SUBESPACIOS INVARIANTES DE ALGUNOS OPERADORES

Por

Edgardo Álvarez Pardo

Tesis sometida en cumplimiento parcial
de los requisitos para el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

en

Matemática Pura

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ
2004

Aprobado por:

Héctor Salas — 18/05/04

Salas Olaguer Héctor, Ph.D.
Presidente, Comité Graduado — Fecha

Julio E. Barety — 18.V.04

Barety Julio, Ph.D.
Miembro, Comité Graduado — Fecha

K Rózga — 15/05/04

Rozga Krzysztof, Ph.D.
Miembro, Comité Graduado — Fecha

Jaime Seguel — 18/05/04

Seguel Jaime, Ph.D
Representante de Estudios Graduados — Fecha

P Vásquez — 5/18/04

Vásquez Urbano Pedro, Ph.D.
Director de Departamento — Fecha

Abstract

In the following dissertation a number of results are received and presented. First the results obtained by Aronszajn-Smith and J Wermer concerning invariant subspaces of compact operators are received. Other bounded operators with special characteristic are also presented. Metric projections on Banach spaces are defined. Then lower limit of a sequence of closed subspaces of infinite dimensional Banach space and the relation between this and invariant subspaces are defined as well lomonosov's method to obtained proper invariant subspaces common to a family of operators that commute with respect to a compact operator is presented. Finally, it is shown that if T is a invertible bounded operator on Banach space such that $\|T^n\|$, $n \in \mathbb{Z}$, does not grow too rapidly and whose spectrum contains more than one point, then T has a nontrivial invariant subspace.

Resumen

En el siguiente trabajo se hace una revisión de resultados obtenidos por N. Aronszajn y K. Smith, y J. Wermer acerca del estudio de subespacios invariantes no triviales de operadores compactos y de otros operadores acotados, no necesariamente compactos, con ciertas características particulares. Se muestra como se pueden definir las proyecciones métricas sobre espacios de Banach y el límite superior de una sucesión de subespacios cerrados de un espacio de Banach de dimensión infinita y su relación con la existencia de subespacios invariantes. También se muestra la técnica de V. Lomonosov para conseguir subespacios invariantes propios para una familia de operadores acotados que conmuta con un operador compacto sobre un espacio de Banach de dimensión infinita. Por otra parte, supóngase que T es un operador invertible y acotado sobre un espacio de Banach tal que $\|T^n\|$, $n \in \mathbb{Z}$, crece moderadamente, y cuyo espectro no se reduce a un solo punto. Entonces se prueba que T tiene un subespacio invariante no trivial.

Dedicatoria

A mis padres Edgardo (R.I.P) y Cristina, a mis hermanos Robin y Cristian, y a mi primo Andrés.

Agradecimientos

A mi consejero y amigo el Dr. Héctor Salas Olaguer por sus invaluables sugerencias en la realización de este trabajo. Además, por ese continuo apoyo desde el punto de vista académico y moral.

A los miembros del comité que leyeron versiones preliminares del presente trabajo e hicieron sugerencias valiosas.

Al departamento de matemáticas de la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez y en particular a su director el Dr. Pedro Vásquez Urbano, a quien le expreso mi mas profunda gratitud.

Finalmente, a mi novia Ruth Rojas C. y sus padres por su incondicional apoyo y excelentes consejos; a mis amigos y en especial a Luis Santiago quien siempre estuvo conmigo en los buenos y malos momentos.

Tabla de Contenido

Capítulo 1

Introducción

Sea *B* un espacio de Banach y *T* un operador lineal acotado sobre *B*. Por un subespacio invariante no trivial (o propio) de *T* entendemos un subespacio lineal cerrado *C* de *B*, con $C \neq B$ y $C \neq (0)$ tal que si $x \in C$ entonces $Tx \in C$.

En muchos casos no se sabe si un operador lineal acotado tiene subespacios invariantes. Sin embargo, cuando el operador está definido sobre un espacio de Hilbert se dan muchos resultados de gran interés. Más aun, en algunos casos se pueden describir estos subespacios, como lo hizo A. Beurling en [3] cuando trabajó con el operador isométrico M_z en el espacio de Hardy; (recuerde que *T* es isométrico si $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$). Por otra parte cuando *B* es un espacio de Hilbert y *T* es auto-adjunto ($T = T^*$) existen subespacios invariantes que reducen a *T*, esto es, existen subespacios invariantes de *T* y *T**; en este caso subespacios invariantes no triviales coinciden con subespacios espectrales. Sin embargo, cuando *T* es solamente un operador normal ($TT^* = T^*T$) existen subespacios invariantes que no reducen a *T*.

Godement [7] generalizó el resultado de A. Beurling probando la existencia de subespacios invariantes de operadores isométricos sobre espacios de Banach. Considerando que *T* es un operador lineal sobre un espacio de Banach *B* con inverso acotado y $\|T^n\|$ uniformemente acotado para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ entonces podemos darle una norma equivalente haciendo que el operador sea isométrico y en consecuencia, bajo estas hipótesis también se sigue que existen subespacios invariantes de *T*.

J. Von Neumann en los años treinta probó la existencia de subespacios invariantes de operadores compactos sobre espacios de Hilbert, aunque nunca publicó ese resultado. Posteriormente, Aronszajn demostró este mismo resultado pero cuando *B* era un espacio de Banach reflexivo.

El presente trabajo está motivado por el estudio de los subespacios invariantes de operadores compactos sobre espacios de Banach de dimensión infinita. Además consideramos este mismo problema para un operador *T* acotado con inverso acotado tal que la sucesión $\{\|T^n\|\}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ crece moderadamente.

El propósito de nuestro trabajo es dar una base sólida para un estudio mas profundo de los subespacios invariantes de operadores compactos y de operadores con otras características particulares. Lograremos esta meta esclareciendo detalles importantes omitidos en las pruebas originales de los teoremas de Aronszajn-Smith y J. Wermer.

Al hacer todos los detalles mencionados, encontramos que para una sucesión de subespacios **no necesariamente cerrados** de un espacio de Banach *B* de dimensión infinita, el límite inferior de ésta sucesión es un subesapcio cerrado de *B*. En la prueba original de este teorema se utiliza el hecho de que estos subespacios son cerrados para probar a su vez, que el límite inferior es un subespacio cerrado de *B*.

Uno de los objetivos de este trabajo es el mejor entendimiento de los teoremas de Aronszajn-Smith, V.I y J. Wermer; los cuales fueron pioneros en la teoría de los subespacios invariantes.

En el capítulo 2 se describen todos los detalles de la pueba del teorema de Aronszajn-Smith, el cual nos asegura que existe por lo menos un subespacio invariante de un operador compacto sobre un espacio de Banach de dimensión infinita. Las técnicas introducidas por estos autores son importantes en si mismas y dan ideas fundamentales para cualquier otra investigación futura sobre este tema.

En el capítulo 3 se analiza cuidadosamente la prueba del teorema de Lomonosov que nos habla de la existencia de un subespacio invariante propio para una familia de operadores que conmutan con un operador compacto diferente de cero sobre un espacio de Banach de dimensión infinita. Este resultado generaliza el teorema de Aronszajn-Smith. Al final presentamos la prueba de Hilden para este mismo problema, en la cual no se utiliza el teorema del punto fijo de Schauder.

En el capítulo 4 se dan todos los pormenores de la prueba del teorema de J. Wermer, el cual afirma la existencia de un subespacio invariante de un operador lineal sobre un espacio de Banach y en donde la sucesión $\left\{\left\|T^n\right\|\right\}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ crece moderadamente. Este resultado generaliza el dado por Godement [7].

Capítulo 2

Preliminares Generales

Este capítulo es fundamental, su meta es recordar las definiciones y teoremas básicos de los operadores compactos, del espectro de un operador y de la teoría de Fredholm-Riesz-Schauder. Las referencias bibliografiítas mas usadas son [6] y [8]. Además se muestran algunos resultados relevantes en las demostraciones de varios teoremas importantes de este trabajo.

2.1 Operadores Compactos

DEFINICIÓN 2.1.1: *Sean X e Y espacios normados. Un operador* $T : X \to Y$ *es llamado un operador compacto (u operador lineal completamente continuo) si T es lineal y si para todo subconjunto acotado M de X, la imagen* $T(M)$ *es relativamente compacta, esto es, la clausura de* $\overline{T(M)}$ *es compacta.*

A continuación presentaremos algunos resultados básicos de los operadores lineales compactos.

LEMA 2.1.1: *Sean X e Y espacios normados. Entonces:*

(a) *Todo operador lineal compacto* $T : X \to Y$ *es acotado, por lo tanto continuo.*

(b) *Si* $\dim X = \infty$, *el operador identidad* $I : X \to X$ *(el cual es continuo) no es compacto.*

TEOREMA 2.1.1: *Sean X e Y espacios normados y* $T: X \rightarrow Y$ *un operador lineal. Entonces T es compacto si y solo si aplica toda sucesión acotada* $\{x_n\}$ *en X en una sucesión* $\{Tx_n\}$ *en Y que tiene una subsucesión convergente.*

TEOREMA 2.1.2: *Sean X e Y espacios normados y* $T: X \rightarrow Y$ *un operador lineal. Entonces*

(a) *Si T es acotado y* $\dim T(X) < \infty$*, el operador T es compacto*

(b) *Si* $\dim X < \infty$*, el operador T es compacto.*

TEOREMA 2.1.3: *Sea* $\{T_n\}$ *una sucesión de operadores lineales compactos de un espacio normado X en un espacio de Banach Y. Si* $\{T_n\}$ *converge uniformemente a un operador T, esto es,* $\|T_n - T\| \rightarrow 0$*, entonces el operador límite T es compacto.*

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN: Sea A un conjunto acotado en X. Por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe un operador T_n tal que

$$\|T_n x - Tx\| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall x \in A.$$

Puesto que $\overline{T_n(A)}$ es un conjunto compacto, éste es totalmente acotado. Se sigue que existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$\inf_{1 \le i \le m} \|T_n x - T_n x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $x \in A$. Pero entonces un $\varepsilon/3$ argumento nos da que

$$\inf_{1\le i\le m}\left\|Tx-Tx_i\right\|<\varepsilon.$$

Así $T(A)$ es totalmente acotado. Puesto que Y es un espacio de Banach, se sigue que $\overline{T(A)}$ es un conjunto compacto.

TEOREMA 2.1.4: *Sea X un espacio normado lineal. Si* $S\in B(X)$, $T\in B(X)$ *y T es compacto, entonces ST y TS son compactos.*

TEOREMA 2.1.5: *Sean X e Y espacios normados y* $T:X\to Y$ *un operador lineal compacto. Supongamos que* $\{x_n\}$ *en X es débilmente convergente, digamos,* $x_n \xrightarrow{d} x$. *Entonces* $\{Tx_n\}$ *converge fuertemente en Y y tiene limite* $y=Tx_n$.

NOTA: Para el siguiente teorema recordemos que el adjunto de un operador T en un espacio de Banach se define como: $T^*(f)=f\circ T$.

TEOREMA 2.1.6: *Sea X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Un operador* T *acotado es compacto si y solo si su adjunto* T^* *es compacto.*

DEFINICIÓN 2.1.2(Subespacio Invariante): *Sea T un operador lineal acotado en un espacio de Banach X,* $T(X)\subset X$. *Un subespacio lineal V de X se dice un* ***subespacio invariante de T*** *si* $T(V)\subset V$. *V es un subespacio invariante no trivial si* $\{0\}\neq V$ *y* $V\neq X$.

TEOREMA 2.1.7: *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita y* $T:X\to X$ *operador lineal. Entonces existe un subespacio propio invariante de T.*

DEMOSTRACIÓN: Escojamos $X = \mathbb{C}^d$ y T = una matriz. Entonces, $p(z) = \det(T - zI)$ es un polinomio de grado *d*. Por lo tanto, éste tiene un cero α, esto es, $\det(T - \alpha I) = 0$ por lo que (*T*-α*I)* no es invertible. Pero en espacios de dimensión finita esto significa que (*T*-α*I*) no es uno a uno, por lo tanto $Ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$. Sea $x \in Ker(T - \alpha I)$ con $x \neq 0$. Entonces $Tx = \alpha x \in Ker(T - \alpha I)$, por lo tanto $Ker(T - \alpha I)$ es un subespacio invariante no trivial de *T*.

2.2 La Teoría De Fredholm-Riesz-Schauder

Consideraremos a *T* un operador compacto sobre un espacio de Banach *X*, y λ un escalar diferente de cero. Del teorema anterior, concluimos que T^* *es compacto. Consideraremos el operador lineal acotado* $\lambda I - T$ *y escribimos*

$$N_\lambda = \{x : \lambda x - Tx = 0\}, \qquad N_\lambda^* = \{y^* : \lambda y^* - T^* y^* = 0\},$$

$$R_\lambda = \{y : y = \lambda x - Tx, x \in X\}, \qquad R_\lambda^* = \{x^* : x^* = \lambda y^* - T^* y^*, y^* \in X^*\}.$$

Recordemos un resultado para caracterizar subespacios de dimensión finita.

LEMA 2.2.1: *Un subespacio lineal* X_0 *de X es de dimensión finita si y solo si toda sucesión acotada en* X_0 *tiene una subsucesión convergente.*

TEOREMA 2.2.1: N_λ *y* N_λ^* *son subespacios de dimensión finita de X y* X^*, *respectivamente.*

TEOREMA 2.2.2: R_λ *y* R_λ^* *son subespacios lineales cerrados de dimensión finita de* X *y* X^**, respectivamente.*

TEOREMA 2.2.3:

(a) $R_\lambda = N_\lambda^{*\perp}$*, esto es, la ecuación* $\lambda x - Tx = y$ *tiene solución si y solo si y está en el complemento ortogonal de* N_λ^**.*

(b) $R_\lambda^* = N_\lambda^\perp$*, esto es, la ecuación* $\lambda y^* - T^* y^* = x^*$ *tiene una solución si* y solo si x^* está en el complemento ortogonal de N_λ.

OBSERVACIÓN 2.2.1: *Notemos que* $N_\lambda^n \subset N_\lambda^{n+1}$.

LEMA 2.2.2: *Existe un entero positivo* k tal que $N_\lambda^n \neq N_\lambda^{n+1}$ *para todo* $n < k$ *y* $N_\lambda^n = N_\lambda^k$ *para todo* $n > k$.

TEOREMA 2.2.4: $R_\lambda = X$ *si y solo si* $N_\lambda = 0$.

TEOREMA 2.2.5: N_λ *y* N_λ^* *tienen la misma dimensión finita.*

Los teoremas anteriores constituyen la teoría de Fredholm-Riesz-Schauder. Ahora se denotarán por N_S el espacio nulo de *S* y por R_S la imagen de *S*.

TEOREMA 2.2.6: *Sea X un espacio de Banach y T un operador compacto en X. Para cualquier* $\lambda \neq 0$,

$$\dim N_{\lambda I - T} = \dim N_{\lambda I - T^*} < \infty$$

$$R_{\lambda I-T} = N^{\perp}_{\lambda I-T^*}, \qquad R_{\lambda I-T^*} = N^{\perp}_{\lambda I-T}.$$

2.3 Elementos De La Teoría Espectral

Sea *T* un operador lineal acotado en un espacio lineal normado *X*.

DEFINICIÓN 2.3.1: *El conjunto resolvente* $\rho(T)$ *de T consiste en todos los números complejos* λ *para los cuales* $(\lambda I - T)^{-1}$ *es un operador acotado (con dominio X). El espectro* $\sigma(T)$ *de T es el complemento de* $\rho(T)$ *en* $\mathbb{C}$. *Si el operador* $R(\lambda;T) = (\lambda I - T)^{-1}$ *es acotado es llamado el resolvente de T.*

Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Entonces existen tres posibilidades:

(a) *El rango de* $\lambda I - T$ *es denso en X y* $(\lambda I - T)^{-1}$ *existe pero no es acotado.* En este *caso decimos que* λ *pertenece al espectro continuo de T.*

(b) $(\lambda I - T)^{-1}$ *existe, pero su dominio no es denso en X. En este caso decimos que* λ *pertenece al espectro residual de T.*

(c) $\lambda I - T$ *no tiene inverso, esto es, existe un* $x \neq 0$ *que satisface* $\lambda x - Tx = 0$. *en este caso decimos que* λ *Pertenece al espectro puntual de T. Además decimos que* λ *es un valor propio de de T y al elemento x que satisfaga la ecuación* $\lambda x - Tx = 0$ *es llamado un vector propio de T correspondiente a* λ.

TEOREMA 2.3.1: *Sea* $T \in B(X)$, *X un espacio de Banach. Entonces* $\rho(T)$ *es un conjunto abierto y*

$$R(\mu;T)-R(\lambda;T)=(\mu-\lambda)R(\mu;T)R(\lambda;T)$$

Si $\lambda,\mu\in\rho(T)$*. Además,* $R(\lambda;T)$ *es analítica en* $\lambda\in\rho(T)$.

DEFINICIÓN 2.3.2 (Radio Espectral): *El radio espectral de un operador lineal acotado T sobre un espacio de Banach complejo es*

$$r(T)=\max\{|\lambda|:\ \lambda\in\sigma(T)\}.$$

NOTA: *Un resultado clásico, es que* el *radio espectral de T puede ser escrito como*

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}.$$

TEOREMA 2.3.2: *Sea X un espacio de Banach y sea T un operador compacto en X. Entonces la ecuación* $x-\lambda Tx=0$ *tiene soluciones no triviales solo para un conjunto contable de números complejos* λ *sin puntos de acumulación diferentes de cero.*

COROLARIO 2.3.1: *Sea T un operador lineal compacto en un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces* $\sigma(T)$ *satisface una de las siguientes tres posibilidades:*

(a) $\sigma(T)=\{0\}$

(b) $\sigma(T)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$

(c) $\sigma(T)=\{0\}\cup\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ *con* $\lim_{i\to\infty}\lambda_i=0$.

Ahora definiremos el conmutante de un operador lineal acotado sobre un espacio de Banach y probaremos un resultado relacionado con los subespacios invariantes.

