

REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO TIPO GERSHGORIN

Por

Luis Ramón Fuentes Castilla

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS PURAS

**UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ**

Junio, 2008

Aprobada por:

Héctor Salas, Ph.D
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Robert Acar, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Paul Castillo, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Dorial Castellanos , Ph.D
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Julio C. Quintana, Ph.D
Director del Departamento

Fecha

Abstract of Dissertation Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Science

GERSHGORIN TYPE REGIONS IN THE COMPLEX PLANE

By

Luis Ramón Fuentes Castilla

June 2008

Advisor: Héctor Salas Olaguer

Major Department: Mathematical Sciences

In 1931 Semion A. Gershgorin published an important result in linear algebra which was later called “Gershgorin’s Circles Theorem ”. This theorem establishes that if A is a $\mathbb{C}^{n \times n}$ matrix, then its eigenvalues are in some circle with center on an element $a_{i,i}$ of the diagonal and with radius the sum of the absolute values of the remaining entries in the row i .

In the following decades there occurred an explosion of results about eigenvalue inclusion regions of a matrix $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$; many of these results are due to Richard S. Varga who in 2004 compiled and published them in his book “Gershgorin and his Circles.”

In this presentation we collect and extend some of these results to partitioned matrices. We also show examples of results that are not true for partitioned matrices.

Resumen de Disertación Presentado a la Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO TIPO GERSHGORIN

Por

Luis Ramón Fuentes Castilla

Junio 2008

Consejero: Héctor Salas Olaguer
Departamento: Ciencias Matemáticas

En 1931 Semion A. Gershgorin publicó un importante resultado en el álgebra lineal que ahora es llamado “El Teorema de los Círculos de Gershgorin”. Este teorema establece que dada una matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sus autovalores se encuentran dentro de algún círculo centrado en un elemento $a_{i,i}$ de la diagonal de A y con radio la suma de los módulos de las restantes entradas de la fila i de A .

En las décadas siguientes se dió una explosión de resultados relativos a regiones donde se encuentran los autovalores de una matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, muchos de ellos debido a Richard S. Varga quien en el 2004 recopiló estos resultados y los publicó en su libro “Gershgorin and his Circles”.

En esta disertación recopilaremos y extenderemos estos resultados a matrices particionadas por bloques. Así como también mostraremos algunos ejemplos de resultados que no se cumplen para matrices particionadas por bloques.

La reproducción parcial ó total de este material sólo es permitida con fines pedagógicos.

Copyright © 2008

por

Luis Ramón Fuentes Castilla

A Dios, mis padres Manuela y Luis Carlos por TODO.
A Sindy y a Luis Manuel por ser una parte importante en mi vida
A mis hermanos por su gran apoyo durante todo este tiempo.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis Dr. Héctor Salas Olaguer por su invaluable colaboración en la realización de este trabajo.

A Sindy y Luis Manuel por su amor y buenos momentos que me han brindado.

A los profesores del Departamento de Ciencias Matemáticas que influyeron en mi formación en especial el Dr. Julio Barety.

A mis compañeros estudiantes graduados del Departamento de Ciencias Matemáticas: Angy, Catalina, Charlie, Edwin, Gabriel, Hector, Jonathan, Julian, Leonid, Rafael, Trilce.

A las secretarias del Departamento de Ciencias Matemáticas piezas claves en el funcionamiento de este.

A todas aquellas personas que de una ú otra manera siempre me han apoyado y colaborado.

TABLA DE CONTENIDO

	<u>Página</u>
ABSTRACT	II
RESUMEN	III
AGRADECIMIENTOS	VI
LISTA DE SIMBOLOS	VIII
1. INTRODUCCIÓN	1
2. PRELIMINARES	3
2.1. Conjunto de Gershgorin	3
2.2. Teoremas de Inclusión Tipo Gershgorin	8
2.2.1. Conjunto de Brauer	8
2.2.2. Conjunto de Brualdi	13
2.2.3. <i>S</i> -Conjunto de Gershgorin	19
2.3. Conjunto Minimal de Gershgorin	22
3. CONJUNTOS TIPO GERSHGORIN PARA MATRICES PARTICIO- NADAS POR BLOQUES	26
3.1. Conjunto de Gershgorin para Matrices Particionadas por Bloques	26
3.2. Teoremas de Inclusión Tipo Gershgorin para Matrices Particiona- das por Bloques	36
3.2.1. Conjunto Particionado de Brauer	36
3.2.2. Conjunto de Brualdi para Matrices Particionadas por Bloques	43
3.2.3. <i>S</i> -Conjunto de Gershgorin para Matrices Particionadas por Bloques	51
3.3. Conjunto Minimal de Gershgorin para Matrices Particionadas por Bloques	59
4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	64
4.1. Conclusiones:	64
4.2. Trabajos Futuros	66
APENDICES	68
A. PROGRAMAS EN MATLAB 7.0	69

LISTA DE SIMBOLOS

$r_i(A)$	Suma absoluta de la i -ésima fila de A (radio i -ésimo).
$\sigma(A)$	Espectro de la matriz A .
$\Gamma_i(A)$	i -ésimo disco de Gershgorin.
$\Gamma(A)$	Conjunto de Gershgorin.
$\rho(A)$	Radio espectral de A .
$ S $	Cardinal del conjunto S .
$\mathbb{G}(A)$	Conjunto de arcos dirigidos de A .
$C(A)$	Conjunto de ciclos fuertes y débiles del conjunto $\mathbb{G}(A)$.
$K_{i,j}(A)$	i, j -ésimo óvalo de Cassini-Brauer de A .
$\mathcal{H}(A)$	Conjunto de Brauer de A .
$B_\gamma(A)$	γ -lemniscata de Brualdi de A .
$\mathcal{B}(A)$	Conjunto de Brualdi de A .
$\mathcal{C}^S(A)$	S -conjunto de Gershgorin de A .
$\mathcal{D}_i(A)$	$\{i\}$ -conjunto de Gershgorin de A .
$\Gamma^R(A)$	Conjunto minimal de Gershgorin de A .
$\omega(A)$	Conjunto equiradial de A .
$\widehat{\omega}(A)$	Conjunto equiradial extendido de A .
$\omega_\emptyset(A)$	Conjunto equiradial de A .
$\widehat{\omega}_\emptyset(A)$	Conjunto equiradial extendido de A .
$\Omega(A)$	Conjunto equimodular de A .
$\widehat{\Omega}(A)$	Conjunto equimodular extendido de A .
Φ	Conjunto de l -uplas de normas asociadas a π .
$m(A_{i,i})$	Norma recíproca de $A_{i,i}$.
$\Gamma_{i,\pi}^\phi(A)$	i -ésimo conjunto particionado de Gershgorin relativo a π y ϕ de A .

$\Gamma_\pi^\phi(A)$	Conjunto particionado de Gershgorin relativo a π y ϕ de A .
$K_{i,j,\pi}^\phi(A)$	i, j -ésimo óvalo particionado de Cassini-Brauer relativo a π y ϕ .
$\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$	Conjunto particionado de Brauer relativo a π y ϕ de A .
$B_{\gamma,\pi}^\phi(A)$	γ -lemniscata particionada de Brualdi relativa a π y ϕ de A .
$\mathcal{B}_\pi^\phi(A)$	Conjunto particionado de Brualdi relativo a π y ϕ de A .
$\mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A)$	S -conjunto particionado de Gershgorin relativo a π y ϕ de A .
$G_\pi(A)$	Conjunto minimal particionado de Gerhsgorin.
$\omega_\pi^\phi(A)$	Conjunto equiradial particionado de A .
$\widehat{\omega}_{\pi,\mathcal{B}}^\phi(A)$	Conjunto equiradial extendido particionado de A .
$\omega_{\pi,\mathcal{B}}^\phi(A)$	Conjunto equiradial de Brualdi particionado de A .
$\widehat{\omega}_\pi^\phi(A)$	Conjunto equiradial extendido de Brualdi particionado de A .
$\Omega_\pi(A)$	Conjunto equimodular particionado de A .
$\widehat{\Omega}_\pi(A)$	Conjunto equimodular extendido particionado de A .

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El estudio del espectro de una matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una pieza fundamental en la teoría de matrices, por muchas décadas este tema ha sido escudriñado por muchos matemáticos. Pero en (1931) el matemático bieloruso S. Gershgorin describió una forma geométrica para ubicar el espectro de una matriz en el plano complejo, en años recientes el mejoramiento de este tipo de regiones a tomado cierta importancia. Lo cual nos impulso a realizar este trabajo.

Desde el momento en que S. Gershgorin dio a conocer la región de inclusión de autovalores que lleva su nombre, aparecieron una serie de diversos resultados interesantes en torno a estas regiones de inclusión. Pero sólo a mediados de los años 90, R. Varga, A. Kraustengl, L. Cvetkovic y V. Kostic entre otros, se tomaron la labor de comparar estos conjuntos buscando una región de inclusión mejor de autovalores de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Nuestro objetivo principal será estudiar y extender estos resultados a matrices particionadas por bloques, este estudio lo realizamos de la siguiente manera:

En el primer capítulo describimos los resultados preliminares más importantes sobre conjuntos usuales de inclusión de autovalores para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, establecimos la relaciones de contención entre ellos y de igual manera mostramos algunos ejemplos sobre estas regiones que nos ayuden a visualizar un poco nuestro

objetivo.

