LA COMPOSICIÓN DE RELACIONES Y LA TEORÍA DE τ-FACTORIZACIÓN

Por

David Fernando Méndez Oyuela

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS (PURA)

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2017

Aprobada por:

Stan Dziobiak, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Gabriele Castellini, Ph.D Miembro, Comité Graduado	Fecha
Reyes M. Ortiz Albino, Ph.D Presidente, Comité Graduado	Fecha
Elsie Parés Matos, Ph.D, Representante de Estudios Graduados	Fecha
Olgamary Rivera Marrero, Ph.D Director del Departamento	Fecha

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los Requirimientos para el grado de Maestría en Ciencias

LA COMPOSICIÓN DE RELACIONES EN LA TEORÍA DE τ-FACTORIZACIÓN

Por

David Fernando Méndez Oyuela

Agosto 2017

Consejero: Reyes M. Ortiz Albino, Ph.D

Departamento: Ciencias Matemáticas

La teoría de τ-factorizaciones en dominios integrales fué desarrollada por Anderson y Frazier [2] en el 2006, la misma caracterizó las factorizaciones conocidas y abrió las puertas para crear otras. Se puede visualizar como una restricción a la operación de multiplicación de la estructura; considerando una relación simétrica τ sobre los elementos no invertibles y distintos de cero de un dominio integral. Antes de formalizar la definición, denotemos D un dominio integral, $U(D)$ el conjunto de elementos invertibles o unidades de D y $D^{\#}$ el conjunto de elementos distintos de cero que no son unidades de D. Un producto $a = \lambda a_1 a_2 \cdots a_n$ es llamado una τ-factorización de $a \in D^{\#}$, si se cumple que $a_i \tau a_j$ para todo $i \neq j$ y $\lambda \in U(D)$. A los elementos a_i se les llama τ-factores de a y a es llamado un τ-producto de los a_i. Note que si $\tau = D^{\#} \times D^{\#}$, las τ-factorizaciones y las factorizaciones usuales en D coinciden. Otro ejemplo de relevancia es cuando $\tau = S \times S$, donde $S \subset D^{\#}$ es un conjunto de elementos distinguidos de $D^{\#}$. De esta manera la teoría generalizó

las factorizaciones en dominios integrales conocidas y estudiadas en años anteriores. Por ejemplo de las factorizaciones en elementos irreducibles surgieron los dominios atómicos y de las factorizaciones en elementos primales surgieron los dominios de Schreier.

Este trabajo tiene como objetivo principal estudiar e investigar el concepto de τ-factorizaciones cuando τ es la composición de dos o más relaciones. Este estudio se puede lograr de dos formas. En la primera se consideran dos relaciones τ_1, τ_2 y se analiza que resultados se pueden obtener sobre la relación $\tau_1 \circ \tau_2$. La segunda forma se basa en tratar de factorizar una relación. Este documento se enfocó más en la primera forma, detalla algunos elementos de su complejidad, además de observar como se comportan sus factores, mediante muchos ejemplos.

Para poder trabajar con este concepto, se verifica qué propiedades en específico se pueden obtener a partir de las relaciones dadas. Entre éstas propiedades se estudió las más conocidas, reflexividad, simetría, transitividad, antisimetría; y otras asociadas a la teoría de τ-factorizaciones como las relaciones divisivas, que preservan asociados y multiplicativas. Se presenta una nueva definición de τ-factorizaciones y se demuestran algunos resultados con esta nueva definición.

Abstract of Dissertation Presented to the Graduate School of the University of Puerto Rico in Partial Fullfillment of the Requirements for the Degree of Master of Sciences

LA COMPOSICIÓN DE RELACIONES Y LA TEORÍA DE τ-FACTORIZACIÓN

By

David Fernando Méndez Oyuela

August, 2017

Chair: Reyes M. Ortiz Albino, Ph.D

Department: Mathematical Sciences

The theory of τ-factorizations on integral domains was developed by Anderson and Frazier [2]. This theory characterized all the known factorizations and opened the opportunity to create new ones. It can be visualized as a restriction to the structure's multiplicative operation, by considering a symmetric relation τ on the set of non-zero non-unit elements of an integral domain. Before formalizing the definition, let us denote D to be an integral domain, $U(D)$ the set of units of D and $D^{\#}$ the set of non-zero non-units elements of D. The product $a = \lambda a_1 a_2 \cdots a_n$ is called a τ-factorization of $a \in D^{\#}$, if $a_i \tau a_j$ for all $i \neq j$ and $\lambda \in U(D)$. The elements a_i are called τ-factors of a and a is called a τ-product of the a_i's. If $\tau = D^{\#} \times D^{\#}$, the τ-factorizations and the factorizations on D coincide. Another example of relevance is when $\tau = S \times S$, where S is a set of distinguished elements in $D^{\#}$. This is the way the theory generalized all the known factorizations on integral domains. For example, the factorizations into irreducible elements gave the notion of atomic domain and the factorizations into primal elements gave the notion of Schreier domains.

The main goal of this work is to study the τ-factorization concept, when τ is a composition of two or more relations. This study can be achieved in two ways. The first one, is to consider two relations τ_1, τ_2 and analyze the results obtained with respect to the relation $\tau_1 \circ \tau_2$. The second method is to try to factor a relation. This work focuses more on the first method and shows some details of its complexity with a lot of examples.

To achieve this, the specific properties one can obtain from the given relations are verified and analyzed. Some of the studied properties which are the most known include: reflexivity, symmetry, transitivity, antisymmetry. And others related to the τ-factorization theory, like: divisive, associate-preserving and multiplicative relations. A new definition for τ-factorizations is presented and some results are proven with it.

A mis padres José Méndez y América Oyuela.

Agradecimientos

Al profesor Reyes Matiel Ortiz por asesorarme durante este trabajo, sin su consejo no hubiese sido posible.

Al Departamento de Ciencias Matemáticas y a la Universidad de Puerto Rico Recinto de Mayagüez por darme la oportunidad de estudiar en su programa de maestría.

A mi familia por su apoyo infinito.

A mis amigos y amigas que con su compañía hicieron que este tiempo fuera más placentero.

A mis profesores de pregrado que me motivaron a hacer estudios graduados.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Lista de símbolos y abreviaturas

D	Dominio integral.
D^*	Los elementos distintos de cero del dominio integral D.
$U(D)$	El conjunto de las unidades de D.
$D^\#$	Conjunto de los elementos distintos de cero y de unidades de D.
$A\backslash B$	El conjunto $\{a \in A : a \notin B\}$.
$A \subseteq B$	A es un subconjunto de B.
$A \times B$	El conjunto $\{(a,b) : a \in A,\, b \in B\}$.
$R \subseteq A \times B$	Relación de A en B.
aRb	Significa $(a,b) \in R$.
R^{-1}	La relación $\{(b,a) : (a,b) \in R\}$.
$Dom(R)$	El dominio de la relación R.
$Codom(R)$	El codominio de la relación R.
$Coim(R)$	La coimagen de la relación R.
$Im(R)$	La imagen de la relación R.
$R \circ S$	Composición de las relaciones R y S.
R^n	La composición $R \circ R \circ \cdots \circ R$, n veces.
$\mid$	Significa "divide a".
$\mid_\tau$	Significa "τ-divide a".
$\sim$	Significa asociado.
(n)	El ideal principal generado por n.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo el lector puede encontrar todas las definiciones básicas y un resumen de aspectos que facilitan su lectura. Entre ellos la notación, definiciones y resultados de varias personas que han trabajado en este tema desde el 2006.

1.1. Definiciones básicas

En este trabajo la mayoría de notación y definiciones son adoptadas de [2], [7], [8] y [13]. Para efectos de este documento se define un dominio D como un anillo conmutativo con identidad 1_D tal que $1_D \neq 0_D$, donde 0_D es la identidad adivitiva y que no posee divisores de cero. El grupo de elementos con inverso multiplicativo o unidades de D se denota por $U(D)$, $D^* = D \backslash \{0\}$ y $D^\# = D^* \backslash U(D)$.

Dados A, $B \subseteq D^\#$, el producto cartesiano de A y B se denota y define por $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$. Una relación binaria R de A a B, es un subconjunto de $A \times B$. Al conjunto A se le conoce como *dominio* de R y se denota por $Dom(R)$, al conjunto B se le conoce como *codominio* de R y se denota como $Codom(R)$. La *coimagen* de R, se define como $Coim(R) = \{a \in A : (\exists b \in B)((a, b) \in R)\}$ y la *imagen* de R se define como $Im(R) = \{b \in B : (\exists a \in A)((a, b) \in R)\}$.

Si $A = B$, entonces decimos que R es una relación sobre A. Cuando $(a, b) \in R$, se dice que a y b se relacionan con respecto a la relación R y usualmente se denota por aRb. Existen muchos tipos de relaciones, pero históricamente hay algunas que han sido categorizadas y clasificadas. Una de las más conocidas son las relaciones de equivalencia sobre un conjunto no vacío.

Definición 1.1. Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y R un relación sobre A. Decimos que R es una *relación de equivalencia*, si cumple las siguientes tres propiedades.
(1) R es *reflexiva*: si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

(2) R es *simétrica*: para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

(3) R es *transitiva*: para todo $a, b, c \in A$, si (a, b), $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

Un ejemplo por excelencia de las relaciones de equivalencia es la relación $\equiv_n$ "congruencia módulo n" sobre $\mathbb{Z}$ definida por $a \equiv_n b$ si y solo si $n|b - a$. Cuando R es una relación de equivalencia en A, para cada $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a con respecto a R como el conjunto $a/R = \{b \in A : aRb\}$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$, la relación $\equiv_2$ ó congruencia modulo 2, genera dos clases de equivalencia: $\mathbb{Z}/\equiv_2 \; = \; \{pares, impares\}$. En general, a/R se lee "la clase de a módulo R" , "a mod R" o simplemente la clase de equivalencia de a (si no hay dudas para distinguir la relación en cuestión); en este caso también se suele utilizar la notación $[a]$, para la clase de equivalencia de a. Al conjunto $A/R = \{a/R : a \in A\}$ de todas las clases de equivalencia se le llama A módulo R ó el cociente de A con R. Este conjunto A/R resulta ser una partición (matemática) de A. Formalmente, se dice que $\mathscr{P}$ es una *partición* de $A \neq \emptyset$, si es una familia de subconjuntos de A que cumple con las siguientes tres condiciones.
(1) Si $X \in \mathscr{P}$, entonces $X \neq \emptyset$.

(2) Si $X \in \mathscr{P}$ y $Y \in \mathscr{P}$, entonces $X = Y$ ó $X \cap Y = \emptyset$.

(3) $\cup_{X \in \mathscr{P}} X = A$.

El siguiente resultado es bastante importante y conocido cuando se trabaja con relaciones de equivalencia. Indica que hay una correspondencia biyectiva entre relaciones de equivalencia sobre un conjunto no vacío A y las particiones de A. Para los detalles de la demostración, ver [13].

Teorema 1.2. *[Teoremas 3.3.1 y 3.3.2 de [13]] Si R es una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A, entonces A/R es una partición de A. Recíprocamente, sea $\mathscr{P}$ una partición de A. Para $a, b \in A$ defínase aRb si y solo si existe $Z \in \mathscr{P}$ tal que $a \in Z$ y $b \in Z$. Entonces R es una relación de equivalencia en A y $A/R = \mathscr{P}$.*

Otro tipo de relación de mucha importancia matemática son los órdenes parciales. Para ello es necesario definir el concepto de relación antisimétrica. Una relación R es *antisimétrica* sobre $A \neq \emptyset$, si cuando aRb y bRa, entonces $a = b$. Cuando una relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva, se dice que es un *orden parcial*. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ la relación $\leq$ es un orden parcial, pero $<$ no lo es. A un conjunto $A \neq \emptyset$ junto con una relación de orden R se le denomina conjunto *parcialmente ordenado* (o "*Poset*"). Por ejemplo, $\mathbb{R}$ está parcialmente ordenado por $\leq$. Un orden parcial R en A es un *orden total* si para todo $a, b \in A$, $a\tau b$ ó $b\tau a$. Por ejemplo, $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{R}$. Un ejemplo de un orden parcial que no es orden total es la relación de contenencia "$\subseteq$" en $\mathscr{P}(A)$ (el conjunto potencia de un conjunto no vacío A). Hay conjuntos que no son comparables: $\{a, b\}$ y $\{a, c\}$ con a, b y c elementos distintos de A, es decir $\{a, b\} \nsubseteq \{a, c\}$ y $\{a, c\} \nsubseteq \{a, b\}$.

Por último y no menos importante, otro ejemplo fundamental de relaciones son las funciones, que son relaciones bien definidas. Es decir, si (a, b), $(a, c) \in R$, se tiene que $b = c$. Este tipo de relaciones son las que posiblemente han sido más estudiadas históricamente. Por ejemplo, en el ámbito del álgebra, a partir de la definición de función se generan conceptos importantes como homomorfismo, isomorfismo, mapa cociente, etc.

1.2. Composiciones de relaciones

Debido a que el objetivo principal es analizar propiedades de composición de relaciones, se define formalmente una composición de dos relaciones.

Definición 1.3. Sean R_1, R_2 dos relaciones sobre A, se define la *composición* $R_1 \circ R_2$ como la relación dada por $aR_1 \circ R_2 b$ si y solo si existe $c \in A$ tal que $aR_2 c$ y $cR_1 b$. A R_1 y R_2 se les conoce como factores de la relación $R_1 \circ R_2$.

Por ejemplo, considere $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c),(d,d)\} \quad y \\ R_2 &= \{(e,a),(d,a),(e,c),(e,b),(f,f)\}. \end{aligned}$$

Entonces, las relaciones composición $R_1 \circ R_2$ y $R_2 \circ R_1$ están dadas por:

$$\begin{aligned} R_1 \circ R_2 &= \{(e,b),(e,c),(e,a),(d,b)\} \quad y \\ R_2 \circ R_1 &= \{(d,a)\}. \end{aligned}$$

Del ejemplo se llega a varias observaciones: la composición de relaciones no es conmutativa, $Coim(R_1 \circ R_2) \subseteq Coim(R_2)$ e $Im(R_1 \circ R_2) \subseteq Im(R_1)$. Dada una relación R en A, se define la relación *inversa* R^{-1} de R dada por $aR^{-1}b$ si y solo si bRa. Observar que de las definiciones de imagen y coimagen se obtiene que $Coim\,(R) = Im\,(R^{-1})$ e $Im\,(R) = Coim\,(R^{-1})$. Dado un conjunto A y $S \subseteq A$, se define la diagonal o identidad en S por $id_S = \{(a,a) \,:\, a \in S\}$. Se observa que la relación identidad en A es id_A. Note que $id_{Im(R)} \subseteq R \circ R^{-1}$ y $id_{Coim(R)} \subseteq R^{-1} \circ R$. Por ejemplo, dados

$a, b, c, d \in A$ y la relación $R = \{(a, b), (c, a), (c, d)\}$, entonces:

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(b, a), (a, c), (d, c)\} \\ R \circ R^{-1} &= \{(b, b), (a, a), (a, d), (d, a), (d, d)\} = id_{Im(R)} \cup \{(a, d), (d, a)\} \\ R^{-1} \circ R &= \{(a, a), (c, c)\} = id_{Coim(R)}. \end{aligned}$$

1.3. Divisibilidad, factorizaciones y τ-factorizaciones

Dado que la idea de factorizar está determinada por sus factores o divisores, se define el concepto de divisivilidad de la siguiente forma.

Definición 1.4. [7] Un elemento a distinto de cero de un anillo conmutativo R, *divide* a un elemento $b \in R$ (y es denotado por $a|b$), si existe $c \in R$ tal que $ac = b$.

Como consecuencia de la definición de "|" se obtiene el concepto de elementos asociados. Se dice que a y b son *asociados* en R si $a|b$ y $b|a$. Si R es un dominio integral, este concepto coincide con el enunciado "$a = \lambda b$, donde $\lambda \in U(R)$". En este estudio se trabaja mayormente con dominios integrales, que se denotarán por D. Naturalmente nace el concepto de un elemento irreducible o átomo. Un elemento $a \in D^{\#}$ es llamado *elemento irreducible* o *átomo*, si cuando $a = bc$, entonces $b \in U(D)$ o $c \in U(D)$. La idea es que un elemento no se puede descomponer como el producto de dos o más elementos en $D^{\#}$. Además, se puede definir el concepto de primo. Se dice que $p \in D^{\#}$ es *primo*, si cuando $p|ab$, entonces $p|a$ ó $p|b$. Note que si $p = ab$, entonces $p|ab$, por ende $p|a$ ó $p|b$. Si $p|a$, entonces $p = pa'b$. Cancelando, se obtiene que $1_D = a'b$. Es decir que $b \in U(D)$. Por lo tanto, todo primo es elemento irreducible. El converso es falso, por ejemplo, en $\mathbb{R}[x^2, x^3] = \left\{a_0 + a_1x^2 + a_2x^3 \cdots + a_nx^n \,:\, n \in \mathbb{Z}^+\right\}$, el elemento $x^2 \in \mathbb{R}[x^2, x^3]$ es irreducible, pues $x \notin \mathbb{R}[x^2, x^3]$. No es primo porque $x^2|x^3 \cdot x^3$, pero $x^2 \nmid x^3$ (por la falta del elemento x en $\mathbb{R}[x^2, x^3]$).

Un dominio D se denomina *atómico*, si todos sus elementos se pueden expresar como producto finito de elementos irreducibles. Se dice que D es un *dominio de factorización única* (UFD, por sus siglas en inglés) si es atómico y además la factorización es única salvo por el orden de los elementos y asociados. Se debe indicar que un resultado bien conocido es que las factorizaciones en primos son únicas (salvo orden y asociados). Por ende, otra caracterización de un UFD es que todo elemento $a \in D^{\#}$ tenga una factorización en primos. Aunque la unicidad es áltamente deseada, se han estudiado conceptos más débiles que el de UFD. Algunos de éstos se presentan en la siguiente definición.

Definición 1.5. [6] Sea D un dominio integral. Se dice que D es un:

(1) *Dominio de factorización acotada* (BFD, por sus siglas en inglés), si D es atómico y para todo $a \in D^{\#}$, existe $N_a \in \mathbb{N}$ tal que para toda factorización de a, el número de factores explícitamente en la factorización es menor que N_a.

(2) *Dominio con la condición de cadenas ascendentes de ideales principales* (ACCP, por sus siglas en inglés), si no existe en D una cadena infinita estrictamente creciente de ideales principales de D. Es decir, si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ es una cadena de ideales principales en D , entonces existe N tal que $\forall n \geq N$, $A_n = A_N$.

