron el siguiente teorema que responde a la pregunta anterior.

Teorema 4.2.1. *Si $\mathcal{T}$ es hipercíclio, entonces T_t es hipercíclico para cada $t > 0$.*

Los siguientes resultados se pueden ver junto con sus pruebas en el trabajo presentado por W. Desch, W. Schappacher y G. F. Weeb [9].

Teorema 4.2.2. *Dado $\mathcal{T}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}$ es hipercíclico;*

2. *para todo y, z en X y todo $\varepsilon > 0$, existe v en X y $t > 0$ tal que $\|y - v\| < \varepsilon$ y $\|T_t v - z\| < \varepsilon$;*
3. *para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto denso D en X tal que para todo z en D, existe un subconjunto denso D_z en X tal que para todo y en D_z, existe v en X y $t > 0$ tal que $\|y - v\| < \varepsilon$ y $\|T_t v - z\| < \varepsilon$*

Definamos los conjuntos:

$$X_0 = \{x \in X : \lim_{t \to \infty} T_t(x) = 0\}.$$

$$X_\infty = \{x \in X : \text{ para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } w \in X \text{ y } t > 0 \text{ tal que } \|w\| < \varepsilon \text{ y } \|T_t w - x\| < \varepsilon\}.$$

$$X_{per} = \{x \in X : \exists t > 0 \text{ tal que } T_t x = x\}$$

$\mathcal{T}$ se dice *caótico* si es hipercíclico y el conjunto X_{per} es denso en X.

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para que un semigrupo sea hipercíclico.

Teorema 4.2.3. *Si X_∞ y X_0 son subconjuntos densos de X, entonces $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante.*

Si para cada $t > 0$ el operador T_t del semigrupo $\mathcal{T}$ es invertible, entonces la familia $\mathcal{T}' = \{T_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ se convierte en un grupo donde el inverso de T_t, es T_{-t} para todo $t > 0$.

Teorema 4.2.4. *Si $\mathcal{T}$ es un grupo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}^+ = \{T_t\}_{t \geq 0}$ es hipercíclico;*
2. *$\mathcal{T}^- = \{T_{-t}\}_{t \geq 0}$ es hipercíclico;*
3. *existe x en X tal que los conjuntos $\{T_t x : t \geq 0\}$ y $\{T_{-t} x : t \geq 0\}$ son densos en X.*

En [9] también podemos encontrar el siguiente teorema que nos da condiciones sobre el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 suficientes para que el semigrupo sea caótico.

Teorema 4.2.5. *Sean A el generador infinitesimal del semigrupo $\mathcal{T}$ y U un subconjunto abierto del espectro puntual de A, el cual intersecta al eje imaginario. Para cada λ en U, sea x_λ un vector propio relativo a λ. Para cada $\phi \in X^*$ definimos una función $F_\phi : U \to \mathbb{C}$ por $F_\phi(\lambda) = \phi(x_\lambda)$. Supongamos que para cada $\phi \in X^* \setminus \{0\}$, F_ϕ es una la función analítica no nula en U, entonces $\mathcal{T}$ es caótico.*

S. El Mourchid [10] probó el siguiente resultado que nos da condiciones sobre el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 para que el semigrupo se hipercíclico.

Teorema 4.2.6. *Sea A el generador infinitesimal del semigrupo $\mathcal{T}$. Supongamos que $\sigma_p(A) \cap \imath\mathbb{R}$ está contenido en el intervalo del eje imaginario $(\imath w_1, \imath w_2)$ para algunos w_1 y w_2 tales que $-\infty \le w_1 \le w_2 \le \infty$ y existe una función integrable $f : (w_1, w_2) \to X$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f(s)$ pertenece a $ker(\imath s - A)$ para casi toda s en (w_1, w_2),*
2. *$gen\{f(s) : s \in (w_1, w_2) \setminus \Omega\}$ es denso en X para todo subconjunto Ω de medida cero.*

Entonces $\mathcal{T}$ es hipercíclico.