DEFINICIÓN 2.3.2 (Conmutante): *Sea X un espacio de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *y T un operador lineal acotado. El espacio conmutante de T es*

$$\{T\}' = \{A \in B(X) : AT = TA\}.$$

PROPOSICIÓN 2.3.1: *Sea* $T \neq 0$ *un operador compacto en un espacio de Banach complejo B de dimensión infinita y* $r(T) > 0$. *Entonces existe un subespacio no trivial de B invariante bajo el conmutante* $\{T\}'$ *de T.*

DEMOSTRACIÓN: involucremos el corolario 2.3.1 en la prueba. Puesto que $r(T) > 0$, entonces T tiene un valor propio $\lambda \neq 0$. El espacio propio correspondiente es

$$N_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$$

y es de dimensión finita por el corolario 2.3.1; por tanto $N_\lambda \neq X$. Si $S \in \{T\}'$ y $x \in N_\lambda$, entonces

$$T(Sx) = S(Tx) = S(\lambda x) = \lambda Sx$$

por lo que $Sx \in N_\lambda$. Esto dice que $S(N_\lambda) \subset N_\lambda$. Así que N_λ satisface la conclusión de la proposición.

2.4 Aspectos generales

DEFINICIÓN 2.4.1 (norma estrictamente convexa): *Una norma* $\|\,.\,\|$ *es estrictamente convexa si:* $x \neq y$ y $\|x\| = \|y\| \neq 0$, *entonces*

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

PROPOSICIÓN 2.4.1: *A cualquier espacio de Banach separable se le puede dar una nueva norma, equivalente a la original, con respecto a la cual el espacio es estrictamente convexo (es decir, que tiene norma estrictamente convexa).*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que el teorema es cierto para el espacio de funciones continuas $C[0,1]$, donde $\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión densa de puntos en $(0,1)$; entonces, como F.J. Murray probó, la sucesión de funcionales lineales acotados $F_n(f) = f(t_n)$ forman un conjunto "Total" en el espacio dual $\overline{C[0,1]}$; esto es; el único elemento del espacio C para el cual $F_n(f) = 0$ para todo n, es $f = 0$. Ahora renormemos el espacio $C[0,1]$ con la siguiente norma:

$$\|f\|_1 = \left(\|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} |F_n(t)|^2 \right)^{1/2}.$$

Veamos que estas normas son equivalentes; en efecto, es claro que $\|f\|_1 \geq \|f\|$. por otro lado,

$$\| f\|_1 \le \left(\| f\|^2 \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^2}\right)^n \right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \| f\| \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}.$$

Lo que demuestra que $\| f\|_1 \le \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} \| f\|$, por lo tanto, se tiene que las normas son equivalentes.

Supóngase ahora que para f y g diferentes de cero, tenemos que $\| f\|_1 = \|g\|_1$ y $\| f+g\|_1 = \| f\|_1 + \|g\|_1$, entonces

$$\left(\left(\| f+g\|\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\left|F_n(f)+F_n(g)\right|^2 \right)^{1/2} = \left(\| f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\left|F_n(f)\right|^2 \right)^{1/2} + \left(\|g\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\left|F_n(g)\right|^2 \right)^{1/2}$$

Sean

$$h = (\|g\|, \frac{1}{2^n}F_1(g), \frac{1}{2^{n(2)}}F_2(g), \ldots)$$
$$l = (\| f\|, \frac{1}{2^n}F_1(f), \frac{1}{2^{n(2)}}F_2(f), \ldots)$$

luego, por lo anterior, tenemos que

$\|l+h\|_2 = \|l\|_2 + \|h\|_2$, donde $\| \ \|_2$ es la norma de l^2

lo que implica por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que $l = ch$, donde $c > 0$, de modo que

$$F_n(f) = cF_n(g)$$

por consiguiente

$$F_n(f - cg) = 0\,,$$

pero como $\{F_n\}$ es total, se tiene que $f - cg = 0$; esto es, $f = cg$. Ahora puesto que $\|f\|_1 = \|g\|_1$ entonces $c = 1$; de manera que la norma es estrictamente convexa.

Ahora sea *B* cualquier espacio de Banach separable. Banach probó que existe un subespacio cerrado del espacio $C[0,1]$ que está en correspondencia isométrica uno a uno con *B*. Entonces renormando a $C[0,1]$ como antes, estamos renormando a *B* de la manera requerida. □

DEFINICIÓN 2.4.2: *Un grupo G se dice topológico si*

(a) *G es un espacio de Hausdorff*
(b) *La aplicación*

$$\begin{aligned} &G \times G \to G \\ &(x, y) \mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

DEFINICIÓN 2.4.3: *Un espacio vectorial X sobre un campo F (*$\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) se dice* ***espacio vectorial topológico*** *si es un grupo topológico bajo adición y si la aplicación*

$$F \times X \to X$$
$$(\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

es continua.

PROPOSICIÓN 2.4.2: *Un subconjunto compacto de un espacio vectorial topológico es acotado.*

DEFINICIÓN 2.4.3: *Un espacio vectorial topológico es* ***localmente convexo*** *si posee una base para su topología de conjuntos convexos.*

NOTA: *Dado* $X^* = \{ f \ / \ f : X \to F \text{ es lineal y continua} \}$, *el espacio dual de X, se definen los abiertos en la topología débil como*

$$N(p; A, \varepsilon) = \{ q \ / \ |f(p) - f(q)| < \varepsilon, \ f \in A \subset X^*, \ A \text{ finito} \}.$$

DEFINICIÓN 2.4.4: *La "****Cápsula convexa****" de un conjunto A es definida por*

$$co(A) = \bigcap_{S \supset A} S, \quad \text{tal que } S \text{ es convexo}$$

o también como $co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : \ 0 \le a_i \le 1, \ x_i \in A \right\}.$

DEFINICIÓN 2.4.5: *Una función real f es tal que* $f(x)=O\big(g(x)\big)$ *si* $|f(x)|\leq Kg(x)$ *para algún K positivo. Una función f es tal que* $f(x)=o\big(g(x)\big)$ *si* $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

NOTA: *Se puede verificar que si* $f(x)=o\big(g(x)\big)$ *entonces* $f(x)=O\big(g(x)\big)$.

Capitulo 3

Teorema De Aronszajn-Smith

En este capítulo probaremos la existencia de un subespacio invariante propio de un operador compacto sobre un espacio de Banach. Solo consideraremos el caso cuando el espectro del operador compacto es cero, pues en otros casos el resultado se sigue de la teoría de Fredholm-Riesz-Schauder. Introducimos ideas principales tales como la de proyección métrica sobre espacios de Banach y posteriormente el límite inferior de una sucesión de subespacios de un espacio de Banach. A partir de esto logramos demostrar el teorema de Aronszajn-Smith. Al final se hace la prueba cuando el operador está definido sobre un espacio de Hilbert.

3.1 Preliminares

A continuación presentaremos algunos resultados preliminares que se usarán para la demostración del teorema de Aronszajn-Smith.

PROPOSICIÓN 3.1.1: *Sea B un espacio de Banach, T un operador compacto sobre B y* $f \neq 0$ *un vector arbitrario en B. Si* $W = gen\{T^n f : n \in \mathbb{Z}^+\}$*, el subespacio cerrado*

$$\overline{W} = \left[T^n f\right]_0^\infty$$

es un subespacio invariante bajo *T*.

DEMOSTRACIÓN: Es conocido que $T(W) \subset W$, luego por la continuidad del operador *T* y la definición de clausura

$$T\left(\overline{W}\right) \subset \overline{T(W)} \subset \overline{W}\ .$$

Por tanto $\overline{W}$ es invariante bajo *T*.

NOTA: se dice que $f \neq 0$ es cíclico para *T* cuando

$$B = \left[T^n f\right]_0^\infty . \tag{1}$$

En todo este capítulo consideraremos el caso donde *f* es cíclico para *T*.

La fórmula (1) implica las siguientes propiedades:

- *B* es separable (2)
- *Todos los elementos* $T^n f \neq 0$ *son linealmente independientes*. (3)

Probemos (2), sea

$$S = \left\{\sum_{k=0}^{k_n} c_k T^k f : c_k = p_k + q_k i;\ \ p_k, q_k \in \mathbb{Q}\right\}$$

entonces tenemos que

(a) $\overline{S} = B$, puesto que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

(b) S es contable, puesto que $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ es contable.

Por lo tanto, de las dos condiciones anteriores, obtenemos que *B* es separable.

Probemos ahora (3), Supóngase que tenemos la relación

$$\sum_{i=1}^{k} a_i T^{n_i} f = 0$$

con todos los coeficientes diferentes de cero, y $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k$. Se podría tener entonces que

$$T^{n_k} f = \left(-\frac{1}{a_k}\right)\sum_{i=1}^{k-1} a_i T^{n_i} f.$$

Por lo tanto, los $T^n f$'s estarían en el subespacio generado por los elementos con índices $n < n_k$, lo cual contradice a (a) y a la dimensión infinita de *B*.

3.2 La Proyección Métrica Sobre Espacios De Banach

Consideremos ahora un subespacio arbitrario finito-dimensional $V \subset B$. Para todo $x \in B$ podemos considerar la distancia mínima $\rho(x,V)$ de *x* a *V*. Puesto que *V* es de dimensión finita, la distancia mínima es alcanzada, y en vista de la convexidad estricta de la norma se demuestra que existe un único punto $Px \in V$ tal que:

$$\|x - Px\| = \rho(x, V) = \inf_{y \in V} \|x - y\|. \tag{4}$$

1) **EXISTENCIA**

Sea $\delta = \inf_{y \in V} \|x - y\|$ entonces $\delta > 0$ puesto que V es cerrado. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{y_n\}$ en V tal que $\delta \leq \|x - y_n\| < \delta + 1/n$, entonces:

$$\begin{aligned} \|y_n\| &\leq \|x - y_n\| + \|x\| \\ &< \delta + 1/n + \|x\| < M \end{aligned}$$

pero al ser V de dimensión finita, entonces es relativamente compacto y por tanto existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ en V y $y \in V$ tal que $y_{n_k} \to y \in V$, de manera que

$$\left(y_{n_k} - x\right) \to (y - x)$$

por lo tanto,

$$\left\|y_{n_k} - x\right\| \to \|y - x\|$$

por tanto tenemos que $\|x - y\| = \delta$.

2) **UNICIDAD**

Suponga que existen $y_{1,} y_2 \in V$ tales que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \delta$, entonces, por la convexidad de la norma:

$$\begin{aligned}\delta &\le \left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\| = \left\| \frac{x - y_1}{2} + \frac{x - y_2}{2} \right\| \\ &< \frac{1}{2}\|x - y_1\| + \frac{1}{2}\|x - y_2\| \\ &= \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta\end{aligned}$$

por lo tanto, $y_1 = y_2$ y en consecuencia y es único.

Podemos denotar $y = Px$, donde $x \in B$, $y \in V$ y P representa un operador en *B,* no necesariamente lineal. Llamaremos a P la proyección métrica sobre V, o simplemente la proyección sobre V.

3.2.1 Propiedades De La Proyección Métrica

(a-1) P *es idempotente:* $P^2 = P$

En efecto, nótese que para $y \in V$, $Py = y$, luego tenemos que:

$$P^2 x = P(Px) = Px \qquad \text{para todo } x \in B$$

por tanto $P^2 = P$.

(a-2) P *es homogéneo:* $P(\alpha x) = \alpha P(x)$ *para todo* α.

En efecto,

$$\begin{aligned}\|\alpha x - \alpha Px\| &= |\alpha| \|x - Px\| \\ &= |\alpha| \delta\end{aligned}$$

pero por definición,

$$\begin{aligned}\|\alpha x - P(\alpha x)\| = \rho(\alpha x, V) = \inf_{y\in V}\|\alpha x - y\| \\ = \inf_{y\in V}\left\|\alpha x - \frac{\alpha y}{\alpha}\right\| = \inf_{y\in V}|\alpha|\left\|x - \frac{y}{\alpha}\right\| \quad , \\ = |\alpha|\inf_{z\in V}\|x - z\| = |\alpha|\,\rho(x,V) = |\alpha|\,\delta\end{aligned}$$

luego por la unicidad se tiene que $P(\alpha x) = \alpha P(x)$ para todo α .

(a-3) P *es casi-aditivo:* $P(x+y) = P(x) + y$ *para todo* $y \in V$.

En efecto, sea $y \in V$; entonces $Py = y$. Por otro lado, se tiene que

$$\|y + x - (y + Px)\| = \|x - Px\| = \inf_{z\in V}\|x - z\| = \inf_{z\in V}\|x + (y - z)\| = \inf_{z\in V}\|(y + x) - z\| = \|y + x - P(y + x)\|$$

luego por la unicidad, $P(x+y) = P(x) + y$ para todo $y \in V$

(a-4) $\|Px - x\| \le \|x\|$ *y* $\|Px\| \le 2\|x\|$.

En efecto

$$\|x - Px\| = \inf_{y\in V}\|x - y\|$$

de modo, que al ser V un subespacio, entonces $0 \in V$; por lo tanto $\|Px - x\| \le \|x\|$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|Px\| &\leq \|Px - x\| + \|x\| \\ &\leq \|x\| + \|x\| \\ &= 2\|x\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|Px\| \leq 2\|x\|$.

(a-5) $\big|\|x - Px\| - \|y - Py\|\big| \leq \|x - y\|$

En efecto, tenemos que: $\|x - Px\| = \inf_{z \in V} \|x - z\| \leq \|x - Py\|$, luego

$$\begin{aligned}\|x - Px\| &\leq \|x - Py\| \\ &\leq \|x - y + y - Py\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - Py\|\end{aligned}$$

luego $\|x - Px\| - \|y - Py\| \leq \|x - y\|$. Utilizando el mismo razonamiento probamos que

$$-\|x - y\| \leq \|x - Px\| - \|y - Py\|$$

por tanto $\big|\|x - Px\| - \|y - Py\|\big| \leq \|x - y\|$.

(a-6) Si $V' \subset V$ y P' es la proyección sobre V', entonces $\|x - Px\| \leq \|x - P'x\|$

En efecto, nótese que $P'x \in V' \subset V$, por consiguiente

$$\|x - Px\| = \inf_{y \in V} \|x - y\| \leq \|x - P'x\|$$

por lo tanto

$$\|x - Px\| \leq \|x - P'x\|.$$

NOTA: (a-5) es la propiedad general de distancia mínima $\rho(x, M)$ de x a un conjunto fijo *M*.

3.3 Límite Inferior

Consideremos ahora una sucesión de subespacios cerrados $V_k \subset B$. Introduzcamos el límite inferior de la sucesión V_k como sigue:

$$\liminf V_k = \left\{ x \in B : \left(\forall n \in \mathbb{N} \right) \exists x_k \in V_k,\ x_k \to x \right\}. \qquad (5)$$

NOTA: El $\liminf V_k$ también se puede definir como: $\left\{ x \in B : \quad d\left(x, V_k\right) \to 0,\ k \to \infty \right\}$.

3.3.1 Propiedades Del Límite Inferior

(b-1) $\liminf V_k$ *es un subespacio cerrado*.

Veamos que es un subespacio: sean $x, y \in \liminf V_k$, entonces existen $x_k, y_k \in V_k$ tales que

$$x_k \to x \quad \text{y} \quad y_k \to y$$

Por tanto, al ser V_k un subespacio, entonces $(x_k + y_k) \in V_k$; además

$$\left(x_k + y_k\right) \to \left(x + y\right)$$

así tenemos que $(x+y) \in \liminf V_k$. Sea c un elemento en el campo de escalares y $x \in \liminf V_k$, entonces $x_k \to x$, y como $cx_k \in V_k$ ya que V_k un subespacio, luego $cx_k \to cx$, por lo tanto $cx \in \liminf V_k$. En resumen, hemos probado que $\liminf V_k$ es un subespacio.

Veamos que es cerrado: sea $x \in \overline{\liminf V_k}$, entonces existe una sucesión $\left\{x^n\right\}$ en $\liminf V_k$, tal que $\lim_{n \to \infty} x^n = x$. Debemos probar que existe una sucesión $\left\{y_k\right\}$ con $y_k \in V_k$ tal que $\lim_{k \to \infty} y_k = x$. Escojamos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tales que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots$ y $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$. Como $x^n \in \liminf V_k$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces existe $x_k^n \in V_k$ tal que $x^n = \lim_{k \to \infty} x_k^n$, esto es

existe $m_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\left\| x_k^1 - x^1 \right\| < \varepsilon_1$ si $k \geq m_1$

existe $m_2 \in \mathbb{Z}^+$, $m_2 \geq m_1$ tal que $\left\| x_k^2 - x^2 \right\| < \varepsilon_2$ si $k \geq m_2$

$\vdots$

existe $m_j \in \mathbb{Z}^+$, $m_j \geq m_{j-1}$ tal que $\left\| x_k^j - x^j \right\| < \varepsilon_j$ si $k \geq m_j$.

Definamos ahora el y_k como sigue

$$y_k = \begin{cases} x_k^1 & si \;\; k < m_2 \\ x_k^2 & si \;\; m_2 \leq k < m_3 \\ \vdots & \\ x_k^j & si \;\; m_j \leq k < m_{j+1} \end{cases}$$

Probemos que $\lim_{k\to\infty} y_k = x$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea l_ε tal que $j \geq l_\varepsilon$ implica $\left\| x^j - x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y j_ε tal que $j \geq j_\varepsilon$ implica $\varepsilon_j < \frac{\varepsilon}{2}$; entonces escogemos $m* = \max\left(l_\varepsilon, j_\varepsilon, m_{j_\varepsilon}\right)$ de modo que al ser $k \geq m*$ tenemos que $m_{j_\varepsilon} \leq m_j \leq k \leq m_{j+1}$, luego $y_k = x_k^j$ y así

$$\begin{aligned} \left\| y_k - x \right\| &\leq \left\| y_k - x^j \right\| + \left\| x^j - x \right\| \\ &= \left\| x_k^j - x^j \right\| + \left\| x^j - x \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{j} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

por tanto $y_k \to x$ con $y_k \in V_k$. En consecuencia $x \in \liminf V_k$.

NOTA: *Notemos que en la demostración no hemos usado el hecho de que los V_k son cerrados.*

(b-2) *Si todo V_k es finito dimensional, entonces $x \in \liminf V_k$ si y solo si $P_k x \to x$, donde P_k es la proyección sobre V_k.*

En efecto, supongamos que $x \in \liminf V_k$, entonces existe $x_k \in V_k$ tal que $x_k \to x$; luego

$$\left\| P_k x - x \right\| \leq \left\| x_k - x \right\| \to 0$$

por lo tanto tenemos que $P_k x \to x$.

Recíprocamente, si $P_k x \to x$, entonces tomamos $x_k = P_k x$, de modo que por la hipótesis, $x_k \to x$ y por lo tanto $x \in \liminf V_k$.

NOTA: Se puede probar que si $\sup\{\dim V_k : k \in \mathbb{N}\} = M < \infty$ entonces se tiene que $\dim(\liminf V_k) \leq M$.