(3) *Dominio factorial a mitad* (HFD, por sus siglas en inglés), si toda factorización atómica en $a \in D^{\#}$ tiene la misma longitud (cantidad de factores explícitamente).

(4) *Dominio con elementos con una cantidad finita de divisores irreducibles* ("idf-domain", por sus siglas en inglés), si para todo $a \in D^{\#}$, solo se tiene un número finito de divisores irreducibles, salvo asociados.

(5) *Dominio con finitas factorizaciones* (FFD, por sus siglas en inglés), si D es atómico y para $a \in D^{\#}$ existe solo un número finito de factorizaciones distintas, salvo orden y asociados.

Las conexiones entre estos conceptos fué estudiada por Anderson, Anderson y Zafrullah en [6] y se pueden resumir en la Figura 1.3.1. Los autores no solo demostraron las implicaciones si no que los conversos no se cumple.

Figura 1.3.1: Conexión entre tipos de dominios.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{HFD} \arrow[dr] & & & \\
\text{UFD} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{FFD} \arrow[r] \arrow[d] & \text{BFD} \arrow[r] & \text{ACCP} \arrow[r] & \text{atómico} \\
 & \text{idf-domain} & & &
\end{tikzcd}
$$

Para los algebristas siempre ha sido de interés factorizar elementos de un dominio en elementos atómicos, en particular han sido de gran interés las factorizaciones en factores irreducibles o primos. Pero existen otros tipos de elementos de interés que resultaron ser de mucha relevancia por la unicidad en su representación. Fué el trabajo de McAdams y Swan en el 2004 [1] que motivó a Anderson y Frazier [2] a definir el concepto de τ-factorizaciones, área que llamaron teoría de factorizaciones generalizadas.

Definición 1.6. [2] Sea τ una relación simétrica sobre $D^{\#}$. Entonces se dice que $a = \lambda a_1 a_2 \cdots a_n$ es una *τ-factorización* para $a \in D^{\#}$, si $a_i \tau a_j$ para todo $i \neq j$ y $\lambda \in U(D)$.

Para poder hablar con mejor elocuencia, se dice que a es el *τ-producto* de los a_i y que cada a_i es un τ-factor de a. Si a_i es un *τ-factor*, entonces se denota como $a_i|_\tau a$ y se lee "a_i *τ-divide* a a".

El objetivo principal de Anderson y Frazier fué trabajar con respecto a factorizaciones donde los factores satisfacen una propiedad determinada por la relación τ. Usualmente una factorización es de la forma $a_1 \cdots a_n$ donde los a_i son distintos de cero y unidades. Por tal razón solo se consideran las relaciones sobre $D^{\#}$. Como su trabajo es basado en dominios, ellos deciden no apartarse de la conmutatividad de la estructura y es por ello que las relaciones consideradas son simétricas. Los autores indican que se pueden considerar relaciones no simétricas, pero no hacen ningún trabajo al respecto.

La idea de las τ-factorizaciones generaliza las factorizaciones estudiadas en elementos irreducibles, primos, primales, rígidos, etc. (para detalles de estos elementos, véase [4]). Para ello solo se debe considerar S, el conjunto de irreducibles (resp. primos, primales, rígidos, etc.) y $\tau = S \times S$. El resultado es que los τ-productos son exactamente productos de elementos en S. De la misma forma se pueden obtener las factorizaciones usuales, escogiendo $S = D^{\#}$. Pero al definir el concepto con respecto a una relación, esto abre las puertas para considerar relaciones arbitrarias. Por ejemplo, del 2006 al 2007, Frazier y Hamon definieron el concepto de $\tau_{(n)}$-factorización en $\mathbb{Z}^{\#}$, donde la relación $\tau_{(n)} = \equiv_n \cap \left(\mathbb{Z}^{\#} \times \mathbb{Z}^{\#}\right)$, es decir la relación de congruencia módulo n restringida a $\mathbb{Z}^{\#}$. Este tema fué tan interesante que causó que Hamon escribiera su trabajo de tesis doctoral sobre el tema y que Ortiz desde el 2010 ha continuado analizando con su grupo de investigación. Entre los trabajos más recientes están: el números de $\tau_{(n)}$-factores (Molina [11], 2016) y el máximo común $\tau_{(n)}$-factor (Barrios [12], 2016). Ambos trabajos lograron una gran aportación, pero quedaron muchas preguntas abiertas. Aunque pareciera sencillo, la forma en que se distribuyen los primos hace el estudio de los $\tau_{(n)}$-productos un poco complejo. Véase [11] y [12] para más detalles.

Del estudio de las τ-factorizaciones y/o τ-factores de un elemento, surgieron rápidamente los conceptos de elemento τ-irreducible y τ-primo (conceptos análogos a los de elemento irreducible y primo).

Definición 1.7. [2] Sea D un dominio integral, $a \in D^{\#}$ y τ una relación simétrica sobre $D^{\#}$. Se dice que a es un *τ-átomo* o elemento *τ-irreducible*, si las únicas τ-factorizaciones de a son de la forma $a = a$ o $a = \lambda(\lambda^{-1}a)$, donde $\lambda \in U(D)$. A este tipo de factorización se le conoce como las τ-factorizaciones triviales. Se dice que a es un *τ-primo*, si cuando $a|\lambda a_1 \cdots a_n$, una τ-factorización, entonces $a|a_i$ para algún

$i \in \{1, ..., n\}$.

Note que un τ-primo es un τ-átomo, pero el converso es falso. Por ejemplo, considerar la relación $\tau_{(2)}$ sobre $\mathbb{Z}^{\#}$. Note que 30 es un $\tau_{(2)}$-átomo, dado que no existen factores de 30 cuya diferencia sea divisible por 2. Por otro lado, $30|60$ y una $\tau_{(2)}$-factorización de 60 es $6 \cdot 10$; note que $30 \nmid 6$ y $30 \nmid 10$. Por ende 30 no es un $\tau_{(2)}$-primo. Un resultado preliminar de Coloma (estudiante subgraduado de Ortiz) en el 2017, demostró que no todo entero en $\mathbb{Z}^{\#}$ tiene una $\tau_{(2)}$-factorización en $\tau_{(2)}$-primos, pero que si la tiene, ésta debe ser única. Esto le da importancia a la existencia de los $\tau_{(2)}$-primos. Se han definido otros elementos, el lector puede referirse a [4] para más detalles.

La idea principal es obtener resultados de τ-factorizaciones dado un tipo de relación, no necesariamente simétrica. Se debe notar que en el Ejemplo 2.9 de [2], se habló de definir los conceptos de relaciones multiplicativas, divisivas y que preservan asociados de forma lateral, es decir multiplicativa (resp. divisiva y preserva asociados) por la izquierda y por la derecha. Pero no se dió mucho detalle y más aún, nadie ha estudiado este concepto.

Definición 1.8. Sean a, a', b, $b', c \in D^{\#}$ y τ una relación (no necesariamente simétrica) sobre $D^{\#}$.

(1) Se dice que τ es *divisiva por la izquierda* (*derecha*), si $a\tau b$ y $a'|a$ (resp. $b'|b$), entonces $a'\tau b$ (resp. $a\tau b'$). Si τ es divisiva por la izquierda y por la derecha, entonces se dice que τ es *divisiva*.

(2) Se dice que τ *preserva asociados por la izquierda* (*derecha*), si $a \sim c$ (resp. $b \sim c$) y $a\tau b$, entonces $c\tau b$ (resp. $a\tau c$). Si τ preserva asociados por la izquierda y por la derecha, se dice que τ *preserva asociados*.

(3) Se dice que τ es *multiplicativa por la izquierda* (*derecha*), si $a\tau c$ y $b\tau c$ (resp. $a\tau b$ y $a\tau c$), entonces $ab\tau c$ (resp. $a\tau bc$). Se dice que τ es *multiplicativa*, si es multiplicativa por la izquierda y por la derecha.

Recordemos la Definición 2.1 en [2] de lo que es una relación divisiva: una relación simétrica τ es *divisiva* si dados a, b, a', b' tales que $a\tau b$, $a'|a$ y $b'|b$, entonces $a'\tau b'$. Claramente esta definición implica la Definición 1.8 (1), en el caso de que la relación sea simétrica. El converso provee resultados similares. Si τ es una relación (no necesariamente simétrica) divisiva por la izquierda y por la derecha (en la forma de la Definición 1.8), se obtiene la misma conclusión. Pues, si $a'|a$ y $a\tau b$, como τ es divisiva por la izquierda, entonces $a'\tau b$. Si $b'|b$, como τ es divisiva por la derecha y $a'\tau b$, entonces $a'\tau b'$. Por lo tanto, el consecuente de la Definición 2.1 de [2], se cumple. En los casos de preservar asociados y ser multiplicativa, el lector puede comprobar que esto es inmediato.

La principal diferencia en nuestra definición es que no se exige que la relación τ sea simétrica, por lo que generaliza los conceptos y se pueden utilizar en un ámbito más amplio de relaciones.

Ejemplo 1.9. Los siguientes ejemplos ayudan a comprender las definiciones de estos conceptos.

(1) [2] Considere la relación $\tau_{\square}$ dada por $a\tau_{\square}b$ si y solo si $\gcd(a, b) = 1$. La relación $\tau_{\square}$ no es reflexiva, porque $\gcd(a, a) = a$, que es distinto de 1 en general. Es simétrica puesto que si $\gcd(a, b) = 1$, entonces $\gcd(b, a) = 1$. Pero la relación $\tau_{\square}$ no es transitiva. Si $\gcd(a, b) = 1$ y $\gcd(b, c) = 1$, esto no implica que $\gcd(a, c) = 1$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$ se tiene que $\gcd(3, 20) = 1$, $\gcd(20, 9) = 1$ pero $\gcd(3, 9) = 3$. Por lo anterior se observa que $\tau_{\square}$ no es una relación de equivalencia. Tampoco es antisimétrica, porque si $\gcd(a, b) = 1$ y $\gcd(b, a) = 1$, esto no implica que $a = b$. Por lo anterior, se tiene que en general $\tau_{\square}$ no es una relación de orden. En [2] se concluye que $\tau_{\square}$ es divisiva, pero no multiplicativa en general (como es una relación simétrica no es necesario distinguir entre los casos por la izquierda y por la derecha).

(2) [2] Dado un dominio integral D, se define la relación ∂ sobre $D[x]^{\#}$ como $f(x)\partial g(x)$ si y solo si $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$. La relación ∂ es claramente reflexi-

va, simétrica y transitiva. Por lo tanto ∂ es una relación de equivalencia en $D[x]^{\#}$. Por lo estudiado en [2], se conoce que ∂ preserva asociados, pero no es divisiva ni multiplicativa (como es una relación simétrica, no es necesario distinguir entre los casos por la izquierda y por la derecha).

(3) La relación $\leq$ es un orden total en $\mathbb{Z}$. Es divisiva por la izquierda puesto que si $a \leq b$ y $a'|a$, entonces $a' \leq a \leq b$. No es divisiva por la derecha porque si $a \leq b$ y $b'|b$, no necesariamente $a \leq b'$. Por ejemplo, $3 \leq 10$ y $2|10$, pero $3 > 2$. No necesariamente preserva asociados por la izquierda, ni por la derecha. Por ejemplo, $-15 \leq 10$ y $-15 \sim 15$, pero $15 > 10$. Se puede observar que esta relación tampoco es multiplicativa por la izquierda (ni por la derecha). Por ejemplo, $-2 \leq 10$ y $-6 \leq 10$, pero $(-2)(-6) = 12 > 10$ (resp. $-3 \leq -2$ y $-3 \leq 10$, pero $-3 > -20$).

(4) Dado un dominio integral D, considere la relación $\tau_{\subseteq}$ dada por $a\tau_{\subseteq}b$ si y solo si $(a) \subseteq (b) \subsetneq D$. Esta relación es claramente reflexiva, transitiva y antisimétrica. Por lo tanto es un orden parcial, pero no total porque existen ideales principales no comparables. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$ los ideales (p) y (q) no son comparables si p y q son primos no asociados. No es divisiva por la derecha ni por la izquierda. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}[x]$, $x^6\tau_{\subseteq}x^3$, $x^2|x^3$ y $x^2|x^6$ pero $(x^2) \nsubseteq (x^3)$ y $(x^2) \nsubseteq (x^6)$, por lo tanto $(x^2, x^3) \notin \tau_{\subseteq}$ y $(x^2, x^6) \notin \tau_{\subseteq}$. Preserva asociados por la izquierda y por la derecha. Dado que si $a \sim a'$, entonces $(a) = (a')$. Es multiplicativa por la izquierda pero no por la derecha. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$, $(8) \subseteq (4)$ pero $(8) \nsubseteq (4 \cdot 4) = (16)$. Es decir, $(8, 4) \in \tau_{\subseteq}$, pero $(8, 4 \cdot 4) \notin \tau_{\subseteq}$.

(5) Dada la función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = n - 1$, si se define una relación en $\mathbb{Z}$ dada por f, se tiene que f no cumple ninguna de las propiedades definidas anteriormente. Por su definición, es claro que f no es reflexiva, simétrica, transitiva ni antisimétrica. Tampoco es divisiva por la izquierda ni por la derecha; no preserva asociados por la izquierda ni por la derecha; no es multiplicativa por la izquierda ni por la derecha.

Se debe destacar que en [2] se logró extender la Definición 1.5 para aplicarla a la teoría de τ-factorización. La nueva definición de estas estructuras para las τ-factorizaciones se obtuvo intercambiando: factorización por τ-factorización, atómico por τ-atómico, irreducible por τ-irreducible, UFD por τ-UFD, BFD por τ-BFD, FFD por τ-FFD, ACCP por τ-ACCP, HFD por τ-HFD y "idf-domain" por "τ-idf-domain". Uno de los resultados de mayor relevancia en [2], fué que si τ es divisiva, entonces la Figura 1.3.1 se puede extender y estos resultados se presentan en la Figura 1.3.2.

Figura 1.3.2: Propiedades de las τ-estructuras (* significa que τ es divisiva)

$$
\begin{tikzcd}
\text{UFD} \arrow[r] \arrow[dd, "*"'] & \text{FFD} \arrow[r] \arrow[d, "*"'] & \text{BFD} \arrow[r] \arrow[dd, "*"'] & \text{ACCP} \arrow[r] \arrow[dd] & \text{atómico} \\
 & \tau\text{-FFD} \arrow[dr] & & & \\
\tau\text{-UFD} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau\text{-BFD} \arrow[r, "*"'] & \tau\text{-ACCP} \arrow[r, "*"'] & \tau\text{-atómico} \\
 & \tau\text{-HFD} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Otro hallazgo de Ortiz y Serna [10], es que la Figura 1.3.2 se preserva, excepto la implicación de UFD a τ-UFD, cuando τ es una relación de equivalencia multiplicativa y que preserva asociados.

Por ende nuestro enfoque principal es obtener ejemplos de relaciones con propiedades similares. Específicamente cuando se pueden obtener desde el punto de vista que la relación τ no es simétrica y sea una composición de relaciones.

1.4. Resumen de los capítulos

En este trabajo se desarrollan las bases para hacer el estudio de τ-factorizaciones sobre un dominio integral D, cuando τ es una composición de relaciones.

En el Capítulo 2, se analiza que propiedades preserva la composición de relaciones. Es decir, si τ_1 y τ_2 son dos relaciones con alguna propiedad, entonces la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ hereda la propiedad o no. Además, se analiza que pasa con el converso, es decir, si la composición de relaciones hereda propiedades a sus factores. Se hace énfasis en las propiedades de reflexividad, simetría, transitividad, equivalencia, antisimetría, orden parcial, divisiva, preservar asociados y multiplicativa, debido a su relevancia respecto a las teoría de τ-factorizaciones. Se brinda una nueva definición del concepto de τ-factorización aplicable a relaciones no necesariamente simétricas. Se prueban algunos resultados utilizando esta nueva definición.

En el Capítulo 3, se estudian relaciones más específicas que en el Capítulo 2, con la idea de que se obtengan mejores resultados. Se muestra algunas propiedades relacionadas a τ-factorizaciones y se proveen ejemplos para ilustrar cada caso.

En el Capítulo 4, se analizan composiciones de relaciones que han sido relevantes en el estudio de las τ-factorizaciones. Se proveen resultados que pueden servir de ejemplos y contraejemplos para estudios futuros relacionados a esta temática. Se brinda una nueva caracterización de las propiedades de preservar asociados y ser divisiva por la izquierda; mediante resultados basados en el concepto de composición de relaciones.

En el capítulo final, se presentan las conclusiones de este trabajo y se resume cuáles fueron los principales aportes a la teoría de τ-factorizaciones. Además, se incluyen preguntas de investigación que surgieron de realizar este estudio, tales interrogantes se pretenden trabajar en un futuro.

Capítulo 2

La composición de relaciones y algunas propiedades

La idea general de este capítulo es presentar algunos resultados que se obtienen con respecto al tipo de relación, con el objetivo principal de aplicar los resultados a las τ-factorizaciones. Los resultados en esta sección asumen las siguientes condiciones: sean τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^\#$ tales que $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$ (en el caso que sea $\emptyset$, la mayoría de propiedades se cumple vagamente). Se exploró y caracterizó cuando esta relación (composición) es reflexiva, simétrica, transitiva, de equivalencia, antisimétrica o relación de orden. Además cuándo se obtienen las propiedades divisiva, preservar asociados y ser multiplicativa. Se analizan los casos recíprocos, es decir, ¿qué se puede decir acerca de τ_1 ó τ_2, cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ cumple alguna de éstas propiedades? En el resumen se afirmó que este estudio se enfoca más en el primer enfoque (es decir, determinar que propiedades de τ_1 y/o τ_2 preserva la composición $\tau_1 \circ \tau_2$), que en el segundo método (de determinar si $\tau_1 \circ \tau_2$ le hereda propiedades a sus factores τ_1 ó τ_2). La razón de esto es que existen varias relaciones τ_1 y τ_2 con la misma composición $\tau_1 \circ \tau_2$ y por tanto es difícil que $\tau_1 \circ \tau_2$ le traslade propiedades a sus factores. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2.1. Suponer que D es UFD y $p \in D$ un elemento primo. Considerar dos relaciones $\tau_1 = \{(p, \pm p)\}$ y $\tau_2 = \{(\pm p, p)\}$, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(\pm p, \pm p)\}$. Observe que $\tau_1 \circ \tau_2$ es una relación simétrica, pero τ_1 y τ_2 no lo son, $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva, pero τ_1 y τ_2 solo son divisivas por la izquierda y la derecha, respectivamente. Por otro lado, si $\tau_1 = \tau_2 = \{(\pm p, \pm p)\}$, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(\pm p, \pm p)\}$. Esta falta de unicidad en los factores de la composición hace que el segundo punto de vista sea más complicado.