Luego, en el segundo capítulo extendimos las definiciones y resultados correspondientes a estas regiones de inclusión tipo Gershgorin para matrices particionadas por bloques, mostramos las diversas relaciones de contención entre estos conjuntos. También con ejemplos ilustramos mejor los diversos resultados obtenidos.

Por último, establecimos las conclusiones y los respectivos trabajos futuros que se pueden obtener de los temas aquí tratados.

Capítulo 2

PRELIMINARES

En este capítulo señalamos los resultados más importantes obtenidos sobre regiones que contienen los autovalores de una matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, estos resultados fueron recopilados por R. Varga (2004) en [13].

2.1. Conjunto de Gershgorin

Definición 1. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz cuadrada de orden n , definimos

- La suma absoluta de la i -ésima fila (radio i -ésimo) como

$$r_i(A) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}|, \quad \text{con} \quad N = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

- El espectro de A como

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - A) = 0\},$$

donde I es la matriz identidad de orden n .

- El radio espectral de A como

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (2.2)$$

- Definimos los discos de Gershgorin y el conjunto de Gershgorin respectivamente como:

$$\begin{cases} \Gamma_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq r_i(A)\}, & (i \in N) \\ y \\ \Gamma(A) = \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A) \end{cases}$$

Empecemos con el resultado dado por S. Gershgorin (1931) en [7].

Teorema 1. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\lambda \in \sigma(A)$, entonces existe $k \in N$, tal que

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq r_k(A),$$

es decir

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A).$$

Corolario 1. Para cualquier matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se tiene que

$$\rho(A) \leq \max_{i \in N} \sum_{j \in N} |a_{i,j}| = \|A\|_\infty,$$

donde $\rho(A)$ se define en (2.2).

Veamos un ejemplo del Teorema 1.

Ejemplo 1. Sea $A = \{a_{i,j}\} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, definida como

$$A = \begin{pmatrix} -1 + i & 2 & 0 \\ 0 & 1 + i & 2 \\ 2 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

entonces el conjunto de Gershgorin se muestra en la siguiente gráfica.

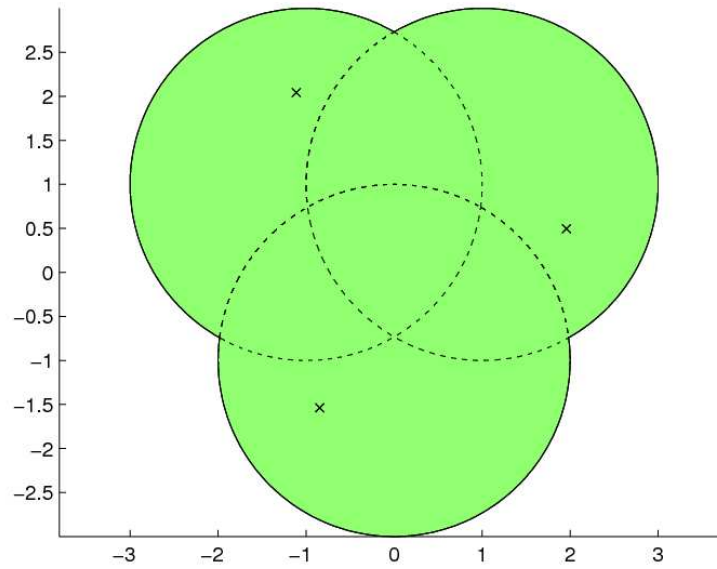


Figura 2-1: Conjunto de Gershgorin de la matriz A .

Definición 2. Una matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se dice *diagonal dominante* si

$$|a_{i,i}| \geq r_i(A) \quad \text{para todo } i \in N.$$

Si la desigualdad es estricta, A se dice *estrictamente diagonal dominante*.

A continuación presentamos un resultado equivalente al Teorema 1 obtenido anteriormente por Lévy, Desplanques, Minkowski y Hadamard [8].

Teorema 2. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces A no es singular.

Por otro lado, es bien sabido que si A no es singular, entonces A^t también no es singular. Así, aplicando el Teorema 1 a A^t se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 3. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tal que A satisfice

$$|a_{i,i}| > c_i(A) = r_i(A^t) = \sum_{j \in N - \{i\}} |a_{j,i}| \text{ para todo } i \in N, \quad (2.4)$$

entonces, A no es singular.

Definición 3. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se define el conjunto de Gershgorin de A^t como

$$\Gamma_i(A^t) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a_{i,i}| \leq c_i(A)\},$$

donde $c_i(A)$ es definida en (2.4) para todo $i \in N$.

Corolario 2. Si $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A^t).$$

Corolario 3. Para cualquier matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se tiene que

$$\sigma(A) \subseteq (\Gamma(A^t) \cap \Gamma(A)) \subseteq \Gamma(A).$$

Ejemplo 2. Sea $A = \{a_{i,j}\} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

entonces tenemos la siguiente gráfica de $\Gamma(A)$ y $\Gamma(A^t)$.

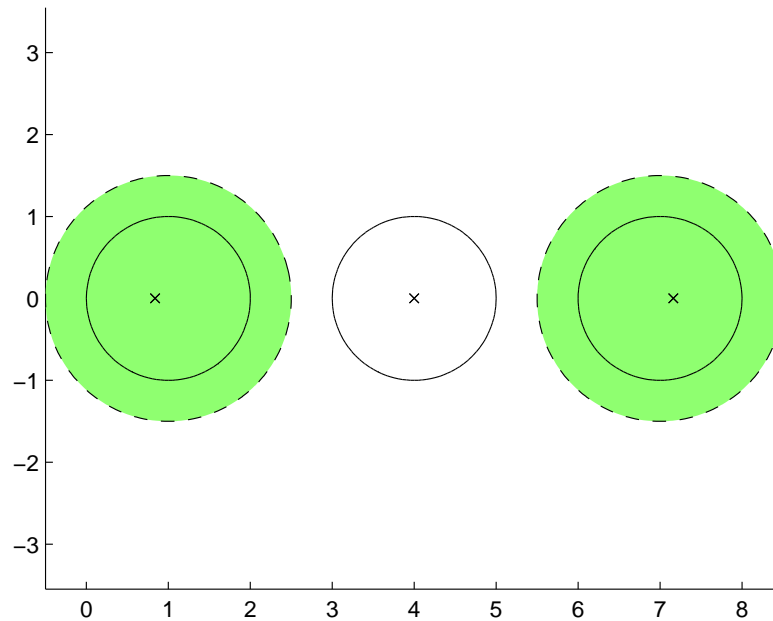


Figura 2-2: Conjunto de Gershgorin de la matriz A y Conjunto de Gershgorin de A^t (sombreado).

En la gráfica anterior podemos ver que los discos de Gershgorin de A (2.5) con centros en $z = 1$ y $z = 7$ son más pequeños que los discos de Gershgorin de A^t con los mismos centros, mientras que en $z = 4$ sucede lo contrario. Usando el Teorema 3 para la matriz A se tiene que $\lambda = 4$ es un autovalor de A y además que hay un autovalor en cada uno de los restantes círculos de radio $\frac{3}{2}$. Así, el conjunto $\Gamma(A) \cap \Gamma(A^t)$ consiste de dos círculos con centro en 1, 7 y radio 1, junto con el autovalor 4.

El resultado del Corolario 3 combina tanto filas de A , como columnas de A . Ostrowski en 1951 generalizó estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 4. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\alpha \in [0, 1]$. Supongamos que para todo $i \in N$ se tiene que

$$|a_{i,i}| > (r_i(A))^\alpha \cdot (c_i(A))^{1-\alpha},$$

entonces A no es singular.

Si $\alpha = 0$, entonces se obtiene el resultado del Teorema 3.

Si $\alpha = 1$, entonces se obtiene el resultado del Teorema 2.

2.2. Teoremas de Inclusión Tipo Gershgorin

Los resultados anteriores hacen uso sólo de una fila o columna específica de la matriz A para determinar regiones de inclusión de autovalores, en esta sección veremos conjuntos que utilizan varias filas de A a la vez.

2.2.1. Conjunto de Brauer

Aunque el primer resultado dado aquí fue gracias a A. Ostrowski en 1937. A. Brauer (1947) en [1] desarrolló los teoremas de inclusión del conjunto que lleva su nombre.

Teorema 5. *Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ tal que*

$$|a_{i,i}| \cdot |a_{j,j}| > r_i(A) \cdot r_j(A) \text{ para todo } i \neq j \in N, \quad (2.6)$$

entonces, A no es singular.

Definición 4. *Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, entonces para cada par de enteros distintos $i, j \in N$ se define el i, j -ésimo óvalo de Cassini-Brauer de la matriz A como*

$$K_{i,j}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \cdot |z - a_{j,j}| \leq r_i(A) \cdot r_j(A)\},$$

y el conjunto de Brauer como

$$\mathcal{K}(A) = \bigcup_{i,j \in N} K_{i,j}(A) \quad \text{con } i \neq j.$$

A continuación tenemos un resultado equivalente al Teorema 5 que nos brinda una región de inclusión de autovalores más fina que el conjunto de Gershgorin .