3.4 Demostración Del Teorema De Aronszajn-Smith

TEOREMA 3.4.1 (ARONSZAJN-SMITH): *Sea B un espacio de Banach de dimensión infinita y* $T : B \to B$ *un operador compacto. Entonces existe un subespacio invariante no trivial de T.*

En el cuerpo de la demostración estaremos presentando varios lemas importantes que se usarán para alcanzar nuestro objetivo.

DEMOSTRACIÓN. Con f que satisface (1) Construyamos el subespacio de dimensión k

$$V^{(k)} = \left[T^n f\right]_0^{k-1}. \tag{6}$$

Denotemos por $P^{(k)}$ la proyección métrica sobre $V^{(k)}$. Por (1) tenemos que

$$\liminf V^{(k)} = B.$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\liminf V^{(k)} &= \liminf \left[T^n f\right]_0^{k-1} \\
&= \left\{x \in B : \exists x_k \in \left[T^n f\right]_0^{k-1}, x_k \to x\right\} \\
&= \left\{x \in B : \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,k} T^i f = x\right\} \\
&= \left[T^n f\right]_0^{\infty} \\
&= B.
\end{aligned}
$$

Ahora, por lo anterior y (b-2) se tiene lo siguiente

$$P^{(k)}x \to x \quad \text{para todo } x \in \liminf V^{(k)} = B. \tag{7}$$

Consideremos entonces el operador T_k en $V^{(k)}$ definido por:

$$T_k x = P^{(k)}Tx \qquad \text{para} \qquad x \in V^{(k)}. \tag{8}$$

AFIRMACIÓN: T_k es lineal.

Observemos primero que si $x = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^i f \in V^{(k)}$, entonces por (a-2) y (a-3) tenemos

$$
\begin{aligned}
T_k x &= P^{(k)}Tx \\
&= P^{(k)}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T^{i+1} f\right) \\
&= P^{(k)}\left(\sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i T^{i+1} f + \alpha_{k-1} T^k f\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i T^{i+1} f + \alpha_{k-1} P^{(k)} T^k f
\end{aligned}
$$

Sean entonces $x=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i T^i f$ e $y=\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i T^i f$; c,b en el campo de escalares. Luego

$$\begin{aligned}
T_k(cx+by) &= T_k\Big(\sum_{i=0}^{k-1}(c\alpha_i+b\beta_i)T^i f\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{k-2}(c\alpha_i+b\beta_i)T^{i+1}f+(c\alpha_{k-1}+b\beta_{k-1})P^{(k)}T^k f)\\
&= c\left[\sum_{i=0}^{k-2}\alpha_i T^{i+1}f+\alpha_{k-1}P^{(k)}T^k f)\right]+b\left[\sum_{i=0}^{k-2}\beta_i T^{i+1}f+\beta_{k-1}P^{(k)}T^k f)\right]\\
&= cT_k x+bT_k y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T_k es lineal.

Siendo T_k un operador lineal del espacio $V^{(k)}$ de dimensión *k* en si mismo, podemos usar el resultado clásico de representar el operador por una matriz triangular, esto da la existencia de una sucesión creciente de subespacios:

$$(0)=V^{(k,0)}\subset V^{(k,1)}\subset\cdots\subset V^{(k,k)}=V^{(k)} \tag{9}$$

donde $V^{(k,i)}$ es un subespacio invariante de T_k de dimensión *i*.

Denotemos por $P^{(k,i)}$ la proyección sobre $V^{(k,i)}$.

Antes de seguir con la prueba del teorema presentaremos algunos resultados que nos ayudarán a conseguir nuestro objetivo. El siguiente lema nos dará la base para encontrar el subespacio invariante de *T*.

LEMA 3.4.1: *Sean* $\{k_m\},\{i_m\}$ *sucesiones de enteros tales que* $k_m\nearrow\infty$ *y* $0\le i_m\le k_m$. *Además, sea* $x_m\in V^{(k_m,i_m)}$. *Si* $Tx_m\to y$, *entonces tenemos que:*

$$y \in \liminf V^{(k_m, i_m)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Nótese que $P^{(k_m)}Tx_m = T_{k_m} x_m \in V^{(k_m, i_m)}$. Por otro lado, tenemos de (a-5), que para todo $y \in B$,

$$\left\| Tx_m - P^{(k_m)}Tx_m \right\| - \left\| y - P^{(k_m)} y \right\| \leq \left\| Tx_m - y \right\|$$

y, por tanto,

$$\left\| Tx_m - P^{(k_m)}Tx_m \right\| \leq \left\| Tx_m - y \right\| + \left\| y - P^{(k_m)} y \right\|.$$

Pero $y \in \liminf V^{(k)} = B$, de modo que $P^{(k_m)} y \to y$. De la hipótesis, obtenemos que

$$\left\| Tx_m - P^{(k_m)}Tx_m \right\| \to 0.$$

Por lo tanto

$$\left\| y - P^{(k_m)}Tx_m \right\| \leq \left\| y - Tx_m \right\| + \left\| Tx_m - P^{(k_m)}Tx_m \right\| \to 0$$

en consecuencia $P^{(k_m)}Tx_m \to y$. Puesto que $P^{k_m}Tx_m = T_{k_m} x_m \in V^{(k_m, i_m)}$, entonces concluimos que $y \in \liminf V^{(k_m, i_m)}$.

El próximo corolario es fundamental, nos garantiza la existencia del subespacio invariante

COROLARIO 3.4.1: *Para cualesquiera sucesiones* $\{k_m\},\{i_m\}$ *que satisfacen las condiciones del lema 3.4.1,* $\liminf V^{(k_m,i_m)}$ *es un subespacio invariante bajo T.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si $x \in \liminf V^{(k_m,i_m)}$, entonces existe $x_m \in V^{(k_m,i_m)}$ tal que $x_m \to x$, luego por la continuidad de *T*, tenemos que $Tx_m \to Tx$ de modo que por el lema 3.4.1

$$Tx \in \liminf V^{(k_m,i_m)}$$

por lo tanto $T(\liminf V^{(k_m,i_m)}) \subset \liminf V^{(k_m,i_m)}$.

Para la demostración del próximo corolario necesitaremos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.4.1: *Sea* $\overline{\{y_n\}}$ *un conjunto compacto de un espacio de Banach tal que si* $\{y_{n_k}\}$ *converge, lo hace a cero; entonces* $\lim y_n = 0$.

A partir de este momento buscaremos herramientas para probar que el subespacio invariante visto en el corolario 3.4.1 es no trivial.

Para la demostración del siguiente corolario es vital la compacidad del operador *T*.

COROLARIO 3.4.2: *Si* $\liminf$ *de toda subsucesión de* $\{V^{(k_m,i_m)}\}$ *es* (0), *entonces para cualquier sucesión acotada* $\{x_m\}$, *con* $x_m \in V^{(k_m,i_m)}$ *, se cumple que* $Tx_m \to 0$.

DEMOSTRACIÓN: Por la compacidad de *T*, la sucesión acotada $\{x_m\}$ es transformada en una sucesión relativamente compacta $\{Tx_m\}$. Por lo tanto, la clausura de $\{Tx_m\}$ es compacta, de modo que tiene una subsucesión convergente. Sea $\{Tx_{m_j}\}$ tal sucesión, entonces se tiene que $Tx_{m_j} \to y$. Veamos que $y = 0$. En efecto, por el lema 3.4.1, tenemos que $y \in \liminf V^{(k_m, i_m)} = (0)$; de donde $y = 0$. Así $Tx_{m_j} \to 0$, por tanto $Tx_m \to 0$.

Ahora se mostrarán desigualdades que serán útiles en la prueba de la no trivialidad del subespacio invariante.

Escojamos ahora un real arbitrario α con

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{y} \quad \|Tf\| > \alpha \|T\| \|f\|. \tag{10}$$

Notemos que $f \in V^{(k)}$ puesto que $f = T^0 f$; entonces por (9) y (a-6)

$$\|f\| = \|f - P^{(k,0)} f\| \geq \|f - P^{(k,1)} f\| \geq \ldots \geq \|f - P^{(k,k)} f\| = 0$$

luego por estas desigualdades, existe para cada $k = 1, 2, \ldots$ un único índice $i(k)$, con $0 \leq i(k) \leq k$, tal que

$$\|f - P^{(k,i(k))} f\| \geq \alpha \|f\| > \|f - P^{(k,i(k)+1)} f\|. \tag{11}$$

Afirmamos que existe u_k con $k = 1, 2, \ldots$ un elemento de $V^{(k,i(k)+1)}$ tal que

$$\|u_k\| = 1 \qquad \text{y} \qquad P^{(k,i(k)+1)} u_k = 0. \tag{12}$$

En efecto, sea $v \neq 0$ un elemento arbitrario con $v \in (V^{(k,i(k)+1)} - V^{(k,i(k))})$ y designemos

$$u_k = \|v - P^{(k,i(k))} v\|^{-1} (v - P^{(k,i(k))} v)$$

entonces, es claro que $\|u_k\| = 1$; además:

$$\begin{aligned} P^{(k,i(k))}u_k &= P^{(k,i(k))}(\left\|v - P^{(k,i(k))}v\right\|^{-1} P^{(k,i(k))}(v - P^{(k,i(k))}v)) \\ &= \left\|v - P^{(k,i(k))}v\right\|^{-1} P^{(k,i(k))}(v - P^{(k,i(k))}v) \qquad \text{Por (a-2)} \\ &= \left\|v - P^{(k,i(k))}v\right\|^{-1} \left[P^{(k,i(k))}v - P^{(k,i(k))}v\right] \qquad \text{Por (a-3)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que las dimensiones de $V^{(k,i(k)+1)}$ y $V^{(k,i(k))}$ difieren por uno, todo elemento $y \in V^{(k,i(k)+1)}$ se puede representar de manera única en la forma:

$$y = x + \beta u_k \qquad \text{con} \qquad x = P^{(k,i(k))}y\,,$$

en efecto, sea $t = \left\|v - P^{(k,i(k))}v\right\|^{-1}$, entonces $u_k = t(v - P^{(k,i(k))}v)$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}u_k &= (v - P^{(k,i(k))}v) \\ v &= \frac{1}{t}u_k + P^{(k,i(k))}v. \end{aligned}$$

Así tenemos que $V^{(k,i(k)+1)}$ es generado por $V^{(k,i(k))}$ y u_k.

Escribamos las siguientes igualdades

$$P^{(k,i(k)+1)}f = x_k + \beta_k u_k \qquad \text{y} \qquad P^{(k,i(k)+1)}Tf = x'_k + \beta'_k u_k \tag{13}$$

con $x_k, x'_k \in V^{(k,i(k))}$.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} P^{(k,i(k))}\left[P^{(k,i(k)+1)}f\right] &= P^{(k,i(k))}\left(x_k+\beta_k u_k\right) \\ &= x_k+\beta_k P^{(k,i(k))}u_k \\ &= x_k \end{aligned}$$

Luego por (a-4),

$$\begin{aligned} \|x_k\| &= \left\|P^{(k,i(k))}\left(P^{(k,i(k)+1)}f\right)\right\| \\ &\leq 2\left\|P^{(k,i(k)+1)}f\right\| \\ &\leq 4\|f\|. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $\|x_k'\| \leq 4\|Tf\|$. En consecuencia, hemos probado que:

$$\begin{aligned} \|x_k\| &\leq 4\|f\| \\ \|x_k'\| &\leq 4\|Tf\| \end{aligned} \tag{14}$$

Hemos llegado a la parte final de la prueba del teorema.

3.4.1 Construcción De Subespacios Invariantes No Triviales

En esta sección construiremos subespacios invariantes no triviales para *T*. Consideremos $i(k)$ como antes. Probemos ahora las siguientes afirmaciones:

1) *Para toda sucesión* $k_m \nearrow \infty$, $\liminf V^{(k_m,i(k_m))} \neq B$

2) *Para alguna sucesión* $k'_m \nearrow \infty$, $\liminf V^{(k'_m,i(k'_m)+1))} \neq (0)$

3) *Si para toda sucesión* $k_m \nearrow \infty$, $\liminf V^{(k_m,i(k_m))} = (0)$, *entonces para toda sucesión* $k'_m \nearrow \infty$, $\liminf V^{(k'_m,i(k'_m)+1))} \neq B$.

DEMOSTRACIÓN:

1) Si $\liminf V^{(k_m,i(k_m))} = B$, entonces por (b-2) $P^{(k_m,i(k_m))} f \to f$, luego

$$\left\| f - P^{(k_m,i(k_m))} f \right\| \to 0$$

lo cual contradice (11), pues tendríamos $\alpha \|f\| = 0$, que es imposible ya que $0 < \alpha < 1$ y $f \neq 0$. Por lo tanto $\liminf V^{(k_m,i(k_m))} \neq B$.

2) Si para toda $k'_m \nearrow \infty$, $\liminf V^{(k'_m,i(k'_m)+1))} = (0)$, entonces el $\liminf$ de toda subsucesión de $\left\{V^{(k'_m,i(k'_m)+1))}\right\}$ es (0), y por corolario 3.4.2, la sucesión $\left\{P^{(k,i(k)+1)} f\right\}$ acotada (nótese que por (a-4) $\left\|P^{(k,i(k)+1)} f\right\| \leq 2\|f\| < \infty$) es transformada en una sucesión $\left\{TP^{(k,i(k)+1)} f\right\}$ tal que $TP^{(k,i(k)+1)} f \to 0$. Puesto que

$$Tf = T(f - P^{(k,i(k)+1)} f) - TP^{(k,i(k)+1)} f$$

tomando límite en ambos lados de la igualdad, tenemos

$$Tf = \lim T(f - P^{(k,i(k)+1)} f)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \|Tf\| &= \lim \|T(f - P^{(k,i(k)+1)} f)\| \\ &\leq \liminf \|T\| \|f - P^{(k,i(k)+1)} f\| \\ &\leq \alpha \|T\| \|f\| \end{aligned}$$

en consecuencia, $\|Tf\| \leq \alpha \|T\| \|f\|$, y esto es una contradicción con (10).

3) Supongamos que para alguna $k'_m \nearrow \infty$, $\liminf V^{(k'_m, i(k'_m)+1))} = B$, entonces por (b-2) tenemos

$$P^{(k'_m, i(k'_m)+1))} f \to f \qquad \text{y} \qquad P^{(k'_m, i(k'_m)+1))} Tf \to Tf\,.$$

Por (13) podemos escribir

$$f = \lim(x_{k'_m} + \beta_{k'_m} u_{k'_m}) \qquad \text{y} \qquad Tf = \lim(x'_{k'_m} + \beta'_{k'_m} u_{k'_m})$$

luego, aplicando T en cada una de las ecuaciones anteriores, resulta que:

$$Tf = \lim(Tx_{k'_m} + \beta_{k'_m} Tu_{k'_m}) \qquad \text{y} \qquad T^2 f = \lim(Tx'_{k'_m} + \beta'_{k'_m} Tu_{k'_m})$$

notemos además que $\{x_{k'_m}\}$ es acotada por (14); luego se sigue de la hipótesis y el corolario 3.4.2 que $Tx_{k'_m} \to 0$; similarmente $Tx'_{k'_m} \to 0$, de modo que

$$Tf = \lim \beta_{k'_m} Tu_{k'_m} \qquad \text{y} \qquad T^2 f = \lim \beta'_{k'_m} Tu_{k'_m}$$

por lo tanto $\dfrac{\beta'_{k'_m}}{\beta_{k'_m}}$ converge a algún γ, y además $T^2 f = \gamma Tf$; pero contradice (3). En consecuencia $\liminf V^{(k'_m, i(k'_m)+1))} \neq B$.

Veamos ahora la **conclusión** de la prueba del teorema.

Si existe alguna sucesión $k_m \nearrow \infty$ tal que $G = \liminf V^{(k_m, i(k_m))} \neq (0)$, entonces en vista de la afirmación **1)** y corolario 2.4.1, *G* es un subespacio propio invariante. Si no existe tal sucesión $\{k_m\}$, entonces por la afirmación **2)** escogemos una sucesión $k'_m \nearrow \infty$ tal que $G' = \liminf V^{(k'_m, i(k'_m)+1)} \neq (0)$. Por **3)** y corolario 3.4.1, G' es entonces un subespacio propio invariante de *T*.

3.5 Prueba En Espacios De Hilbert

En la prueba usaremos convergencia débil y fuerte de elementos y operadores en *B*, que se denotarán con los símbolos $\xrightarrow{d}$, y $\rightarrow$ respectivamente. Los hechos se simplifican en este caso, pues las proyecciones métricas coinciden con las proyecciones ortogonales y por lo tanto son lineales. Los $V^{(k)}$ pueden ser ahora cualquier sucesión creciente de subespacios cuya unión es densa en *B*; f puede ser cualquier elemento diferente de cero y perteneciente a $V^{(1)}$. El operador T_k es ahora la restricción de $P^{(k)} T P^{(k)}$ a $V^{(k)}$. Los subespacios $V^{(k,i)}$ son definidos como antes.

PROPOSICIÓN 3.5.1: $P^{(k,i)} T P^{(k,i)} = P^{(k)} T P^{(k,i)}$ y $P^{(k)} \rightarrow I$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que

$$V^{(k,i)} \subset V^{(k,k)} = V^{(k)} \text{ para todo } i = 0,1,\ldots,k.$$

Por lo tanto $P^{(k,i)}\left[TP^{(k,i)}\right] = P^{(k)}\left[TP^{(k,i)}\right]$.

Veamos ahora que $P^{(k)} \to I$. Como $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} V^{(k)}} = B$, entonces dado $g \in B$, existe $h \in V^{(k)}$ tal que: para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\|g-h\| < \varepsilon$.

por otro lado, como $h \in V^{(k)}$ entonces $P^{(k)}h = h$; además puesto que $g \in B$ se sigue de la definición de proyección que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \left\|P^{(k)}g - g\right\| \leq \|g-h\| < \varepsilon .$$

Por tanto $P^{(k)} \to I$.

El lema 3.4.1 puede ser reemplazado por:

LEMA 3.5.1: *Si* $P^{(k_m,i_m)} \xrightarrow{d} Q$, *entonces* $QTQ = TQ$.