2.1. Propiedades básicas sobre relaciones

En esta sección se analiza cuando la composición de relaciones cumple con las propiedades clásicas, en particular las propiedades de reflexividad, simetría, transitividad, equivalencia, antisimetría y de orden. Nuevamente se asume que τ_1, τ_2 son dos relaciones sobre $D^{\#}$ tales que $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$ (en tal caso cumple las propiedades trivialmente, con excepción de la reflexividad). Aunque la mayoría de estas propiedades suceden sobre cualquier conjunto A, en este estudio se usa $A = D^{\#}$, para analizar conjuntos más específicos a la teoría de τ-factorizaciones.

Proposición 2.2. *Si τ_1 (τ_2) es reflexiva, entonces $\tau_2 \subseteq \tau_1 \circ \tau_2$ (resp. $\tau_1 \subseteq \tau_1 \circ \tau_2$) . Si ambas son reflexivas, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1$ también lo son.*

Demostración. Si τ_1 es reflexiva, entonces para cualesquiera a, $b \in D^{\#}$ tales que $a\tau_2 b$ se tiene que $b\tau_1 b$. Por lo tanto $a\tau_1 \circ \tau_2 b$ y $\tau_2 \subseteq \tau_1 \circ \tau_2$. Similarmente, si τ_2 es reflexiva, entonces $a\tau_1 \circ \tau_2 b$ y $\tau_1 \subseteq \tau_1 \circ \tau_2$. Cuando ambas relaciones τ_1, τ_2 son reflexivas, para todo $a \in D^{\#}$ se cumple que $a\tau_1 a$ y $a\tau_2 a$. Por definición de composición $a\tau_1 \circ \tau_2 a$ y por lo tanto $\tau_1 \circ \tau_2$ también es reflexiva. □

El recíproco es falso en general. Por ejemplo, si dado $a \in D^{\#}$ arbitrario pero fijo, se consideran $\tau_1 = \left\{(a, x) : x \in D^{\#}\right\}$ y $\tau_2 = \left\{(x, a) : x \in D^{\#}\right\}$. Entonces la composición $\tau_1 \circ \tau_2 = \left\{(x, x) : x \in D^{\#}\right\} = id_{D^{\#}}$.

El hecho de que τ_1 y τ_2 sean simétricas, no implica que la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ también lo sea. Por ejemplo, sean a, b y c elementos en $D^{\#}$ y considere las relaciones $\tau_1 = \{(a,b),(b,a)\}$ y $\tau_2 = \{(c,a),(a,c)\}$. Entonces su composición $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(c,b)\}$, no es simétrica.

La composición de relaciones transitivas, no necesariamente es transitiva. Por ejemplo, considere las siguientes relaciones $\tau_1 = \{(a,b),(c,d),(b,e),(a,e)\}$ y $\tau_2 = \{(f,a),(b,c)\}$. Se observa que τ_1 y τ_2 son transitivas, pero $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(f,b),(f,e),(b,d)\}$ no lo es. Porque (f,b) y $(b,d) \in \tau_1 \circ \tau_2$ pero $(f,d) \notin \tau_1 \circ \tau_2$. El recíproco tampoco es cierto, considere las siguientes relaciones $\tau_1 = \{(a,b),(c,d),(b,c)\}$ y $\tau_2 = \{(d,a),(b,c),(c,d),(b,a),(d,c)\}$. Luego $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(d,b),(b,d),(b,b),(d,d)\}$ es transitiva, pero ninguno de los factores τ_1, ni τ_2 lo es.

La composición de relaciones de equivalencia no necesariamente es una relación de equivalencia. Por ejemplo, considere $A = \{a,b,c\}$ y las particiones $\mathscr{P}_1 = \{\{a\},\{b,c\}\}$ y $\mathscr{P}_2 = \{\{a,b\},\{c\}\}$ de A. Estas particiones generan las relaciones de equivalencia $\tau_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$ y $\tau_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$. Luego se observa que $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c)\}$ no es una relación simétrica, porque $(a,c) \in \tau_1 \circ \tau_2$ pero $(c,a) \notin \tau_1 \circ \tau_2$. Por lo tanto, no es una relación de equivalencia. Esta construcción se puede recrear para dominios integrales infinitos como en el Ejemplo 2.3. Como los dominios finitos son campos, $D^{\#} = \emptyset$ y $\tau = \emptyset$; caso que deseamos evitar.

Ejemplo 2.3. Considere en $\mathbb{Z}^{\#}$ las particiones

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= (\mathbb{Z}^-\backslash\{-1\}) \cup \{2\} \cup (\mathbb{Z}^+\backslash\{1,2\}) \\ \mathscr{P}_2 &= (\mathbb{Z}^-\backslash\{-1\}) \cup \{2,3\} \cup (\mathbb{Z}^+\backslash\{1,2,3\}). \end{aligned}$$

Estas particiones generan las siguientes dos relaciones de equivalencia τ_1 y τ_2, dadas por:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \big\{(n_1,n_2),(2,2),(p_1,p_2)\ :\ n_1,n_2\in(\mathbb{Z}^-\backslash\{-1\}),p_1,p_2\in(\mathbb{Z}^+\backslash\{1,2\})\big\}\,,\ \text{ y}\\
\tau_2 &= \{(m_1,m_2),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2),(q_1,q_2)\}\ \text{ con}\\
&\quad m_1,m_2\in(\mathbb{Z}^-\backslash\{-1\})\ \text{ y }\ q_1,q_2\in(\mathbb{Z}^+\backslash\{1,2,3\})
\end{aligned}$$

Observe que $(2,5)\in\tau_1\circ\tau_2$, pero $(5,2)\notin\tau_1\circ\tau_2$; porque por las definiciones de τ_1 y τ_2, no existe un entero x tal que $5\tau_2 x$ y $x\tau_1 2$. Por lo tanto, $\tau_1\circ\tau_2$ no es una relación de equivalencia.

La composición de relaciones antisimétricas no es necesariamente antisimétrica. Por ejemplo, considere $A=\{a,b,c\}$ y las relaciones $\tau_1=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$ y $\tau_2=\{(b,a),(a,a)\}$. Por ende, $\tau_1\circ\tau_2=\{(b,a),(a,a),(b,b),(a,b)\}$. Observe que (b,a), $(a,b)\in\tau_1\circ\tau_2$ pero $a\neq b$. Para el caso del recíproco, considerar $A=\{a,b,c,d\}$, $\tau_1=\{(a,b),(c,d),(b,c),(b,a)\}$ y $\tau_2=\{(b,c),(c,d),(b,a),(d,c)\}$. Su composición está dada por $\tau_1\circ\tau_2=\{(b,d),(b,b),(d,d)\}$. Claramente $\tau_1\circ\tau_2$ es antisimétrica, pero ninguno de los factores lo es. Por lo tanto, la composición de relaciones de orden no es una relación de orden, para ilustrar, considere un conjunto A arbitrario y $a,b,c\in A$ elementos distintos de A. Sean $\tau_1=\{(a,b)\}\cup id_A$ y $\tau_2=\{(b,c),(c,a),(b,a)\}\cup id_A$. Entonces $\tau_1\circ\tau_2=\{(b,c),(c,b),(c,a),(b,a)\}\cup id_A$. Se puede observar que τ_1 y τ_2 son órdenes parciales en A, pero la composición $\tau_1\circ\tau_2$ no lo es porque $(b,c),(c,b)\in\tau_1\circ\tau_2$ y $b\neq c$.

2.2. Relaciones divisivas

Antes de estudiar el tipo de relación divisiva, se recuerda la Definición 1.8: Se dice que τ es divisiva por la izquierda (derecha), si $a\tau b$ y $a'|a$ (resp. $b|b'$), entonces $a'\tau b$ (resp. $a\tau b'$). Si τ es divisiva por la izquierda y la por derecha, entonces se dice que τ es divisiva.

Primero se observa que si solo una de las dos τ_1 ó τ_2 es divisiva, entonces la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ no necesariamente es divisiva.

Ejemplo 2.4. Considere las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}^{\#}$:

$$\tau_1 = \{(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)\} \quad \text{y} \quad \tau_2 = \{(2,2)\}.$$

El lector puede observar que τ_1 es divisiva, pero τ_2 no lo es. Por otro lado, las composiciones que se obtienen son las siguientes $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(2,2),(2,-2)\}$ y $\tau_2 \circ \tau_1 = \{(2,2),(-2,2)\}$, estas no son divisivas. Note que, $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva solo por la derecha y $\tau_2 \circ \tau_1$ es divisiva solo por la izquierda. Esta observación se resume en la Proposición 2.5. Además, para efectos ilustrativos, este mismo ejemplo se puede modificar para comprobar que las implicaciones de la Proposición 2.5 son las únicas que se cumplen. Por ejemplo, si $\tau_1 = \{(2,2),(-2,2)\} = \tau_2$, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(2,2),(-2,2)\}$, esto muestra que si τ_1 y τ_2 son divisivas por la izquierda, en general no se puede concluir que la composición sea divisiva por la derecha ni mucho menos divisiva. Esto se resume en las Tablas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3.

Proposición 2.5. *Sean τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^{\#}$.*

(1) Si τ_2 es divisiva por la izquierda, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva por la izquierda.

(2) Si τ_1 es divisiva por la derecha, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva por la derecha.

(3) Si τ_1 es divisiva por la derecha y τ_2 es divisiva por la izquierda, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva. Por ende, si τ_1 y τ_2 son divisivas, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1$ son divisivas.

Demostración. (1) Sean $a, b, a' \in D^{\#}$ tales que $a'|a$ y $a\tau_1 \circ \tau_2 b$. Por la definición de composición, existe un $c \in D^{\#}$, tal que $a\tau_2 c$ y $c\tau_1 b$. Como τ_2 es divisiva por la izquierda, $a'\tau_2 c$ y por lo tanto $a'\tau_1 \circ \tau_2 b$. Es decir, $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva por la izquierda.
(2) Si $a, b, b' \in D^{\#}$ son tales que $b'|b$ y $a\tau_1 \circ \tau_2 b$. Por la definición de composición, existe un $c \in D^{\#}$ tal que $a\tau_2 c$ y $c\tau_1 b$. Como τ_1 es divisiva por la derecha, se tiene

que $c\tau_1 b'$. Por lo tanto, $a\tau_1 \circ \tau_2 b'$ y $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva por la derecha.

(3) Esto es consecuencia inmediata de los incisos (1) y (2). $\square$

Los resultados de esta sección se resumen en las siguientes tablas. En las casillas centrales se indica si el hecho de que los factores τ_1 y τ_2 tengan las propiedades divisiva, divisiva por la izquierda o divisiva por la derecha, implique que la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ también lo haga, se indica la proposición que prueba la propiedad en el caso de ser verdadera o el ejemplo que muestra que no se cumple.

Tabla 2.2.1: Cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva.

$\tau_1 \circ \tau_2$		τ_1		
		Divisiva	Div. por la izq.	Div. por la der.
τ_2	Divisiva	Prop. 2.5	Ej. 2.4	Prop. 2.5
	Div. por la izq.	Prop. 2.5	Ej. 2.4	Prop. 2.5
	Div. por la der.	Ej. 2.4	Ej. 2.4	Ej. 2.4

Tabla 2.2.2: Cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva por la izquierda.

$\tau_1 \circ \tau_2$		τ_1		
		Divisiva	Div. por la izq.	Div. por la der.
τ_2	Divisiva	Prop. 2.5	Prop. 2.5	Ej. 2.4
	Div. por la izq.	Prop. 2.5	Prop. 2.5	Ej. 2.4
	Div. por la der.	Prop. 2.5	Prop. 2.5	Ej. 2.4

Tabla 2.2.3: Cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva por la derecha.

$\tau_1 \circ \tau_2$		τ_1		
		Divisiva	Div. por la izq.	Div. por la der.
τ_2	Divisiva	Prop. 2.5	Prop. 2.5	Prop. 2.5
	Div. por la izq.	Ej. 2.4	Ej. 2.4	Ej. 2.4
	Div. por la der.	Prop. 2.5	Prop. 2.5	Prop. 2.5

Mientras la composición de relaciones divisivas es divisiva, el converso es falso.

Por ejemplo, considere las siguientes relaciones no divisivas:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{(6,2),(6,-2),(5,2),(5,-2),(2,3)\} \text{ y} \\
\tau_2 &= \{(2,6),(-2,5),(3,7)\}. \text{ Entonces} \\
\tau_1 \circ \tau_2 &= \{(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)\}.
\end{aligned}$$

Observe que su composición si es una relación divisiva. Una situación donde esto si funciona es la siguiente.

Proposición 2.6. *Sean τ_1 y τ_2 relaciones simétricas sobre $D^{\#}$ tales que $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$. Si $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva y τ_2 es identidad derecha de τ_1, entonces τ_1 es divisiva. Similarmente, si τ_1 es identidad izquierda de τ_2, entonces τ_2 es divisiva.*

Demostración. Se observa claramente que si τ_2 es identidad derecha de τ_1, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1$. Si $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva, entonces τ_1 también. El otro caso es similar. $\square$

Observación 2.7. Note que existen algunas condiciones suficientes, tales como:
(1) Si una de las relaciones es divisiva y la otra es la identidad, $\tau_1 \circ id = \tau_1$ y la proposición es cierta,
(2) Si una de las relaciones es la relación identidad con respecto a la coimagen de una relación divisiva. Por ejemplo, considere las relaciones $\tau_1 = \{(2,2),(2,-2),(-2,2),$ $(-2,-2)\}$ y $\tau_2 = \{(2,2),(-2,-2)\}$. Se observa que τ_2 no es la identidad en $\mathbb{Z}^{\#}$. La relación τ_2 es la identidad con respecto a los elementos de la coimagen de τ_1, $\tau_2 = id_{Coim(\tau_1)}$. Luego $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1$ y la proposición es cierta.

2.3. Relaciones que preservan asociados

Se sabe que una relación que es divisiva también preserva asociados. Por ende, los resultados de la Sección 2.2 ayudan a verificar que se puede obtener cuando las relaciones preservan asociados. Primero, se recuerda la Definición 1.8: se dice que τ preserva asociados por la izquierda (derecha), si $a \sim c$ (resp. $b \sim c$) y $a\tau b$, entonces $c\tau b$ (resp. $a\tau c$). Si τ preserva asociados por la izquierda y por la derecha, se dice que τ preserva asociados.

Proposición 2.8. *Sean τ_1 y τ_2 dos relaciones sobre $D^\#$ tales que $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$.*
(1) Si τ_1 preserva asociados por la derecha, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ preserva asociados por la derecha.
(2) Si τ_2 preserva asociados por la izquierda, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ preserva asociados por la izquierda.
(3) Si τ_1 preserva asociados por la derecha y τ_2 preserva asociados por la izquierda, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ preserva asociados. Por ende, si τ_1 y τ_2 preservan asociados, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ preserva asociados.

Demostración. (1) y (2) Si τ_1 (τ_2) preserva asociados por la derecha (resp. izquierda) y $a\tau_1 \circ \tau_2 b$. Por la definición de composición, existe un $c \in D^\#$ tal que $a\tau_2 c$ y $c\tau_1 b$. Si $b' \sim b$ (resp. $a' \sim a$), por hipótesis $c\tau_1 b'$ (resp. $a'\tau_2 c$) y luego $a\tau_1 \circ \tau_2 b'$ (resp. $a'\tau_1 \circ \tau_2 b$).
(3) Esto es consecuencia inmediata de los incisos (1) y (2). □

En general, si la composición de relaciones preserva asociados, no necesariamente implica que los factores también. Por ejemplo, si se consideran las relaciones $\tau_1 = \{(3, -2), (5, -2), (3, 2), (5, 2), (4, 2)\}$ y $\tau_2 = \{(2, 3), (-2, 5), (3, 2)\}$. Entonces se observa que $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2)\}$ preserva asociados pero los factores no. Se resumen los resultados de esta sección en las siguientes tablas, con las mismas indicaciones de lectura que las tablas de la sección anterior. El lector debe notar que como una relación que es divisiva también preserva asociados (resultado comprobado en [2]). Entonces los mismos ejemplos para los casos de las propiedades divisivas funcionan para los casos que preservan asociados.

Tabla 2.3.1: Cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ preserva asociados

$\tau_1 \circ \tau_2$		τ_1		
		P.A.	P.A. por la izq.	P.A. por la der.
τ_2	P.A.	Prop. 2.8	Ej. 2.4	Prop. 2.8
	P.A. por la izq.	Prop. 2.8	Ej. 2.4	Prop. 2.8
	P.A. por la der.	Ej. 2.4	Ej. 2.4	Ej.2.4

Tabla 2.3.2: Cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ preserva asociados por la izquierda.

$\tau_1 \circ \tau_2$		τ_1		
		P.A.	P.A. por la izq.	P.A. por la der.
τ_2	P.A.	Prop. 2.8	Prop. 2.8	Ej. 2.4
	P.A. por la izq.	Prop. 2.8	Prop. 2.8	Ej. 2.4
	P.A. por la der.	Prop. 2.8	Prop. 2.8	Ej. 2.4

Tabla 2.3.3: Cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ preserva asociados por la derecha.

$\tau_1 \circ \tau_2$		τ_1		
		P.A.	P.A. por la izq.	P.A. por la der.
τ_2	P.A.	Prop. 2.8	Prop. 2.8	Prop. 2.8
	P.A. por la izq.	Ej. 2.4	Ej. 2.4	Ej. 2.4
	P.A. por la der.	Prop. 2.8	Prop. 2.8	Prop. 2.8

2.4. Relaciones multiplicativas

Primero se recuerda la Definición 1.8 de relaciones con propiedades multiplicativas: la relación τ se llama multiplicativa por la izquierda (derecha), si $a\tau c$ y $b\tau c$ (resp. $a\tau b$ y $a\tau c$), entonces $ab\tau c$ (resp. $a\tau bc$). Se dice que τ es multiplicativa, si es multiplicativa por la izquierda y por la derecha.

La propiedad de ser multiplicativa resultó ser menos compatible con respecto a la composición de relaciones. Los siguientes ejemplos muestran este comportamiento.