Teorema 6. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ y sea $\lambda \in \sigma(A)$, existen distintos $i, j \in N$, tal que

$$\lambda \in K_{i,j}(A).$$

además

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}(A) = \bigcup_{i,j \in N} K_{i,j}(A) \quad \text{con } i \neq j.$$

La demostración del Teorema 6 fue considerada por A. Brauer (1947) en [1]. Pero también se puede probar haciendo uso del Teorema 5. Suponiendo que es $\sigma(A) \not\subseteq \mathcal{K}(A)$, entonces la matriz $B = \{b_{i,j}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definida como:

$$b_{i,j} = \begin{cases} \lambda - a_{i,j} \text{ con } \lambda \in \sigma(A), & \text{si } i = j \\ -a_{i,j}, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

satisface (2.6). Por tanto, la matrix B no es singular, lo cual es una contradicción.

En el siguiente teorema se compara al conjunto de Gershgorin con el conjunto de Brauer. Algo curioso es que a pesar que el conjunto de Brauer fue descrito por A. Brauer en 1947, solo en el 2001 R. Varga [14] probó de manera sencilla este teorema considerando el hecho que si existen $i, j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, tales que $\frac{|z - a_{i,i}|}{r_i(A)} \cdot \frac{|z - a_{j,j}|}{r_j(A)} \leq 1$, entonces $\frac{|z - a_{i,i}|}{r_i(A)} \leq 1$ ó $\frac{|z - a_{j,j}|}{r_j(A)} \leq 1$, con lo cual $K_{i,j}(A) \subseteq \Gamma_i(A)$ ó $K_{i,j}(A) \subseteq \Gamma_j(A)$.

Teorema 7. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, entonces

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A).$$

Mostremos un ejemplo de este resultado.

Ejemplo 3. Sea $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, definida como en (2.3)

$$A = \begin{pmatrix} -1+i & 2 & 0 \\ 0 & 1+i & 2 \\ 2 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

entonces los óvalos de Cassini-Brauer vienen dados por

$$K_{1,2}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \cdot |z-1-i| \leq 4\}$$

$$K_{1,3}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \cdot |z+i| \leq 4\}$$

$$K_{2,3}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| \cdot |z+i| \leq 4\}.$$

La siguiente gráfica muestra el conjunto de Brauer $\mathcal{K}(A) = K_{1,2}(A) \cup K_{1,3}(A) \cup K_{2,3}(A)$, junto con el conjunto de Gersgorin $\Gamma(A)$.

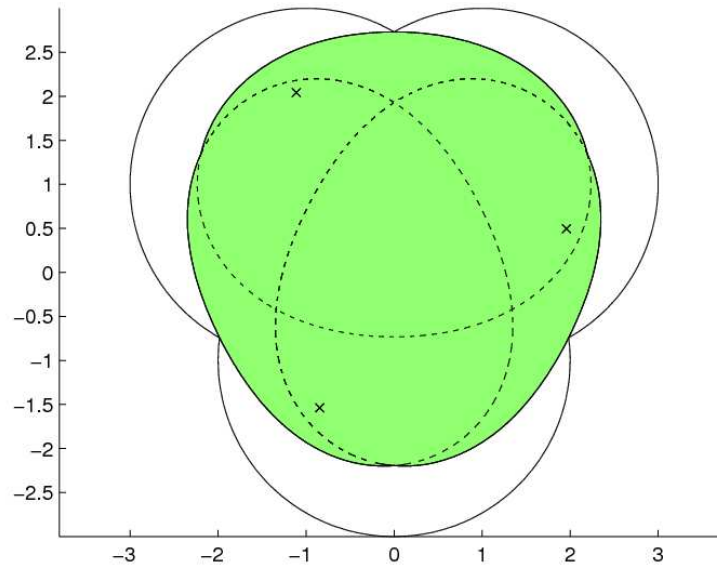


Figura 2–3: Conjunto de Gersgorin de A y Conjunto de Brauer de A (sombreado).

Como se puede observar el conjunto de Brauer es la unión de $\binom{n}{2}$ óvalos de Cassini-Brauer, mientras que el conjunto de Gershgorin solo es la unión de n discos. Lo cual implica que para valores grandes de n se necesitaría considerablemente más trabajo para calcular el conjunto de Brauer que para calcular el conjunto de Gershgorin.

En 1999 R. Varga y A. Krautstengl en [19] describieron dos conjuntos de matrices cuyos espectros guardan gran relación con el conjunto de Brauer. Estos son los resultados que obtuvieron

Definición 5. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se definen los siguientes conjuntos

1. El conjunto equiradial de A como:

$$\omega(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{i,i} = a_{i,i}, \text{ y } r_i(B) = r_i(A), (i \in N)\}. \quad (2.7)$$

2. El conjunto equiradial extendido de A como:

$$\hat{\omega}(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{i,i} = a_{i,i} \text{ y } r_i(B) \leq r_i(A), (i \in N)\}. \quad (2.8)$$

3. Definimos los espectros de los anteriores conjuntos (2.7) y (2.8) respectivamente como

$$\sigma(\omega(A)) = \bigcup_{B \in \omega(A)} \sigma(B) \quad (2.9)$$

$$\sigma(\hat{\omega}(A)) = \bigcup_{B \in \hat{\omega}(A)} \sigma(B). \quad (2.10)$$

Como consecuencia de la definición en (2.7) y (2.8) se tiene que

$$\sigma(\omega(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}(A)).$$

Teorema 8. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, entonces

$$\sigma(\omega(A)) = \begin{cases} \partial \mathcal{K}(A) = \partial K_{1,2}(A), & \text{si } n = 2 \\ \mathcal{K}(A), & \text{si } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.11)$$

Y en general, para $n \geq 2$ se tiene que

$$\sigma(\hat{\omega}(A)) = \mathcal{K}(A). \quad (2.12)$$

Por otro lado, es natural pensar que el resultado del Teorema 5 puede ser extendido a un número $m > 2$ de filas de A , pero esto no siempre es cierto. Consideremos la matriz A definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

entonces para $m = 3$ tenemos los conjuntos

$$l_{1,2,3}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \cdot |z + 1| \cdot |z - i| = 0\} = \{1, -1, i\}$$

$$l_{1,2,4}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \cdot |z + 1| \cdot |z + i| = 0\} = \{1, -1, -i\}$$

$$l_{1,3,4}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \cdot |z - i| \cdot |z + i| = 0\} = \{1, i, -i\}$$

$$l_{2,3,4}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| \cdot |z - i| \cdot |z + i| = 0\} = \{-1, i, -i\}.$$

De donde se nota que

$$\sigma(A) = \{1, 10, -1, 10, i, -i\} \not\subseteq (l_{1,2,3}(A)) \cup (l_{1,2,4}(A)) \cup (l_{1,3,4}(A)) \cup (l_{2,3,4}(A)).$$

2.2.2. Conjunto de Brualdi

R. Brualdi (1982) en [2] mostró un conjunto que es una extensión particular del Teorema 5 y hace uso de la reducibilidad de la matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Definición 6. Una matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ es reducible si existe una matriz permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y un entero positivo r , con $1 \leq r < n$, tal que

$$PAP^t = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right) \quad (2.13)$$

donde $A_{1,1} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ y $A_{2,2} \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (n-r)}$. Si no existe tal matriz permutación P , se dice que A irreducible.

Por conveniencia, el caso en que A sea reducible podemos expresar a PAP^t como:

$$PAP^t = \left(\begin{array}{c|c|c|c} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,m} \\ \hline 0 & R_{2,2} & \cdots & R_{2,m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & R_{m,m} \end{array} \right) \quad (2.14)$$

donde cada matriz $R_{i,j}$, $1 \leq j \leq m$ en (2.14), es tal que

$$\begin{cases} R_{j,j} \text{ es irreducible de orden } p_j \times p_j, \text{ con } p_j \geq 2 \text{ ó} \\ R_{j,j} \text{ es un escalar} \end{cases}$$

Además, la representación de PAP^t dada en (2.14) es única.

Definición 7. Dado $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vértices relacionados con las filas de A . Para cada entrada $a_{i,j} \neq 0$ de A conectamos el vértice inicial v_i con el vértice terminal v_j , por medio del arco dirigido $\overrightarrow{v_i v_j}$ del vértice inicial

v_i al vértice terminal v_j como en la figura 2-4.

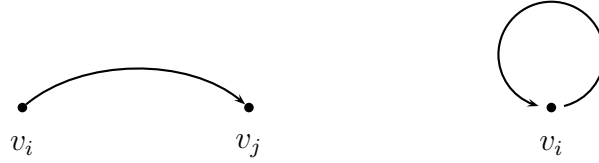


Figura 2-4: Arcos Dirigidos.

El grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ se define como el conjunto de todos los arcos dirigidos de A . De igual forma se define una trayectoria dirigida en $\mathbb{G}(A)$ como una colección de arcos dirigidos colindantes $\overrightarrow{v_{l_0}v_{l_1}}, \overrightarrow{v_{l_1}v_{l_2}}, \dots, \overrightarrow{v_{l_{r-1}}v_{l_r}}$, conectando el vértice inicial v_{l_0} con el vértice final v_{l_r} . Lo anterior implica que

$$\prod_{k=0}^{r-1} a_{l_k, l_{k+1}} \neq 0$$

Definición 8. El grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ de una matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se dice fuertemente conexo sí, para cada par de vértices v_i y v_j , existe una trayectoria dirigida en $\mathbb{G}(A)$ con vértice inicial en v_i y vértice final en v_j .