S. El Mourchid [10] comentó que las condiciones del teorema 4.2.5 sobre el generador infinitesimal implican las condiciones del teorema 4.2.6.

$\mathcal{T}$ se dice un *semigrupo topológicamente mezclante* si para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, existe $t_0 > 0$ tal que para $t \ge t_0$, $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

En este caso es inmediato de la definición que si $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante, entonces para cada $t > 0$, T_t es topológicamente mezclante. Surge entonces la pregunta: si T_t es topológicamente mezclante para algún $t > 0$, ¿es $\mathcal{T}$ topológicamente mezclante?

T. Bermúdez, A. Bonilla, J. A. Conejero y A. Peris probaron el siguiente teorema que da respuesta a esta pregunta.

Teorema 4.2.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante;*

2. *para cada $t > 0$, T_t es topológicamente mezclante;*

3. *T_{t_0} es topológicamente mezclante para algún $t_0 > 0$.*

Como un pequeño aporte presentamos los siguientes resultados para semigrupos de clase C_0 topológicamente mezclantes que son análogos a los presentados en [9] para semigrupos de clase C_0 hipercíclicos.

Proposición 4.2.8. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante.*

2. *Para todo y, z en X y todo $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que para cada $t \geq t_0$, existe v_t en X tal que $\|y - v_t\| < \varepsilon$ y $\|z - T_t(v_t)\| < \varepsilon$.*

3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto denso D de X tal que para todo z en D, existe un subconjunto denso D_z de X tal que para y en D_z, existe $t_y > 0$ tal que para $t \geq t_y$, existe y_t en X tal que $\|y - y_t\| < \varepsilon$ y $\|z - T_t(y_t)\| < \varepsilon$.*

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2.

Sean y, z en X y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Tomemos $U = B(y, \varepsilon)$ y $V = B(z, \varepsilon)$, por 1, existe $t_0 > 0$ tal que para $t \geq t_0$, $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Así para cada $t \geq t_0$, existe v_t en U tal que $T_t(v_t)$ en V, esto es para cada $t \geq t_0$, existe v_t en X tal que $\|y - v_t\| < \varepsilon$ y $\|z - T_t(v_t)\| < \varepsilon$.

2 $\Rightarrow$ 3

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomemos $D = X$, para z en D tomemos $D_z = X$, sea y en D_z, por 2, existe $t_0 > 0$ tal que para $t \geq t_0$, existe v_t en X tal que $\|y - v_t\| < \varepsilon$ y $\|z - T_t(v_t)\| < \varepsilon$, tomando $t_y = t_0$ y $y_t = v_t$ se concluye 3.

3 $\Rightarrow$ 1.

Sean U y V abiertos no vacíos de X, entonces existen $\varepsilon > 0$, y en U y z en V tal que $B(y, \varepsilon) \subseteq U$ y $B(z, \varepsilon) \subseteq V$, por 3; existe un subconjunto denso D de X, tomemos z' en D tal que $\|z - z'\| < \varepsilon/2$, para este z' existe un subconjunto denso $D_{z'}$ de X, tomemos y' en $D_{z'}$ tal que $\|y - y'\| < \varepsilon/2$, para este y', existe $t_{y'} > 0$ tal que para $t \geq t_{y'}$, existe y'_t en X tal que $\|y' - y'_t\| < \varepsilon/2$ y $\|z' - T_t(y'_t)\| < \varepsilon/2$.

Tomemos $t_0 = t_y$, entonces para cada $t \geq t_0$ tomemos $v_t = y'_t$,

$$\begin{aligned}\|y - v_t\| &= \|y - y' + y' - y'_t\| \\ &\leq \|y - y'\| + \|y' - y'_t\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

de donde v_t pertenece a $B(y, \varepsilon)$ y así v_t está en U. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|z - T_t(v_t)\| &= \|z - z' + z' - T_t(y'_t)\| \\ &\leq \|z - z'\| + \|z' - T_t(y'_t)\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

esto es $T_t(v_t)$ pertenece a $B(z, \varepsilon)$ y en consecuencia a V. Así que para cada $t \geq t_0$, $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Definamos ahora el conjunto:

$$X'_\infty = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, \exists t_0 > 0, \forall t \geq t_0, \exists w_t \in X, \|w_t\| < \varepsilon \text{ y } \|T_t(w_t) - x\| < \varepsilon\}$$

En el siguiente teorema damos condiciones similares a las del teorema 4.2.3 que son suficientes para que un semigrupo C_0 sea topológicamente mezclante. Este resultado es en realidad el criterio 3.4 de [3]. Presentamos su prueba ya que esta no es dada en [3].