Ejemplo 2.9. En $\mathbb{Z}^{\#}$, considere las siguientes relaciones multiplicativas:

$$\tau_1 = \left\{(3^n, 2^m), (2^n, 3^m), (7^n, 5^m), (5^n, 7^m) : n, m \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

$$\tau_2 = \left\{(3^n, 3^m), (3^n, 7^m), (7^n, 3^m), (3^n, 3^m 7^p), (3^n 7^m, 3^p) : n, m, p \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

Sus composiciones están dadas por:

$$\begin{aligned}\tau_1 \circ \tau_2 &= \left\{(3^n, 2^m), (7^n, 2^m), (3^n 7^m, 2^p), (3^n, 5^m) \,:\, n, m, p \in \mathbb{Z}^+\right\}\\ \tau_2 \circ \tau_1 &= \left\{(2^n, 3^m), (2^n, 7^m), (2^n, 3^m 7^p), (5^n, 3^m) \,:\, n, m, p \in \mathbb{Z}^+\right\}\end{aligned}$$

Note que para $n, m, p \in \mathbb{Z}^+$, $(3^n, 2^m)$, $(3^n, 5^m) \in \tau_1 \circ \tau_2$, pero $(3^n, 2^m 5^p) \notin \tau_1 \circ \tau_2$, además $(2^n, 3^m)$, $(5^n, 3^m) \in \tau_2 \circ \tau_1$, pero $(2^n 5^m, 3^p) \notin \tau_2 \circ \tau_1$. Por tanto, aunque ambas relaciones sean multiplicativas, la composición no necesariamente lo es.

Ejemplo 2.10. Considere las relaciones $\tau_1 = \{(3, 2^n) : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(5, 6)\}$ y $\tau_2 = \{(2^m, 3) : m \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(7, 8)\}$. Note que $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(2^n, 2^m) : n, m \in \mathbb{Z}^+\}$ es una relación multiplicativa. Por ende, si $\tau_1 \circ \tau_2$ es multiplicativa, esto no implica que ninguna de los dos factores sean multiplicativas (ni por la izquierda, ni por la derecha). Aunque si se restringen a $Coim(\tau_1 \circ \tau_2)$, se obtiene que τ_1 es multiplicativa por la derecha y τ_2 es multiplicativa por la izquierda.

Hay dos propiedades que ayudan a obtener la multiplicidad por la izquierda y por la derecha.

Propiedad (1). Si $a\tau_1 \circ \tau_2 c$ y $b\tau_1 \circ \tau_2 c$, entonces existe $d \in D$ tal que $a\tau_2 d$, $b\tau_2 d$ y $d\tau_1 c$.

Propiedad (2). Si $a\tau_1 \circ \tau_2 b$ y $a\tau_1 \circ \tau_2 c$, entonces existe $d \in D$ tal que $a\tau_2 d$, $d\tau_1 b$ y $d\tau_1 c$.

Considerando éstas dos propiedades, entonces se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 2.11. *Sean τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^{\#}$ tales que $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$. Entonces,*
(1) Si τ_2 es multiplicativa por la izquierda y tal que cumple la Propiedad (1), entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ es multiplicativa por la izquierda.
(2) Si τ_1 es multiplicativa por la derecha y tal que cumple la Propiedad (2), entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ es multiplicativa por la derecha.

Demostración. (1) Suponer que $a\tau_1 \circ \tau_2 c$ y $b\tau_1 \circ \tau_2 c$, entonces por la Propiedad (1) existe $d \in D$ tal que $a\tau_2 d$, $b\tau_2 d$ y $d\tau_1 c$. Como τ_2 es multiplicativa por la izquierda, se obtiene que $(ab)\tau_2 d$. Como $d\tau_1 c$, por la definición de composición $(ab)\tau_1 \circ \tau_2 c$.
(2) Si $a\tau_1 \circ \tau_2 b$ y $a\tau_1 \circ \tau_2 c$, entonces por la Propiedad (2) existe $d \in D$ tal que $a\tau_2 d$, $d\tau_1 b$ y $d\tau_1 c$. Como τ_1 es multiplicativa por la derecha, entonces se tiene que $d\tau_1(bc)$. Como $a\tau_2 d$, por la definición de composición se concluye que $a\tau_1 \circ \tau_2(bc)$. □

Cabe destacar que las condiciones de la proposición anterior no implican que $\tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$ ó $\tau_2 = \tau_1 \circ \tau_2$ (casos que se desean evitar). Por ejemplo, si se consideran en $\mathbb{Z}^{\#}$ las relaciones dadas por $\tau_1 = \{(2^n, 2^m) : n, m \in \mathbb{Z}^+\}$ y $\tau_2 = \{(4,2),(2,4)\}$. Su composición está dada por $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(2, 2^n), (4, 2^n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Se observa que τ_1 es multiplicativa y se cumple la Propiedad 2. Claramente $\tau_1 \neq \tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \neq \tau_1 \circ \tau_2$ y por supuesto, $\tau_1 \circ \tau_2$ es multiplicativa por derecha.

Se cierra esta sección con la siguiente tabla que resume que la composición de relaciones no preserva la propiedad multiplicativa. La tabla tiene el mismo formato que las de las secciones anteriores. No se presenta tablas para los casos laterales pues estas son idénticas a las del caso cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ es multiplicativa. El Ejemplo 2.9 funciona como contraejemplo para todos estos casos.

Tabla 2.4.1: Cuando $\tau_1 \circ \tau_2$ es multiplicativa.

$\tau_1 \circ \tau_2$		τ_1		
		Multiplicativa	Mult. por la izq.	Mult. por la der.
τ_2	Multiplicativa	Ej. 2.9	Ej. 2.9	Ej. 2.9
	Mult. por la izq.	Ej. 2.9	Ej. 2.9	Ej. 2.9
	Mult. por la der.	Ej. 2.9	Ej. 2.9	Ej. 2.9

2.5. Las τ-factorizaciones

En esta sección, se analiza qué ocurre cuando en el Teorema 2.1 de [2] se quita la hipótesis de que la relación τ sea simétrica y se consideran las definiciones laterales (por ejemplo, divisiva por la izquierda) que se dieron en este estudio. El teorema es relevante con respecto al por qué divisiva, preservar asociados y multiplicativa son tipos de relaciones importantes para la teoría de τ-factorizaciones. Se recuerda que según la Definición 1.6, dada una relación simétrica τ sobre $D^{\#}$, el producto $a = \lambda a_1 a_2 \cdots a_n$ es una τ-factorización para $a \in D^{\#}$ si $a_i \tau a_j$ para todo $i \neq j$ y $\lambda \in U(D)$. Si a esta definición se le remueve la condición de ser simétrica a τ, se requiere otra definición del concepto.

Definición 2.12. Sea τ una relación sobre $D^{\#}$. Entonces se dice que $a = \lambda a_1 a_2 \cdots a_n$ es una *τ-factorización* de a, si $a_i \tau a_{i+1}$ para $i \in \{1, ..., n-1\}$ y $\lambda \in U(D)$.

Note que la Definición 1.6 del concepto de τ-factorización es un producto de la forma $\lambda a_1 \cdots a_n$, donde los a_i's se relacionan todos entre si con respecto a τ. Esto indica que además de una relación simétrica, hay una propiedad de transitividad.

De hecho, si la relación τ es transitiva, la Definición 2.12 coincide con lo que Anderson y Frazier [2] definieron como una τ-factorización ordenada. Si $\lambda a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización (como en la Definición 2.12), entonces $a_i \tau a_{i+1}$ y $a_{i+1} \tau a_{i+2}$. Por la transitividad de τ, $a_i \tau a_{i+2}$. Sucesivamente $a_i \tau a_j$ para todo $i < j$ en $\{1, ...n\}$.

Si τ es además simétrica, entonces $a_i \tau a_j$ para todo $i \neq j$. Por lo tanto, si τ es simétrica y transitiva, la Definición 2.12 coincide con la Definición 1.6 (la cual fué definida para relaciones simétricas).

Ejemplo 2.13. Sean $a, b, c \in D^{\#}$ y $\tau = \{(a, b), (b, c)\}$. Note que abc es una τ-factorización (con respecto a la Definición 2.12), pero no es una τ-factorización (ordenada) con respecto a la definición dada por Anderson y Frazier.

El resto de la sección se dedica a crear algunos resultados con respecto a las τ-factorizaciones de la Definición 1.8 (a menos que se indique lo contrario). Si $\lambda a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización, entonces cada $a_i a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_j$ también es una τ-factorización. Este fenómeno también ocurre en la definición de Anderson y Frazier.

Si se define (como se define en [13]) la clausura transitiva de una relación τ y se denota como T_τ, al conjunto de $(a,b) \in \tau$, tales que existe $n \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n \in D^\#$ tales que $(a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{n-1}, a_n) \in \tau$, con $a_1 = a$ y $a_n = b$. Entonces $\lambda a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización si y solo $(a_1, a_n) \in T_\tau$; esto sucede si y solo si $(a_1, a_n) \in \tau^n$. Entonces $a = \lambda a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización si y solo si $(a_1, a_n) \in \tau^n$.

Note que las definiciones de los conceptos de τ-átomo y τ-primo son las mismas antes definidas (pero tomando en cuenta que ahora τ no es necesariamente simétrica).

Definición 2.14. Sea τ un relación sobre $D^\#$. Se dice que D admite *τ-refinamientos de a_i*, si cuando $\lambda a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización y $a_i = b_1 \cdots b_m$ es una τ-factorización de a_i, entonces $\lambda a_1 \cdots a_{i-1} b_1 \cdots b_m a_{i+1} \cdots a_n$ es también una τ-factorización. Si D admite τ-refinamientos de a_i para todo $i \in \{1, ..., n\}$, entonces se dice que D admite *τ-refinamientos.*

Proposición 2.15. *Sea τ una relación sobre $D^\#$ y $a = \lambda a_1 \cdots a_n$ una τ-factorización de a.*

(1) Si τ preserva asociados (preserva asociados por la derecha o por la izquierda), entonces existe una τ-factorización $a = b_1 \cdots b_n$ (de la misma longitud) de a, donde no requiere la unidad λ al inicio. En otras palabras, se puede omitir el factor unidad λ al inicio de las τ-factorizaciones.

(2) Si τ es divisiva (divisiva por la izquierda o divisiva por la derecha), entonces τ preserva asociados (resp. preserva asociados por la izquierda o preserva asociados por la derecha).

(3) Si τ es divisiva (divisiva por la izquierda o divisiva por la derecha), entonces D admite τ-refinamientos (resp. admite τ-refinamientos de a_1 o admite τ-refinamientos de a_n).

(4) Suponer que τ es transitiva. Si τ es multiplicativa (multiplicativa por la izquierda o multiplicativa por la derecha), entonces a tiene una τ-factorización de tamaño dos.

Demostración. (1) Si τ preserva asociados por la izquierda (por la derecha), entonces $\lambda a_1 \cdots a_n = (\lambda a_1)a_2 \cdots a_n$ (resp. $\lambda a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots (\lambda a_n)$ son dos τ-factorizaciones. Como $a_1 \tau a_2$ (resp. $a_{n-1}\tau a_n$) y τ preserva asociados por la izquierda (resp. por la derecha), entonces $(\lambda a_1)\tau a_2$ (resp. $a_{n-1}\tau(\lambda a_n)$). En el caso que τ preserva asociados, se utiliza cualquiera de las anteriores para omitir la unidad.

(2) Si $a\tau b$ y $a \sim a'$, entonces $a|a'$ y $a'|a$. Como τ es divisiva por la izquierda, entonces $a'|a$ y $a\tau b$ implican que $a'\tau b$. Es decir que τ preserva asociados por la izquierda. Similarmente, si $a\tau b$ y $b \sim b'$, entonces $b|b'$ y $b'|b$, luego $a\tau b'$. Entonces τ preserva asociados por la derecha. Si τ es divisiva por la izquierda y por la derecha, entonces es divisiva. Por lo anterior, τ preserva asociados por la izquierda y por la derecha, por tanto preserva asociados.

(3) Sea τ divisiva por la izquierda (por la derecha) y $b_1 \cdots b_m$ una τ-factorización de a_1(resp. de a_n), Como $b_m|a_1$ (resp. $b_1|a_n$) y $a_1\tau a_2$ (resp. $a_{n-1}\tau a_n$), entonces $b_m\tau a_2$ (resp. $a_{n-1}\tau b_1$). Por ende $\lambda b_1 \cdots b_m a_2 \cdots a_n$(resp. $\lambda a_1 \cdots a_{n-1} b_1 \cdots b_m$) es una τ-factorización. Por ende, si τ es divisiva por la izquierda (por la derecha), entonces D admite τ-refinamientos de a_1 (resp. de a_n).

Si τ es divisiva y $b_1 \cdots b_m$ es una τ-factorización de a_i, entonces $b_1|a_i$ y $b_m|a_i$. Como $a_{i-1}\tau a_i$, $a_i\tau a_{i+1}$ y τ es divisiva, entonces $a_{i-1}\tau b_1$ y $b_m\tau a_{i+1}$. Por lo tanto, $\lambda a_1 \cdots a_{i-1} b_1 \cdots b_m a_{i+1} \cdots a_n$ es una τ-factorización.

(4) Suponer que τ es una relación transitiva y multiplicativa por la derecha (resp. por la izquierda). Como $\lambda a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización, entonces $a_{n-2}\tau a_{n-1}$ y $a_{n-1}\tau a_n$ (resp. $a_1\tau a_2$ y $a_2\tau a_3$). Por transitividad de τ, $a_{n-2}\tau a_n$ (resp. $a_1\tau a_3$). Como τ es multiplicativa por la derecha (resp. por la izquierda), $a_{n-2}\tau(a_{n-1}a_n)$ (resp. $(a_1a_2)\tau(a_3)$). Esto implica que $\lambda a_1 \cdots a_{n-2}(a_{n-1}a_n)$ (resp. $\lambda(a_1a_2)\cdots a_n$) es una τ-factorización de longitud $n-1$. Por inducción en n, se puede concluir que $\lambda a_1(a_2 \cdots a_n)$ (resp. $\lambda(a_1 \cdots a_{n-1})a_n$) es una τ-factorización de longitud dos. Si τ es multiplicativa, es multiplicativa por la derecha y por la izquierda y cualquiera de los métodos provee

el resultado. □

2.6. Conclusiones

Se analizó el comportamiento de la composición de diferentes tipos de relaciones. Los tipos de relaciones clásicas en su mayoría no se preservan con respecto a la composición, con excepción de la reflexividad. Se observó que los casos divisivo y preservar asociados la composición se comporta similar. Por otro lado, la propiedad multiplicativa no tuvo un buen comportamiento.

Se brindó una nueva definición del concepto de τ-factorización. Esta permite poder trabajar con un conjunto más amplio de relaciones, pues no exige que τ sea una relación simétrica, como se había hecho anteriormente. Añadiendo la propiedad de transitividad se obtienen las τ-factorizaciones ordenadas definidas en [2] y añadiendo la simetría se obtiene la definición anterior de τ-factorización. Además se demostró una versión análoga de uno de los teoremas importantes presentados en [2], hecho que indica que posiblemente otros aspectos de la teoría también se puedan extender con esta nueva definición.

Capítulo 3

Los casos $\tau_1 = \tau_2$ y $\tau_1 \subseteq \tau_2$

En el capítulo anterior se analizó la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ en el caso que los factores fueran relaciones arbitrarias con propiedades básicas de relaciones y propiedades relacionadas a τ-factorizaciones. Se observó que la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ no preserva muchas de las propiedades que pueden tener τ_1 ó τ_2. Este capítulo se enfoca en los casos en que $\tau_1 = \tau_2$ y $\tau_1 \subseteq \tau_2$. La idea es verificar si se pueden obtener mejores resultados que los obtenidos en el Capítulo 2. Una razón importante para considerar este tipo de condiciones es que en el trabajo de Ortiz [4], se obtuvo resultados importantes con condiciones del tipo $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Uno de ellos fué generalizar los resultados de la Figura 1.3.2. Ortiz demostró que si D es un τ_2-UFD (τ_2-BFD, τ_2-FFD y τ_2-ACCP) y $\tau_1 \subseteq \tau_2$ dos relaciones divisivas, con τ_2 multiplicativa, entonces D es un τ_1-UFD (resp. τ_1-BFD, τ_1-FFD y τ_1-ACCP).

Si τ es una relación sobre $D^{\#}$ tal que $\tau \circ \tau \neq \emptyset$, es decir $Coim(\tau) \cap Im(\tau) \neq \emptyset$, naturalmente surge la interrogante, ¿qué propiedades de τ hereda la composición τ^2? Por otro lado, ¿qué se puede decir sobre el converso? La primera observación es reconocer que se puede obtener más de una factorización de τ^2. Por ejemplo, sea $\tau = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,a)\}$, $\tau_1 = \{(a,b),(b,a),(a,a)\}$ y $\tau_2 = \tau_1 \cup \{(x,y)\}$; donde x, y son distintos de a, b. Observe que $\tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau$. Como se mencionó anteriormente, este comportamiento influye a que este trabajo se enfoque más en determinar que se puede decir de la composición a partir de las propiedades de sus factores.

3.1. Propiedades de τ^2.

Sea τ una relación sobre $D^{\#}$ tal que $\tau^2 \neq \emptyset$. ¿Cuándo pasa que $\tau \subseteq \tau^2$? Si se asume que $a\tau b$, se observan algunas posibilidades. Una condición simple para que $\tau \subseteq \tau^2$, es que $id_{Im(\tau)} \subseteq \tau$ (resp. $id_{Coim(\tau)} \subseteq \tau$). Si $a\tau b$ y $b\tau b$, (resp. $a\tau a$ y $a\tau b$) entonces $a\tau^2 b$. Si τ es reflexiva, entonces como $id_{Coim(\tau)} \subseteq id_{D^{\#}}$ y $id_{Im(\tau)} \subseteq id_{D^{\#}}$, se cumplen las condiciones anteriores y por tanto también se cumple que $a\tau^2 b$. Si τ es simétrica, entonces si $a\tau b$ se tiene que $b\tau a$ y luego $a\tau^2 a$ y $b\tau^2 b$. Por ende $id_{Coim(\tau)} \subseteq \tau^2$ y $id_{Im(\tau)} \subseteq \tau^2$, pero esto no necesariamente implica que $a\tau^2 b$ en general. Por ejemplo, si en $\mathbb{Z}^{\#}$ se toma $\tau = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$, entonces $\tau^2 = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c),(c,b)\}$. Se puede observar que $(a,b) \in \tau$ pero $(a,b) \notin \tau^2$. Se concluye que la simetría de τ implica la reflexividad de τ^2 respecto a la coimagen e imagen de τ, es decir $id_{Coim(\tau)} \subseteq \tau^2$ y $id_{Im(\tau)} \subseteq \tau^2$. Si τ es transitiva y $a\tau^2 b$, entonces $a\tau b$, es decir, se da la contenencia $\tau^2 \subseteq \tau$. Además, existen situaciones donde $\tau = \tau^2$. Por ejemplo cuando $\tau = id_{D^{\#}}$. En la siguiente proposición se observa que τ^2 hereda algunas propiedades de τ.