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis $P^{(k_m,i_m)} \xrightarrow{d} Q$, luego al ser T compacto, tenemos que

$$TP^{(k_m,i_m)} \to TQ .$$

Por otro lado, $P^{(k_m,i_m)}$ es acotado y $V^{(k_m,i_m)}$ es de dimensión finita, de modo que la proyección $P^{(k_m,i_m)}$ es un operador compacto, por lo tanto $P^{(k_m,i_m)}T \to QT$, en consecuencia

$$\begin{aligned} P^{(k_m,i_m)}TP^{(k_m,i_m)} &\to QTP^{(k_m,i_m)} \\ &\to QTQ \end{aligned} \tag{1*}$$

pero $P^{(k)} \to I$, así que

$$\begin{aligned} P^{(k)}TP^{(k_m,i_m)} &\to TP^{(k_m,i_m)} \\ &\to TQ \end{aligned} \tag{2*}$$

por lo tanto, del lema anterior y de (1*) y (2*) tenemos que $QTQ = TQ$.

COROLARIO 3.5.1: $T(Q(B)) \subset G$, *donde G es el subespacio cerrado* $G = \{\, x : Qx = x \,\}$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que G es un subespacio por la linealidad de Q. G es cerrado puesto que es la imagen inversa del operador continuo Q. Veamos ahora que $T(Q(B)) \subset G$. En efecto, sea $z \in T(Q(B))$, entonces existe $x \in B$ tal que

$$\begin{aligned} z &= (TQ)(x) \\ Qz &= (QTQ)(x) \\ &= TQx \\ &= z \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos $T(Q(B)) \subset G$. Más aun, como $G \subset Q(B)$, entonces $T(G) \subset G$; y en consecuencia, existe un subespacio invariante propio G excepto cuando $Q = 0$, $Q = I$, o $Q \neq 0$ y $Q \neq I$ y T se anula sobre el rango de Q. En efecto,

1) Si $Q = I$, entonces

$$Qx = x, \quad \forall x \in B.$$

Por tanto $G = B$

2) Si $Q = (0)$, entonces $G = (0)$.

3) Si $Q \neq I$ y $Q \neq 0$ y T se anula sobre el rango de Q, entonces $T = 0$, lo que es una contradicción.

En el caso anterior todo subespacio unidimensional de $Q(B)$ es claramente un subespacio invariante.

La prueba se continúa definiendo $i(k)$ como en (11); el número α no necesita restringirse a la segunda parte de (10). Escogemos una subsucesión $\{k_m\}$ tal que para Q y Q' tenemos $P^{(k_m, i(k_m))} \xrightarrow{d} Q$, $P^{(k_m, i(k_m)+1)} \to Q'$. En vista del corolario 3.5.1, solo resta investigar cuando $Q = 0 = Q'$ o cuando $Q = I = Q'$. Aquí usaremos un lema general:

LEMA 3.5.2: *Si las proyecciones convergen débilmente a otra proyección, entonces esta convergencia es fuerte.*

Probemos las siguientes afirmaciones:

1) $Q \neq I$
2) $Q' \neq 0$
3) *Si* $Q = 0$, *entonces* $Q' = I$

DEMOSTRACIÓN:

1) Si $Q = I$, entonces $P^{(k_m, i(k_m))} \xrightarrow{d} I$, y luego por el lema 3.5.1 $P^{(k_m, i(k_m))} \to I$, de modo que $P^{(k_m, i(k_m))} f \longrightarrow f$, lo que contradice (11). Por lo tanto $Q \neq I$.

2) Si $Q' = 0$, entonces $P^{(k_m, i(k_m))} \xrightarrow{d} 0$, así tenemos que:

$$\left\langle P^{(k_m, i(k_m)+1)} x, y \right\rangle = \left\langle 0, y \right\rangle = 0, \quad \forall y \in B.$$

Por tanto $P^{(k_m, i(k_m)+1)} = 0$, lo que es una contradicción. Luego $Q' \neq 0$.
Para probar 3), veamos a continuación el siguiente lema.

LEMA 3.5.3: *Proyecciones sobre espacios unidimensionales no pueden converger fuertemente a la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos lo contrario, es decir $\left\| P^{(k)} x - x \right\| \to 0, \quad \forall x \in V^{(k)}$.

Sean $e, f \in V^{(k)}$ tales que $e \perp f$, $\|e\| = \| f \| = 1$, entonces $P^{(k)} e, P^{(k)} f \in V^{(k)}$, de modo que si $\{e_k\}$ Es una base para $V^{(k)}$, se tiene que:

$$P^{(k)} e = \left\langle e, e_k \right\rangle e_k$$
$$P^{(k)} f = \left\langle f, e_k \right\rangle e_k.$$

Además por la suposición, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos $\left\| P^{(k)} e - e \right\| < \varepsilon$, y $\left\| P^{(k)} f - f \right\| < \varepsilon$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|P^{(k)}e-e\right\|^2 &= \left\|\langle e,e_k\rangle e_k - e\right\|^2 \\ &= \left|\langle e,e_k\rangle\right|^2 + \|e\|^2 - 2\left|\langle e,e_k\rangle\right|^2 \\ &= \|e\| - \left|\langle e,e_k\rangle\right|^2 \\ &= 1 - \left|\langle e,e_k\rangle\right|^2 \\ &< \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Luego, $\left|\langle e,e_k\rangle\right|^2 > 1-\varepsilon^2$. Similarmente, se prueba que $\left|\langle f,e_k\rangle\right|^2 > 1-\varepsilon^2$.

Ahora bien, podemos extender nuestra base de manera que:

$$e_k = \alpha_k e + \beta_k f + g_k; \quad con \quad g_k \perp e, \quad g_k \perp f.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}1 = \|e_k\|^2 &= \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \|g_k\|^2 \\ &\geq (1-\varepsilon^2) + (1-\varepsilon^2) + \|g_k\|^2 \\ &= 2 - 2\varepsilon^2 + \|g_k\|^2\end{aligned}$$

lo cual es imposible para un $\varepsilon > 0$ muy pequeño. Por lo tanto, I no puede ser límite fuerte de proyecciones unidimensionales. □

3) Nótese que si $Q = I$, $I = Q' - Q$, y por lo tanto podríamos tener que $\left(P^{(k_m, i(k_m)+1)} - P^{(k_m, i(k_m))}\right) \xrightarrow{d} I$, lo cual es imposible por el lema 3.5.3. Esto completa la prueba. □

NOTA: *El lema 3.5.3 se puede generalizar de esta forma:*

LEMA 3.5.4: *Una sucesión de proyecciones de dimensión menor o igual que n, no pueden converger a proyecciones de dimensión mayores o iguales a* $n+1$. *En realidad esto se cumple en espacios de Banach (ver nota antes de la sección 3.4).*

Capítulo 4

Subespacios Invariantes Para La Familia De Operadores Que Conmutan Con Un Operador Compacto.

En este capítulo presentamos el teorema de Lomonosov y su demostración. Lo más importante de la prueba es que no se utiliza el teorema de Aronszajn-Smith y al mismo tiempo se generaliza éste resultado. Se caracterizan subespacios invariantes no triviales para una familia de operadores que conmutan con un operador compacto diferente de cero (estos se llaman subespacios hiperinvariantes). Por la teoría de Fredholm-Riesz-Schauder, consideramos solo el caso cuando el espectro consiste solo de cero, esto es, cuando el operador es casinilpotente, pues cuando no es así se aplica la proposición 2.3.1 para obtener subespacios hiperinvariantes no triviales.

4.1 Preliminares

A continuación se presentaran algunos resultados que se utilizaran en la prueba del teorema fundamental de este capítulo.

DEFINICIÓN 4.1.1: *Sea R un espacio topológico. Entonces R tiene la propiedad del punto fijo si para todo operador continuo T de R en si mismo existe p en R tal que* $T(p)=p$.

LEMA 4.1.1: *El cubo de Hilbert* $C=\left\{\{\varepsilon_n\}: \ |\varepsilon_n|\le \frac{1}{n}, \ n=1,2,\ldots\right\}$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

LEMA 4.1.2: *Cualquier subconjunto* $K\subset C$ *convexo y cerrado del cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo.*

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN: Como estamos en un espacio de Hilbert podemos considerar la proyección ortogonal *P* de *C* sobre *K* que satisface

$$P(z)=z, \qquad \forall z\in K.$$

Sea ahora $\varphi: K\to K$ continua y $\Phi=\varphi\circ P$, entonces existe $z\in K$

$$\varphi(z)=\varphi(P(z))=(\varphi\circ P)(z)=\Phi(z)=z$$

donde la ultima igualdad se tiene por el lema 4.1.1. Por tanto *K* satisface la propiedad del punto fijo.

LEMA 4.1.3: *Sea X un espacio vectorial topológico. K cualquier subconjunto compacto y convexo de X con al menos dos puntos; T un operador en X continuo. Entonces existe* $K_1\subsetneq K$ *tal que* $TK_1\subset K_1$.

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN: Se le da la topología débil X^* a *K*. Ahora definimos cuando un conjunto de funciones $F=\{f\}$ está determinado por otro conjunto de funciones $G=\{g\}$, esto es,

$(\forall f \in F)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \gamma \subset G \; finito)$ tal que para $p,q \in K$ con $p-q \in N(0;\gamma;\delta)$ entonces

$$\left| f(Tp) - f(Tq) \right| < \varepsilon.$$

Por lo anterior podemos afirmar que cada funcional $f \in X^*$ puede ser incluido en un conjunto auto-determinado contable *G*, digamos

$$G = \{ f \} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right\}$$

o simplemente $G = \{g_i\}$.

Se supone posteriormente que $p,q \in K$, $p \neq q$ y $f \in X^*$ tal que $f(p) \neq f(q)$; entonces se construye la función

$$H : K \to l_2$$
$$H(k) = \{g_i(k)\}$$

continua sobre un conjunto $K_0 \subseteq C$ compacto y convexo con al menos dos puntos. Luego consideramos la aplicación

$$T_0 = HTH^{-1} : K_0 \to K_0$$
$$T_0\left(\{g_i(p)\}\right) = \{g_i(Tp)\}$$

univaluada y continua. Después se aplica el lema 4.1.1 para probar que existe $k_0 \in K_0$ tal que

$$T(k_0) = k_0$$

de esta forma se obtiene un subespacio invariante $K_1 = H^{-1}(k_0)$ tal que

$$TK_1 \subset K_1$$

con $K_1 \neq K$. Nótese que de la linealidad y la continuidad de *H*, el conjunto K_1 es convexo y cerrado respectivamente. □

TEOREMA 4.1.1 (SCHAUDER-TYCHONOFF): *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo,* $K \subset X$ *compacto y convexo. Entonces K tiene la propiedad del punto fijo.*

NOTA: *Este resultado también se conoce como el teorema del punto fijo de Schauder.*

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN: Si *K* tiene un solo punto no hay nada que probar. Sea ahora *K* con al menos dos puntos y $T: K \to K$ una aplicación continua, debemos ver que existe $z \in K$ tal que $T(z) = z$. Se construye la familia

$$\wp = \{K_1 : \quad K_1 \subsetneq K \quad y \quad TK_1 \subset K_1\}$$

con la relación de orden

$$K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_2 \subseteq K_1.$$

$\wp \neq \emptyset$ ya que $K \in \wp$, luego por el lema de Zorn se prueba que existe un conjunto mínimo $F \in \wp$, pero por el lema 4.1.3 existe un conjunto $K^* \subsetneq F$ tal que $TK^* \subset K^*$, lo que contradice la selección de *F*. □

4.2 Demostración Del Teorema De Lomonosov

Ahora veamos el teorema principal de este capítulo.

TEOREMA 4.2.1 (LOMONOSOV): *Sea $A \neq 0$ un operador compacto sobre un espacio de Banach complejo B de dimensión infinita. Entonces existe un subespacio de B no trivial que es invariante para todo operador lineal acotado que conmuta con A.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba es por contradicción; supóngase que la afirmación del teorema es falsa. En particular, esto significa que *A* no tiene autovectores.

NOTA: *Para cada $y \neq 0$ el subespacio $M = \overline{gen\{Ty : T \in A'\}}$ es invariante bajo el conmutante de A con $M \neq (0)$ por tanto debemos tener que $M = B$.*

Veamos que existe un punto $x_0 \in B$ y una bola cerrada $S = S(x_0;1)$ tal que $\inf\limits_{x \in S} \|Ax\| > 0$. En efecto, como $A \neq 0$, existe $z \in B$ tal que $Az \neq 0$, por lo que $\|Az\| > 0$. Ahora sea $x_0 = \lambda z$ con λ a determinar; entonces $\|Ax_0\| = |\lambda| \|Az\|$. Consideremos $x \in S$; esto es; $\|x - x_0\| \leq 1$; luego tenemos que:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|A(x_0) + A(x - x_0)\| \\ &\geq \|A(x_0)\| - \|A(x - x_0)\| \\ &\geq \|A(x_0)\| - \|A\| \|x - x_0\| \\ &\geq |\lambda| \|Az\| - \|A\| > 0 \end{aligned}$$

cuando $|\lambda| > \dfrac{\|A\|}{\|Az\|}$. Por lo tanto $\inf\limits_{x \in S} \|Ax\| > 0$.

Por AS denotaremos la imagen de S bajo la acción de A, y por $\overline{\mathrm{AS}}$ su clausura. Entonces para cada punto $z \in \overline{AS}$ debemos determinar un operador T en A' tal que $\|Tz - x_0\| < 1$. Si no existiera tal operador, el subespacio M considerado en la nota sería invariante y además $M \neq (0)$ puesto que $I \in A', I(z) = z \in M$. Si $M = B$, obtenemos que dado $z \in \overline{AS}$ existe $T \in A'$ tal que $\|Tz - x_0\| < 1$.

Probemos ahora que existe un número finito de operadores $T_i \in \{A\}'$, $1 \leq i \leq n$, tal que para cualquier $y \in \overline{\mathrm{AS}}$ la relación $\|T_i y - x_0\| < 1$ se satisface para algún $i = i(y)$ cuando consideramos $M = B$. En efecto, tenemos que $x_0 \in B = M$. Tenemos que $y \in B(y;\varepsilon_y) = \{z : \|z - y\| < \varepsilon_y\}$, de modo que $\overline{AS} \subset \bigcup_{y \in \overline{AS}} B(y;\varepsilon_y)$ pero al ser $\overline{\mathrm{AS}}$ compacto, existe un número finito de y_i, ε_i para $i = 1, \ldots, n$ tales que $\overline{AS} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i;\varepsilon_i)$ con $i = i(y)$ y con

$$\begin{aligned}
\|T_i z - x_0\| &= \|T_i z - T_i y + T_i y - x_0\| \\
&\leq \|T_i\|\|z - y\| + \|T_i y - x_0\| \\
&< 1
\end{aligned}$$

cuando $\|z - y\| < \dfrac{1 - \|T_i y - x_0\|}{\|T_i\|}$; luego podemos escoger $\varepsilon_y = \dfrac{1 - \|T_i y - x_0\|}{\|T_i\|}$; de modo que existe un número finito de operadores $T_i \in \{A\}'$, $1 \leq i \leq n$ tales que $\|T_i y - x_0\| < 1$.

Definamos la función $f(t), 0 \leq t < \infty$

$$f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 \le t. \end{cases}$$

La transformación $\Phi : \overline{\mathrm{AS}} \to B$, definida por

$$\Phi y = \frac{\sum_{i=1}^{n} f\left(\|T_i y - x_0\|\right) T_i y}{\sum_{j=1}^{n} f\left(\|T_j y - x_0\|\right)}$$

es continua sobre el conjunto compacto y convexo $\overline{\mathrm{AS}}$, (notemos que S es convexo y A es lineal) puesto que f y T son continuas. Por lo tanto, su rango es compacto. Además, $Ran\,\Phi \subset S$ puesto que Φy es una combinación lineal convexa de los $T_i y$; en efecto, sea $n_k < n$ el mínimo índice para el cual

$$f\left(\|T_i y - x_0\|\right) = 1 - \|T_i y - x_0\| \text{ y } f\left(\|T_j y - x_0\|\right) = 1 - \|T_j y - x_0\|$$

entonces,

$$\Phi y = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} f\left(\|T_i y - x_0\|\right) T_i y}{\sum_{j=1}^{n_k} f\left(\|T_j y - x_0\|\right)},$$

pero como $\|T_i y - x_0\| < 1$ y $\|T_j y - x_0\| < 1$, tenemos que Φy es una combinación lineal convexa de los $T_i y \in S$, por lo tanto $\Phi y \in S$.

Notemos que la composición $\Phi A : S \to S$ es continua, por tanto ΦA transforma continuamente a S en un conjunto compacto y por consiguiente, este operador tiene un punto fijo por el teorema de Schauder. Esto significa que para algún vector $x \in S$,

$$\Phi A x = x$$
$$\sum_{1}^{n} \alpha_i T_i A x = x$$

donde

$$\alpha_i = \frac{f\left(\|T_i x - x_0\|\right)}{\sum_{j=1}^{n} f\left(\|T_j x - x_0\|\right)}.$$

Ahora bien, puesto que la composición de un operador compacto con cualquier operador, es compacto, entonces el operador:

$$T = \sum_{1}^{n} \alpha_i T_i A$$

es también compacto. Por lo tanto el conjunto de vectores

$$V = \{u \, : \, Tu = u\}$$

es un subespacio de dimensión finita por teorema 2.3.1 de los preliminares. Veamos ahora que *V* es invariante bajo *A*; en efecto; Sea $x \in V$ y $Ax \in A(V)$, entonces $Tx = x$, y como *T* está en el conmutante de *A* se sigue que

$$T(Ax) = A(Tx) = Ax$$

Por tanto $Ax \in V$, y en consecuencia, V es un subespacio invariante bajo *A*. Por consiguiente, *A* tiene un autovalor; pero esto contradice la suposición al inicio de la prueba del teorema. □

4.3 Demostración de Hilden al Teorema de Lomonosov

En esta sección daremos la prueba del teorema de Lomonosov dada por Hilden, donde no se usa el teorema del punto fijo de Schauder. Sea $A: X \to X$ un operador lineal donde X es un espacio de Banach de dimensión infinita y $\sigma(A) = \{0\}$, esto es, A es casinilpotente; introduzcamos la notación

$$\Gamma(y) = \left\{Ty :\ T \in \{A\}'\right\}$$

para todo $y \in X$.

Se puede ver que $\{A\}'$ es un subálgebra de $B(X)$ y que $\Gamma(y)$ es por lo tanto un subespacio cerrado de X que contiene a y. Así $\Gamma(y) \neq (0)$ si $y \neq 0$. Más aun

$$T\big(\Gamma(y)\big) \subset \Gamma(y)$$

para todo $y \in X$ y $T \in \{A\}'$, simplemente porque $\{A\}'$ es cerrado bajo multiplicación. Así $\Gamma(y)$ es un subespacio invariante para todo operador T que conmuta con A.