Teorema 4.2.9. *Si X'_∞ y X_0 son subconjuntos densos de X, entonces $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomemos $D = X'_\infty$, para z en X'_∞ arbitrario, tomemos $D_z = X_0$, sea y en X_0 arbitrario, como z pertenece a X'_∞, existe $t_1 > 0$ tal que para $t \geq t_1$, existe w_t en X tal que $\|w_t\| < \varepsilon$ y $\|T_t(w_t) - z\| < \varepsilon/2$, ahora como y está en X_0, existe $t_{1,y} > 0$ tal que para $t \geq t_{1,y}$, $\|T_t(y)\| < \varepsilon/2$. Sea $t_y = máx\{t_1, t_{1,y}\}$, para $t \geq t_y$, tomemos $y_t = y + w_t$.

$$\begin{aligned}\|y - y_t\| &= \|y - y - w_t\| \\ &= \|w_t\| < \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|z - T_t(y_t)\| &= \|z - T_t(y) - T_t(w_t)\| \\ &\leq \|z - T_t(w_t) + \|T_t(y)\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

Así por teorema 4.2.8 parte 3, $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante. □

Teorema 4.2.10. *Si el semigrupo $\mathcal{T}$ es un grupo, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\geq 0}$ *es topológicamente mezclante.*
2. $\mathcal{T}^- = \{T_{-t}\}_{t\geq 0}$ *es topológicamente mezclante.*

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2.

Sean y, z en X y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Por 1 y teorema 4.2.8 parte 2, existe $t_0 > 0$ tal que para cada $t \geq t_0$, existe v_t en X tal que $\|y - v_t\| < \varepsilon$ y $\|z - T_t(v_t)\| < \varepsilon$. Tomando $w_t = T_t(v_t)$ tenemos que $\|w_t - z\| < \varepsilon$ y $\|T_{-t}(w_t) - y\| < \varepsilon$. Así, nuevamente por el teorema 4.2.8 parte 2, tenemos que $\mathcal{T}^-$ es topológicamente mezclante.

2 $\Rightarrow$ 1. La prueba es simétrica. □

Ahora mostramos que la condición dada en el teorema 4.2.5, no sólo implica que el operador es caótico sino que también es topológicamente mezclante.

Teorema 4.2.11. *Sean A el generador infinitesimal del semigrupo $\mathcal{T}$ y U un subconjunto abierto del espectro puntual de A, el cual intersecta al eje imaginario. Para cada λ en U, sea x_λ un vector propio relativo a λ. Para cada $\phi \in X^*$ definimos una función $F_\phi : U \to \mathbb{C}$ por $F_\phi(\lambda) = \phi(x_\lambda)$. Supongamos que para cada $\phi \in X^* \setminus \{0\}$,*

F_ϕ es una la función analítica no nula en en U, entonces $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante.

Demostración. La demostración es una pequeña modificación de la prueba del teorema 4.2.5 en [9].

Sea V un subconjunto arbitrario de U que admite un punto límite en U, probaremos que $Y_V = gen\{x_\lambda : \lambda \in V\}$ es denso en X.

Razonando por el absurdo supongamos que $\overline{Y}_V \neq X$, por el teorema de Hahn-Banach existe algún ϕ en X^* tal que $\phi \neq 0$ y $\phi(x) = 0$ para todo x en Y_V, así para todo λ en V, $F_\phi(\lambda) = \phi(x_\lambda) = 0$, pero como V admite un punto límite en U y F_ϕ es analítica en U, entonces F_ϕ es nula en U ¡absurdo! lo cual prueba que Y_V es denso en X.