Proposición 3.1. *Sea τ un relación en $D^{\#}$ tal que $\tau^2 \neq \emptyset$.*

(1) Si τ es reflexiva, entonces τ^2 es reflexiva.

(2) Si τ es simétrica, entonces $id_{Coim(\tau)\cup Im(\tau)} \subseteq \tau^2$ y τ^2 es simétrica.

(3) Si τ es transitiva, entonces $\tau^2 \subseteq \tau$ y τ^2 es transitiva.

(4) Si τ es relación de equivalencia, entonces τ^2 es relación de equivalencia.

(5) Si τ es un orden parcial, entonces τ^2 es un orden parcial.

Demostración. (1) Esto es consecuencia de la Proposición 2.2, usando $\tau_1 = \tau_2$.

(2) El hecho de que $id_{Coim(\tau)\cup Im(\tau)} \subseteq \tau^2$, fué demostrado en el párrafo anterior.

Suponer que $a\tau^2 b$. Por la definición de composición, existe un $c \in D^{\#}$ tal que $a\tau c$ y $c\tau b$. Como τ es simétrica, $c\tau a$ y $b\tau c$. Por la definición de composición, $b\tau^2 a$ y por lo tanto τ^2 es simétrica.

(3) El hecho de que $\tau^2 \subseteq \tau$, fué demostrado en el párrafo anterior. Suponer que $a\tau^2 b$ y $b\tau^2 c$. Como $\tau^2 \subseteq \tau$, entonces $a\tau b$ y $b\tau c$. Por la definición de composición, $a\tau^2 c$ y τ^2 es transitiva.

(4) Esto es consecuencia directa de los incisos (1), (2) y (3).

(5) La reflexividad y transitividad se obtienen de los incisos (1) y (3). Falta ver que τ^2 es antisimétrica. Suponer que $a\tau^2 b$ y $b\tau^2 a$. Por la parte (3), $\tau^2 \subseteq \tau$, entonces $a\tau b$ y $b\tau a$. Como τ es antisimétrica, entonces $a = b$. Por lo tanto τ^2 es un orden parcial. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra que los conversos de la Proposición 3.1 son falsos en general.

Ejemplo 3.2. (1) Si τ^2 es reflexiva, no necesariamente τ también lo es. Por ejemplo, sea $a \in \mathbb{Z}^{\#}$ un entero arbitrario pero fijo. Sea $\tau = \{(x, a), (a, x) : x \in \mathbb{Z}^{\#}\}$, note que no es reflexiva pues para todo $b \neq a$, $(b, b) \notin \tau$. Su composición es $\tau^2 = id_{\mathbb{Z}^{\#}}$, la cual es reflexiva.

(2) Si τ^2 es simétrica, no necesariamente τ también lo es. Para ello, sea D un dominio integral y $a, b, x, y \in D^{\#}$ elementos distintos. La relación $\tau = \{(a, x), (x, b), (b, y), (y, a)\}$, no es simétrica, porque por ejemplo, $(x, a) \notin \tau$. Pero $\tau^2 = \{(a, b), (b, a), (x, y), (y, x)\}$, si es una relación simétrica.

(3) Si τ^2 es transitiva, no necesarimente τ también lo es. Para observar esto considere $a, b, x \in D^{\#}$ elementos distintos. Sea $\tau = \{(a, x), (x, b), (b, x), (x, a)\}$. Observe que τ no es transitiva pues (a, x), $(x, b) \in \tau$, pero $(a, b) \notin \tau$. Entonces $\tau^2 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$ es claramente transitiva.

(4) Si τ^2 es una relación de equivalencia, no necesariamente τ también lo es. Por ejemplo, sea $A = \{a, b, c\} \subseteq D^{\#}$ y $\tau = id_{D^{\#}} \cup \{(a, c), (c, b), (b, c), (c, a)\}$. Observe que

τ no es relación de equivalencia, pues no es transitiva. Observe que (a,c), $(c,b) \in \tau$, pero $(a,b) \notin \tau$. Por otro lado, su composición $\tau^2 = \tau \cup \{(a,b),(b,a)\}$ es una relación de equivalencia en $D^{\#}$.

(5) Si τ es antisimétrica no necesariamente τ^2 también, aún cuando $\tau \subseteq \tau^2$. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} \tau &= \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,c),(c,a)\}, \text{ entonces} \\ \tau^2 &= \tau \cup \{(b,a),(c,b),(c,a),(a,c)\}, \end{aligned}$$

luego τ es antisimétrica pero τ^2 es simétrica. El converso también es falso, el mismo ejemplo del inciso (2) ilustra este hecho, τ es antisimétrica, pero τ^2 no lo es.

(6) Si τ^2 es un orden parcial, no necesariamente τ lo es. El ejemplo del inciso anterior ilustra el hecho de que τ^2 es un orden parcial, pero τ no lo es. El converso también es falso, considere $A = \{a,b,c\}$, $\tau = id_A \cup \{(a,b),(b,c),(c,a))\}$. Entonces $\tau^2 = \tau_A = A \times A$. Observe que τ es un orden parcial en A pero τ^2 no lo es, porque no es antisimétrica.

Proposición 3.3. *(1) Si τ es divisiva por la izquierda (derecha), entonces τ^2 también lo es. Por ende, si τ es divisiva por la izquierda (derecha), entonces τ^n también lo es.*

(2) Si τ preserva asociados por la izquierda (derecha), τ^2 también lo es. Por ende, si τ preserva asociados por la izquierda (derecha), τ^n también lo es.

Demostración. (1) El resultado se obtiene aplicando la Proposición 2.5 con $\tau_1 = \tau_2$, primero a $\tau \circ \tau$. Haciendo inducción en n, suponer que τ^{n-1} es divisiva por la izquierda (derecha). Entonces por la Proposición 2.5, $\tau^n = \tau \circ (\tau^{n-1})$ también es divisiva por la izquierda (resp. derecha).

(2) El resultado se obtiene aplicando la Proposición 2.8 con $\tau_1 = \tau_2$, primero a $\tau \circ \tau$. Haciendo inducción en n, suponer que τ^{n-1} preserva asociados por la izquierda (derecha). Entonces por la Proposición 2.8, $\tau^n = \tau \circ (\tau^{n-1})$ también preserva asociados

por la izquierda (resp. derecha). $\square$

Si τ es multiplicativa por la izquierda, no necesariamente se tiene que τ^2 también lo sea. Por ejemplo, sea $\tau = \{(2^n, 3), (3^n, 11), (5^n, 7), (7^n, 11), (3^n 7^n, 11) : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Entonces $\tau^2 = \{(2^n, 11), (5^n, 11) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ que no es multiplicativa por izquierda pues $(2, 11)$, $(5, 11) \in \tau^2$ pero $(2 \cdot 5, 11) \notin \tau^2$. Note que sustituyendo τ con τ^{-1} se obtiene un contraejemplo para la propiedad multiplicativa por la derecha.

Corolario 3.4. *(1) Si τ es multiplicativa por la izquierda y se cumple la Propiedad 1 de la Sección 2.4 con $\tau_1 = \tau_2$, entonces τ^2 es multiplicativa por la izquierda.*
(2) Si τ es multiplicativa por la derecha y se cumple la Propiedad 2 de la Sección 2.4 con $\tau_1 = \tau_2$, entonces τ^2 es multiplicativa por la derecha.

Demostración. Esto es consecuencia directa de la Proposición 2.11. $\square$

3.1.1. El τ-centralizador

Este concepto fué definido y usado por Vargas en [9], se puede utilizar para analizar algunas propiedades sobre la composición.

Definición 3.5. [9] Sea $\emptyset \neq S \subset D^\#$ y τ una relación simétrica en $D^\#$. Se define el *τ-centralizador* de S como $Z_\tau(S) = \big\{x \in D^\# : x\tau y, \forall y \in S\big\}$.

Ejemplo 3.6. Considerar la relación $\tau_{(2)}$ sobre $\mathbb{Z}^\#$, definida por $a\tau_{(2)}b$ si y solo si $2|(b-a)$. Si $S = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ se tiene que $Z_{\tau_{(2)}}(S) = \big\{a \in \mathbb{Z}^\# : a\tau_{(2)}b, \forall b \in S\big\} = S$. Dado que todos los enteros pares están relacionados con respecto a $\tau_{(2)}$.

Debido a que en [9] se asume que las relaciones sean necesariamente simétricas y ya que la definición no depende de la estructura algebraica de S, ni de $D^\#$, se adapta la definición de la siguiente manera.

Definición 3.7. Sea $S \subset D^{\#}$ con $S \neq \emptyset$ y τ una relación sobre $D^{\#}$. Se define el *τ-centralizador por la izquierda* de S como $Z^I_\tau(S) = \big\{a \in D^{\#} : a\tau b, \forall b \in S\big\}$ y el *τ-centralizador por la derecha* de S como $Z^D_\tau(S) = \big\{a \in D^{\#} : b\tau a, \forall b \in S\big\}$.

En particular, se puede adaptar la definición del τ-centralizador de un elemento en particular a los casos laterales. Sea $a \in D^{\#}$ y τ una relación (no necesariamente simétrica) sobre $D^{\#}$. Entonces se define el *τ-centralizador de a por la izquieda* como $Z^I_\tau(a) = \big\{b \in D^{\#} : b\tau a\big\}$ y el *τ-centralizador de a por la derecha* como $Z^D_\tau(a) = \big\{b \in D^{\#} : a\tau b\big\}$.

En general el τ^2-centralizador tiene poca relación con el τ-centralizador. Para observar esto, sean $a, b, c \in D^{\#}$ y $\tau = \{(a, c), (c, b)\}$. Entonces $\tau^2 = \{(a, b)\}$. Note que $Z^I_{\tau^2}(a) = \emptyset$ y $Z^I_\tau(a) = \emptyset$. Dado que a no es la imagen de ningún elemento bajo τ, ni bajo τ^2. Por otro lado, $Z^D_{\tau^2}(a) = \{b\}$ y $Z^I_{\tau^2}(a) = \{c\}$, aunque estos no son vacíos, observe que no son comparables como conjuntos. Pero si se añaden condiciones se logran mejores resultados.

Proposición 3.8. *Sea $x \in D^{\#}$ y τ una relación sobre $D^{\#}$ tal que $\tau^2 \neq \emptyset$.*
(a) Si $id_{Coim(\tau)} \subseteq \tau$, entonces $Z^I_\tau(x) \subseteq Z^I_{\tau^2}(x)$ y $Z^D_\tau(x) \subseteq Z^D_{\tau^2}(x)$.
(b) Si $\tau \subseteq \tau^2$, entonces $Z^I_\tau(x) \subseteq Z^I_{\tau^2}(x)$ y $Z^D_\tau(x) \subseteq Z^D_{\tau^2}(x)$.
(c) Si $\tau^2 \subseteq \tau$, entonces $Z^I_{\tau^2}(x) \subseteq Z^I_\tau(x)$ y $Z^D_{\tau^2}(x) \subseteq Z^D_\tau(x)$.

Demostración. (a) Sea $a \in D^{\#}$. Si $a\tau x$ para algún $x \in D^{\#}$, entonces como $id_{Coim(\tau)} \subseteq \tau$, $a\tau a$ y luego $a\tau^2 x$, por tanto $Z^I_\tau(x) \subseteq Z^I_{\tau^2}(x)$. Similarmente se obtiene que $Z^D_\tau(x) \subseteq Z^D_{\tau^2}(x)$.
(b) Por la definición y la hipótesis de que $\tau \subseteq \tau^2$, $Z^I_\tau(x) = \{y \in Coim(\tau) : y\tau x\} \subseteq \{y \in Coim(\tau^2) : y\tau^2 x\} = Z^I_{\tau^2}(x)$. Similarmente $Z^D_\tau(x) = \{y \in Im(\tau) : x\tau y\} \subseteq \{y \in Im(\tau^2) : x\tau^2 y\} = Z^D_{\tau^2}$.
(c) Por la definición y la hipótesis de que $\tau^2 \subseteq \tau$, $Z^I_{\tau^2}(x) = \{y \in Coim(\tau^2) : y\tau^2 x\} \subseteq \{y \in Coim\tau : y\tau x\} = Z^I_\tau(x)$. Similarmente se cumple que $Z^D_{\tau^2}(x) \subseteq Z^D_\tau(x)$. $\square$

Proposición 3.9. *Sea τ un relación sobre A tal que $\tau^2 \subseteq \tau$.*

(1) Si τ^2 es reflexiva, entonces $id_{Coim(\tau^2)} \subseteq \tau$.

(2) Si τ es simétrica, entonces $id_{Coim(\tau^2)} \subseteq \tau^2$.

(3) Entonces τ es transitiva.

(4) Si τ es antisimétrica, entonces τ^2 es antisimétrica.

Demostración. (1) Si τ^2 es reflexiva, entonces $a\tau^2 a$ para todo $a \in D^\#$. Como $\tau^2 \subseteq \tau$, $a\tau a$ y τ es reflexiva respecto a la coimagen de τ^2. Es decir, $id_{Coim(\tau^2)} \subseteq \tau$.
(2) Si $a\tau^2 b$, entonces $a\tau b$. Por la simetría de τ se obtiene que $b\tau a$. Por la definición de composición, $a\tau^2 a$.
(3) Si $a\tau b$ y $b\tau c$, por definición de composición $a\tau^2 c$. Como $\tau^2 \subseteq \tau$, entonces $a\tau c$.
(4) Si $a\tau^2 b$ y $b\tau^2 a$, entonces $a\tau b$ y $b\tau a$. Como τ es antisimétrica $a = b$. Por lo tanto τ^2 es antisimétrica. □

Si τ es reflexiva y $\tau^2 \subseteq \tau$ no necesariamente τ^2 también (solamente es reflexiva respecto al dominio de τ). Si τ^2 es simétrica y $\tau^2 \subseteq \tau$, no necesariamente τ es simétrica. Por ejemplo, sea $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subseteq D^\#$ y $\tau = \{(a_1, a_i) : a_i \in S, i = 2, ..., k\}$, entonces $\tau^2 = \emptyset$.

3.2. El caso $\tau_1 \subseteq \tau_2$

En esta sección se asume que τ_1 y τ_2 son relaciones sobre $D^\#$ tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$. Esta condición fué de mucha relevancia en los resultados obtenidos por Ortiz en [4]. Bajo la condición $\tau_1 \subseteq \tau_2$ obtuvo consecuencias hereditarias sobre τ-factorizaciones, τ-átomos y τ-primos, entre otros.

3.2.1. Propiedades clásicas de relaciones

El enfoque de este trabajo ha sido ver el comportamiento de $\tau_1 \circ \tau_2$. En esta sección, a partir de la condición de que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, se demuestra qué propiedades se cumplen y cuáles fallan, mediante ejemplos.

Proposición 3.10. *Sean τ_1, τ_2 relaciones sobre $D^{\#}$, tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$ y $\tau_2 \circ \tau_1 \neq \emptyset$.*
(1) Si τ_1 es reflexiva, entonces τ_2 es reflexiva.
(2) Si τ_1 es reflexiva, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1$ son reflexivas.

Demostración. (1) Si τ_1 es reflexiva, entonces $id_{D^{\#}} \subseteq \tau_1$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $id_{D^{\#}} \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2$. Por lo tanto τ_2 es reflexiva.
(2) La reflexividad de $\tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1$ es consecuencia de la Proposición 2.2. □

Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_2 es reflexiva, no necesariamente τ_1 lo es. Por ejemplo, si $\tau_1 = \{(2,2)\}$ y $\tau_2 = id_{D^{\#}}$. Aunque es posible ser reflexiva respecto al dominio o coimagen de la relación. En el ejemplo $\tau_1 = id_{Coim(\tau_1)}$ y por ende es reflexiva respecto a su coimagen. Una motivación para preguntarse que tan reflexiva es una relación, es el hecho de que cuando una relación es reflexiva y divisiva con respecto a los elementos de $S \subseteq D^{\#}$, donde S es un subconjunto de $D^{\#}$ cerrado bajo productos, entonces $\tau \cap (S \times S) = S \times S$, es decir, los $\tau \cap (S \times S)$-productos y los τ_S-productos coinciden en S. Porque si $a, b \in S$, entonces $ab \in S$, porque S es cerrado bajo productos. Como τ es reflexiva en S, $ab\tau ab$. Luego $a|ab$ y $b|ab$, como τ es divisiva, $a\tau b$. Por lo tanto $\tau \cap (S \times S) = S \times S$.

Se recuerda que las relaciones simétricas han sido el foco principal de la teoría de τ-factorizaciones por el hecho de trabajar con anillos conmutativos. Este trabajo se aleja de esa idea y redefine los conceptos de otra forma, pero que aún sea compatible cuando la relación sea simétrica.

Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es simétrica, entonces τ_2 no es simétrica en general. Por ejemplo, sean $a, b, c, d \in A$ distintos, $\tau_1 = \{(a,b),(b,a)\}$ y $\tau_2 = \tau_1 \cup \{(c,d)\}$. Claramente τ_1 es simétrica, $\tau_1 \subseteq \tau_2$, pero τ_2 no es simétrica. Similarmente, si τ_2 es simétrica no necesariamente τ_1 es simétrica. Por ejemplo, sean $\tau_1 = \{(a,b),(c,d)\}$ y $\tau_2 = \tau_1 \cup \tau_1^{-1}$.

Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es simétrica, no se tiene que $\tau_1 \circ \tau_2$ sea simétrica. Por ejemplo, si se consideran $\tau_1 = \{(a,b),(b,a)\}$ y $\tau_2 = \{(a,b),(b,a),(c,b)\}$, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(a,a),(b,b),(c,a)\}$. Se observa que τ_1 es simétrica, pero τ_2 ni $\tau_1 \circ \tau_2$ lo son. Similarmente, si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_2 es simétrica, $\tau_1 \circ \tau_2$ no necesariamente es simétrica. Por ejemplo, si $\tau_1 = \{(a,b),(b,a),(c,b)\}$ y $\tau_2 = \tau_1 \cup \{(b,c)\}$, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(a,a),(b,b),(c,a)\}$. Se puede notar que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, τ_2 es simétrica, pero τ_1 y $\tau_1 \circ \tau_2$ no lo son. Finalmente, aún si ambas τ_1 y τ_2 son simétricas y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $\tau_1 \circ \tau_2$ no necesariamente es simétrica. Considere

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c)\} \quad y \\
\tau_2 &= \tau_1 \cup \{(d,b),(b,d)\}, \quad \text{entonces} \\
\tau_1 \circ \tau_2 &= \{(a,a),(b,b),(c,a),(c,c),(a,c),(d,a),(d,c)\}.
\end{aligned}$$

Observe que $(d,a) \in \tau_1 \circ \tau_2$, pero $(a,d) \notin \tau_1 \circ \tau_2$, luego no es una relación simétrica.