Si la conclusión del teorema fuera falsa, se sigue que $\Gamma(y) = X$ para todo $y \neq 0$. Supongamos lo anterior. Escojamos un x_0 en X tal que $Tx_0 \neq 0$. Entonces $x_0 \neq 0$, y la continuidad de A demuestra que existe una bola abierta S, centrada en x_0, tal que

$$\|Ax\| \geq \frac{1}{2}\|Ax_0\| \qquad y \qquad \|x\| \geq \frac{1}{2}\|x_0\|$$

para todo $x \in S$. Nuestra suposición acerca de $\Gamma(y)$ implica que todo $y \neq 0$ tiene una vecindad *W* que es aplicada en el conjunto abierto *S* por algún $T \in \{A\}'$. Tenemos así un cubrimiento W_y por abiertos de $X - \{0\}$ tales que $TW_y \subset S$. Puesto que A es un operador compacto, $K = \overline{A(S)}$ es un conjunto compacto. Por las desigualdades anteriores, $0 \notin K$. Por lo tanto existen conjuntos abiertos $W_1, W_2, \ldots, W_n$, cuya unión cubre a *K*, y $T_i(W_i) \subset S$ para algún $T_i \in \{A\}'$, $0 \leq i \leq n$. Pongamos

$$\mu = \max\{\|T_1\|, \ldots, \|T_n\|\}.$$

Comenzando con x_0, Ax_0 esta en *K*, por lo tanto en algún W_{i_1}, y $T_{i_1}Ax_0 \in S$. Por tanto $AT_{i_1}Ax_0 \in K$, y así en algún W_{i_2}, y $T_{i_2}AT_{i_1}Ax_0 \in S$. Continuando de esta manera obtenemos los vectores

$$x_N = T_{i_N}A \cdots T_{i_1}Ax_0 = T_{i_N} \cdots T_{i_1}A^N x_0 \in S.$$

Por tanto

$$\frac{1}{2}\|x_0\| \leq \|x_N\| \leq \mu^N \|A^N\| \|x_0\| \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

y esto nos da información sobre el radio espectral de *A* esto es,

$$r(A) = \lim_{N \to \infty} \left\| A^N \right\|^{1/N} \geq \frac{1}{\mu} > 0.$$

Pero $r(T) = 0$ puesto que $\sigma(T) = \{0\}$, lo que es una contradicción. □

Capítulo 5

Existencia De Subespacios Invariantes Para Otros Operadores

En este capítulo presentaremos la demostración del teorema de Wermer, que nos garantiza la existencia de un subespacio invariante no trivial de un operador invertible cuyo espectro no se reduce a un solo punto y en donde la sucesión $\|T^n\|$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ crece moderadamente; lo anterior será obtenido usando la condición (C) dada abajo. Definimos el espectro de una sucesión, y después veremos como se relaciona esto con el espectro de operadores sobre espacios de Banach; consiguiendo así el resultado deseado.

5.1 Preliminares

DEFINICIÓN 5.1.1: *Sea* $\{\rho_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, *una sucesión de números positivos.* $\{\rho_n\}$ *satisface la condición (C) si existe una sucesión* $\{d_n\}$ *tal que* $\rho_n \leq d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y *con las siguientes propiedades:*

1) $d_{-n} = d_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

2) $d_n \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log d_n}{1+n^2} < \infty.$

4) $\{d_n\}$ es monótona creciente cuando $|n|$ crece.

5) $\frac{\log d_n}{n}$ es decreciente cuando $|n|$ crece.

PROPOSICIÓN 5.1.1: *Si* $\rho_n = O\left(e^{|n|^{\alpha}}\right)$ *para algún* $0 < \alpha < 1$, *entonces* $\{\rho_n\}$ *satisface la condición (C).*

DEMOSTRACIÓN: Puesto que $\rho_n = O\left(e^{|n|^{\alpha}}\right)$, entonces $\rho_n \le K\left(e^{|n|^{\alpha}}\right)$ para algún $K \ge 1$. Sea la sucesión $d_n = K\left(e^{|n|^{\alpha}}\right)$, entonces $\rho_n \le d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Notamos que la *sucesión* $\{d_n\}$ satisface claramente las condiciones **1)**, **2)** y **4)**. Veamos **3)**

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log d_n}{1+n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log K + |n|^{\alpha}}{1+n^2} \\ &= (\log K)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n|^{\alpha}}{1+n^2} \\ &\le (\log K)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Veamos ahora **5)**

$$\frac{\log d_n}{n} = \frac{\log K + |n|^{\alpha}}{n}$$
$$= \frac{\log K}{n} + \frac{|n|^{\alpha}}{n}$$

pero como $0 < \alpha < 1$, entonces $\frac{\log d_n}{n}$ decrece. Por tanto $\{\rho_n\}$ satisface la condición (1).

OBSERVACIÓN 5.1.1: *Si* $\rho_n \geq e^{n/\log n}$ *para* $n \geq N_0$*, entonces la condición (C) falla.* En efecto, como

$$\rho_n \geq e^{n/\log n}$$
$$d_n \geq e^{n/\log n}$$

entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log d_n}{1+n^2} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)\log n}$$
$$\geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$
$$= \infty.$$

por lo tanto la propiedad **3)** no se cumple, así que la sucesión no satisface la condición (C).

PROPOSICIÓN 5.1.2: *Llamemos* $\rho_n = \|T^n\|$, $n \in \mathbb{Z}$*, donde* T *es un operador lineal, acotado e invertible. Si* $\{\rho_n\}$ *satisface la condición (C); entonces*

a) *El espectro de* $T, \sigma(T)$*, está en el círculo unitario.*

b) $\left\|T^n\right\| \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN: a) Supongamos que $\lambda \in \sigma(T)$ y $|\lambda| > 1$. Luego, el radio espectral $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| > 1$; pero por un conocido resultado tenemos

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \left\|T^n\right\|^{1/n} > 1$$

de modo que tomando $r(T) > R > 1$ tenemos que $\left\|T^n\right\| > R^n$ para n grande; por lo tanto

$$\begin{aligned}
d_n &\geq \rho_n \\
&= \left\|T^n\right\| > R^n \\
\log d_n &> n \log R \qquad\qquad \text{para } n \text{ grande} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log d_n}{1+n^2} &> (\log R) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,
\end{aligned}$$

lo que contradice la condición (C). Por otro lado si $|\lambda| < 1$, entonces $\left|\frac{1}{\lambda}\right| > 1$. Además $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$, luego, procediendo como en el caso anterior, llegamos a una contradicción. Por lo tanto $|\lambda| = 1$.

Probemos ahora **b)**. Si $\left\|T^m\right\| < 1$ para $m > 0$; entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned}\left\|T^{km}\right\| &= \left\|\left(T^{m}\right)^{k}\right\| \\ &\leq \left\|T^{m}\right\|^{k}\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}r(T) &= \lim_{k\to\infty}\left\|T^{mk}\right\|^{1/mk} \\ &\leq \lim_{k\to\infty}\left(\left\|T^{m}\right\|^{k}\right)^{1/mk} \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\left\|T^{m}\right\|\right)^{1/m} \\ &< 1\end{aligned}$$

lo cual es imposible por **a)**. Para $m<0$ se procede similarmente y se llega a una contradicción.

5.2 Espectro De Una Sucesión

En esta sección se probarán varios lemas relacionados con espacios de sucesiones, que usaremos posteriormente.

Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números reales que satisface la condición (C), y tales que $\rho_n \geq 1$ y para todos los $m,n \in \mathbb{Z}$

$$\rho_{m+n} \leq \rho_m \rho_n.$$

OBSERVACIÓN 5.2.1: *Para todo* $R>1$, *tenemos que* $\rho_n = o\left(R^{|n|}\right)$

En efecto, nótese que:

$$\rho_2 \leq \rho_1^2$$
$$\vdots$$
$$\rho_n \leq \rho_1^n.$$

Supongamos que existe $R > 1$ tal que $\rho_n \neq o\left(R^n\right)$. Entonces existe una subsucesión de enteros $\left\{n_j\right\}$ y un $c > 0$ tal que

$$\frac{\rho_{n_j}}{R^{n_j}} \geq c\,.$$

Ahora, por la definición de $\left\{\rho_n\right\}$ tenemos que $\rho_{n_j} \leq \rho_1^{n_j}$, por lo que

$$\frac{\rho_1^{n_j}}{R^{n_j}} \geq \frac{\rho_{n_j}}{R^{n_j}} \geq c$$

y en consecuencia $\frac{\rho_1}{R} \geq c^{1/n_j} \to 1$ cuando $n_j \to \infty$. Por tanto

$$\rho_1 \geq R\,.$$

Veamos ahora que $\rho_2 \geq R^2$. Consideremos primero que n_j es par; entonces $\rho_{n_j} \leq \rho_2^{n_j/2}$ y así

$$\frac{\rho_2^{n_j/2}}{R^{n_j}} \geq c$$

por tanto $\frac{\rho_2^2}{R} \geq c^{1/n_j} \to 1$ cuando $n_j \to \infty$. Luego $\rho_2 \geq R^2$. Si n_j es impar, podemos expresarlo como $n_j = 2l+1$, de modo que

$$\rho_{n_j} = \rho_{2l+1} \leq \rho_{2l}\rho_1 \leq \rho_2^l \rho_1$$

por tanto $\frac{\rho_2^l \rho_1}{R^{2l+1}} \geq \frac{\rho_{n_j}}{R^{n_j}} \geq c$, lo que implica $\frac{\rho_2}{R^2}\left(\frac{\rho_1}{R}\right)^{1/l} \geq c^{1/l} \to 1$ cuando $l \to \infty$. Por tanto

$$\frac{\rho_2}{R^2} \geq 1$$

y en este caso, también $\rho_2 \geq R^2$.

En general, se puede ver que $\rho_k \geq R^k$. Pero como $d_k \geq \rho_k \geq R^k$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log d_k}{1+k^2} > (\log R) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{1+k^2} = \infty$$

lo que contradice el hecho de que $\{\rho_n\}$ satisface la condición (C). Por tanto $\rho_n = o\left(R^n\right)$.

A continuación definiremos un espacio de sucesiones y el “espectro” de una sucesión.

Sea L el espacio de todas las sucesiones $\{h_n\}$ de números complejos para el cual

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h_n| \rho_n < \infty.$$

Normamos a L diciendo que $\|\{h_n\}\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |h_n| \rho_n$.

NOTA: Como L depende de $\{\rho_n\}$, notemos por un momento a L por L_ρ . Supongamos que tenemos una sucesión $\{\widetilde{\rho_n}\}$ con la propiedad: $\rho_n \geq \widetilde{\rho_n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces la relación que existe entre L_ρ y $L_{\tilde{\rho}}$ es $L_\rho \subset L_{\tilde{\rho}}$. En particular, el mas pequeño posible es $\widetilde{\rho_n} \equiv 1$, y satisface dicha relación; por tanto $L_\rho \subset L_1 = \left\{ \{h_n\} : \sum_{-\infty}^{\infty} |h_n| < \infty \right\}$

OBSERVACIÓN 5.2.2: *Si h y k están en L, la operación convolución $h * k$ es una sucesión cuyo término enésimo es*

$$(h*k)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{n-m} k_m .$$

Entonces, L es un álgebra de Banach conmutativa bajo esta operación.

En efecto, se puede ver que L es un álgebra conmutativa. Veamos que es normada:

$$\|h*k\| \leq \|h\| \|k\| ;$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|h*k\| &= \sum_n |(h*k)_n| \rho_n \\ &= \sum_n \left| \sum_m h_{n-m} k_m \right| \rho_n \\ &\leq \sum_n \sum_m |h_{n-m} k_m| \rho_n \\ &= \sum_m |k_m| \sum_n \left(|h_{n-m}| \rho_n \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_m |k_m| \left(\sum_j |h_j| \rho_{j+m} \right) \\
&\le \left(\sum_m |k_m| \rho_m \right) \left(\sum_j |h_j| \rho_j \right) \\
&= \|h\| \|k\|.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\|h * k\| \le \|h\| \|k\|$. En consecuencia *L* es un álgebra normada. La completitud del álgebra se sigue de la completitud de $\mathbb{C}$. □

PROPOSICIÓN 5.2.1: *El espacio conjugado* L^* *de L es*

$$S = \left\{ X = \{X_k\} : \sup_k \frac{|X_k|}{\rho_k} < \infty \right\}.$$

Normamos a S con $\|X\| = \sup_k \frac{|X_k|}{\rho_k}$.

DEMOSTRACIÓN: Una base de Schauder para *L* es: $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ donde $e_k = \{\delta_k^j\}$ tiene 1 en la posición *k* y ceros en las demás; esto se sigue del hecho que $\|h^n - h\| = \sum_{|j|>n} |h_j| \rho_j \to 0$ cuando $n \to \infty$, donde $h^n = \sum_{|j| \le n} h_k e_k \in L$.

NOTA: e_0 es la identidad de *L*.

Entonces, cualquier $h \in L$, se puede escribir como:

$$h = \{h_k\} = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k e_k \ . \qquad (1^*)$$

Para $X \in L^*$, se tiene que $X(h) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k X(e_k) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k X_k$, donde $X_k = X(e_k)$ está determinado únicamente por *X*. Por otro lado,

$$\|e_k\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta_k^j| \rho_k = \rho_k$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} |X_k| &= |X(e_k)| \\ &\leq \|X\| \|e_k\| \\ &= \|X\| \rho_k \end{aligned} \qquad (2*)$$

por lo tanto $\sup_k \frac{|X_k|}{\rho_k} \leq \|X\| < \infty$. En consecuencia, $\{X_k\}$ está en *S*. Por otro lado, para todo $\{Y_k\}$ en *S* podemos obtener $\{Z_k\}$ en L^*. En efecto; definamos:

$$Z(h) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k Y_k, \qquad h = \{h_k\} \in L.$$

Entonces, *Z* es lineal; y acotado puesto que:

$$\begin{aligned} |Z(h)| &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} |h_k Y_k| \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} |h_k| \rho_k \frac{|Y_k|}{\rho_k} \\ &\leq \sup_j \frac{|Y_j|}{\rho_j} \sum_{-\infty}^{\infty} |h_k| \rho_k \\ &= \|h\| \sup_j \frac{|Y_j|}{\rho_j} < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto $Z=\{Z_k\}\in L*$. Veamos que la norma de *X* es la norma en *S*. En efecto

$$\begin{aligned}|X(h)| &\le \sum_{-\infty}^{\infty}|h_k X_k| \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty}|h_k|\rho_k \frac{|X_k|}{\rho_k} \\ &\le \sup_j \frac{|X_j|}{\rho_j}\sum_{-\infty}^{\infty}|h_k|\rho_k \\ &= \|h\|\sup_j \frac{|X_j|}{\rho_j}.\end{aligned}$$

Por tanto $\|X\|\le \sup_k \frac{|X_k|}{\rho_k}$; entonces, de esto y de $(2*)$, obtenemos $\|X\|=\sup_k \frac{|X_k|}{\rho_k}$ la cual es la norma sobre *S*. Por lo tanto $\|X\|=\|\{X_k\}\|_s$. Esto demuestra que la aplicación biyectiva de $L*$ sobre *S* definida por $X\mapsto\{X_k\}$ es un isomorfismo. □

Veamos ahora que $e_1 * e_1 = e_2$, donde $\{e_k\}$ es la base de *L*; esto es, $(e_1 * e_1)_n = (e_2)_n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. En efecto, para *n* entero

$$\begin{aligned}(e_1 * e_1)_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(e_1)_{n-m}(e_1)_m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta_1^{n-m}\delta_1^m \\ &= \delta_1^{n-1}\delta_1^1 = \delta_1^{n-1} = \delta_2^n \\ &= (e_2)_n.\end{aligned}$$

Más aun $e_n * e_m = e_{n\times m}$. Por otro lado, notemos que si α es un homomorfismo de *L* entonces tenemos que ($\alpha(g*h)=\alpha(g)\alpha(h)$) y si $\alpha(e_1)=\lambda$, entonces

$$\alpha(e_2)=\alpha(e_1*e_1)=\alpha(e_1)*\alpha(e_1)=\lambda^2 .$$

En general, para $k>0$ tenemos que

$$\alpha(e_k)=\alpha\underbrace{(e_1*e_1*\cdots*e_1)}_{k-veces}=\underbrace{\alpha(e_1)*\alpha(e_1)*\cdots*\alpha(e_1)}_{k-veces}=\lambda^k .$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\alpha(\{h_n\})&=\alpha\left(\sum_{-\infty}^{\infty}h_ne_n\right)\\&=\sum_{-\infty}^{\infty}h_n\alpha(e_n)\\&=\sum_{-\infty}^{\infty}h_n\lambda^n.\end{aligned}$$

Cuando *k* es negativo el resultado anterior se sigue de la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\alpha(e_1*e_{-1})&=\alpha(e_0)\\ \alpha(e_1)\alpha(e_{-1})&=1\end{aligned}$$

de modo que $\alpha(e_{-1})=\alpha(e_1)^{-1}$. (Notemos que e_0 es la identidad). Por tanto

$$\alpha(e_{-k})=\alpha(e_k)^{-1}=\left(\lambda^k\right)^{-1}=\lambda^{-k} .$$

Por lo tanto, cada funcional lineal $X=\{X_n\}$ es tal que:

$$X\left(\{h_n\}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}h_nX_{n,} \qquad \forall\{h_n\}\in L$$

y todo homomorfismo complejo α de L es de la forma:

$$\alpha\left(\{h_n\}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}h_n\lambda^n \ ,$$

para todo h en L, con λ que depende solo de α y $|\lambda|=1$. Se puede verificar fácilmente que $\alpha(h*k)=\alpha(h)\alpha(k)$.

A cada $X\in L*$, $X=\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ podemos asociar las funciones:

$$f_X^+(\lambda)=\sum_{1}^{\infty}\frac{X_n}{\lambda^n}, \qquad f_X^-(\lambda)=-\sum_{0}^{\infty}\lambda^nX_{-n}$$

donde f_X^+ y f_X^- están definidas y son analíticas para $|\lambda|>1$ y $|\lambda|<1$ respectivamente.

En efecto, puesto que $\|X\|=\sup_k\dfrac{|X_k|}{\rho_k}$; entonces $|X_n|\le\|X\|\rho_n$. Luego, para cada $R>1$

$$0\le\lim_{|n|\to\infty}\frac{|X_n|}{R^{|n|}}\le\lim_{|n|\to\infty}\frac{\|X\|\rho_n}{R^{|n|}}\le\|X\|\lim_{|n|\to\infty}\frac{\rho_n}{R^{|n|}}=0.$$

Por tanto $X_n=o\left(R^{|n|}\right)$ para todo $R>1$.