Se puede ver que si el grafo dirigido $\mathbb{G}(A)$ de $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es fuertemente conexo, entonces las entradas de cada fila de A no pueden ser todas nulas. Además, si $\mathbb{G}(A)$ es fuertemente conexo, entonces $\mathbb{G}(P^tAP)$ es también fuertemente conexo.

Definimos un ciclo fuerte γ en $\mathbb{G}(A)$ como una sucesión $\{i_j\}_{j=1}^{p+1}$ en N , tal que $p \geq 2$, los elementos de $\{i_j\}_{j=1}^p$ son todos distintos y $i_{p+1} = i_1$ y $\overrightarrow{v_{i_0}v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_1}v_{i_2}}, \dots, \overrightarrow{v_{i_p}v_{i_{p+1}}}$ son arcos de $\mathbb{G}(A)$, esto implica que

$$a_{i_1, i_2}; a_{i_2, i_3}; \dots; a_{i_p, i_{p+1}} \text{ no son ceros y } i_{p+1} = i_1,$$

por conveniencia se notarán los ciclos en la forma estándar de permutaciones.

$$\gamma = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_p, i_{p+1}) \text{ para } p \geq 2.$$

Si no existe un ciclo fuerte pasando por el vértice v_i , entonces se dice que por este pasa el ciclo débil $\gamma = (i)$, independiente de que $a_{i,i}$ sea 0 ó no. Al conjunto de todos los ciclos fuertes o débiles se nota $C(A)$.

Teorema 9. *Para cualquier matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se tiene que A es irreducible si y sólo si su grafo dirigido es fuertemente conexo.*

Definición 9. *Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con $n \geq 2$, si $\gamma = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_p)$ con $p \geq 1$ es un ciclo en $C(A)$, entonces la lemniscata de Brualdi $B_\gamma(A)$ de orden p es definida como*

$$B_\gamma(A) = \{z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{i,i}| \leq \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A)\},$$

donde, $\tilde{r}_i(A) = r_l(R_{j,j})$ y la i -ésima fila de A corresponde a la l -ésima fila de $R_{j,j}$ en (2.14).

Si $\gamma = (i)$ es un ciclo débil en $C(A)$, entonces

$$B_\gamma(A) = \{z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} |z - a_{i,i}| = \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A) = 0\} = \{a_{i,i}\}.$$

El conjunto de Brualdi se define como

$$\mathcal{B}(A) = \bigcup_{\gamma \in C(A)} B_\gamma(A).$$

Como $\sigma(PAP^t) = \sigma(A)$, entonces para nuestros fines de estudiar el espectro de la matriz A , de (2.14) basta con estudiar el espectro de las submatrices $R_{i,j}$ de:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} R_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & R_{2,2} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & R_{m,m} \end{array} \right) \quad (2.15)$$

Así, el conjunto de Brualdi de la matriz A se convierte en una extensión del conjunto de Brauer para las submatrices irreducibles $R_{i,j}$ de (2.15).

Teorema 10. *Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y λ un autovalor de A , entonces existe un ciclo γ en el conjunto de ciclos fuertes y débiles de A , $C(A)$, tal que*

$$\lambda \in B_\gamma(A) \tag{2.16}$$

además,

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{H}(A) \subseteq \Gamma(A). \tag{2.17}$$

(2.16) y (2.17) fueron obtenidos por R. Brualdi (1982) en [2] y R. Varga (2001a) en [14] respectivamente.

Ejemplo 4. *Sea $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ definida como en (2.3)*

$$A = \begin{pmatrix} -1+i & 2 & 0 \\ 0 & 1+i & 2 \\ 2 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

entonces se puede ver que A es irreducible. Así, el conjunto de ciclos fuertes y débiles sería $C(A) = \{(1), (2), (3), (123)\}$ y tenemos las siguientes lemniscatas de Brualdi

$$B_{(1)} = \{-1+i\}, \quad B_{(2)} = \{1+i\}, \quad B_{(3)} = \{-i\}$$

$$B_{(123)} = \{z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \cdot |z-1-i| \cdot |z+i| \leq 8\}.$$

De donde el conjunto de Brualdi $\mathcal{B}(A) = B_{(123)}(A)$ se muestra en la siguiente figura.

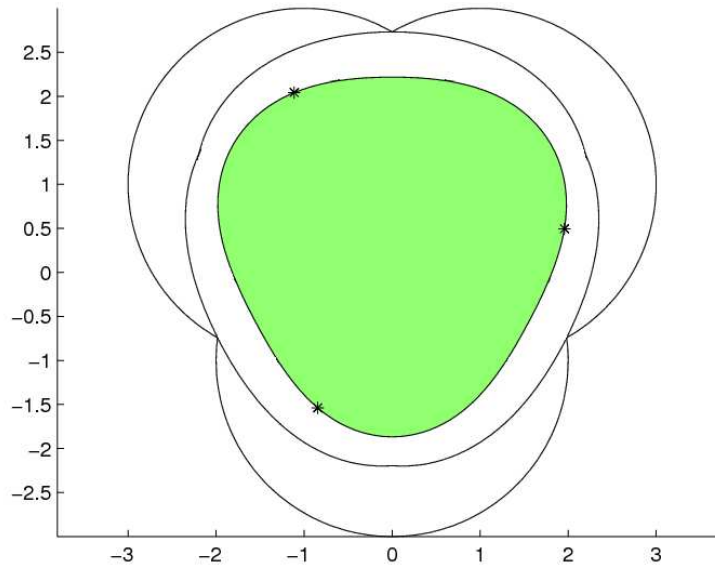


Figura 2-5: Conjunto de Gershgorin de A , Conjunto de Brauer de A (en el medio) y Conjunto de Brualdi de A (sombreado).

De igual manera para el conjunto de Brualdi tenemos el siguiente resultado correspondiente a el Teorema 2, con $\tilde{r}_i(A) = r_l(R_{j,j})$ y la i -ésima fila de A corresponde a la l -ésima fila de $R_{j,j}$ en (2.14).

Teorema 11. Si $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $C(A)$ es el conjunto de todos los ciclos fuertes y débiles de $\mathbb{G}(A)$ y si

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{i,i}| > \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A) \text{ para todo } \gamma \in C(A),$$

entonces A es no singular.

Como en la sección 2.2.1 existen dos conjuntos de matrices similares a los conjuntos equiradial y equiradial extendido cuyos espectros se comportan como el conjunto de Brualdi, estos son:

Definición 10. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se definen los conjuntos:

1. El conjunto equiradial de Brualdi de A como:

$$\omega_{\mathcal{B}}(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{i,i} = a_{i,i}, \tilde{r}_i(B) = \tilde{r}_i(A), (i \in N) \text{ y } C(A) = C(B)\}. \quad (2.18)$$

2. El conjunto equiradial de Brualdi extendido como:

$$\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{i,i} = a_{i,i}, \tilde{r}_i(B) \leq \tilde{r}_i(A), (i \in N) \text{ y } C(A) = C(B)\}. \quad (2.19)$$

3. Definimos los espectros de los anteriores conjuntos (2.18) y (2.19) respectivamente como

$$\sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A)) = \bigcup_{B \in \omega_{\mathcal{B}}(A)} \sigma(B) \quad (2.20)$$

$$\sigma(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)) = \bigcup_{B \in \hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)} \sigma(B). \quad (2.21)$$

De igual manera se tiene que

$$\sigma(\omega_{\mathcal{B}}(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)).$$

Con todo lo anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 12. Para cualquier $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se tiene que

$$\sigma(Cl(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A))) = \mathcal{B}(A).$$

Aquí $Cl(\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A))$ denota la clausura de $\hat{\omega}_{\mathcal{B}}(A)$.

2.2.3. S -Conjunto de Gershgorin

En esta sección se presentan los resultados obtenidos por L. Cvetkovic, V. Kostić y R. Varga (2004) en [4].

Definición 11. Sea $S \subseteq N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \geq 2$ y $\bar{S} = N \setminus S$ denota su complemento en N , entonces si $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ podemos partir $r_i(A)$ de (2.1) en dos partes dependiendo de S y \bar{S} , como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i(A) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{i,j}| + \sum_{j \in \bar{S} \setminus \{i\}} |a_{i,j}| = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), \\ \text{donde } r_i^S = 0, \text{ si } S = \emptyset \text{ y} \\ r_i^S(A) = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{i,j}| \text{ y } r_i^{\bar{S}}(A) = \sum_{j \in \bar{S} \setminus \{i\}} |a_{i,j}| \text{ para todo } i \in N \end{array} \right.$$

Definición 12. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ y $S \subseteq N$ no vacío, entonces A se dice S -estrictamente diagonal dominante si

$$\left\{ \begin{array}{l} |a_{i,i}| > r_i^S(A) \text{ para todo } i \in S \text{ y} \\ (|a_{i,i}| - r_i^S(A)) \cdot (|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) \cdot r_j^S(A) \text{ para todo } i \in S, \text{ y todo } j \in \bar{S} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Se puede notar que si $|a_{i,i}| - r_i^S(A) > 0$ para todo $i \in S$, entonces

$$\left(|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A) \right) > \frac{r_i^S(A) \cdot r_j^{\bar{S}}(A)}{|a_{i,i}| - r_i^S(A)} \geq 0.$$

Luego se tiene que

$$|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A) > 0.$$

Además, si $S = N$, $\bar{S} = \emptyset$ y las condiciones de (2.22) se convierten en la definición usual de estrictamente diagonal dominante.