Tomemos $V_0 = \{\lambda \in U : \Re(\lambda) < 0\}$, es claro que V_0 es un subconjunto de U que admite un punto lḿite en U. Por lo tanto Y_{V_0} es denso en X.

Por 4.1.14 tenemos que $T_t(x_\lambda) = e^{t\lambda}x_\lambda$ para todo λ en U y $t > 0$. En consecuencia $\|T_t(x_\lambda)\| = \|e^{\Re(\lambda)t}e^{\imath\Im(\lambda)t}x_\lambda\| = e^{\Re(\lambda)t}\|x_\lambda\|$. Como para λ en V_0 se tiene que $\Re(\lambda) < 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} T_t(x_\lambda) = 0$ para todo λ en V_0.

Ahora tomemos x en Y_{V_0}, entonces existe n en $\mathbb{N}$ tal que $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{\lambda_k}$ con λ_k en V_0 para todo k en $\{1, 2, \cdots, n\}$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} T_t(x) &= \lim_{t\to\infty} T_t(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{\lambda_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lim_{t\to\infty} T_t(x_{\lambda_k}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Concluyendo así, que x está en X_0, entonces $Y_{V_0} \subseteq X_0$ y en consecuencia X_0 es denso en X.

Ahora tomemos $V_1 = \{\lambda \in U : \Re(\lambda) > 0\}$, también es claro que V_1 es un subconjunto de U que admite un punto límite en U. Por lo tanto Y_{V_1} también es denso en X.

Sea x en Y_{V_1}, entonces existe n en $\mathbb{N}$ tal que $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{\lambda_k}$ con λ_k en V_1 para todo k en $\{1, 2, \cdots, n\}$. Pero como $T_t(x_{\lambda_k}) = e^{t\lambda_k} x_{\lambda_k}$ para todo k en $\{1, 2, \cdots, n\}$, entonces $x = T_t(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-\lambda_k t} x_{\lambda_k})$ para cualquier $t \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned}\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-\lambda_k t} x_{\lambda_k} \| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| e^{-\Re(\lambda_k) t} \| x_{\lambda_k} \| \\ &\leq (\textit{máx}\{|\alpha_k| \| x_{\lambda_k}| : 1 \leq k \leq n\}) \sum_{k=1}^{n} e^{-\Re(\lambda_k) t}\end{aligned}$$

Pero como $\Re(\lambda_k) > 0$, tenemos que para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $t_0 > 0$ tal que para $t > t_0$, $\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-\lambda_k t} x_{\lambda_k} \| < \varepsilon$.

Para $t \geq t_0$ tomemos $w_t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-\lambda_k t} x_{\lambda_k}$, así $\|w_t\| < \varepsilon$ y $\|T_t(w_t) - x\| = 0 < \varepsilon$. Por lo tanto x pertenece a X'_∞. De donde $Y_{V_1} \subseteq X'_\infty$ y en consecuencia X'_∞ es denso en X. Luego por teorema 4.2.11, $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante. □

Ejemplo 4.2.1. *Sea A la traslación unilateral a izquierda con pesos positivos $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\liminf_{n\to\infty} (w_1 \cdots w_n)^{1/n} > 0$, entonces el semigrupo fuertemente continuo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es topológicamente mezclante. En particular, para cada $t > 0$, e^{tA} es topológicamente mezclante.*

Demostración. Sea $c = \liminf_{n\to\infty} (w_1 \cdots w_n)^{1/n}$, entonces el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < c\}$ está contenido en $\sigma_p(A)$. Tomando $U = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < c\}$ tenemos que U intersecta al eje imaginario y para cada λ en U escojamos

$$x_\lambda = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{w_1 \cdots w_n} e_n$$

claramente x_λ es un vector propio A.