DEFINICIÓN 5.2.1: *Si $X\in L*$, definimos el espectro de $X,\sigma(X)$, como la colección de todos los puntos λ_0 sobre el círculo unitario con la siguiente propiedad: las* *funciones* f_X^+ *y* f_X^- *no se continúan analíticamente la una de la otra en cualquier arco del círculo unitario que contenga a* λ_0.

NOTA: $\lambda_0 \notin \sigma(X)$ *si existe una vecindad V de* λ_0 *y una función analítica g en V tal que:*

$$g(\lambda) = f_X^+(\lambda), \qquad |\lambda| > 1$$
$$g(\lambda) = f_X^-(\lambda), \qquad |\lambda| < 1.$$

ALGUNOS RESULTADOS PRELIMINARES A LA PRUEBA DEL LEMA 5.2.1

1. **DEFINICIÓN 5.2.2:** *Sea B un espacio de Banach,* B^* *su espacio conjugado, V un subespacio de* B^**; entonces V es débilmente cerrado si para toda sucesión* $X^{(n)} \in V$ *tal que* $X^{(n)} \xrightarrow{d} X$, *implica que* $X \in V$.

2. **Un resultado de N. Sjöberg para funciones subarmónicas**

Sea $h(\sigma)$ *una función no acotada en el origen, par, decreciente y tal que:*

$$\int_0^C \log^+ h(\sigma)d\sigma < \infty \text{ para todo } C > 0.$$

Dado un rectángulo $|x| \le a, |y| \le b$ *y* $0 < b' < b$, *existe una constante M que depende de a,b,*b' *y h tal que cualquier función subarmónica* $u(x,y)$ *en el rectángulo dado y con* $u(x,y) \le e^{h(|x|)}$ *cumple con* $u(x,y) \le M$ *si* $|x| \le a, |y| \le b'$.

3. **OBSERVACIÓN 5.2.3:** *Dados números reales* $A \ge 2, B \ge 2$, *entonces*

$$A + B \leq AB.$$

4. **PROPOSICIÓN 5.2.2:** *Sea* $\{d_n\}$ *la sucesión descrita en la condición (C). La función:*

$$\begin{cases} h(\sigma) = \log\left(\sum_0^{\infty} e^{-\sigma n} d_n\right), & \sigma > 0 \\ h(-\sigma) = h(\sigma), & \sigma < 0 \end{cases}$$

satisface las hipótesis del resultado de N. Sjöberg.

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, $\frac{\log d_n}{n}$ decrece a cero cuando $|n| \to \infty$, y por tanto, dado $\sigma > 0$ existe $N = N(\sigma) \in \mathbb{N}$ tal que

$$N(\sigma) = \min\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{\log d_n}{n} \leq \frac{\sigma}{2}, \right\}.$$

Probemos las siguientes afirmaciones:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sigma} d_n \leq N(\sigma) e^{\frac{\sigma}{2} N(\sigma)} + O\left(1/\sigma\right)$

b) $h(\sigma) \leq N(\sigma) + \log\left(1/\sigma\right) + K$**,** donde K es una constante y $0 < \sigma < 1$.

Veamos la parte **a).** Por la desigualdad inmediatamente anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sigma} d_n &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-n\sigma} d_n + \sum_{n=N}^{\infty} e^{-n\sigma} e^{\log d_n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-n\sigma} d_n + \sum_{n=N}^{\infty} \exp\left[n\left(-\sigma + \frac{\log d_n}{n} \right) \right] \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} e^{-n\sigma} d_n + \sum_{n=N}^{\infty} \exp\left[n\left(-\sigma + \frac{\sigma}{2} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\sigma n} d_n + \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\frac{\sigma}{2} n}.\end{aligned}$$

Ahora, como $\dfrac{\log d_N}{N} \leq \dfrac{\sigma}{2}$ implica $d_N \leq e^{\frac{\sigma}{2} N}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty} e^{-n\frac{\sigma}{2}} &< \frac{1}{e^{\sigma/2} - 1} \\ &= O\left(1/\sigma \right).\end{aligned}$$

Por tanto, como $\{d_n\}$ es monótona creciente y $e^{-n\sigma} \leq 1$ para todo $n \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sigma} d_n &\leq \sum_{n=0}^{N-1} e^{-n\sigma} d_n + \sum_{n=N}^{\infty} e^{-n\frac{\sigma}{2}} \\ &= N d_N + O\left(1/\sigma \right) \\ &\leq N e^{\frac{\sigma}{2} N} + O\left(1/\sigma \right)\end{aligned}$$

y como $N = N(\sigma)$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sigma} d_n \leq N(\sigma) e^{\frac{\sigma}{2} N(\sigma)} + O\left(1/\sigma \right)$. $(*)$

Veamos ahora la parte **b)**. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $N(\sigma) \geq 2$ y $c_0 \geq 2$, donde c_0 es la constante tal que $\sum_{n=N}^{\infty} e^{-n\frac{\sigma}{2}} \leq c_0 \dfrac{1}{\sigma}$. Entonces, puesto que $0 < \sigma < 1$, se sigue de la observación 5.2.3 se tiene que

$$
\begin{aligned}
h(\sigma) &= \log\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sigma} d_n\right) \\
&\leq \log\left[N e^{\frac{\sigma}{2}N(\sigma)} + O\left(1\!\big/\!\sigma\right)\right] \\
&\leq \log\left[N e^{\frac{\sigma}{2}N(\sigma)} \cdot O\left(1\!\big/\!\sigma\right)\right] \\
&\leq \log N(\sigma) + \frac{\sigma}{2} N(\sigma) + K + \log\left(1\!\big/\!\sigma\right) \\
&\leq \frac{1}{2} N(\sigma) + \frac{1}{2} N(\sigma) + K + \log\left(1\!\big/\!\sigma\right) \\
&= N(\sigma) + \log\left(1\!\big/\!\sigma\right) + K.
\end{aligned}
$$

Así quedan probadas las afirmaciones **a)** y **b)**.

Si probamos que $\int_0^C \log N(\sigma) d\sigma < \infty$, podemos concluir que $\int_0^C \log^+ h(\sigma) d\sigma < \infty$ y de este modo la proposición quedaría probada. Para ello vamos a necesitar demostrar las siguientes tres afirmaciones:

c) $\int_1^{\infty} \frac{K(y)}{y} dy < \infty$**,** donde $K(y)$ se define como sigue: Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $K(n) = \frac{\log d_n}{n}$ mientras que para $n < y < n+1$, $K(y)$ es lineal (nótese que del dominio de $K(y)$ es $[1, \infty)$.

d) $\int_0^C z(\sigma)\, d\sigma < \infty$**,** donde; para cada σ positivo, $z(\sigma)$ es el único número tal que $z(\sigma) = \log\left(K^{-1}(\sigma)\right)$ o equivalentemente $K\left(e^{z(\sigma)}\right) = \sigma$.

e) $N(\sigma) \leq e^{z\left(\sigma/2\right)} + 2.$

Probemos **a).** Por la definición, $K(y)$ decrece a cero cuando $y \to \infty$; por tanto

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{K(y)}{y}\,dy &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{K(n)}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log d_n}{n^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log d_n}{n^2+1}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)\\ &\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log d_n}{n^2+1}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Veamos **d).** Por la definición , $z(\sigma)=\log\left(K^{-1}(\sigma)\right)$ tenemos que

$$\int_0^C z(\sigma)\,d\sigma = \int_0^C \log\left(K^{-1}(\sigma)\right)d\sigma\,.$$

Haciendo

$$u=\log\left(K^{-1}(\sigma)\right) \qquad dv = d\sigma$$

$$du=\frac{\left(K^{-1}(\sigma)\right)'}{K^{-1}(\sigma)}d\sigma \qquad v=\sigma=K\left(e^{z(\sigma)}\right)$$

integrando por partes nos resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^C z(\sigma)\,d\sigma &= \int_0^C \log\left(K^{-1}(\sigma)\right)d\sigma\\ &= \left[\sigma\log\left(K^{-1}(\sigma)\right)\right]_0^C - \int_0^C K\left(e^{z(\sigma)}\right)\frac{\left(K^{-1}(\sigma)\right)'}{K^{-1}(\sigma)}\,d\sigma\\ &= C\ln\left(K^{-1}(C)\right)-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\left(K^{-1}(\varepsilon)\right)+\int_C^0 K\left(e^{z(\sigma)}\right)\frac{\left(K^{-1}(\sigma)\right)'}{K^{-1}(\sigma)}\,d\sigma\end{aligned}$$

Ahora sea

$$z = z(\sigma) \qquad\qquad dz = z'(\sigma)\,d\sigma = \frac{\left(K^{-1}(\sigma)\right)'}{K^{-1}(\sigma)}\,d\sigma$$

por tanto

$$\int_C^0 K\left(e^{z(\sigma)}\right)\frac{\left(K^{-1}(\sigma)\right)'}{K^{-1}(\sigma)}\,d\sigma = \int_m^\infty K\left(e^z\right)dz.$$

Por otro lado tenemos que

$$\int_\varepsilon^C z(\sigma)\,d\sigma = C\log\left(K^{-1}(C)\right) - \varepsilon\log\left(K^{-1}(\varepsilon)\right) + \int_{m_\varepsilon}^\infty K\left(e^z\right)dz$$

pero

$$\liminf_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon\log\left(K^{-1}(\varepsilon)\right) \geq 0$$

por tanto

$$\int_0^C z(\sigma)\,d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^C z(\sigma)\,d\sigma \leq C\log\left(K^{-1}(C)\right) + \int_m^\infty K\left(e^z\right)dz$$

haciendo $y = e^z$ en la integral del lado derecho de la desigualdad, tenemos que $dz = \frac{dy}{y}$

$$\begin{aligned}\int_0^C z(\sigma)\,d\sigma &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^C z(\sigma)\,d\sigma \\ &< C\log\left(K^{-1}(C)\right) + \int_m^\infty K\left(e^z\right)dz \\ &= C\log\left(K^{-1}(C)\right) + \int_j^\infty \frac{K(y)}{y}\,dy < \infty.\end{aligned}$$

Por tanto $\int_0^C z(\sigma)\, d\sigma < \infty$.

Veamos ahora **c)**, esto es, probemos que $N(\sigma) \le e^{z(\sigma/2)} + 2$. En efecto, por la escogencia de $N(\sigma)$, el entero positivo $N(\sigma)-1$ es tal que

$$K(N-1) = \frac{\log d_{N-1}}{N-1} \ge \frac{\sigma}{2} = K\left(e^{z(\sigma/2)}\right)$$

Así, como la función K es decreciente,

$$\begin{aligned} N-1 &\le e^{z(\sigma/2)} \\ N &\le e^{z(\sigma/2)} + 1 \\ N &\le e^{z(\sigma/2)} + 2. \end{aligned}$$

Colocamos la última desigualdad para usar la observación 5.2.3. Estamos preparados ahora para probar que $\int_0^C \log N(\sigma) d\sigma < \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^C \log N(\sigma)\, d\sigma &\le \int_0^C \log\left[e^{z(\sigma/2)} + 2\right] d\sigma \\ &\le \int_0^C \log\left[2e^{z(\sigma/2)}\right] d\sigma \\ &= \int_0^C (\log 2)\, d\sigma + \int_0^c z\left(\sigma/2\right) d\sigma \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Por tanto $\int_0^C \log N(\sigma)\, d\sigma < \infty \quad (**)$.

Habíamos visto que

$$h(\sigma) \leq N(\sigma) + \log\left(1/\sigma\right) + K$$

luego, de esto y de la observación 5.2.3 se ver que

$$\log^{+}\left[h(\sigma)\right] \leq \log\left[N(\sigma)\right] + M$$

y en consecuencia, por $(**)$

$$\int_0^C h(\sigma)\,d\sigma \leq \int_0^C N(\sigma)\,d\sigma + \int_0^C M\,d\sigma$$
$$< \infty.$$

Por tanto $\int_0^C \log^{+} h(\sigma) d\sigma < \infty$. Puesto que $e^{-n\sigma}$ es decreciente entonces $h(\sigma)$ es decreciente; además es par y no acotada en el origen; por lo tanto cumple con las condiciones del resultado de *N. Sjöberg.*

El siguiente lema nos dará la base para hallar subespacios invariantes.

LEMA 5.2.1: *Sea* $\{\rho_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ *que satisface la condición (C). Entonces para todo subconjunto cerrado* Λ *del círculo unitario, el conjunto*

$$E_\Lambda = \{X \in L^*: \quad \sigma(X) \subset \Lambda\}$$

es un subespacio débilmente cerrado de L^*.

DEMOSTRACION: Veamos primero que E_Λ es un subespacio de L^*.

i) Sean $X, Y \in E_\Lambda$, debemos ver que $\sigma(X+Y) \subset \Lambda$. Suponga que $\lambda \notin \Lambda$, entonces

$\lambda \notin \sigma(X)$ y $\lambda \notin \sigma(Y)$; por tanto existen vecindades W_1 y W_2 de λ y funciones analíticas *f* y *g* tales que: *f es* analítica *en* W_1 y

$$f(\lambda) = f_X^+(\lambda), \qquad |\lambda| > 1$$
$$f(\lambda) = f_X^-(\lambda), \qquad |\lambda| < 1;$$

g es analítica en W_2 y

$$g(\lambda) = f_Y^+(\lambda), \qquad |\lambda| > 1$$
$$g(\lambda) = f_Y^-(\lambda), \qquad |\lambda| < 1;$$

luego la función $t(\lambda) = (f+g)(\lambda)$ es analítica en $W = W_1 \cap W_2$ y además

$$t(\lambda) = f_X^+(\lambda) + f_Y^+(\lambda) = f_{X+Y}^+(\lambda), \qquad |\lambda| > 1$$
$$t(\lambda) = f_X^-(\lambda) + f_Y^-(\lambda) = f_{X+Y}^-(\lambda), \qquad |\lambda| < 1;$$

por tanto $\lambda \notin \sigma(X+Y)$ y en consecuencia $\sigma(X+Y) \subset \Lambda$.

***ii*)** De manera similar, se puede ver que $cX \in E_\Lambda$ para todo escalar *c*.

Resta probar que E_Λ es débilmente cerrado; para esto usaremos la definición 5.2.2.

Supongamos que $X^{(n)} \in E_\Lambda$ y $X^{(n)} \xrightarrow{d} X$ para algún $X \in L^*$; veamos que $X \in E_\Lambda$.

Sea $\lambda_0 \notin \Lambda$, $|\lambda_0| = 1$. Debemos probar que $\lambda_0 \notin \sigma(X)$. Puesto que Λ es cerrado, existe un círculo γ centrado en λ_0 y disjunto de Λ (axiomas de separación). Puesto que cada

$X^{(n)} \in E_\Lambda$, entonces $\sigma\left(X^{(n)}\right) \subset E_\Lambda$ está fuera de γ. Por lo tanto, existe para cada *n* una función $f^{(n)}$ analítica en γ y tal que

$$\begin{aligned} f^{(n)}(\lambda) &= f^{+}_{X^{(n)}}(\lambda), \qquad |\lambda| > 1 \\ f^{(n)}(\lambda) &= f^{-}_{X^{(n)}}(\lambda), \qquad |\lambda| < 1. \end{aligned}$$

Tenemos por la proposición 5.2.2 que existe la función $h(\sigma) = \log\left(\sum_0^\infty e^{-\sigma n} d_n\right)$ para $\sigma > 0$ y $h(-\sigma) = h(\sigma)$ *para* $\sigma < 0$*; que* satisface las hipótesis del resultado de *N. Sjöberg*. Veamos ahora que si $\lambda \in \gamma$, para todo *n*,

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(\lambda)\right| &\le e^{h(\log|\lambda|)}, \qquad |\lambda| > 1 \qquad \otimes \\ \left|f^{(n)}(\lambda)\right| &\le e^{h\left(\log\frac{1}{|\lambda|}\right)}, \qquad |\lambda| < 1 \qquad \otimes\otimes \end{aligned}$$

En efecto, nótese que $X^{(n)} \xrightarrow{d} X$ implica que $\left\|X^{(n)}\right\|$ es acotada en *n* $\left([7]:268, cor.4.9-7\right)$. Sea λ en el interior de γ y $|\lambda| > 1$; entonces, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\left\|X^{(n)}\right\| \le 1$ y por tanto

$$\begin{aligned} \left|f^{(k)}(\lambda)\right| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|X_n^{(k)}(\lambda)\right|}{|\lambda|^n} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\|X^{(k)}\right\| \rho_n}{|\lambda|^n} \\ &= \left\|X^{(k)}\right\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^n \rho_n \end{aligned}$$

$$\leq \left\| X^{(k)} \right\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right)^n d_n$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right)^n d_n$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) n} d_n$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\log(|\lambda|) n} d_n$$

de donde

$$\log \left| f^{(k)}(\lambda) \right| \leq \log \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\log(|\lambda|) n} d_n \right)$$
$$= h\left(\log |\lambda| \right)$$

por tanto, para todo n y todo $\lambda \in \gamma$

$$\left| f^{(n)}(\lambda) \right| \leq e^{h\left(\log|\lambda|\right)}, \qquad |\lambda| > 1.$$

Análogamente, para $\lambda \in \gamma$ y $|\lambda| < 1$ tenemos que $\left| f^{(k)}(\lambda) \right| \leq \sum_{1}^{\infty} |\lambda|^n d_n$; por tanto, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\left| f^{(n)}(\lambda) \right| \leq e^{h\left(\log \frac{1}{|\lambda|} \right)}, \qquad |\lambda| < 1.$$

Puesto que las desigualdades anteriores involucran solamente al $|\lambda|$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\lambda_0 = 1$ (es decir, γ está centrado en 1). Definamos ahora

$$g^{(n)}(w) = f^{(n)}\left(\frac{1-w}{1+w}\right).$$

La transformación $\lambda = \dfrac{1-w}{1+w}$ aplica la mitad derecha de plano conformemente sobre el círculo unitario. Escribamos $w = \sigma + it$; podemos encontrar un rectángulo R en el plano W, $|\sigma| \le a$; $|t| \le b$ tal que

$$\lambda \text{ está en el interior de } \gamma \text{ si } w \in R;$$

entonces

$$\begin{aligned} \sigma > 0 &\quad \Rightarrow \quad |\lambda| < 1 \\ \sigma < 0 &\quad \Rightarrow \quad |\lambda| > 1. \end{aligned}$$

Así, para $\sigma > 0$ y $w \in R$, tenemos por $\otimes\otimes$ que

$$\left|g^{(n)}(w)\right| = \left|f^{(n)}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)\right| = \left|f^{(n)}(\lambda)\right| \le e^{h\left(\log\frac{1}{|\lambda|}\right)} = e^{h\left(\log\frac{|1+w|}{|1-w|}\right)}.$$

Escojamos $c > \frac{\sigma}{\log\frac{|1+w|}{|1-w|}}$, notemos que $\log\left(\dfrac{|1+w|}{|1-w|}\right)$ depende de a y b pues $|w| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Luego $\log\left(\dfrac{|1+w|}{|1-w|}\right) > \dfrac{\sigma}{c}$ para $w \in R$ y una constante c que depende de a y b. Puesto que $h(\sigma)$ es una función decreciente

$$h\left[\log\left(\frac{|1+w|}{|1-w|}\right)\right] < h\left(\frac{\sigma}{c}\right), \qquad \text{para } w \in R;$$

de modo que $\left|g^{(n)}(w)\right| \le e^{h\left(\frac{\sigma}{c}\right)}$ si $\sigma > 0$.