Con lo establecido anteriormente se obtienen los siguientes resultados:

Teorema 13. *Sea $S \subseteq N$ no vacío, y sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, S -estrictamente diagonal dominante, entonces A es no singular.*

A diferencia del criterio de dominancia diagonal usual, el Teorema 13 no emplea todas las entradas de una fila de la matriz A para determinar si esta es o no es singular. La siguiente definición describe la región de inclusión autovalores correspondiente a este teorema.

Definición 13. *Sea $S \subseteq N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ no vacío, $n \geq 2$, entonces para cualquier $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se definen los S -discos de Gershgorin*

$$\Gamma_i^S(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq r_i^S(A)\} \text{ para cada } i \in S,$$

y el conjunto

$$V_{i,j}^S(A) = \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{i,i}| - r_i^S(A)) \cdot (|z - a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \leq r_i^{\bar{S}}(A) \cdot r_j^S(A)\},$$

para cada $i \in S$ y cada $j \in \bar{S}$.

Teorema 14. *Sea $S \subseteq N$ no vacío, y sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, entonces*

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{C}^S(A) = \left(\bigcup_{i \in S} \Gamma_i^S(A) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in S, j \in \bar{S}} V_{i,j}^S(A) \right).$$

Al conjunto $\mathcal{C}^S(A)$ se le llama el S -conjunto de Gershgorin.

Si $S = S_i = \{i\}$, para algún $i \in N$, entonces

$$\mathcal{C}^{S_i}(A) = \Gamma_i^{S_i}(A) \cup \left(\bigcup_{j \in N \setminus \{i\}} V_{i,j}^{S_i}(A) \right),$$

pero $r_i^{S_i}(A) = 0$, luego $\Gamma_i^{S_i}(A) = \{a_{i,i}\}$, además

$$V_{i,j}^{S_i}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \cdot (|z - a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|) \leq r_i(A) \cdot |a_{j,i}|\}.$$

Luego, definimos el conjunto $\mathcal{D}_i(A)$ como:

$$\mathcal{D}_i(A) = \mathcal{C}^{S_i}(A) = \bigcup_{j \in N \setminus \{i\}} V_{i,j}^{S_i}(A).$$

Teorema 15. *Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, entonces*

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}(A) \subseteq \Gamma(A),$$

donde $\mathcal{C}(A) = \bigcap_{S \subseteq N} \mathcal{C}^S(A)$, $\mathcal{D}(A) = \bigcap_{i \in N} \mathcal{D}_i(A)$ y $\mathcal{H}(A)$ es el conjunto de Brauer definido en la sección 2.2.1.

El conjunto $\mathcal{D}(A)$ fue también descrito en 1970 por L. Dashnic y M. Zusmanovich [13] de una manera distinta.

A continuación tenemos un ejemplo del conjunto $\mathcal{C}(A)$.

Ejemplo 5. *Sea $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ definida como en (2.3),*

$$A = \begin{pmatrix} -1+i & 2 & 0 \\ 0 & 1+i & 2 \\ 2 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

entonces para $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{1, 2\}$, $S_5 = \{1, 3\}$ y $S_6 = \{2, 3\}$ se tienen los siguientes conjuntos:

$$\Gamma^{S_1} = \{-1+i\}, \quad \Gamma^{S_2} = \{1+i\}, \quad \Gamma^{S_3} = \{-i\}$$

$$\Gamma^{S_4} = \Gamma_1(A) \cup \{1+i\}, \quad \Gamma^{S_5} = \{-1+i\} \cup \Gamma_3(A), \quad \Gamma^{S_6} = \Gamma_2(A) \cup \{-i\}$$

$$\mathcal{D}_1(A) = \mathcal{C}^{\{1\}}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \cdot (|z-1-i|-2) \leq 0 \text{ ó } |z+1-i| \cdot |z+i| \leq 4\} = \mathcal{C}^{\{2,3\}}$$

$$\mathcal{D}_2(A) = \mathcal{C}^{\{2\}}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| \cdot (|z+i|-2) \leq 0 \text{ ó } |z-1-i| \cdot |z+1-i| \leq 4\} = \mathcal{C}^{\{1,3\}}$$

$$\mathcal{D}_3(A) = \mathcal{C}^{\{3\}}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| \cdot (|z+1-i|-2) \leq 0 \text{ ó } |z+i| \cdot |z-1-i| \leq 4\} = \mathcal{C}^{\{1,2\}}$$

Así, el conjunto $\mathcal{C}(A) = \bigcap_{S \subseteq N} \mathcal{C}^S(A)$ se muestra en la siguiente figura.

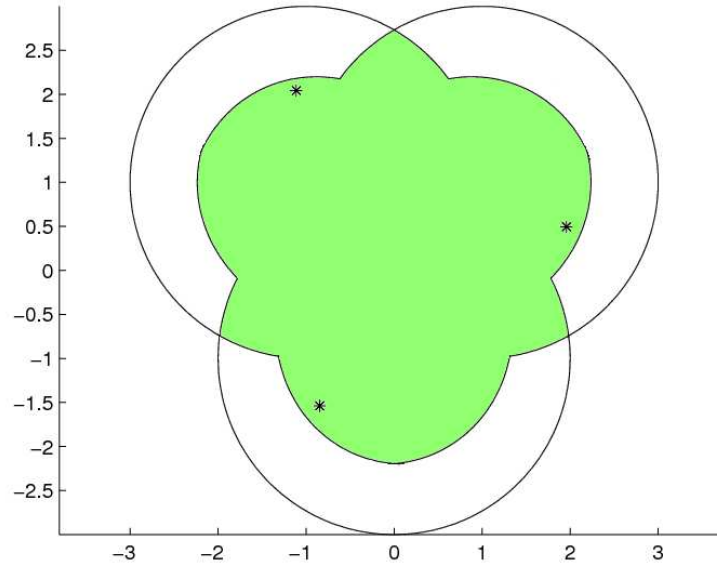


Figura 2-6: Conjunto de Gershgorin de A y el conjunto $\mathcal{C}(A)$ de A (interior).

R. Varga en [13] muestra un ejemplo donde $\mathcal{D}(A) \not\subseteq \mathcal{B}(A)$ ni $\mathcal{B}(A) \not\subseteq \mathcal{D}(A)$.

2.3. Conjunto Minimal de Gershgorin

El conjunto minimal de Gershgorin fue introducido por R. Varga (1965) en [15] y nuevamente retomado por el mismo (2001a) en [14], aquí presentamos algunos resultados.

Definición 14. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con $n \geq 2$, y $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^t > 0 \in \mathbb{R}^n$, esto es $x_i > 0$ para todo $i \in N$, entonces se definen:

- La suma absoluta pesada de la i -ésima fila (radio pesado i -ésimo) como

$$r_i^x(A) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| x_j / x_i, \text{ para cada } i \in N.$$

- El i -ésimo disco pesado de Gershgorin

$$\Gamma_i^{r^x}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq r_i^x(A)\}, \text{ para todo } i \in N.$$

- El conjunto pesado de Gershgorin

$$\Gamma^{r^x}(A) = \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^{r^x}(A).$$

Se puede notar que si $X = \text{Diag}(x) = \text{Diag}[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$, entonces $\sigma(A) = \sigma(X^{-1}AX)$. Así, aplicando el Teorema 1 a la matriz $X^{-1}AX$ se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 16. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con $n \geq 2$, y $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^t > 0 \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\sigma(A) = \sigma(X^{-1}AX) \subseteq \Gamma^{r^x}(A),$$

además,

$$\sigma(A) \subseteq \bigcap_{x > 0} \Gamma^{r^x}(A) = \Gamma^R(A). \quad (2.23)$$

Al conjunto $\Gamma^R(A)$ se le llama el conjunto minimal de Gershgorin.

El conjunto en (2.23) puede ser bastante tedioso de calcular. A continuación tenemos una forma mas sencilla de visualizarlo hecha por R. Varga (2001a) en [14].

Definición 15. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces se definen los siguientes conjuntos:

- El conjunto equimodular de A

$$\Omega(A) = \{B = [b_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{i,i} = a_{i,i} \text{ y } |b_{i,j}| = |a_{i,j}|, \text{ para todo } i, j \in N\}.$$

- El conjunto equimodular extendido de A

$$\widehat{\Omega}(A) = \{B = [b_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n} : b_{i,i} = a_{i,i} \text{ y } |b_{i,j}| \leq |a_{i,j}|, \text{ para todo } i, j \in N\}.$$

- Los espectros de los anteriores conjuntos vienen dados respectivamente por

$$\sigma(\Omega(A)) = \bigcup_{B \in \Omega(A)} \sigma(B) \quad \text{y} \quad \sigma(\widehat{\Omega}(A)) = \bigcup_{B \in \widehat{\Omega}(A)} \sigma(B). \quad (2.24)$$

De (2.24) se tiene que

$$\sigma(\Omega(A)) \subseteq \sigma(\widehat{\Omega}(A)) \subseteq \Gamma^R(A).$$

Con las anteriores consideraciones se tienen los siguientes resultados.

Teorema 17. Para cualquier matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se tiene que

$$\sigma(\widehat{\Omega}(A)) = \Gamma^R(A).$$

Corolario 4. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $n = 2$, entonces

$$\Gamma^R(A) = \mathcal{K}(A).$$

Teorema 18. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, entonces se tiene que

$$\Gamma^R(A) \subseteq \mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A).$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 16 a la matriz A^t se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, entonces

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^R(A^t) \cap \Gamma^R(A) \subseteq \Gamma^R(A)$$

Ejemplo 6. Sea $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ definida como en (2.3), entonces el conjunto minimal de Gershgorin $\Gamma^R(A) = \sigma(\widehat{\Omega}(A))$ se muestra en la siguiente figura.