Sea ϕ en $\ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$, entonces $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e_n$. Definamos la función $F_\phi : U \to \mathbb{C}$ por

$$F_\phi(\lambda) = \phi(x_\lambda) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n \lambda^n}{w_1 \cdots w_n}$$

la cual es una función analítica no nula en U, por lo tanto dado el teorema 4.2.11, el semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T}$, es topológicamente mezclante. $\square$

Ejemplo 4.2.2. *Sea A la traslación bilateral a izquierda con pesos positivos $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $0 < \lim\sup_{n\to\infty}(w_0 w_{-1} \cdots w_{-n+1})^{1/n} < \lim\inf_{n\to\infty}(w_1 w_2 \cdots w_n)^{1/n}$, entonces el semigrupo fuertemente continuo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es topológicamente mezclante. En particular, para cada $t > 0$, e^{tA} es topológicamente mezclante.*

Demostración. Sea $c_1 = \lim\sup_{n\to\infty}(w_0 w_{-1} \cdots w_{-n+1})^{1/n}$ y $c_2 = \lim\inf_{n\to\infty}(w_1 w_2 \cdots w_n)^{1/n}$, entonces el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : c_1 < |\lambda| < c_2\}$ está contenido en $\sigma_p(A)$. Tomando $U = \{\lambda \in \mathbb{C} : c_1 < |\lambda| < c_2\}$, tenemos que U intersecta al eje imaginario y para cada λ U escojamos

$$x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_0 w_{-1} \cdots w_{-n+1}}{\lambda^n} e_{-n} + e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{w_1 \cdots w_n} e_n$$

claramente x_λ es un vector propio de A.

Sea ϕ en $\ell^2(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$, entonces $\phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n e_n$. Definamos la función $F_\phi : U \to \mathbb{C}$ por

$$F_\phi(\lambda) = \phi(x_\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n w_0 w_{-1} \cdots w_{-n+1}}{\lambda^n} e_n + \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n \lambda^n}{w_1 \cdots w_n}$$

la cual es una función analítica no nula en U, por lo tanto dado el teorema 4.2.11, el C_0 semigrupo $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante. $\square$

La conclusión en el teorema 4.2.6 puede también ser cambiada por topológicamente mezclante.

Teorema 4.2.12. *Sea A el generador infinitesimal del semigrupo $\mathcal{T}$. Supongamos que $\sigma_p(A) \cap \imath\mathbb{R}$ está contenido en el intervalo del eje imaginario $(\imath t_1, \imath t_2)$ para algunos t_1 y t_2 tales que $-\infty \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$ y existe una función integrable $f : (t_1, t_2) \to X$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f(s)$ pertenece a ker$(\imath s - A)$ para casi toda s en (t_1, t_2),*
2. *gen$\{f(s) : s \in (t_1, t_2) \setminus \Omega\}$ es denso en X para todo subconjunto Ω de medida cero.*

Entonces $\mathcal{T}$ es topoĺogicamente mezclante.

Demostración. Sea r en $\mathbb{R}$ y $\psi_r = \int_{t_1}^{t_2} e^{\imath rs} f(s)ds$. En la demosración del teorema 4.2.6 dada en [10] se prueba que el conjunto $gen\{\psi_r : r \in \mathbb{R}\}$ es denso en X y que este está contenido en X_0.

Probemos que $gen\{\psi_r : r \in \mathbb{R}\}$ está contenido en X'_∞.

Como f es integrable en (t_1, t_2), entonces por el lema de Riemann-Lebesgue existe $t_0 \geq 0$ tal que para $t \geq t_0$, $\| \int_{t_1}^{t_2} e^{\imath rs} f(s)ds\| < \varepsilon$, esto es $\|\psi_r\| < \varepsilon$. De la misma manera que en la prueba del teorema 4.2.6 en [10] para $t \geq t_0$ tomemos, $w_t = \int_{t_1}^{t_2} e^{\imath(r-t)s} f(s)ds$, entonces $T_t w_t = \psi_r$ y así, $\|T_t w_t - \psi_r\| = 0 \leq \varepsilon$, es decir $gen\{\psi_r : r \in \mathbb{R}\}$ está contenido en X'_∞.