Puesto que $\int_0^t \log\left[h\left(\frac{\sigma}{c}\right)\right] d\sigma = c\int_0^{t/c} \log^+\left[h(\sigma)\right] d\sigma$; el resultado de *N. Sjöberg* aplicado a las funciones subarmónicas

$$\left|g^{(n)}(w)\right| \quad \text{en el rectángulo } R$$

hace que las mismas sean acotadas en alguna vecindad del origen ($|\sigma| \le a$; $|t| \le \varepsilon$, ε positivo y pequeño y además menor que *b*), y por lo tanto las funciones $f^{(n)}(\lambda)$ son uniformemente acotadas en alguna vecindad del centro de γ, λ_0 (nótese que λ está en el interior de γ si $w \in R$). Por tanto

$$\left|f^{(n)}(\lambda)\right| \le K_0, \quad \text{con } \lambda \text{ en alguna vecindad de } \lambda_0;$$

en consecuencia por el teorema de Montel existe una subsucesión $f^{(n)}(\lambda)$ que converge uniformemente en alguna vecindad de λ_0 a una función $f(\lambda)$ analítica allí. Por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(\lambda) = f(\lambda).$$

Por otro lado, afirmamos que $X^{(k)} \xrightarrow{d} X$, implica $X_n^{(k)} \xrightarrow{d} X_n$ para todo *n*; es decir

$$\lim_{k\to\infty} X_n^{(k)} = X_n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z};$$

en efecto, por definición

$$X^{(k)} \xrightarrow{d} X \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} X^{(k)}(h) = X(h), \qquad \forall h \in L.$$

luego

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} h_n X_n^{(k)} = \sum_{-\infty}^{\infty} h_n X_n,$$

en consecuencia

$$\lim_{k\to\infty} X_n^{(k)} = X_n.$$

también

$$\left| X_n^{(k)} \right| \leq \left\| X^{(k)} \right\| \rho_n \leq \rho_n$$

por tanto

$$X^{(k)} \in L.$$

Luego para $|\lambda| > 1$

$$f_{X^{(k)}}^{+}(\lambda) = \sum_{1}^{\infty} \frac{X_n^{(k)}}{\lambda^n} \quad \to \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{X_n}{\lambda^n} = f_X^{+}(\lambda) \ .$$

Pero $f_{X^{(k)}}^{+}(\lambda) = f^{(k)}(\lambda)$, por consiguiente $f^{(k)}(\lambda) \to f_X^{+}(\lambda)$, y en consecuencia

$$f(\lambda) = \lim_{k \to \infty} f^{(k)}(\lambda) = f_X^+(\lambda)$$

por tanto

$$f(\lambda) = f_X^+(\lambda), \qquad |\lambda| > 1 .$$

Similarmente se prueba que $f(\lambda) = f_X^-(\lambda)$ para $|\lambda| < 1$, además puesto que f es analítica en alguna vecindad de λ_0, entonces $\lambda_0 \notin \sigma(X)$. Por tanto $X \in E_\Lambda$. □

DEFINICIÓN 5.2.3: *Si $h \in L$ y $X \in L^*$, entendemos por $h * X$ la sucesión en L cuyo enésimo término es*

$$(h * X)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{m-n} X_m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; .$$

Si $h \in L$ y $k \in L$, entendemos por $h * k$ la sucesión cuyo enésimo término es

$$(h * k)_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-m} k_m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; .$$

Si $h \in L$, definimos

$$\tilde{h}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \lambda^n, \qquad |\lambda| = 1.$$

Por la nota vista en este capítulo $\tilde{h}(\lambda)$ es una función continua de λ.

LEMA 5.2.2: *Sea* $\{\rho_n\}$ *que satisface la condición (C). Entonces dado cualquier conjunto cerrado S sobre el círculo unitario y un punto z que no está en S, existe h en L con* $\tilde{h}(\lambda)$ *idénticamente cero sobre S y* $\tilde{h}(z) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sea X_v una sucesión en L^* tal que $(X_v)_n = v^n$ con $|v| = 1$. Puesto que

$$-\sum_0^{\infty} \frac{v^n}{\lambda^n} = -\frac{\lambda}{\lambda - v} \qquad \text{si } |\lambda| > 1$$

$$\sum_1^{\infty} \lambda^n v^{-n} = -\frac{\lambda}{\lambda - v} \qquad \text{si } |\lambda| < 1$$

entonces $\sigma(X_v) = \{v\}$. Sea $E_S = \{X \in L^*: \ \sigma(X) \subset S\}$. Notemos que

$$(X_z)_n = z^n, \qquad |z| = 1$$

implica $\sigma(X_z) = \{z\} \notin S$, por tanto $X_z \notin E_S$.

Por otro lado, E_S es un subespacio débilmente cerrado de L^* por el lema 5.2.1; por lo tanto existe $h \in L$ con $X_z(h) \neq 0$ y $X(h) = 0$ para todo $X \in E_S$. Pero cada sucesión X_v con $v \in S$, está en E_S, luego

$$X_v(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{-\infty}^{\infty} h_n (X_v)_n = \sum_{-\infty}^{\infty} h_n v^n = 0, \qquad v \in S$$

$$X_z(h) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{-\infty}^{\infty} h_n v^n \neq 0.$$

Por tanto existe $h \in L$ tal que $\tilde{h}(v)=0$ para todo $v \in S$ y $\tilde{h}(z) \neq 0$. □

LEMA 5.2.3: *Sea* $\{\rho_n\}$ *que satisface la condición (C). Para cualquier* $X_0 \in L^*$*, si* $h \in L$ y $h * X_0 = 0$, entonces $\tilde{h}(\lambda)$ es cero en cada punto en el espectro de X_0.

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$S=\left\{\lambda: \quad h \in L,\ h * X_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{h}(\lambda)=0\right\}.$$

Probaremos que $\sigma(X_0) \subset S$. Veamos que S es cerrado. Sea $\lambda \in \overline{S}$, entonces existe una sucesión $\{\lambda_k\} \in S$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = \lambda$. Veamos que $\lambda \in S$, esto es, existe $h \in L$ con $\tilde{h}(\lambda)=0$. Por hipótesis, $\tilde{h}(\lambda_k)=0$ para todo *k*, es decir $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} h_n \lambda_k^n = 0$ para todo *k*. Luego tenemos de la continuidad de $\tilde{h}$ que

$$\tilde{h}(\lambda)=\sum_{-\infty}^{\infty} h_n \lambda^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \left(\lim_{k \to \infty} \lambda_k\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \left(\lim_{k \to \infty} \lambda_k^n\right) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \lambda_k^n = 0.$$

Por tanto $\lambda \in S$ y en consecuencia *S* es cerrado.

Sea S_1 cualquier subconjunto cerrado del círculo unitario tal que $S \subset S_1$ y el interior de *S* está contenido en S_1. Sea

$$E_{S_1}=\left\{X \in L^*: \quad \sigma(X) \subset S_1\right\}.$$

Veamos que $X_0 \in E_{S_1}$. De otra forma, como S_1 es cerrado, entonces por el lema 5.2.1 tenemos que E_{S_1} es débilmente cerrado, de modo que existe $h \in L$ con $X_0(h) \neq 0$ y $X(h) = 0$ para todo $X \in E_{S_1}$, en particular $X_\lambda(h) = 0$ para todo $\lambda \in S_1$; pero $X_\lambda(h) = \tilde{h}(\lambda)$, por tanto $\tilde{h}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in S_1$; de modo que $h * X_0 = 0$, como probaremos inmediatamente.

Si $h * X_0 \neq 0$ entonces el conjunto $I = \{k \in L : \ k * (h * X) = 0\}$ es un ideal propio y cerrado del álgebra *L*. Puesto que *L* es un anillo con unidad, el ideal *I* tiene un cero, es decir, existe *p* con $|p| = 1$ tal que para todo $k \in I$ se cumple que $\tilde{h}(p) = 0$. Afirmamos que $p \in S$, pues si $p \notin S$ existe $h_0 \in L$ tal que $h_0 * X = 0$ y $\widetilde{h_0}(p) \neq 0$. $h_0 \in I$ puesto que

$$h_0 * (h * X) = (h_0 * h) * X = h * (h_0 * X) = 0$$

pero esto contradice que *p* sea un cero del ideal *I*. Por tanto $p \in S$.

Por lema 5.2.2 podemos encontrar $h_1 \in L$ tal que $\widetilde{h_1}(p) \neq 0$ y $\widetilde{h_1}(\lambda) = 0$ fuera del interior de S_1, luego $\widetilde{h_1}$ y $\tilde{h}$ se hacen cero sobre conjuntos complementarios, para ver esto notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_m (h_1 * h)\lambda^m &= \sum_m \left[\sum_n (h_1)_n \, h_{m-n} \right] \lambda^m \\
&= \sum_m \sum_n (h_1)_n \, h_{m-n} \lambda^m \\
&= \sum_n \sum_m (h_1)_n \, h_{m-n} \lambda^m \\
&= \sum_n (h_1)_n \sum_m h_{m-n} \lambda^m \\
&= \sum_n (h_1)_n \sum_m h_m \lambda^{m+n} \\
&= \sum_n (h_1)_n \, \lambda^n \sum_m h_m \lambda^m \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

dependiendo en que conjunto este λ; por lo tanto los coeficientes de Fourier son cero y en consecuencia $h_1 * h = 0$. Por tanto $h_1 \in I$, pero como *p* es un cero de *I*, entonces $\widetilde{h}_1(p) = 0$, lo que es una contradicción. Por tanto $h * X_0 = 0.$

Así en particular $X_0(h)$, la coordenada cero de la sucesión $h * X_0$ es cero pues

$$
0 = (h * X_0)_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} h_m (X_0)_m = X_0(h).
$$

Lo que es una contradicción (notemos que $X_0(h) \neq 0$), por tanto $X_0 \in E_{S_1}$ y en consecuencia $\sigma(X_0) \subset S_1$. Como esto se cumple para todo S_1 con *S* en su interior, entonces $\sigma(X_0) \subset S$ y por tanto $\tilde{h}(\lambda) = 0$ en todo punto del espectro de *X*. □

5.3 Existencia De Un Subespacio Invariante

Sean B un espacio de Banach, B^* su espacio conjugado, $T: B \to B$ un operador lineal acotado con inversa T^{-1}; $S: B^* \to B^*$ su adjunto sobre B^* definido por $S(f) = f \circ S$..

Denotemos por $\sigma(T)$ el espectro del operador T y por $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ la resolvente de T. Por el teorema de Riesz, para todo $F \in B^*$ y $\varphi \in B$ la función de λ dada por

$$F(R_\lambda \varphi) = (F, R_\lambda \varphi)$$

es definida y analítica en cualquier componente conexa dada del complemento de $\sigma(T)$.

DEFINICIÓN 5.3.1: *Sea* $\sigma(T)$ *en el círculo unitario. Para todo* $\varphi \in B$, $\varphi \neq 0$ *definamos* Λ_φ *como el conjunto de todos los puntos p en el círculo unitario tales que para algún F en* B^* las funciones definidas por $(F, R_\lambda \varphi)$ *dentro y fuera del círculo unitario no se continúan analíticamente la una de la otra en cualquier arco del círculo unitario que contenga a p.*

TEOREMA 5.3.1: *Sea* $\{\rho_n\} = \{\|T^n\|\}$ *que satisface la condición (C). Sea* Λ *un subconjunto cerrado del círculo unitario. Entonces,*

$$C_\Lambda = \{\varphi \in B: \quad \Lambda_\varphi \subset \Lambda\}$$

es un subespacio cerrado de B y es invariante bajo T y T^{-1}.

DEMOSTRACIÓN: Nótese primero que

$$\left\|T^{m+n}\right\| \leq \left\|T^{m}\right\|\left\|T^{n}\right\|, \qquad \forall m,n \in \mathbb{Z}$$

de modo que $\rho_{m+n} \leq \rho_m \rho_n$. Luego podemos formar un álgebra de Banach L de sucesiones $\{h_n\}$ con $\sum_{-\infty}^{\infty} |h_n| \rho_n < \infty$ como en la sección 5.2. Puesto que $\{\rho_n\}$ satisface la condición (C), todos los resultados de 5.2 se pueden aplicar a este espacio particular L. También $\sigma(T)$ está sobre el círculo unitario (por la proposición 5.1.2).

Supongamos que $F \in B^*$ y $\varphi \in B$. Para $|\lambda| < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
R_\lambda &= (\lambda I - T)^{-1} \\
&= \left[-T\left(I - \lambda T^{-1}\right)\right]^{-1} \\
&= (T)^{-1}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda T^{-1}\right)^{n}\right] \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n} T^{-n-1}
\end{aligned}$$

por tanto, para todo $|\lambda| < 1$

$$\begin{aligned}
(F, R_\lambda \varphi) &= F\left(R_\lambda \varphi\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n} F\left(T^{-n-1}\varphi\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n} \left(F, T^{-n-1}\varphi\right).
\end{aligned}$$

Similarmente, para $|\lambda| > 1$, tenemos que

$$R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{n-1}}{\lambda^n}$$

y por consiguiente

$$\left(F, R_\lambda \varphi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(F, T^{n-1}\varphi\right)}{\lambda^n}.$$

Sea $X = \left\{\left(F, T^n \varphi\right)\right\}$. Veamos que $X \in L^*$, en efecto

$$\begin{aligned} \left|\left(F, T^n \varphi\right)\right| &\le \|F\| \left\|T^n \varphi\right\| \\ &\le \|F\| \left\|T^n\right\| \|\varphi\| \\ &= \|F\| \|\varphi\| \rho_n \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\left|\left(F, T^n \varphi\right)\right|}{\rho_n} \le \|F\| \|\varphi\| < \infty$$

y en consecuencia $X \in L^*$.

Por nuestra definición de espectro de una sucesión y la definición de Λ_ψ para $\psi \in B$ se sigue que

$$\lambda_0 \in \Lambda_{T\varphi} \quad \Rightarrow \quad \left(\exists F \in B^*\right)\left(\lambda_0 \notin \sigma\left(\left\{\left(F, T^n \varphi\right)\right\}\right)\right),$$ mientras que

$$\lambda_0 \notin \Lambda_{T\varphi} \quad \Rightarrow \quad (\forall\, F \notin B^*)\left(\lambda_0 \in \sigma\left(\left\{\left(F, T^n\varphi\right)\right\}\right)\right).$$

En efecto, si $\lambda_0 \in \Lambda_{T\varphi}$ entonces para algún $F \in B^*$ las funciones definidas por $\left(F, R_\lambda\left(T\varphi\right)\right)$ dentro y fuera del círculo unitario no se continúan analíticamente la una de la otra sobre cualquier arco este círculo que contenga a λ_0; por otro lado

$$\left(F, R_\lambda\left(T\varphi\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(F, T^n\varphi\right)}{\lambda^n}, \qquad |\lambda| > 1$$

$$\left(F, R_\lambda\left(T\varphi\right)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left(F, T^{-n}\varphi\right), \qquad |\lambda| < 1,$$

por consiguiente existe $F \in B^*$ tal que $\lambda_0 \notin \sigma\left(\left\{\left(F, T^n\varphi\right)\right\}\right)$. Análogamente se prueba la otra afirmación. Veamos ahora que para cada $\varphi \in B$, $\Lambda_\varphi = \Lambda_{T\varphi}$. En efecto, supongamos que $\lambda_0 \notin \Lambda_\varphi$ y tomemos cualquier $F \in B^*$; entonces para $|\lambda| > 1$

$$\begin{aligned} T\left(R_\lambda\varphi\right) &= T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{n-1}\varphi}{\lambda^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n\varphi}{\lambda^n} \\ &= R_\lambda\left(T\varphi\right) \end{aligned}$$

por tanto $\left(F, R_\lambda\left(T\varphi\right)\right) = \left(F, TR_\lambda\left(\varphi\right)\right)$. Similarmente se prueba la igualdad anterior cuando $|\lambda| < 1$. Luego por definición de operador adjunto

$$\begin{aligned}(SF, R_\lambda\varphi) &= SF(R_\lambda\varphi)\\ &= S\left[(FR_\lambda)(\varphi)\right]\\ &= (FR_\lambda)(T\varphi)\\ &= F\left[R_\lambda(T\varphi)\right]\end{aligned}$$

por tanto $(F, R_\lambda(T\varphi)) = (SF, R_\lambda\varphi)$. Pero $(SF, R_\lambda\varphi)$ es analítica en una vecindad de λ_0 puesto que $\lambda_0 \notin \Lambda_\varphi$; por consiguiente $\lambda_0 \notin \Lambda_{T\varphi}$. Por otro lado, suponga que $\lambda_0 \notin \Lambda_{T\varphi}$ y Tomemos cualquier $F \in B^*$, entonces

$$\begin{aligned}(F, R_\lambda\varphi) &= \left(F, R_\lambda T^{-1}(T\varphi)\right)\\ &= \left(S^{-1}F, R_\lambda(T\varphi)\right)\end{aligned}$$

pero $\left(S^{-1}F, R_\lambda(T\varphi)\right)$ es analítica en una vecindad de λ_0, por tanto $\lambda_0 \notin \Lambda_\varphi$. En resumen, hemos probado que $\Lambda_\varphi = \Lambda_{T\varphi}$. Por el mismo razonamiento también $\Lambda_\varphi = \Lambda_{T^{-1}\varphi}$. Veamos ahora que $T\varphi$ y $T^{-1}\varphi$ están en C_Λ. En efecto, sea $\varphi \in C_\Lambda$ entonces

$$\begin{gathered}\Lambda_\varphi \subset \Lambda\\ \Lambda_{T\varphi} \subset \Lambda\\ T\varphi \in C_\Lambda.\end{gathered}$$

Análogamente $T^{-1}\varphi \in C_\Lambda$. Esto nos demuestra que C_Λ **es invariante bajo** T **y** T^{-1}.