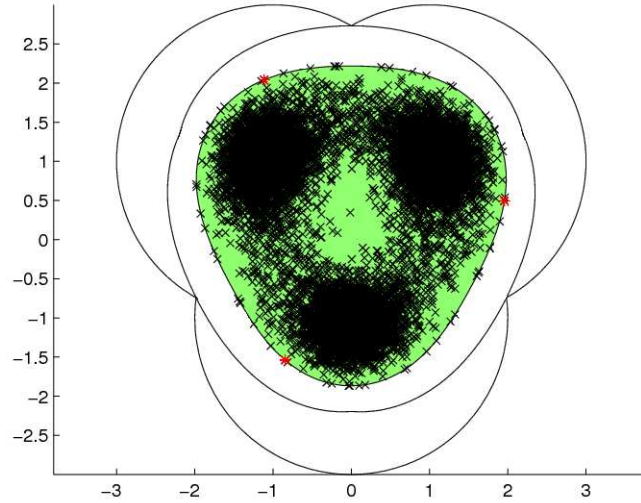


Figura 2-7: Conjunto de Gershgorin de A (exterior) y el conjunto minimal de Gershgorin de A (sombreado) con 10000 matrices de $\widehat{\Omega}(A)$.

Recientemente R. Varga, L. Cvetkovic y V. Kostic (2006) en [3] mostraron que si $S \subseteq N$ no vacío, $W^S = \{x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^t > 0 \in \mathbb{R}^n : x_i = 1, \text{ para cada } i \in S\}$ y $W = \bigcup_{S \subseteq N} W^S$, entonces

$$\Gamma^W(A) = \bigcap_{x \in W} \Gamma^x(A) = \mathcal{C}(A) = \bigcap_{S \subseteq N} \mathcal{C}^S(A). \quad (2.25)$$

Capítulo 3

CONJUNTOS TIPO GERSHGORIN PARA MATRICES PARTICIONADAS POR BLOQUES

3.1. Conjunto de Gershgorin para Matrices Particionadas por Bloques

En los resultados presentados en el capítulo 2 las regiones de inclusión obtenidas estaban estrechamente relacionadas con los elementos de la diagonal principal de la matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. En este capítulo se generalizaran estos resultados a matrices particionadas por bloques.

Definición 16. Una partición π de \mathbb{C}^n es una colección finita $\{W_i\}_{i=1}^l$ de subespacios lineales disjuntos con dimensión al menos 1, tal que su suma directa es \mathbb{C}^n , esto es:

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \dots \oplus W_l, \quad (3.1)$$

la partición π es denotada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$, donde los enteros p_j cumplen

$$p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_l = n.$$

Las particiones π de \mathbb{C}^n se pueden ordenar parcialmente de la siguiente manera. Si $\pi_1 = \{p_j\}_{j=0}^l$ y $\pi_2 = \{q_j\}_{j=0}^r$ son dos particiones de \mathbb{C}^n , entonces $\pi_1 \prec \pi_2$ si y solo si $\{p_j\}_{j=0}^l \subset \{q_j\}_{j=0}^r$. Si $\pi_1 \prec \pi_2$, se dice que π_1 es mas débil que π_2 (π_2 es más fuerte que π_1).

Así, $\pi_s = \{j\}_{j=0}^n$ y $\pi_w = \{0, n\}$ son las particiones más fuerte y más débil respectivamente de \mathbb{C}^n

Además podemos asumir que

$$W_j = \text{span}\{e_k : p_{j-1} + 1 \leq k \leq p_j\} \quad (j \in L = \{1, 2, \dots, l\}), \quad (3.2)$$

donde los vectores $\{e_k\}_{k=1}^n$ denota la base estándar de \mathbb{C}^n .

Luego, $\dim W_j = p_j - p_{j-1} \geq 1$ ($j \in L = \{1, 2, \dots, l\}$).

Dado $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y dada una partición $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ de \mathbb{C}^n entonces, la matriz A es particionada por π como:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,l} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,l} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{l,1} & A_{l,2} & \dots & A_{l,l} \end{array} \right) \quad (3.3)$$

donde cada submatriz $A_{i,j}$ en (3.3) representa una transformación lineal de W_j a W_i . Así, $A_{i,j} \in \mathbb{C}^{(p_i - p_{i-1}) \times (p_j - p_{j-1})}$ para todo $i, j \in L$

Definición 17. Si $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ es una partición de \mathbb{C}^n , entonces definimos

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_l),$$

como la l -upla norma, donde ϕ_j es una norma en el subespacio W_j , para cada $j \in L$ y denotamos

$$\Phi_\pi = \{\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_l) : \phi_j \text{ es una norma en } W_j, \text{ para cada } j \in L\}, \quad (3.4)$$

como el conjunto de todas las l -uplas de normas asociadas con π .

Definición 18. Dado $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_l) \in \Phi_\pi$ y la matriz bloque $A_{i,j}$ de la matriz A particionada en (3.3) se define la norma inducida por ϕ como

$$\|A_{i,j}\|_\phi = \max_{x \in W_j, x \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,j}x)}{\phi_j(x)}. \quad (3.5)$$

Se puede verificar fácilmente que (3.5) es en realidad una norma matricial.

Definición 19. Se definen

1. La norma recíproca de $A_{i,i}$ como:

$$m(A_{i,i}) = \min_{x \in W_i, x \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,i}x)}{\phi_i(x)}.$$

2. El i -ésimo radio particionado de A

$$r_{i,\pi}^\phi(A) = \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \quad (i \in L)$$

Si $A_{i,i}$ es singular, entonces existe $x \neq 0 \in W_i$ tal que $A_{i,i}x = 0$. Por tanto

$$m(A_{i,i}) = \min_{x \in W_i, x \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,i}x)}{\phi_i(x)} = 0$$

$$m(A_{i,i}) = 0.$$

Si $A_{i,i}$ no es singular, entonces

$$m(A_{i,i}) = \min_{x \in W_i, x \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,i}x)}{\phi_i(x)} = \min_{x \in W_i, x \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,i}x)}{\phi_i(A_{i,i}^{-1}A_{i,i}x)}$$

$$m(A_{i,i}) = \left[\max_{y \in W_i, y \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,i}^{-1}y)}{\phi_i(y)} \right]^{-1} \quad \text{Donde } y = A_{i,i}x$$

$$m(A_{i,i}) = (\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1}.$$

Así,

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} = \min_{x \in W_i, x \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,i}x)}{\phi_i(x)}.$$

Definición 20. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por π , entonces A se dice diagonalmente dominante por bloques con respecto a π si:

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} \geq r_{i,\pi}^\phi(A) \quad \text{Para todo } i \in L,$$

en caso de que la desigualdad sea estricta, entonces A se dice estrictamente diagonal dominante por bloques.

La definición 20 fue considerada simultáneamente por A. Ostrowski (1961) en [9], D. Feingold y R. Varga (1962) en [5] y por M. Fiedler y V. Pták (1962a) en [6].

Comencemos nuestra discusión presentando un resultado obtenido por R. Varga y D. Feingold (1962) en [5].

Teorema 19. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por π , si A es estrictamente diagonal dominante por bloques, esto es

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} > r_{i,\pi}^\phi(A) \quad \text{Para todo } i \in L,$$

entonces A no es singular.

Definición 21. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por π , se definen:

$$\begin{cases} \Gamma_{i,\pi}^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : (\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(A)\} \\ \Gamma_\pi^\phi(A) = \bigcup_{i \in L} \Gamma_{i,\pi}^\phi(A) \end{cases} \quad (3.6)$$

Donde I denota la matriz identidad para el subespacio W_i . Al conjunto $\Gamma_\pi^\phi(A)$ se le llama conjunto particionado de Gershgorin para A con respecto a π y ϕ .

Teorema 20. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por π . Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces existe un $i \in L$ tal que $\lambda \in \Gamma_{i,\pi}^\phi(A)$.

Por lo tanto

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A).$$

Demostración: Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por π , como $\lambda \in \sigma(A)$, entonces $\lambda I - A$ es singular, luego por el Teorema 19 existe al menos un i tal que

$$(\|(\lambda I - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(A).$$

Así $\lambda \in \Gamma_{i,\pi}^\phi(A)$. Y como esto ocurre para todo $\lambda \in \sigma(A)$, entonces

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A).$$

□

Veamos un ejemplo y comparemos el conjunto particionado de Gershgorin con respecto a π y ϕ con el conjunto de Gershgorin.