Se recuerda que se observó anteriormente que si τ es transitiva, τ^2 también lo es. Cuando $\tau_1 \subseteq \tau_2$, la situación es distinta.

Proposición 3.11. *Sean τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^\#$ tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_2 es transitiva. Entonces $\tau_1 \circ \tau_2 \subseteq \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1 \subseteq \tau_2$. Si además $id_{Im(\tau_1 \circ \tau_2)} \subseteq \tau_1$ ($id_{Im(\tau_2 \circ \tau_1)} \subseteq \tau_1$), entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ es transitiva (resp. $\tau_2 \circ \tau_1$ es transitiva).*

Demostración. Si $a\tau_1 \circ \tau_2 b$, por la definición de composición, existe un $c \in D^\#$ tal que $a\tau_2 c$ y $c\tau_1 b$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $c\tau_2 b$. Como τ es transitiva, $a\tau_2 b$, por lo tanto $\tau_1 \circ \tau_2 \subseteq \tau_2$. Si $a\tau_2 \circ \tau_1 b$, por la definición de composición existe un $c \in D^\#$ tal que

$a\tau_1 c$ y $c\tau_2 b$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $a\tau_2 c$. Como τ es transitiva, $a\tau_2 b$, por lo tanto $\tau_2 \circ \tau_1 \subseteq \tau_2$.

Para la segunda parte, si $a\tau_1 \circ \tau_2 b$ y $b\tau_1 \circ \tau_2 c$ ($a\tau_2 \circ \tau_1 b$ y $b\tau_2 \circ \tau_1 c$), por la definición de composición existen c_1, $c_2 \in D$ tales que $a\tau_2 c_1$, $c_1\tau_1 b$, $b\tau_2 c_2$ y $c_2\tau_1 c$ (resp. $a\tau_1 c_1$, $c_1\tau_2 b$, $b\tau_1 c_2$ y $c_2\tau_2 c$). Por la hipótesis de que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, se tiene que $c_1\tau_2 b$ y $c_2\tau_2 c$ (resp. $a\tau_2 c_1$ y $b\tau_2 c_2$). Como τ_2 es transitiva, $a\tau_2 b$ y $b\tau_2 c$, implica $a\tau_2 c$. Como $id_{Im(\tau_1\circ\tau_2)} \subseteq \tau_1$ (resp. $id_{Im(\tau_2\circ\tau_1)} \subseteq \tau_1$) y $c \in Im(\tau_1 \circ \tau_2)$ (resp. $c \in Im(\tau_2 \circ \tau_1)$) , $c\tau_1 c$. Por lo tanto $a\tau_1 \circ \tau_2 c$ (resp. $a\tau_2 \circ \tau_1 c$) y así $\tau_1 \circ \tau_2$ (resp. $\tau_2 \circ \tau_1$) es transitiva. $\square$

Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es transitiva, entonces τ_2 no es necesariamente transitiva. Por ejemplo, considerar la relación transitiva $\tau_1 = \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$ y y la relación $\tau_2 = \tau_1 \cup \{(c,a)\}$, la cual no es transitiva y contiene a τ_1. Similarmente, si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_2 es transitiva, no necesariamente τ_1 es transitiva. Por ejemplo, sean $\tau_1 = \{(a,b),(b,c)\}$ y $\tau_2 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$. Finalmente, si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es transitiva, no necesariamente $\tau_1 \circ \tau_2$ es transitiva. Para ello considere $\tau_1 = \{(b,a),(c,b),(c,a)\}$ y $\tau_2 = \{(d,b),(a,c)\} \cup \tau_1$. Entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(d,a),(a,b),(a,a),(c,a)\}$, que no es una relación transitiva. En general, la condición $\tau_1 \subseteq \tau_2$ no garantiza la herencia de transitividad a $\tau_1 \circ \tau_2$.

Para la antisimetría, note que si τ_2 es antisimétrica y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces τ_1 también lo es. Pues, si $a\tau_1 b$ y $b\tau_1 a$, entonces $a\tau_2 b$ y $b\tau_2 a$. Como τ_2 es antisimétrica, $a = b$. Por lo tanto τ_1 es antisimétrica.

Ejemplo 3.12. Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es antisimétrica no necesariamente $\tau_1 \circ \tau_2$ es antisimétrica, considere sobre $D^{\#}$, $\tau_1 = id_{D^{\#}} \cup \{(a,b)\}$ y $\tau_2 = id_{D^{\#}} \cup \{(a,b),(b,a)\}$. Entonces la composición $\tau_1 \circ \tau_2 = id_{D^{\#}} \cup \{(a,b),(b,a)\}$ no es antisimétrica.

Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_2 es antisimétrica no necesariamente $\tau_1 \circ \tau_2$ es antisimétrica, por ejemplo, si $\tau_1 = id_{D^{\#}} \cup \{(a,b),(c,a)\}$ y $\tau_2 = id_{D^{\#}} \cup \{(a,b),(c,a),(b,c)\}$, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = id_{D^{\#}} \cup \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,a)\}$. Observe que τ_2 es antisimétrica y $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Pero $\tau_1 \circ \tau_2$ no es antisimétrica porque, $(a,b),(b,a) \in \tau_1 \circ \tau_2$, con $a \neq b$.

Por otro lado, las relaciones de equivalencia y los órdenes parciales si muestran un buen comportamiento cuando $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Proposición 3.13. *Sean τ_1 y τ_2 relaciones sobre $D^{\#}$, tales que τ_1 es reflexiva, $\tau_1 \circ \tau_2 \neq \emptyset$, $\tau_2 \circ \tau_1 \neq \emptyset$ y $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*
(1) Si τ_2 es relación de equivalencia, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1$ también lo son.
(2) Si τ_2 es un órden parcial, entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1$ también lo son.

Demostración. Observe que en ambos casos se necesita comprobar reflexividad y transitividad de $\tau_1 \circ \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1$. Como τ_1 y τ_2 son reflexivas, por la Proposición 2.2, $\tau_1 \circ \tau_2$ también es reflexiva. Para la transitividad, se puede aplicar la Proposición 3.11 puesto que τ_1 es reflexiva.
Para la simetría en (1), suponer que $a\tau_1 \circ \tau_2 b$. Por la Proposición 3.11, $\tau_1 \circ \tau_2 \subseteq \tau_2$ y $\tau_2 \circ \tau_1 \subseteq \tau_2$. Por ende $a\tau_2 b$. Por la simetría de τ_2, $b\tau_2 a$. Como τ_1 es reflexiva, $a\tau_1 a$ ($b\tau_1 b$). Por lo tanto, por la definición de composición, $b\tau_1 \circ \tau_2 a$ (resp. $b\tau_2 \circ \tau_1 a$).
Para la antisimetría en (2), suponer que $a\tau_1 \circ \tau_2 b$ y $b\tau_1 \circ \tau_2 a$ ($a\tau_2 \circ \tau_1 b$ y $b\tau_2 \circ \tau_1 a$). Por la definición de composición, existen $c_1, c_2 \in D^{\#}$ tales que $a\tau_2 c_1$, $c_1\tau_1 b$, $b\tau_2 c_2$ y $c_2\tau_1 a$ (resp. $a\tau_1 c_1$, $c_1\tau_2 b$, $b\tau_1 c_2$ y $c_2\tau_2 a$). Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $c_1\tau_2 b$ y $c_2\tau_2 a$ (resp. $a\tau_2 c_1$ y $b\tau_2 c_2$). Por la transitividad de τ_2, $a\tau_2 b$ y $b\tau_2 a$. Como τ_2 es un orden parcial, es antisimétrica, por lo tanto $a = b$. $\square$

El siguiente ejemplo comprueba que el hecho de que la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ sea relación de equivalencia (antisimétrica o ser orden parcial), aún cuando $\tau_1 \subseteq \tau_2$, no implica que alguno de los factores también lo sea.

Ejemplo 3.14. Sean $a, b, c \in D^{\#}$ y sean $\tau_1 = \{(a,a),(c,c),(a,b)\}$ y
$\tau_2 = \{(a,a),(c,c),(a,b),(b,a)\} \cup id_{D^{\#}\setminus\{b\}}$ relaciones sobre $D^{\#}$.
Entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = id_{D^{\#}} \cup \{(a,b),(b,a)\}$. Observe que $\tau_1 \circ \tau_2$ es relación de equivalencia en A, pero ninguno de los factores lo es, pues τ_1 no es simétrica ni reflexiva y τ_2 no es reflexiva. Para el caso de la antisimetría (o ser un orden parcial), considere $\tau =$

$\{(2,n),(n,2) : n \in \mathbb{Z}^{\#},\, n \neq 2\}$. Entonces $\tau^2 = \{(2,2),(n,n) : n \in \mathbb{Z}^{\#}\}$. Observe que τ^2 es un orden parcial, pero τ no es una relación antisimétrica.

3.2.2. Relaciones divisivas, que preservan asociados y multiplicativas.

Las relaciones divisivas, multiplicativas y que preservan asociados, no se preservan respecto a "$\subseteq$". Es decir, si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es divisiva (multiplicativa o preserva asociados), no necesariamente implica que τ_2 ni $\tau_1 \circ \tau_2$ lo sean.

Ejemplo 3.15. (1) Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es divisiva (preserva asociados) por la izquierda, no necesariamente $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva (resp. preserva asociados) por la izquierda. Considere $\tau_1 = \{(2,2),(-2,2)\}$ y $\tau_2 = \{(2,2)\}$. Claramente $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(2,2)\} = \tau_2$. Tanto $\tau_1 \circ \tau_2$ como τ_2, no son divisivas (resp. preservan asociados) por la ziquierda.

(2) Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_2 es divisiva (preserva asociados) por derecha, no necesariamente $\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva (resp. preserva asociados) por la derecha, esto se observa en el ejemplo anterior intercambiando el rol de τ_1 y τ_2.

(3) Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_1 es multiplicativa por la izquierda, no necesariamente la composición también lo es. Si se considera $\tau_1 = \{(2^n, 2^m) : n, m \in \mathbb{Z}^+\}$ (una relación multiplicativa) y $\tau_2 = \tau_1 \cup \{(3, 2^n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2$. Note que τ_2 no es multiplicativa por la izquierda porque $(2,2)$, $(3,2) \in \tau_1 \circ \tau_2$, pero $(6,2) \notin \tau_1 \circ \tau_2$.

(4) Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y τ_2 es multiplicativa por derecha, no se tiene que $\tau_1 \circ \tau_2$ ni τ_1 sean multiplicativas por derecha. Considere $\tau_1 = \{(2,2)\}$ y $\tau_2 = \{(2, 2^n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1$, la cual no es multiplicativa.

Note que los resultados del Capítulo 2 aplican aún con la condición $\tau_1 \subseteq \tau_2$, por ello solo se analizó si se obtenían nuevas propiedades a partir de esta condición.

Mediante el siguiente ejemplo se observa la conexión entre centralizadores de τ_1, τ_2 y $\tau_1 \circ \tau_2$, cuando se tiene que $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Ejemplo 3.16. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y considere $\tau_1 = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$ y $\tau_2 = \tau_1 \cup \{(b, c)\}$ relaciones sobre A. Entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \{(a, a), (b, b), (b, d)\}$. Observe que por la definición de τ-centralizador, se tiene que $Z^I_{\tau_1}(b) = Z^D_{\tau_1}(b) = Z^I_{\tau_2}(b) = \{a\}$, $Z^D_{\tau_2}(b) = \{a, c\}$, $Z^I_{\tau_1 \circ \tau_2}(b) = \{b\}$ y $Z^D_{\tau_1 \circ \tau_2}(b) = \{b, d\}$.

Se observa que "$\subseteq$" preserva los τ-centralizadores por la izquierda (resp. por la derecha). Este resultado se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 3.17. *Dadas τ_1 y τ_2 tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Entonces $Z^I_{\tau_1}(x) \subseteq Z^I_{\tau_2}(x)$ y $Z^D_{\tau_1}(x) \subseteq Z^D_{\tau_2}(x)$.*

Demostración. Por la definición, $Z^I_{\tau_1}(x) = \{y \in Coim(\tau_1) : y\tau_1 x\}$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $Coim(\tau_1) \subseteq Coim(\tau_2)$, entonces $Z^I_{\tau_1}(x) \subseteq \{y \in Coim(\tau_2) : y\tau_2 x\} = Z^I_{\tau_2}(x)$. Similarmente, para el caso derecho se tiene que $Z^D_{\tau_1}(x) = \{y \in Im(\tau_1) : x\tau_1 y\}$, como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $Im(\tau_1) \subseteq Im(\tau_2)$, así $Z^D_{\tau_1}(x) \subseteq \{y \in Coim(\tau_2) : x\tau_2 y\} = Z^D_{\tau_2}(x)$. $\square$

Note que no se generó ninguna relación entre los centralizadores de los factores τ_1, τ_2 y su composición $\tau_1 \circ \tau_2$, cuando $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Esta condición solo logra que exista relación entre los centralizadores de τ_1 y τ_2.

3.3. Conclusiones

Se concluye que para los casos específicos $\tau_1 = \tau_2$ y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, se logra que la composición preserve más propiedades de sus factores, especialmente de las propiedades o tipos clásicos de relaciones. Para los casos de las propiedades divisiva, preservar asociados y multiplicativa, se concluye que no necesariamente se heredan estas propiedades. Además, aún con estas condiciones, no se logra que la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ le herede propiedades a alguno de sus factores.

Capítulo 4

Composición de relaciones particulares y τ-factorizaciones

En este capítulo se estudian propiedades de relaciones específicas y utilizadas en trabajos anteriores ([2], [3] y [9] por ejemplo). Se utilizan ahora también para analizar qué propiedades cumplen las respectivas composiciones.

4.1. La relación τ_S.

Esta relación fué definida en [2]. Sea D un dominio integral y sea $S \subseteq D^{\#}$. Se define τ_S de la siguiente forma: $a\tau_S b$ si y solo si $a, b \in S$, en otras palabras, $\tau_S = S \times S$. Observe que $\tau_S^2 = \tau_S$. Si $a\tau_S^2 b$, por la definición de composición, existe un $c \in D^{\#}$ tal que $a\tau_S c$ y $c\tau_S b$, lo que implica que $a, b, c \in S$ y por tanto $a\tau_S b$. Por otro lado, si $a\tau_S b$, entonces $a, b \in S$. Como $b\tau_S b$, por la definición de composición $a\tau_S^2 b$. La relación τ_S es reflexiva respecto a los elementos de S, es decir $id_S \subseteq \tau_S$. Es simétrica, porque si $a\tau_S b$, entonces $a, b \in S$, luego $b\tau_S a$. También es transitiva puesto que si $a\tau_S b$ y $b\tau_S c$, entonces $a, b, c \in S$ y así, se obtiene que $a\tau_S c$. Debido a lo anterior se tiene que τ_S es una relación de equivalencia sobre S. El único caso en que τ_S es antisimétrica, ocurre cuando $S = \{x\}$ para algún $x \in D^{\#}$, es decir, S es un singulete.

Las propiedades divisiva, preservar asociados y multiplicativa, se analizaron en [2] y [9]. La relación τ_S es divisiva (preserva asociados, multiplicativa), si S es cerrado bajo divisores (resp. cerrado bajo asociados, cerrado respecto al producto).

Si $a\tau_S \circ \tau_T b$, por la definición de composición existe un $c \in S$ tal que $a\tau_T c$ y $c\tau_S b$. Si $T \subseteq S$, entonces $c \in S$, por lo tanto $a\tau_S c$ y como τ_S es transitiva, se tiene que $a\tau_S b$. El converso es falso en general. Debido a que si $a\tau_S b$, puede pasar que a, $b \in S\backslash T$, luego no hay elemento $c \in T$ que haga que la composición $\tau_S \circ \tau_T$ esté definida. Para que $\tau_S \circ \tau_T$ esté definida se requiere que $S \cap T \neq \emptyset$. Se puede observar que $\tau_S \circ \tau_T = \tau_T \circ \tau_S$ si y solo si $T = S$, $T = \emptyset$ ó $S = \emptyset$. Se identifican también las siguientes propiedades.

Proposición 4.1. *Dados dos conjuntos S, T de $D^{\#}$ tales que $S \cap T \neq \emptyset$. Entonces $\tau_S \circ \tau_T \subseteq \tau_{S\cup T}$ y $\tau_{S\cap T} \subseteq \tau_S \circ \tau_T$.*

Demostración. (1) Si $a\tau_S \circ \tau_T b$, por la definición de composición, existe $c \in S$ tal que $a\tau_T c$ y $c\tau_S b$. Como a,$b \in S \cup T$, $a\tau_{S\cup T} b$. Suponer que $a\tau_{S\cap T} b$. Como S y T contienen a $S \cap T$, $a\tau_T b$ y $b\tau_S b$. Por lo tanto, por la definición de composición, $a\tau_S \circ \tau_T b$. □

Los conversos de la proposición son falsos. Por ejemplo, considere $S = \{a, b\}$, $T = \{b, c\}$. Entonces observe que $a\tau_{S\cup T} c$, pero no se cumple que $a\tau_S \circ \tau_T c$, porque $a \notin T$. Para el otro caso, note que como $a\tau_S b$ y $b\tau_T c$, entonces $a\tau_T \circ \tau_S c$, pero no se cumple que $a\tau_{S\cap T} c$. Ésta proposición sugiere que la única factorización general de τ_S es $\tau_S = \tau_S^n$.

Note que como τ_S es simétrica y transitiva, las τ-factorizaciones definidas en este documento (Definición 2.12) coincide con la dada por Anderson y Frazier en [2].