Antes de demostrar que C_Λ es un subespacio, veamos una identidad que nos ayudará en la prueba.

$$\left(F, R_\lambda\left(a\varphi_1 + b\varphi_2\right)\right) = a\left(F, R_\lambda\varphi_1\right) + b\left(F, R_\lambda\varphi_2\right).$$

En efecto, para $|\lambda| > 1$ tenemos

$$\left(F, R_\lambda\left(a\varphi_1 + b\varphi_2\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(F, T^{n-1}\left(a\varphi_1 + b\varphi_2\right)\right)}{\lambda^n}$$

$$\begin{aligned}
\left(F, R_\lambda\left(a\varphi_1 + b\varphi_2\right)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(F, aT^{n-1}\left(\varphi_1\right) + bT^{n-1}\left(\varphi_2\right)\right)}{\lambda^n} \\
&= a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(F, T^{n-1}\varphi_1\right)}{\lambda^n} + b\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(F, T^{n-1}\varphi_2\right)}{\lambda^n} \\
&= a\left(F, R_\lambda\varphi_1\right) + b\left(F, R_\lambda\varphi_2\right).
\end{aligned}$$

Similarmente se prueba la igualdad anterior para $|\lambda| < 1$.

- Veamos ahora que C_Λ es un subespacio de *B*.

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in C_\Lambda$, *a* y *b* escalares. Probemos que $\left(a\varphi_1 + b\varphi_2\right) \in C_\Lambda$, esto es, $\Lambda_{\left(a\varphi_1 + b\varphi_2\right)} \subset \Lambda$.

Sea $\alpha \notin \Lambda$, entonces, por hipótesis $\alpha \notin \Lambda_{\varphi_1}$ y $\alpha \notin \Lambda_{\varphi_2}$; de modo que

dada $F \in B^*$, $a\left(F, R_\lambda\varphi_1\right)$ es analítica en una vecindad V_1 de α y

dada $F \in B^*$, $b\left(F, R_\lambda\varphi_2\right)$ es analítica en una vecindad V_2 de α,

luego, la función

$$\left(F, R_\lambda\left(a\varphi_1 + b\varphi_2\right)\right) = a\left(F, R_\lambda\varphi_1\right) + b\left(F, R_\lambda\varphi_2\right)$$

Es analítica en $V = V_1 \bigcap V_2$ que es una vecindad de α, por tanto $\alpha \notin \Lambda_{(a\varphi_1 + b\varphi_2)}$ y por consiguiente $\Lambda_{(a\varphi_1 + b\varphi_2)} \subset \Lambda$. En resumen, hemos probado que C_Λ es un subespacio de *B*.

Solo nos resta probar que C_Λ es cerrado. Mostremos que si $\{\varphi_n\} \in C_\Lambda$ y $\varphi_n \to \varphi$, entonces $\varphi \in C_\Lambda$ (i.e. $\Lambda_\varphi \subset \Lambda$). Sea $\lambda_0 \notin \Lambda$ y suponga por el absurdo que $\lambda_0 \in \Lambda_\varphi$. Entonces $\lambda_0 \in \Lambda_{T\varphi}$, así que existe $F \in B^*$ con $\lambda_0 \in \sigma(X)$, donde $X = \left\{\left(F, T^n \varphi\right)\right\}$. Por otro lado, si $\lambda \notin \Lambda$, para cada *j*, $\lambda \notin \Lambda_{\varphi_j} = \Lambda_{T\varphi_j}$, y por consiguiente

$$\lambda \notin \sigma\left(X_j\right) = \sigma\left(\left\{\left(F, T^n \varphi_j\right)\right\}\right)$$

por tanto $\sigma\left(X_j\right) \subset \Lambda$ para todo *j*.

Veamos ahora que $X_j \xrightarrow{d} X \in L^*$; en efecto, nótese que al ser *T* y *F* continuos

$$\begin{aligned} \varphi_k \to \varphi \quad &\Rightarrow \quad T^n \varphi_k \to T^n \varphi \\ &\Rightarrow \quad \left(F, T^n \varphi_k\right) \to \left(F, T^n \varphi\right) \qquad \forall F \in B^*, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \left|\left(F, T^n \varphi_k\right)\right| &\le \|F\| \|T^n \varphi_k\| \\ &\le \|F\| \|T^n\| \|\varphi_k\| \\ &= \left(\|F\| \|\varphi_k\|\right) \rho_n \\ &= M \rho_n \end{aligned}$$

Por tanto $(F, T^n\varphi) \in L^*$ así que $X_j \xrightarrow{d} X = \{(F, T^n\varphi)\} \in L^*$, luego por el lema 5.2.1, $\sigma(X) \subset \Lambda$, en consecuencia $\lambda_0 \notin \sigma(X)$, lo que es una contradicción. Por tanto $\lambda_0 \notin \Lambda_\varphi$, de modo que $\varphi \in C_\Lambda$. □

LEMA 5.3.1: *Sea $T: B \to B$ un operador lineal acotado con inversa T^{-1}, tal que $\sigma(T)$ está sobre el círculo unitario. Sea $\lambda_0 \in \sigma(T)$ y γ cualquier círculo centrado en λ_0. Entonces existe $\varphi \in B$ y algún p en el interior de γ con $p \in \Lambda_\varphi$.*

DEMOSTRACIÓN: Si la conclusión del teorema fuera falsa, entonces, para todo $\varphi \in B$ y $F \in B^*$, la función $(F, R_\lambda\varphi)$ sería analítica en el interior de γ si definimos esto sobre el círculo unitario por continuidad. Sea γ' el círculo centrado en λ_0 y de radio menor que el de γ. Entonces, cada función $(F, R_\lambda\varphi)$ está acotada en γ', por lo tanto, el teorema de acotación uniforme asegura que $\sup_\lambda \|(F \circ R_\lambda)\| < M_F$, donde M_F es una constante que depende de *F*. Luego, por definición de operador adjunto $\sup_\lambda \|R_\lambda^*(F)\| < M_F$, además como esta desigualdad es válida para todo funcional *F* en el dual de *B* entonces nuevamente por el teorema de acotación uniforme tenemos que $\sup_\lambda \|R_\lambda^*\| < M_F$, pero como $\|R_\lambda^*\| = \|R_\lambda\|$ se tiene que $\|R_\lambda\|$ está acotada en γ'. También R_λ es continua sobre γ', excepto posiblemente en los dos puntos donde γ' intercepta al círculo unitario. Por lo tanto

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{R_\xi}{\xi - \lambda_0} \, d\xi$$

define un operador acotado (consecuencia del teorema de Cauchy). Entonces

$$\begin{aligned}(\lambda_0 I - T)R &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\lambda_0 I - T)R_\xi}{\xi - \lambda_0}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\lambda_0 I - T)R_\xi + (\xi I - \xi I)R_\xi}{\xi - \lambda_0}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\xi I - T)R_\xi}{\xi - \lambda_0}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\lambda_0 - \xi)IR_\xi}{\lambda_0 - \xi}\,d\xi\end{aligned}$$

pero por el teorema de Cauchy,

$$\int_\gamma \left(F, R_\xi \varphi\right) d\xi = 0, \qquad \forall F \in B^*, \varphi \in B.$$

Por tanto $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\xi d\xi = 0$, así que

$$\begin{aligned}(\lambda_0 I - T)R &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\xi I - T)R_\xi}{\xi - \lambda_0}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\xi I - T)(\xi I - T)^{-1}}{\xi - \lambda_0}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} I \int_\gamma \frac{1}{\xi - \lambda_0}\,d\xi \\ &= I.\end{aligned}$$

Similarmente se prueba que $R(\lambda_0 I - T) = I$; por tanto existe $R_{\lambda_0} = R$; de modo que $\lambda_0 \notin \sigma(T)$, lo que es una contradicción. □

TEOREMA 5.3.2 (Wermer): *Sea $T : B \to B$ un operador lineal acotado e invertible. Sea $\{\rho_n\} = \{\|T^n\|\}$ que satisface la condición (C). Si $\sigma(T)$ no se reduce a un solo punto, entonces T tiene un subespacio invariante no trivial en B.*

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(T)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sean

$$\gamma_1: \text{ círculo centrado en } \lambda_1$$
$$\gamma_2: \text{ círculo centrado en } \lambda_2,$$

y escojamos los radios suficientemente pequeños para que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$. Por lema 5.3.1, podemos encontrar elementos $\varphi_1, \varphi_2 \in B$ diferentes de cero y p_1 en el interior de γ_1 y p_2 en el interior de γ_2 tales que $p_1 \in \Lambda_{\varphi_1}$ y $p_2 \in \Lambda_{\varphi_2}$. Puesto que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$, resulta que $p_1 \neq p_2$.

Sea Λ un arco cerrado del círculo unitario tal que $p_1 \in \Lambda$, $p_2 \notin \Lambda$ y $\Lambda_1 \subset \Lambda$ un arco abierto tal que $p_1 \in \Lambda_1$. Entonces por lema 5.2.2, existe $h \in L$, $h = \{h_n\}$ tal que

$$\tilde{h}(p_1) = 1 \text{ y } \tilde{h}(\lambda) = 0 \text{ para todo } \lambda \text{ en el complemento de } \Lambda_1.$$

Sea $\psi = \sum_{-\infty}^{\infty} h_n T^n \varphi_1.$ Puesto que $h \in L$, resulta que $\psi \in B$ (notemos que $\|\psi\| < \|\varphi_1\| \sum_{-\infty}^{\infty} |h_n| \rho_n < \infty$). Probaremos a continuación

1) $\psi \neq 0$

2) $\Lambda_\psi \subset \Lambda$.

Notemos que de las dos condiciones anteriores se deduce que $C_\Lambda = \{\varphi \in B : \ \Lambda_\varphi \subset \Lambda\} \neq \{0\}$, puesto que $0 \neq \psi \in C_\Lambda$. Además, $p_2 \in \Lambda_{\varphi_2}$ y φ_2 no está en Λ; por tanto $\varphi_2 \notin C_\Lambda$, y así $C_\Lambda \neq B$. En consecuencia, C_Λ es un subespacio no trivial de *B*.

Veamos ahora la demostración de las propiedades.

Probemos **1)**. Supongamos que $\psi = 0$. Sean $X = \{X_n\} = \{(F, T^n \psi)\}$ y $Y = \{Y_n\} = \{(F, T^n \varphi_1)\}$. Escojamos $k \in L$ tal que $\tilde{k}(p_1) = 1$. Tenemos que para cualquier $F \in B^*$, por definición 5.2.3 y la de ψ

$$\begin{aligned}
(k * X)_n &= \sum_m k_{m-n} X_m \\
&= \sum_m k_{m-n} \left(F, T^m \psi\right) \\
&= \sum_m k_{m-n} \left(\sum_n h_n \left(F, T^{m+n} \varphi_1\right) \right) \\
&= \sum_m \sum_n k_{m-n} h_n \left(F, T^{m+n} \varphi_1\right) \\
&= \sum_m \left(\sum_n k_{m-n} h_n \right) \left(F, T^{m+n} \varphi_1\right) \\
&= \sum_m (h * k)_m \left(F, T^{m+n} \varphi_1\right) \\
&= \sum_m (h * k)_{m-n} \left(F, T^m \varphi_1\right) \\
&= \left((h * k) * Y\right)_n .
\end{aligned}$$

Por tanto $k * \{(F, T^n \psi)\} = (h * k) * \{(F, T^n \varphi_1)\}$, así que al ser $T^n \psi = 0$, entonces $(h * k) * \{(F, T^n \varphi_1)\} = 0$, por tanto, el lema 5.2.3 asegura que las series de Fourier de $(h * k)$ se anulan sobre el espectro de la sucesión $\{(F, T^n \varphi_1)\}$. Puesto que $p_1 \in \Lambda_{\varphi_1}$, existe F_0 en B^* con $p_1 \in \sigma\left(\{(F_0, T^n \varphi_1)\}\right)$. Por lo tanto la serie de Fourier de $(h * k)$ se anula en p_1; Pero $\tilde{h}(p_1) = 1$ y $\tilde{k}(p_1) = 1$; lo que es una contradicción, por tanto $\psi \neq 0$.

Veamos ahora **2)**. Sea $q \notin \Lambda$; supongamos que $q \in \Lambda_\psi = \Lambda_{T\psi}$, entonces, existe $F_1 \in B^*$ tal que $q \in \sigma\left(\left\{\left(F_1, T^n\psi\right)\right\}\right)$. Por tanto si $k \in L$ y $k * \left\{\left(F_1, T^n\psi\right)\right\} = 0$, tenemos por lema 5.2.3 que $\tilde{k}(q) = 0$. Pero por lema 5.2.2, podemos escoger un *k* tal que $\tilde{k}$ se anula sobre Λ y $\tilde{k}(q) \neq 0$. Ahora, puesto que $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ se anulan sobre conjuntos complementarios, resulta que $k * h = 0$.

Ya que $(h * k) * \left\{\left(F_1, T^n\varphi_1\right)\right\} = k * \left\{\left(F_1, T^n\psi\right)\right\}$, tenemos que $k * \left\{\left(F_1, T^n\psi\right)\right\} = 0$, luego por lema 5.3.1, $\tilde{k}(q) = 0$; lo que es una contradicción; por lo tanto $q \notin \Lambda_\psi$. En resumen, hemos probado que $\Lambda_\psi \subset \Lambda$.

En resumen, por el teorema 5.3.1, C_Λ es un subespacio propio invariante de *B*. □

Conclusiones

1. Para una sucesión de subespacios V_k no necesariamente cerrados de un espacio de Banach de dimensión infinita, el $\liminf V_k$ es un subespacio cerrado de V_k.

2. El resultado anterior no es válido cuando tomamos una subsucesión V_{n_k} y definimos el $\limsup V_k = \{x \in B: \ \exists x_{n_k} \in V_{n_k}, x_{n_k} \to x\}$. Si tomamos en un espacio de Banach dos subespacios M y N con $M \cap N = \{0\}$ y definimos $M = V_1 = V_3 = V_5 = \cdots$ y $N = V_2 = V_4 = V_6 = \cdots$; entonces

a) $\liminf V_n = \{0\}$

b) $\limsup V_n = M \cup N$

Pero notamos que $M \cup N$ no es un subespacio de *B*. Por lo tanto $\limsup V_n$ no es en general un subespacio. Se podría definir el $\limsup$ como el siguiente subespacio cerrado $gen\{x \in B: \ \exists x_{n_k} \in V_{n_k}, x_{n_k} \to x\}$, pero esto no ha resultado ser manejable.

3. La construcción para subespacios invariantes no triviales en el teorema de Aronszajn-Smith sirve para algunos operadores no necesariamente compactos.

4. La diferencia entre la prueba de Lomonosov y la de Hilden para la existencia de un subespacio invariante no trivial bajo el conmutante de un operador compacto *A* es que el primero usa el teorema del punto fijo de Schauder y el segundo contradice que el radio espectral $r(A) = 0$. Hilden usa el resultado clásico de expresar el radio espectral como $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.

5. Se mostró explícitamente cual era la base de Schauder para el espacio de sucesiones L definido en el capítulo 5.

6. Es fundamental considerar que la sucesión $\{\rho_n\}$ que cumple con $\rho_{n+m} \leq \rho_n \rho_m$ y $\rho_n = o\left(R^{|n|}\right)$ cuando $n \to \infty$ satisface la condición (C), pues de lo contrario podemos tomar $\rho_n = a^n$ y ver que dicha sucesión no es de $o\left(R^{|n|}\right)$ cuando $n \to \infty$.

7. La idea fundamental de la demostración del teorema de Wermer es la construcción de un subespacio invariante usando continuación analítica. Es plausible que la gran complejidad técnica de la demostración pueda ser simplificada. Un camino que se está intentando, es conseguir dicha continuación analítica directamente usando familias normales y el teorema de Montel para lograr obviar el resultado de Sjöberg.

Para un operador arbitrario T en B, $x \in B$ y $F \in B^*$ se tiene que $(F, R_\lambda x)$ es siempre analítica en la resolvente $\rho(T)$. Para algunos vectores ésta función puede ser continuada analíticamente. Un caso obvio, pero no útil, es $x = 0$. Para cada $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$ y $F \in B^*$ se pueden construir subespacios invariantes C_{λ_0} formado por todos los $x \in B$ tales que las funciones $(F, R_\lambda x)$ se pueden continuar analíticamente alrededor de λ_0.

Hay que ver bajo que condiciones éste conjunto es, en efecto, un subespacio invariante y propio. Técnicas similares se exponen en el capítulo sexto del libro Radjavi-Rosenthal [10] para casos donde la geometría local de $\sigma(T)$ alrededor de λ_0 satisface ciertas condiciones y el operador resolvente cumple con condiciones adicionales de crecimiento.

Bibliografía

[1]. Aronszajn N. and Smith K., Invariant Subspaces of Completely Continuous Operators. Ann. Of Math. 60, 345-350 (1954).

[2]. Banach, S., Théorie Des Opérations Linéaires, Warsaw, 1932.

[3]. Beurling, A., On Two Problems Concerning Linear Transformations In Hilbert Space. Acta math. 81, 239-255 (1949).

[4]. Conway, J. B, A Course in Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, (1990).

[5]. Dunford, N. and Schwartz J., Linear Operators. New York: Interscience Publishers, Vol 1, (1958).

[6]. Friedman, A., Foundations of Modern Analysis. New York: Dover Publications, Inc. (1982).

[7]. Godement R, Théorèmes Taubériens Spectrale, Annales Scientifiques De L'école Normale Supérieure, Vol. 64(1947), pp. 119-138

[8]. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis With Appl. New York: Wiley, (1978).

[9]. Lomonosov, V. J, Invariant Subspaces for Operators Commuting With Compact Operators. Functional Anal. and Appl., 7 (1973).

[10]. Radjavi, H and Rosenthal, P; invariant Subspaces, second edition, New York: Dover Publications, Inc. (2003).

[11]. Rudin, W., Real and Complex Analysis, 3d ed., McGraw Hill Book Company, New York, (1987).

[12]. Sjöberg, N. Sur Les Minorantes Sous Harmoniques D'une Function Donnée, 9^{th} Congrès Des Mathematicians Scandinaves, 1938, pp. 309-319.

[13]. Stone, M. H, On a Theorem of Pòlya, Journal of The Indian Mathematical Society, new series, vol. 12 (1948), pp 1-7.

[14]. Wermer, J., The Existence of Invariant Subspaces. Duke Math, J. 19, 615-622 (1952).