Ejemplo 7. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$, definida y particionada por $\pi = \{0, 2, 4, 6\}$ como sigue y $\phi = (\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 3 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 3i & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ \hline A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{array} \right) \quad (3.7)$$

Luego

$$(zI - A_{1,1})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(z+3)}{(z+4)(z+2)} & \frac{1}{(z+4)(z+2)} \\ \frac{1}{(z+4)(z+2)} & \frac{(z+3)}{(z+4)(z+2)} \end{pmatrix}$$

$$(zI - A_{2,2})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(z-3)}{(z-4)(z-2)} & \frac{1}{(z-4)(z-2)} \\ \frac{1}{(z-4)(z-2)} & \frac{(z-3)}{(z-4)(z-2)} \end{pmatrix}$$

$$(zI - A_{3,3})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(z-3i)}{(z+1-3i)(z-1-3i)} & \frac{1}{(z+1-3i)(z-1-3i)} \\ \frac{1}{(z+1-3i)(z-1-3i)} & \frac{(z-3i)}{(z+1-3i)(z-1-3i)} \end{pmatrix}$$

de lo anterior tenemos que

$$(\|(zI - A_{1,1})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{|z+4||z+2|}{|z+3|+1}, \quad (\|(zI - A_{2,2})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{|z-4||z-2|}{|z-3|+1}$$

$$(\|(zI - A_{3,3})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{|z+1-3i||z-1-3i|}{|z-3i|+1}$$

$$\|A_{1,2}\|_\infty = \|A_{3,1}\|_\infty = 2, \quad \|A_{2,1}\|_\infty = \|A_{2,3}\|_\infty = 1, \quad \|A_{1,3}\|_\infty = \|A_{3,2}\|_\infty = 0$$

Así, como $\Gamma_{i,\pi}^\phi = \{z \in \mathbb{C} : (\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\infty)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(A)\}$ entonces

$$\Gamma_{1,\pi}^\phi(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z+4||z+2|}{|z+3|+1} \right) \leq 2 \right\}$$

$$\Gamma_{2,\pi}^\phi(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z-4||z-2|}{|z-3|+1} \right) \leq 2 \right\}$$

$$\Gamma_{3,\pi}^\phi(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z+1-3i||z-1-3i|}{|z-3i|+1} \right) \leq 2 \right\}$$

De donde se obtienen las siguientes gráficas.

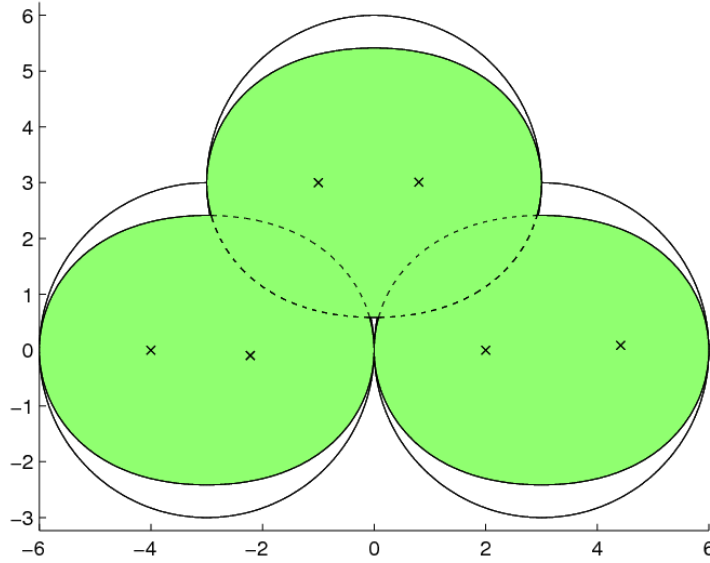


Figura 3-1: Gráfica del conjunto particionado de Gershgorin $\Gamma_\pi^\phi(A)$ para la matriz A (sombreado) y el conjunto de Gershgorin $\Gamma(A)$.

Aparentemente el conjunto particionado de Gershgorin da una mejor región donde se encuentran los autovalores de A que el conjunto de Gershgorin. Pero el siguiente ejemplo muestra lo contrario.

Ejemplo 8. Sea $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$, definida y particionada por $\pi = \{0, 2, 4\}$ como

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ \hline 1 & 0 & 2i & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & -2i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right)$$

entonces, igualmente tomando $\phi = (\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tenemos

$$(\|(zI - B_{1,1})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \min\{|z+2|, |z-2|\}$$

$$(\|(zI - B_{2,2})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \min\{|z-2i|, |z+2i|\} \text{ y } \|B_{1,2}\|_\infty = \|B_{2,1}\|_\infty = 1$$

De donde $\Gamma_\pi^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq 1 \text{ ó } |z-2| \leq 1 \text{ ó } |z+2i| \leq 1 \text{ ó } |z-2i| \leq 1\}$.

En la siguiente gráfica podemos ver que $\Gamma_\pi^\phi(A) \not\subseteq \Gamma(A)$.

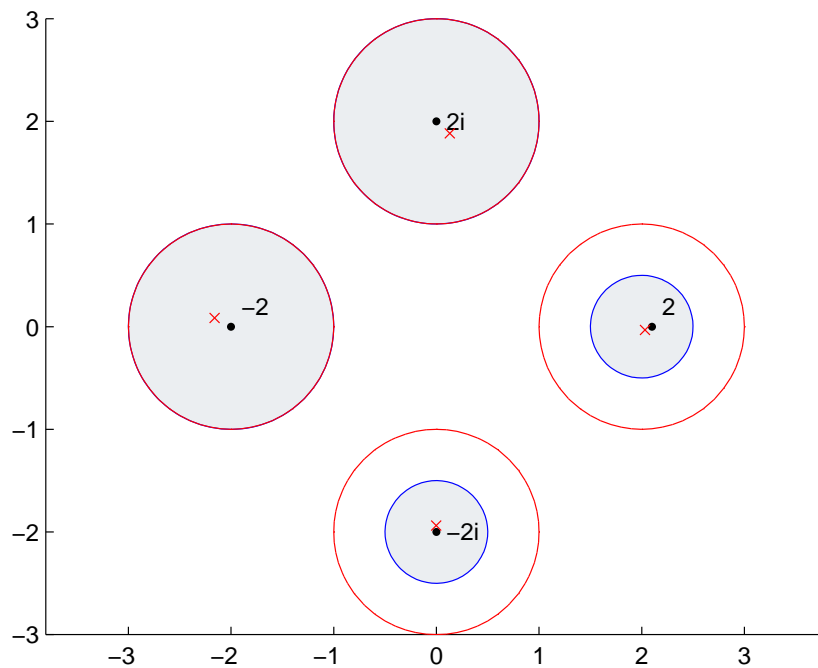


Figura 3–2: Gráfica del conjunto de Gershgorin de la matriz B (en azul y sombreado) y el conjunto particionado de Gershgorin de la matriz B (en rojo)

El siguiente teorema es una extensión del caso escalar del Teorema 4 a matrices particionadas por bloques, la demostración es muy similar al caso escalar.

Teorema 21. Sean $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$ y $\alpha \in [0, 1]$, supongamos que $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es particionada por π , tal que

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} > (r_{i,\pi}^\phi(A))^\alpha \cdot (c_{i,\pi}^\phi(A))^{1-\alpha} = \left(\sum_{k \in L - \{i\}} \|A_{i,k}\|_\phi \right)^\alpha \cdot \left(\sum_{k \in L - \{j\}} \|A_{k,j}\|_\phi \right)^{1-\alpha}. \quad (3.8)$$

para todo $i \in L$, entonces A no es singular.

Demostración: Supongamos que A es singular, cumple con (3.8) y $r_{i,\pi}^\phi(A) > 0$ para algún $i \in L$, entonces existe $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^t \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, tal que

$$Ax = 0.$$

Sea P_j el operador proyección de \mathbb{C}^n a W_j y llamemos $P_j x = X_j$. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^l A_{i,j} X_j = 0 \quad \text{para todo } i \in L$$

$$A_{ii} X_i = - \sum_{j \in L - \{i\}} A_{ij} X_j.$$

Luego aplicando ϕ_i a ambos lados, tenemos

$$\phi_i(A_{ii} X_i) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \phi_i(A_{ij} X_j) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{ij}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j)$$

$$\phi_i(A_{ii} X_i) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{ij}\|_\phi^\alpha \cdot (\|A_{ij}\|_\phi^{1-\alpha} \cdot \phi_j(X_j)).$$

Como $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{1-\alpha}$ son conjugados y por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \phi_i(A_{ii} X_i) &\leq \left(\sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{ij}\|_\phi^{\alpha \frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \cdot \left(\sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{ij}\|_\phi^{(1-\alpha) \frac{1}{1-\alpha}} \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ \phi_i(A_{ii} X_i) &\leq (r_{i,\pi}^\phi(A))^\alpha \left(\sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{ij}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por otro lado, tenemos por definición que

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} = \min_{x \in W_i, x \neq 0} \frac{\phi_i(A_{i,i}X_i)}{\phi_i(X_i)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \phi_i(A_{i,i}X_i) &\geq (\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_i(X_i) > (r_{i,\pi}^\phi(A))^\alpha \cdot (c_{i,\pi}^\phi(A))^{1-\alpha} \cdot \phi_i(X_i) \\ \phi_i(A_{i,i}X_i) &> (r_{i,\pi}^\phi(A))^\alpha \cdot (c_{i,\pi}^\phi(A))^{1-\alpha} \cdot \phi_i(X_i). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Así de (3.9) y (3.10)

$$\begin{aligned} (r_{i,\pi}^\phi(A))^\alpha \cdot (c_{i,\pi}^\phi(A))^{1-\alpha} \cdot \phi_i(X_i) &< (r_{i,\pi}^\phi(A))^\alpha \cdot \left(\sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ (c_{i,\pi}^\phi(A))^{1-\alpha} \cdot \phi_i(X_i) &< \left(\sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ c_{i,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_i(X_i)^{\frac{1}{1-\alpha}} &< \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Sumando todos los radios columnas $c_{i,\pi}^\phi(A)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l c_{i,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_i(X_i)^{\frac{1}{1-\alpha}} &< \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \\ \sum_{i=1}^l c_{i,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_i(X_i)^{\frac{1}{1-\alpha}} &< \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i \in L - \{j\}} \|A_{i,j}\|_\phi \right) \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \sum_{j=1}^l c_{j,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_j(X_j)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Luego, mirando los dos extremos de la desigualdad anterior tenemos una contradicción.