4.2. La relación $\tau_{[]}$.

Sea D un dominio integral. Se define la relación $\tau_{[]}$ dada por $a\tau_{[]}b$ si y solo si $\gcd(a,b) = 1_D$. En [2] se concluye que $\tau_{[]}$ es divisiva pero no multiplicativa. La relación $\tau_{[]}$ no es reflexiva, pues $\gcd(a,a) = a$ (que es distinto de 1_D para todo $a \notin U(D)$). Es simétrica, puesto que $\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$. Se observa que $\tau_{[]}$ no es transitiva. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$ se tiene que $\gcd(3,20) = 1$, $\gcd(20,9) = 1$, pero $\gcd(3,9) = 3$. Por lo anterior, $\tau_{[]}$ no es una relación de equivalencia. Tampoco es antisimétrica ni un orden parcial.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}^{\#}$. Entonces siempre se puede encontrar un primo $p \in \mathbb{Z}$ con $\gcd(a,p) = 1$ y $\gcd(p,b) = 1$. Por lo tanto, $\tau_{(1)} \subseteq \tau_{[]}^2 \subseteq \tau_{(1)}$. Es decir, $\tau_{[]}^2 = \tau_{(1)}$.

Como $\tau_{[]}$ es simétrica, pero no transitiva; las $\tau_{[]}$-factorizaciones (como en la Definición 2.12) no coinciden con el concepto de $\tau_{[]}$-factorización de Anderson y Frazier. Por ejemplo en $\mathbb{Z}$, se tiene que $4 \cdot 3 \cdot 14$ es una $\tau_{[]}$-factorización respecto a la Definición 2.12, pues $\gcd(4,3) = 1$ y $\gcd(3,14) = 1$. Pero $\gcd(4,14) = 2 \neq 1$, por ende no cumple con la definición dada por Anderson y Frazier. Sin embargo, toda $\tau_{[]}$-factorización en el sentido de Anderson y Frazier es una $\tau_{[]}$-factorización en el sentido de la Definición 2.12.

Mientras las $\tau_{[]}$-factorizaciones $\tau_{[]}$-atómicas de Anderson y Frazier son de la forma $\pm p_1^{n1} \cdots p_k^{n_k}$, donde los p_i son primos no asociados; las $\tau_{[]}$-factorizaciones en $\tau_{[]}$-átomos (como en la Definición 2.12) no son solo estas. En el ejemplo anterior, $4 \cdot 3 \cdot 14$ no es una $\tau_{[]}$-factorización (como en la Definición 2.12) en $\tau_{[]}$-átomos. Pero $8 \cdot 3 \cdot 7$, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$, $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2$, si lo son. Por ende, $\mathbb{Z}$ es un $\tau_{[]}$-UFD en el sentido de Anderson y Frazier, pero no lo es usando la Definición 2.12.

4.3. La relación ∂.

Dado un dominio integral D, se define ∂ sobre $D\left[x\right]^{\#}$ como $f(x)\partial g(x)$ si y solo si $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$. Por lo estudiado en [2], se tiene que ∂ preserva asociados, pero no es divisiva ni multiplicativa. La relación ∂ es claramente reflexiva, simétrica y transitiva, por tanto ∂ es una relación de equivalencia en $D\left[x\right]^{\#}$. Dado que $\partial \neq id_{D[x]^{\#}}$ es simétrica, no puede ser antisimétrica ni relación de orden. La composición ∂^2 coincide con ∂. Si $f(x)\partial g(x)$, como ∂ es reflexiva se tiene que $g(x)\partial g(x)$ y por tanto $f(x)\partial^2 g(x)$. Por otro lado, si $f(x)\partial^2 g(x)$, entonces existe $q(x) \in D\left[x\right]^{\#}$ tal que $f(x)\partial q(x)$ y $q(x)\partial g(x)$, como ∂ es transitiva se concluye que $f(x)\partial g(x)$. La relación ∂ es tanto simétrica, como transitiva, por ende la Definición 2.12 y la Definición 1.6, coinciden.

4.4. La relación $\tau_{(n)}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Sea $D = \mathbb{Z}$ y n un entero positivo fijo, entonces se define la relación $\tau_{(n)}$ sobre $\mathbb{Z}^{\#}$ como $a\tau_{(n)}b$ si y solo si $a - b \in (n)$. Observe que $a - b \in (n)$ si y solo si $a - b = nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Pero esto es equivalente a decir que $a \equiv b \pmod{n}$. Es decir, $\tau_{(n)} = \equiv_n \cap \tau_{\mathbb{Z}^{\#}}$, donde $\equiv_n$ es la relación de congruencia módulo n sobre $\mathbb{Z}$. Por [2] y [3], se conoce que $\tau_{(n)}$ preserva asociados y es multiplicativa solo cuando $n = 2$; pero nunca es divisiva, si $n > 1$. Como $\tau_{(n)} = \equiv_n \cap \tau_{\mathbb{Z}^{\#}}$, la intersección de dos relaciones de equivalencia sobre $\mathbb{Z}^{\#}$, $\tau_{(n)}$ también es una relación de equivalencia. Observe que como $\tau_{(n)}$ una relación simétrica y transitiva, las $\tau_{(n)}$-factorizaciones en el sentido de la Definición 1.6, coinciden con las $\tau_{(n)}$-factorizaciones en el sentido de la Definición 2.12.

Observe que usualmente la relación módulo n en $\mathbb{Z}$, está definida para $n > 1$. Pero la relación $\tau_{(n)}$ se puede definir para $n \in \mathbb{Z}$. Como $(-n) = (n)$, $\tau_{(-n)} = \tau_{(n)}$. Por lo tanto, solo se considera cuando $n \geq 0$. Si $n = 0$, entonces $\tau_{(n)} = \tau_{(0)} = id_{\mathbb{Z}^{\#}}$, pues dos elementos se relacionan si y solo si son iguales. Si ambos $n = m = 0$, entonces $\gcd(0,0)$ no está definido. Pero $\tau_{(0)} \circ \tau_{(0)} = \tau_{(0)} = id_{\mathbb{Z}^\#}$. Si $n \neq 0$ y $m = 0$, entonces $\tau_{(n)} \circ \tau_{(m)} = \tau_{(n)}$, pues $\tau_{(0)} = id_{\mathbb{Z}^\#}$. Por otro lado, note que $\gcd(n,0) = n$ y $\tau_{(n)} \circ \tau_{(0)} = \tau_{(n)} = \tau_{(\gcd(n,0))}$. Ahora, suponer que n, $m \in \mathbb{Z}^*$, por la definición de composición se tiene que $a\tau_{(n)} \circ \tau_{(m)} b$ si y solo existe $c \in \mathbb{Z}^\#$ tal que $a\tau_{(m)}c$ y $c\tau_{(n)}b$, es decir que $m|c-a$ y $n|b-c$. Si $n = 1$, entonces $\tau_{(1)} = \tau_{\mathbb{Z}^\#}$, pues la diferencia de cualquier dos enteros es divisible por 1. La siguiente proposición provee la caracterización de esta composición, cuando n y m son enteros mayores que 1.

Proposición 4.2. *Si $n, m > 1$, entonces $\tau_{(n)} \circ \tau_{(m)} = \tau_{(gcd(m,n))}$.*

Demostración. ($\subseteq$) Si $a\tau_{(n)} \circ \tau_{(m)} b$, por la definición de composición, existe $c \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m|c - a$ y $n|b - c$. Si $g = gcd(m, n)$, entonces $g|c - a$ y $g|b - c$. Por lo tanto, $g|(c - a) + (b - c) = b - a$ y $a\tau_{(g)}b$.

($\supseteq$) Para la otra contenencia, suponer que $g = \gcd(m, n)$ y $a\tau_{(g)}b$. Entonces $g|a - b$ (ó $g|b - a$). Por ende, $gt = a - b$ para algún entero t. Por la Identidad de Bezout, existen enteros k_1, k_2 tales que $g = mk_1 + nk_2$. Si $n_1 = tk_1$ y $n_2 = tk_2$, entonces $a-b = gt = tmk_1+tnk_2 = mn_1+nn_2$. Considere $c = a-mn_1 = b+nn_2$. Despejando se obtiene que $a - c = mn_1$ y $c - b = nn_2$. Esto quiere decir que $m|a - c$ y $n|c - b$. Por la definición, se tiene que $c\tau_{(n)}b$ y $a\tau_{(m)}c$. Por la definición de composición, $a\tau_{(n)} \circ \tau_{(m)} b$. $\square$

Corolario 4.3. *Si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $\tau_{(n)} \circ \tau_{(m)} = \tau_{(gcd(n,m))}$.*

Demostración. Esto es consecuencia de la Proposición 4.2 y el párrafo anterior a ella. $\square$

Corolario 4.4. *Sean m, $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $n|m$, entonces*

(1) $\tau_{(m)} \subseteq \tau_{(n)}$,

(2) $\tau_{(m)} \circ \tau_{(n)} = \tau_{(n)}$, y

(3) $\tau_{(lcm(m,n))} \subseteq \tau_{(m)} \circ \tau_{(n)}$.

Demostración. (1) Si $a\tau_{(m)}b$, entonces $m|b-a$. Como $n|m$, entonces $n|b-a$ y así se obtiene que $a\tau_{(n)}b$.

(2) Observe que $\gcd(m,n) = n$, pues $n|m$. Entonces el resultado es una consecuencia de la Proposición 4.2.

(3) Como $n|m$, $\operatorname{lcm}(m,n) = m$ y $\tau_{(lcm(m,n))} = \tau_{(m)}$. Si $a\tau_{(m)}b$ y $a\tau_{(n)}a$, por la definición de composición $a\tau_{(m)} \circ \tau_{(n)}b$. Por lo tanto, $\tau_{(m)} \subseteq \tau_{(m)} \circ \tau_{(n)}$. □

A manera de ilustración, considere el caso $\tau_{(2)} \circ \tau_{(3)} = \tau_{(1)}$. Las clases de equivalencia generadas por $\tau_{(2)}$ son $[0]$ y $[1]$; y las clases de equivalencia generadas por $\tau_{(3)}$ son $[0]$, $[1]$ y $[2]$. Para todo k, $l \in \mathbb{Z}$ se tiene las siguientes combinaciones posibles parejas de enteros en $\mathbb{Z}^{\#}$ en las respectivas relaciones.

$$\begin{array}{rccl}
(3l,3) \in \tau_{(3)} & \text{y} \quad (3,2k+1) \in \tau_{(2)} & \Rightarrow & (3l,2k+1) \in \tau_{(2)} \circ \tau_{(3)} \\
(3l,6) \in \tau_{(3)} & \text{y} \quad (6,2k) \in \tau_{(2)} & \Rightarrow & (3l,2k) \in \tau_{(2)} \circ \tau_{(3)} \\
(3l+1,4) \in \tau_{(3)} & \text{y} \quad (4,2k) \in \tau_{(2)} & \Rightarrow & (3l+1,2k) \in \tau_{(2)} \circ \tau_{(3)} \\
(3l+1,7) \in \tau_{(3)} & \text{y} \quad (7,2k+1) \in \tau_{(2)} & \Rightarrow & (3l+1,2k+1) \in \tau_{(2)} \circ \tau_{(3)} \\
(3l+2,5) \in \tau_{(3)} & \text{y} \quad (5,2k+1) \in \tau_{(2)} & \Rightarrow & (3l+2,2k+1) \in \tau_{(2)} \circ \tau_{(3)} \\
(3l+2,8) \in \tau_{(3)} & \text{y} \quad (8,2k) \in \tau_{(2)} & \Rightarrow & (3l+2,2k) \in \tau_{(2)} \circ \tau_{(3)}
\end{array}$$

De este modo se corrobora que todos los enteros en $\mathbb{Z}^{\#}$ están relacionados bajo la composición $\tau_{(2)} \circ \tau_{(3)}$. Por ende $\tau_{(2)} \circ \tau_{(3)} = \mathbb{Z}^{\#} \times \mathbb{Z}^{\#}$.

4.5. La composición de $\tau_{(n)}$ con $\tau_{[]}$.

Considerar las relaciones $\tau_{(n)}$ y $\tau_{[]}$ sobre $\mathbb{Z}^{\#}$. Por la definición, se tiene que si $a\tau_{[]} \circ \tau_{(n)}b$, entonces existe $c \in \mathbb{Z}^{\#}$ tal que $a\tau_{(n)}c$ y $c\tau_{[]}b$. Es decir, existe $c \in \mathbb{Z}^{\#}$, tal que $n|c-a$ y $\gcd(c,b)=1$. Con las dos condiciones se obtiene que $\gcd(nk+a,b)=1$ para algún $k\in\mathbb{Z}$. A manera de ilustración, considere el caso en que $n=0,1,$ y 2. Cuando $n=0$, si $a\tau_{[]}\circ\tau_{(0)}b$, entonces existe un $c\in\mathbb{Z}^{\#}$ tal que $a\tau_{(0)}c$ y $c\tau_{[]}b$. Entonces $a=c$ y $\gcd(c,b)=1$. Esto implica que $a\tau_{[]}b$. En otras palabras, como $\tau_{(0)}=id_{\mathbb{Z}^{\#}}$, $\tau_{[]}\circ\tau_{(0)}=\tau_{[]}$. En el caso que $n=1$, como $\tau_{(1)}=\tau_{\mathbb{Z}^{\#}}=\mathbb{Z}^{\#}\times\mathbb{Z}^{\#}$, entonces $\tau_{(1)}=\tau_{[]}\circ\tau_{(1)}$.

Para el caso $n=2$, en la Tabla 4.5.1 se puede observar las posibilidades de elementos $a,b\in\mathbb{Z}^{\#}$, donde s,t son enteros arbitrarios y c es un entero tal que $(a,b)\in\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$.

Tabla 4.5.1: La composición $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$.

a	c	b
$2t$	No existe	$2s$
$2t$	2	$2s+1$
$2t+1$	5	$2s$
$2t+1$	p primo tal que $gcd(p,2s+1)=1$	$2s+1$

Se concluye que los únicos enteros que no están relacionados bajo la composición $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$ son los pares con los pares. Por ejemplo, $(2,2)\notin\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$, porque de lo contrario, existe un entero c tal que $2\tau_{(2)}c$ y $c\tau_{[]}2$. Como $2\tau_{(2)}c$, entonces c debe ser par. Pero $\gcd(c,2)=1$, una contradicción. Esta relación no es reflexiva, es simétrica, no es transitiva (porque $(2,5)\in\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$ y $(5,2)\in\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$, pero $(2,2)\notin\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$). De la tabla también se puede ver que $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$ es divisiva y por tanto preserva asociados. Además es una relación multiplicativa.

Note que $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$ es una relación simétrica, pero no transitiva. Por lo tanto las $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$-factorizaciones en el sentido de la Definición 2.12, no coinciden con las $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$-factorizaciones en el sentido de Anderson y Frazier. Por ejemplo, $2\cdot3\cdot2\cdot5$ es una $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$-factorización en el sentido de la Definición 2.12, pero no lo es en el sentido de Anderson y Frazier, porque $(2,2)\notin\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$.

Los $\tau_{[]}\circ\tau_{(2)}$-átomos son los primos y los enteros de la forma 2^k con $k\in\mathbb{Z}$ (bajo ambas definiciones del concepto de τ-factorización). Ahora se comprueba que $\mathbb{Z}$ es

$\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-atómico. Para ello, suponer que $c \in \mathbb{Z}^{\#}$. Si c es par, entonces $c = \pm 2^n p_2 \cdots p_k$, para $p_2, ..., p_k$ primos no asociados y distintos que ± 2 y $n \in \mathbb{Z}^+$. Como 2^{n_1} es par, está relacionado con todos los elementos en $\mathbb{Z}^{\#}$, excepto con lo pares. Note que $(2^n, p_i)$, $(p_i, 2^n)$, $(p_i, p_j) \in \tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$, para todo $i, j \in \{2, ..., k\}$. En otras palabras, $c = 2^n p_2 \cdots p_k$ es una $\tau_{[]} \circ \tau_2$-factorización en el sentido de la Definición 2.12 y de Anderson y Frazier. Note que en el caso de que c sea impar, $c = p_1 \cdots p_k$, con $p_1, ..., p_k$ primos no asociados, así que por lo anterior, $c = p_1 \cdots p_k$ es una $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-factorización en ambos sentidos. Note que si c es impar, la $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-factorización resulta ser única (en ambos sentidos). Por otro lado, si c es par con $n > 1$, entonces $2^n p_1 \cdots p_k$ es la única $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-factorización en $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-átomos, usando la definición de Anderson y Frazier. De hecho, $\mathbb{Z}$ es un $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-UFD en este sentido. Lamentablemente, si se usa la Definición 2.12, esta no es la única $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-factorización en $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-átomos. Por ejemplo, $2^{n-1} p_1 \cdot 2 \cdot p_2 \cdots p_k$ es otra $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-factorización en el sentido de la Definición 2.12. Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ no es un $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-HFD (y por ende, no es un $\tau_{[]} \circ \tau_{(2)}$-UFD) usando la Definición 2.12; pues la longitud tiene cota inferior $k+1$ y cota superior $k+n$.

4.6. La relación $|_\tau$.

Ortiz [4] desarrolló la relación (que llamó operador) $|_\tau$, que fué definida en [2] como: dada una relación simétrica τ en $D^{\#}$, $a|_\tau b$ si existe una τ-factorización $b = \lambda a b_1 \cdots b_n$ para b, donde a aparece como τ-factor. La expresión "$a|_\tau b$", se lee "a *τ-divide* a b".

Para esta sección, la definición que se usará de τ-factorización es la Definición 2.12. Por ello se necesita demostrar algunos resultados que Ortiz obtuvo en [4] con respecto a "$|_\tau$" y que se utilizan acá.

Proposición 4.5. *Si τ es una relación sobre $D^{\#}$, entonces para todo $a, a', b, b', c \in$*

$D^\#$ *se tiene que:*

(1) $a|_\tau b$ *implica que* $a|b$.

(2) $a|_\tau a$.

(3) $a|_\tau b$ *y* $b|_\tau a$ *si y solo si* $a \sim b$.

(4) Si $b \sim b'$, *entonces* $a|_\tau b$ *si y solo si* $a|_\tau b'$.

(5) Si τ *preserva asociados y* $a \sim a'$, *entonces* $a|_\tau b$ *si y solo si* $a'|_\tau b$.

(6) Entonces $\tau_1 \subseteq \tau_2$ *si y solo si cada* τ_1*-factorización es una* τ_2*-factorización. Además, esto implica que si* $a|_{\tau_1} b$, *entonces* $a|_{\tau_2} b$.

(7) Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, *todo* τ_2*-átomo es un* τ_1*-átomo y todo* τ_2*-primo es un* τ_1*-primo.*

Demostración. (1) Si $a|_\tau b$, entonces a es un τ-factor de b, por ende $a|b$.

(2) Como $a = a$, entonces $a|_\tau a$.