Luego por 4.2.11 $\mathcal{T}$ es topológicamente mezclante. □

Capítulo 5
CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

1. Se pudo caracterizar las traslaciones bilaterales con pesos positivos acotados que son topológicamente mezclantes.
2. Se dió una respuesta parcial al problema 2 planteado en [24].
3. Se dió una condición suficiente para que un semigrupo C_0 sea topológicamente mezclante.
4. Se probó que las condiciones dadas en [20] y en [10] al generador infinitesimal de un semigrupo C_0 para que el semigrupo sea hipercíclico, son suficientes para que el semigrupo sea topológicamente mezclante.
5. Para el futuro esperamos caracterizar las traslaciones bilaterales T tales que $I+T$ es hipercíclica, así como aquellas, tales que $I+T$ y $I+T^*$ son ambas hipercíclicas.

Bibliografía

[1] S. I. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal.**128:2** (1995), 374-383.

[2] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal.**148:2** (1997) 384-390.

[3] T. Bermúdez, A. Bonilla, J. A. Conejero, and A. Peris, *Hypercyclic, topologically mixing and chaotic semigrups on Banach spaces*, Studia Math. **170:1** (2005), 57-75.

[4] L. Bernal-González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **127:4** (1999), 1003-1010.

[5] J. Bonet and A. Peris, *Hypercyclic operators on non-normable Frechét spaces*, J. Fun. Anal. **159:2** (1998), 587-595.

[6] K. Chan and J. H. Shapiro, *The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions*, Indiana Univ. Math. J. **40:4** (1991), 1421-1449.

[7] J. A. Conejero, V. Müller, and A. Peris, *Hypercyclic behaviour of operators in a hypercyclic C_0-Semigroup*, J. Funct. Anal. **244:1**, (2007), 342-348.

[8] G. Costakis and M. Sambarino, *Topologically mixing hypercyclic operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **132:2** (2004),385-389.

[9] W. Desch, W. Schappacher, and G. Webb, *Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators*, Ergodic Theory Dynam. Systems. **17:4** (1997), 793-819.

[10] S. El Mourchid, *The imaginary point spectrum and hypercyclicity*, semigrupo forum. **73** (2006), 313-316.

[11] N. S. Feldman, V. G. Miller, and T. L. Miller, *Hypercyclic and supercyclic cohyponormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **68:3-4** (2002), 965-990.

[12] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281-288.

[13] S. Grivaux, *Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem*, J. Operator Theory **54:1** (2005), 147-168.

[14] G. Godefroy and J. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98:2** (1991), 229-269.

[15] D. Herrero and C. Kitai, *On invertible hypercyclic operators*, Proc. Am. Math. Soc. **116:3** (1992), 873-875.

[16] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, Univ. of Toronto, 1982.

[17] K. B. Laursen and M. M. Neuman, *Introduction to Local Spectral Theory*, London Math. Soc. Monographs New series, Clarendon Press, Oxford, (2000).

[18] L. León-Saavedra and A. Montes-Rodríguez, *Linear structure of hypercyclic vectors*, J. Funct. Anal. **148:2** (1997), 524-545.

[19] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.

[20] A. Peris and L. Saldivia, *Syndetically hypercyclic operators*, Integral Equations and Operator Theory **51** (2005), 275-281.

[21] M. Putinar, *Hyponormal operators are subscalar*, J. Operator Theory. **12** (1984), 385-395.

[22] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969) 17-22.

[23] H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. **347:3** (1995), 993-1004.

[24] H. Salas, *Banach spaces with separable duals support dual hyprcyclic operators*, Glasgow Math. J. **49** (2007), 281-290.

[25] A. L. Shields, *Weighted shift operators and analytic function theory*, Topics in Operator Theory, Math. Surveys **13** (1974). 51-128.

[26] L. R. Williams, *The local spectral of pure quasinormal operators*, J. Math. Anal. Appl. **187:3** (1994), 842-850.