(3) Si $a|_\tau b$ y $b|_\tau a$, entonces por (1), $a|b$ y $b|a$. Por tanto $a \sim b$. Por otro lado, si $a \sim b$, entonces $a = \lambda b$. Por ende, $a = \lambda b$ y $b = \lambda^{-1} a$ son dos τ-factorizaciones. Por lo tanto $a|_\tau b$ y $b|_\tau a$.

(4) Si $b \sim b'$, entonces $b = \lambda_1 b'$, para $\lambda_1 \in U(D)$. Suponer que $a|_\tau b$, entonces $b = \lambda_2 a a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización de b. Entonces $b' = \lambda_1^{-1} b = \lambda_1^{-1}(\lambda_2 a a_1 \cdots a_n) = (\lambda_1^{-1}\lambda_2) a a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización de b'. Por lo tanto, $a|_\tau b'$. Por otro lado, suponer que $a|_\tau b'$, entonces $b' = \lambda_2 a a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización de b'. Por ende, $b = \lambda_1 b' = \lambda_1(\lambda_2 a a_1 \cdots a_n) = (\lambda_1\lambda_2) a a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización de b. Por lo tanto, $a|_\tau b$.

(5) Suponer que τ preserva asociados y que $a \sim a'$. Entonces $a = \lambda_1 a'$, donde $\lambda_1 \in U(D)$. Suponer que $a|_\tau b$, entonces $b = \lambda_2 a a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización de b. Por ende, $b = \lambda_2(\lambda_1 a') a_1 \cdots a_n = (\lambda_1\lambda_2) a' a_1 \cdots a_n$, es una τ-factorización, por la Proposición 2.15. Por lo tanto $a'|_\tau b$. Por otro lado, suponer que $a'|_\tau b$, entonces $b = \lambda_2 a' a_1 \cdots a_n$ es una τ-factorización de b. Por ende, $b = \lambda_2(\lambda_1^{-1} a) a_1 \cdots a_n = (\lambda_1^{-1}\lambda_2) a a_1 \cdots a_n$, es una τ-factorización, por la Proposición 2.15. Por lo tanto $a|_\tau b$.

(6) Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $a\tau_1 b$ implica que $a\tau_2 b$, para todo $a, b \in D^\#$. Por ende,

toda τ_1-factorización es una τ_2-factorización. Por otro lado, si $a\tau_1 b$, ab es una τ_1-factorización. Entonces también es una τ_2-factorización, por lo tanto $a\tau_2 b$. Además, si $a|_{\tau_1}b$, entonces $b = \lambda a a_1 \cdots a_n$ es una τ_1-factorización. Por hipótesis también es una τ_2-factorización. Por lo tanto $a|_{\tau_2}b$.

(7) Suponer que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y que a es un τ_2-átomo. Entonces las únicas τ_2-factorizaciones de a son $a = a$ y $a = \lambda\lambda^{-1}a$, para $\lambda \in U(D)$. Suponer que a no es un τ_1-átomo. Entonces tiene una τ_1-factorización (no trivial) $a = \lambda a_1 \cdots a_n$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $a = \lambda a_1 \cdots a_n$ también es una τ_2-factorización (no trivial) de a, una contradicción. Para la otra parte, suponer que a es un τ_2-primo, que no es un τ_1-primo. Entonces existe una τ_1-factorización $\lambda a_1 \cdots a_n$ talque $a|\lambda a_1 \cdots a_n$, pero $a \nmid a_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $\lambda a_1 \cdots a_n$ también es una τ_2-factorización. Esto contradice que a es un τ_2-primo. $\square$

Proposición 4.6. *Sean τ_1 y τ_2 dos relaciones sobre $D^{\#}$. Suponer que $a, b \in D^{\#}$,*

(1) Si $a|_{\tau_1}b$ y $id_{Coim(\tau_1)} \subseteq \tau_2$, entonces $a|_{\tau_1 \circ \tau_2}b$.

(2) Si τ_1 es transitiva,

(a) $\tau_1^2 \subseteq \tau_1$,

(b) las τ_1^2-factorizaciones son τ_1-factorizaciones,

(c) si $a|_{\tau_1^2}b$, entonces $a|_{\tau_1}b$, y

(d) los τ_1-primos son τ_1^2-primos.

Demostración. (1) Si $a|_{\tau_1}b$, existe una τ_1-factorización $b = \lambda a a_1 \cdots a_n$, luego $a\tau_1 a_1$ y $a_i\tau_1 a_{i+1}$, para $i \in \{1, ..., n-1\}$. Como $id_{Coim(\tau_1)} \subseteq \tau_2$, $a\tau_2 a$ y $a_i\tau_2 a_i$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Por la definición de composición, $a\tau_1 \circ \tau_2 a_1$ y $a_i\tau_1 \circ \tau_2 a_{i+1}$, para $i \in \{1, ..., n-1\}$. Por lo tanto, $b = \lambda a a_1 \cdots a_n$ también es una $\tau_1 \circ \tau_2$-factorización.

(2) Si τ_1 es transitiva, $\tau_1^2 \subseteq \tau_1$ y los demás enunciados son consecuencia de la Proposición 4.5, parte (6) y (7). $\square$

Recuerde que $|_\tau$ es una relación, luego se puede pensar en la composición $|_\tau \circ |_\tau =$

$|_\tau^2$. Esta nueva relación no es vacía puesto que $|_\tau$ es reflexiva, además se tienen las siguiente propiedades.

Proposición 4.7. *Dada una relación τ sobre $D^\#$.*

(1) Si τ es divisiva, $|_\tau = |_\tau^2$.

(2) Si τ es transitiva, $|_{\tau^2} \subseteq |_\tau^2$.

(3) Si τ es reflexiva y transitiva, $|_\tau \subseteq |_{\tau^2} \subseteq |_\tau^2$.

Demostración. (1) Como $|_\tau$ es reflexiva, $|_\tau \subseteq |_\tau^2$. Si $a|_\tau^2 b$, entonces existe un $c \in D$ tal que $a|_\tau c$ y $c|_\tau b$. Como τ es divisiva, por el Teorema 2.1 de [2], D admite τ-refinamientos. Es decir, si $c = aa_1 \cdots a_n$(como τ-factorización) y $b = cc_1 \cdots c_m$(como τ-factorización), se tiene que $b = aa_1 \cdots a_n c_1 \cdots c_m$ es una τ-factorización para b, por lo tanto $a|_\tau b$.

(2) Si $a|_{\tau^2} b$ y τ es transitiva, por la Proposición 4.6, $a|_\tau b$ y como $|_\tau$ es reflexiva, se tiene que $b|_\tau b$. Por la definición de composición, $a|_\tau^2 b$.

(3) Por (2), ya se tiene que $|_{\tau^2} \subseteq |_\tau^2$. Si $a|_\tau b$, entonces existe una τ-factorización $b = \lambda aa_1 \cdots a_n$, como τ es reflexiva $\tau \subseteq \tau^2$, entonces $b = \lambda aa_1 \cdots a_n$ es una τ^2-factorización, por lo tanto $a|_{\tau^2} b$. □

Este listado de composiciones y contenencias pueden servir de ejemplos o contraejemplos en estudios futuros relacionados con los conceptos de τ-factorizaciones y composiciones.

4.7. Caracterización de una familia de relaciones.

En las Secciones 4.1-4.6, se trabajaron varios ejemplos específicos de composiciones de relaciones y su aporte a la teoría de τ-factorizaciones. Entre ellos las siguientes dos composiciones con las relaciones "$|$" y "$\sim$" ("divide a" y "ser asociados").

Ejemplo 4.8. Sea τ una relación que preserva asociados por la izquierda (resp. divisiva por la izquierda). Si se asume que $a\tau\circ\sim b$ (resp. $a\tau\circ|b$), por la definición de composición, existe un $c \in D^{\#}$ tal que $a \sim c$ (resp. $a|c$) y $c\tau b$, como τ preserva asociados por la izquierda (resp. es divisiva por la izquierda), se tiene que $a\tau b$. Por otro lado, si $a\tau b$, como $a \sim a$ (resp. $a|a$), por la definición de composición, $a\tau\circ\sim b$ (resp. $a\tau\circ|b$). Por lo tanto $\tau\circ\sim=\tau$ (resp. $\tau\circ|=\tau$). Si τ preserva asociados por la derecha, entonces si $a\sim\circ\tau b$, por la definición de composición, existe un $c \in D^{\#}$ tal que $a\tau c$ y $c \sim b$. Como τ preserva asociados por la derecha, entonces $a\tau b$. Por otro lado, si $a\tau b$, como $\sim$ es reflexiva, $b \sim b$. Por la definición de composición, $a\sim\circ\tau b$. Por lo tanto, $\sim\circ\tau=\tau$. Observe que si τ es divisiva por la derecha y se considera $R=|$, no se cumple que τ preserva a $|$ por la derecha. Esto porque si $a\tau c$ y $c|b$, no se cumple que $a\tau c$. Por lo tanto, no se puede concluir que $|\circ\tau=\tau$, solamente que $\tau\subseteq|\circ\tau$.

Estos ejemplos no solo resultaron interesantes si no que caracterizan las relaciones divisiva por la izquierda y preservar asociados. Este patrón se puede generalizar utilizando la siguiente definición.

Definición 4.9. Dada una relación τ sobre $D^{\#}$ y una relación R sobre $D^{\#}$, se dice que τ *preserva a R por la izquierda (derecha)*, si dados $a, b, c \in D^{\#}$ tales que aRc y $c\tau b$ (resp. $a\tau c$ y cRb), entonces $a\tau b$. Se dice que τ *preserva a R*, si preserva a R por la izquierda y por la derecha.

Ejemplo 4.10. Sea τ una relación sobre $D^{\#}$. Considere el caso en que $R=\tau$. ¿Qué significa que τ preserva a τ según la definición anterior? Suponer que $a\tau c$ y $c\tau b$ implican que $a\tau b$, esto quiere decir que τ es transitiva y por lo visto en la Proposición 4.6, $\tau^2\subseteq\tau$. Este ejemplo y el Ejemplo 4.8 sugieren el siguiente resultado.

Proposición 4.11. *Sea R una relación reflexiva en $D^{\#}$. Las siguientes son equivalentes.*

(1) τ preserva a R por la izquierda (derecha).

(2) $\tau \circ R \subseteq \tau$ (resp. $R \circ \tau \subseteq \tau$).

(3) $\tau \circ R = \tau$ (resp. $R \circ \tau = \tau$).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (3). Suponer que $a\tau \circ Rb$ ($aR \circ \tau b$). Por la definición de composición, existe un $c \in D^{\#}$ tal que aRc y $c\tau b$ (resp. $a\tau c$ y cRb). Como τ preserva a R por la izquierda (resp. derecha), $a\tau b$, por lo tanto $\tau \circ R \subseteq \tau$ (resp. $R \circ \tau \subseteq \tau$). Por otro lado, si $a\tau b$, como τ es reflexiva, aRa (resp. bRb). Por la definición de composición, $a\tau \circ Rb$ (resp. $aR \circ \tau b$), por lo tanto $\tau \subseteq \tau \circ R$ ($\tau \subseteq R \circ \tau$).

(3) $\Rightarrow$ (2). Es evidente.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sean $a, b, c \in D^{\#}$ tales que aRc y $c\tau b$ (resp. $a\tau c$ y cRb). Por la definición de composición, $a\tau \circ Rb$ ($aR \circ \tau b$). Luego por hipótesis, $a\tau b$, por lo tanto τ preserva a R por la izquierda (resp. derecha). $\square$

Este concepto sigue una idea similar a la prensentada por Vargas en el Teorema 2.8 de [9]; con la diferencia que el autor usa un conjunto P y este trabajo utiliza a P como un relación sobre $D^{\#}$, la que llamamos R.

4.8. Conclusiones

Se concluye que las relaciones específicas analizadas proveen propiedades, ejemplos o contraejemplos para futuros estudios relacionados a composición de relaciones. Entre los ejemplos, se presentan algunas discrepancias entre la Definición 2.12 de τ-factorizaciones y la definida por Anderson y Frazier. Además se demostró que aunque las definiciones no necesariamente coinciden, se obtienen muchos resultados similares. Unas de las aportaciones más relevantes de este trabajo se encuentra en este capítulo; la caracterización de relaciones que preservan asociados y relaciones divisivas por la izquierda. Más aún, tal caracterización se generalizó, considerando la

Definición 4.9. Este resultado, junto al trabajo de Vargas [9], continúa aportando al conocimiento de este tipo de relaciones.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

5.1. Conclusiones

Este estudio abre el camino para analizar con detalle las $\tau_1 \circ \tau_2$-estructuras. Se observó las propiedades que se heredan entre τ_1, τ_2 y su composición $\tau_1 \circ \tau_2$. Se encontró que la composición de una relación R con una subrelación S de R presenta mejor comportamiento en heredar propiedades. Se debe indicar, que el comportamiento de la herencia entre relaciones τ_1, τ_2 y su composición $\tau_1 \circ \tau_2$ (ó $\tau_2 \circ \tau_1$), no es el mejor.

En la Sección 2.5 se definió una nueva versión del concepto de una τ-factorización (Definición 2.12). Los autores de este trabajo creen que la Definición 2.12 es más general y se debió haber considerado al inicio del estudio. Claramente, el concepto de una τ-factorización definido por Anderson y Frazier resulta ser una τ-factorización en el sentido de la Definición 2.12. El converso es falso, pero algunas propiedades obtenidas en trabajos anteriores fueron comprobadas.

Se obtuvo una caracterización de las relaciones divisivas por la izquierda y las relaciones que preservan asociados. Estas caracterizaciones se unen a las obtenidas por Vargas en [9], creando una lista de 7 posibles definiciones equivalentes de una relación que preserva asociados. La misma idea fué generalizada definiendo el concepto de preservar una relación. Aunque no se indicaron muchos ejemplos, debido a que el enfoque de este trabajo fué sobre la herencia de propiedades entre la relación composición y sus factores.

5.2. Trabajos Futuros

Se presentan a continuación algunas preguntas de investigación que surgieron como conclusión de realizar éste estudio.

5.2.1. Ejemplos de $\tau_1 \circ \tau_2$-estructuras

Recuerde que un dominio D es τ-atómico si todo elemento en $D^{\#}$ tiene una τ-factorización en τ-átomos. Considere en $\mathbb{Z}^{\#}$ las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left\{(2,3),(6,n),(4,n),(9,n):\ n \in \mathbb{Z}^{\#}\right\} \\
\tau_2 &= \{(4,4),(6,6),(9,9),(3,2)\} \\
\tau_1 \circ \tau_2 &= \left\{(6,n),(4,n),(9,n),(3,3):\ n \in \mathbb{Z}^{\#}\right\}
\end{aligned}$$

se observa que 6 no es un τ_1-átomo ni un τ_2-átomo, pero 6 si es un $\tau_1 \circ \tau_2$-átomo.

Considere en $\mathbb{Z}$ las relaciones $\tau_1 = \mathbb{Z}^{\#} \times \mathbb{Z}^{\#}$ y $\tau_2 = \{(6,6),(4,4),(9,9)\}$, entonces $\tau_1 \circ \tau_2 = \left\{(4,n),(6,n),(9,n)\ :\ n \in \mathbb{Z}^{\#}\right\}$. Se observa que $36 = 6 \cdot 6$ y ésta es una τ_2-factorización única, pero $36 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$ son dos $\tau_1 \circ \tau_2$-factorizaciones diferentes. Lo cual implica que el hecho de que $\mathbb{Z}$ sea un τ_1-UFD y un τ_2-UFD (las únicas τ_2-factorizaciones no triviales son $4^n, 6^n$ y 9^n), no implican que sea un $\tau_1 \circ \tau_2$-UFD. Esto motiva a preguntarse qué propiedades deben tener dos relaciones τ_1 y τ_2 sobre $D^{\#}$ para que: "Si D es un τ_1-UFD y τ_2-UFD, entonces D es un $\tau_1 \circ \tau_2$-UFD". De igual manera se podría obtener el diagrama de la Figura 1.3.2. Claro está que si

$\tau_1 \circ \tau_2$ es divisiva, simétrica y transitiva el diagrama se satisface, porque las $\tau_1 \circ \tau_2$-factorizaciones coinciden con el concepto de Anderson y Frazier. Por ende, si D es un UFD, entonces D es un $\tau_1 \circ \tau_2$-UFD. Pero la idea es reconocer este comportamiento sin asumir que $\tau_1 \circ \tau_2$ ser simétrica y transitiva.

5.2.2. Composición con homomorfismos

Sea τ una relación sobre $D^{\#}$ y $f : D \to D$ un homomorfismo de anillos. Analizar una composición de la forma $\tau \circ f$, fué lo que inicialmente motivó este trabajo. Al examinar muchos ejemplos se encontró que era necesario primero analizar el comportamiento de la composición en general. Se pretende a futuro realizar el estudio de la relación $\tau \circ f$ y su relación con la teoría de τ-factorizaciones.

Bibliografía

1. S. McAdam and R. G. Swan. *"Unique comaximal factorization"*. J. Algebra, 276(1): 180-192, 2004.

2. A. M. Frazier. *"Generalized factorizations in integral domains"*. Tesis de Doctorado, Universidad de Iowa, 2006.

3. S. M. Hamon. *"Some topics in τ-factorizations"*. Tesis de Doctorado, Universidad de Iowa, 2007.

4. R. M. Ortiz Albino. *"On generalized nonatomic factorizations"*,Tesis de Doctorado, Universidad de Iowa, 2008.

5. J. R. Juett. *"Some topics in abstract factorization"*. Tesis de Doctorado, Universidad de Iowa, 2013.

6. D. F. Anderson, D. D. Anderson y M. Zafrullah. *"Factorization in integral domains"*. J. Pure. Appl. Algebra, 69:1-19,1990.

7. T. W. Hungerford. *"Algebra"*. Springer, 1980.

8. D.S. Dummit and R.M. Foote. *"Abstract algebra"*. Wiley, 2003.

9. A. G. Vargas Jiménez. *"τ-Multiplicative sets"*. Tesis de Maestría, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez. 2014.

10. C. A. Serna Rapello *"Factorizaciones donde cada factor de un elemento pertenece a solo una clase de equivalencia"*. Tesis de Maestría, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez. 2014.

11. C. A. Molina Salazar. *"On the number of $\tau_{(n)}$-factors"*. Tesis de Maestría, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez. 2016.

12. R. M. Barrios Rosales. *"A type of a maximun common factor"*. Tesis de Maestría, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez. 2016.

13. D. Smith, M. Eggen, R. St. Andre. *"A transition to advanced mathemathics"*. 7th Ed. Brooks/Cole 2011