Así, si se tiene (3.8), entonces A no es singular.

□

Del Teorema 21 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6. Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, particionada por π , $\phi \in \Phi$ y $\alpha \in [0, 1]$, tal que para todo $i \in L$ se tiene

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \alpha r_{i,\pi}^{\phi}(A) + (1 - \alpha)c_{i,\pi}^{\phi}(A). \quad (3.11)$$

entonces A no es singular.

Demostración: Haciendo uso de la siguiente desigualdad $\alpha a + (1 - \alpha)b \geq a^{\alpha}b^{1-\alpha}$, para cualquier $a, b \geq 0$ y $\alpha \in [0, 1]$, con $a = r_{i,\pi}^{\phi}(A)$ y $b = c_{i,\pi}^{\phi}(A)$, tenemos que

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \alpha a + (1 - \alpha)b \geq a^{\alpha}b^{1-\alpha}, \quad (3.12)$$

con lo cual de (3.12)

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > (r_{i,\pi}^{\phi}(A))^{\alpha}(c_{i,\pi}^{\phi}(A))^{1-\alpha},$$

de donde se tiene por el Teorema 21 que A no es singular.

□

3.2. Teoremas de Inclusión Tipo Gershgorin para Matrices Particionadas por Bloques

A continuación extenderemos los resultados obtenidos en la sección 2.2 a matrices particionadas por bloques. Cabe notar que algunos resultados para matrices particionadas no se cumplen.

3.2.1. Conjunto Particionado de Brauer

Para el caso escalar del conjunto de Brauer de la sección 2.2.1 obtenemos para matrices particionadas por bloques la siguiente extensión, la demostración es similar al caso escalar.

Teorema 22. Si $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ es una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$. Si $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ esta particionada por π con $l \geq 2$ tal que

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot (\|A_{j,j}^{-1}\|_\phi)^{-1} > r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot r_{j,\pi}^\phi(A) \quad \forall i, j \in L, i \neq j, \quad (3.13)$$

entonces A no es singular.

Demostración: Supongamos que $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es singular y satisface (3.13), entonces existe $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$. Sea P_j el operador proyección de \mathbb{C}^n a W_j y $P_j x = X_j$. Puesto que

$$\sum_{j \in L} A_{i,j} X_j = 0 \quad \forall i \in L,$$

se tiene que

$$A_{i,i} X_i = - \sum_{j \in L - \{i\}} A_{i,j} X_j \quad \text{y} \quad \phi_i(A_{i,i} X_i) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j).$$

Por otro lado

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|)^{-1} \cdot \phi_i(X_i) \leq \phi_i(A_{i,i} X_i) \quad \forall i \in L,$$

de donde

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|)^{-1} \cdot \phi_i(X_i) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j). \quad (3.14)$$

Ordenemos x de tal forma que

$$\phi_t(X_t) \geq \phi_s(X_s) \geq \max\{\phi_k(X_k) : k \in L, k \neq s \text{ y } t\}.$$

Como $x \neq 0$, $\phi_t(X_t) \neq 0$. Si $\phi_s(X_s) = 0$, entonces $\phi_j(X_j) = 0$ para todo $j \neq t$ y $A_{t,t} X_t = 0$, pero esto es imposible ya que $A_{t,t}$ no es singular.

Si $i = t$ en (3.14) tenemos

$$(\|A_{t,t}^{-1}\|)^{-1} \cdot \phi_t(X_t) \leq \sum_{j \in L - \{t\}} \|A_{t,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j) \leq \sum_{j \in L - \{t\}} \|A_{t,j}\|_\phi \cdot \phi_s(X_s). \quad (3.15)$$

Si $i = s$ en (3.14) tenemos

$$(\|A_{s,s}^{-1}\|)^{-1} \cdot \phi_s(X_s) \leq \sum_{j \in L - \{s\}} \|A_{s,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j) \leq \sum_{j \in L - \{s\}} \|A_{s,j}\|_\phi \cdot \phi_t(X_t). \quad (3.16)$$

Luego multiplicando (3.15) y (3.16) tenemos

$$(\|A_{t,t}^{-1}\|)^{-1} \cdot (\|A_{s,s}^{-1}\|)^{-1} \cdot \phi_s(X_s) \cdot \phi_t(X_t) \leq \sum_{j \in L - \{t\}} \|A_{t,j}\|_\phi \cdot \sum_{j \in L - \{s\}} \|A_{s,j}\|_\phi \cdot \phi_t(X_t) \cdot \phi_s(X_s),$$

y dividiendo por $\phi_t(X_t) \cdot \phi_s(X_s)$

$$(\|A_{t,t}^{-1}\|)^{-1} \cdot (\|A_{s,s}^{-1}\|)^{-1} \leq \sum_{j \in L - \{t\}} \|A_{t,j}\|_\phi \cdot \sum_{j \in L - \{s\}} \|A_{s,j}\|_\phi.$$

lo cual contradice la hipótesis (3.13).

Por tanto, si A satisface (3.13), entonces A no es singular. □

Definición 22. Dada una partición $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi_\pi$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por π con $l \geq 2$, se define

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{i,j,\pi}^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : (\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot (\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot r_{j,\pi}^\phi(A)\} \\ \text{para } i, j \in L \text{ con } i \neq j \\ y \\ \mathcal{K}_\pi^\phi(A) = \bigcup_{i,j \in L, i \neq j} K_{i,j,\pi}^\phi(A) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

A $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ se le llama el conjunto particionado de Brauer de la matriz A con respecto a π y ϕ .

Teorema 23. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n con $l \geq 2$, $\phi \in \Phi_\pi$. Si $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es particionada por π y $\lambda \in \sigma(A)$, entonces existen $i, j \in L$ tal que

$$\lambda \in K_{i,j,\pi}^\phi(A).$$

Como esto vale para todo $\lambda \in \sigma(A)$, se tiene que

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A).$$

Demostración: Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces la matriz $\lambda I - A$ es singular y por el Teorema 22 existen t y $s \in L$ tal que

$$(\|(\lambda I - A_{t,t})^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot (\|(\lambda I - A_{s,s})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{t,\pi}^\phi(A) \cdot r_{s,\pi}^\phi(A).$$

Luego $\lambda \in K_{t,s,\pi}^\phi(A)$ y como esto es para todo λ , entonces

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A).$$

□

El próximo resultado correspondiente al Teorema 7, establece que para una partición fija de \mathbb{C}^n el conjunto particionado de Brauer esta contenido en el conjunto particionado de Gershgorin.

Teorema 24. Dada una partición $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ de \mathbb{C}^n con $l \geq 2$ y $\phi \in \Phi_\pi$, sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la cual es particionada por π , entonces

$$\mathcal{K}_\pi^\phi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A). \tag{3.18}$$

Demostración: Sea $z \in \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$, entonces existen $i, j \in L$ distintos, tal que $z \in \mathcal{K}_{i,j,\pi}^\phi(A)$, esto es

$$(\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot (\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot r_{j,\pi}^\phi(A).$$

Si $r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot r_{j,\pi}^\phi(A) = 0$, entonces $(\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} = 0$ ó $(\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} = 0$.

Así $z \in \sigma(A_{i,i}) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$ ó $z \in \sigma(A_{j,j}) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$, en cualquier caso

$$z \in \Gamma_\pi^\phi(A).$$

Ahora, si $r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot r_{j,\pi}^\phi(A) > 0$, entonces

$$\frac{(\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1}}{r_{i,\pi}^\phi(A)} \cdot \frac{(\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1}}{r_{j,\pi}^\phi(A)} \leq 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{(\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1}}{r_{i,\pi}^\phi(A)} \leq 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1}}{r_{j,\pi}^\phi(A)} \leq 1 \\ (\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(A) \quad \text{ó} \quad (\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{j,\pi}^\phi(A). \end{aligned}$$

De donde $z \in \Gamma_{i,\pi}^\phi(A) \cup \Gamma_{j,\pi}^\phi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$.

Por lo tanto

$$\mathcal{K}_\pi^\phi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A).$$

□

Ejemplo 9. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$, definida y particionada por $\pi = \{0, 2, 4, 6\}$ como en (3.7) ejemplo 7 y $\phi = (\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, entonces

$$K_{1,2,\pi}^\phi(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z+4||z+2|}{|z+3|+1} \right) \cdot \left(\frac{|z-4||z-2|}{|z-3|+1} \right) \leq 4 \right\}$$

$$K_{1,3,\pi}^\phi(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z+4||z+2|}{|z+3|+1} \right) \cdot \left(\frac{|z+1-3i||z-1-3i|}{|z-3i|+1} \right) \leq 4 \right\}$$

$$K_{2,3,\pi}^\phi(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z-4||z-2|}{|z-3|+1} \right) \cdot \left(\frac{|z+1-3i||z-1-3i|}{|z-3i|+1} \right) \leq 4 \right\}$$

La gráfica se muestra a continuación.

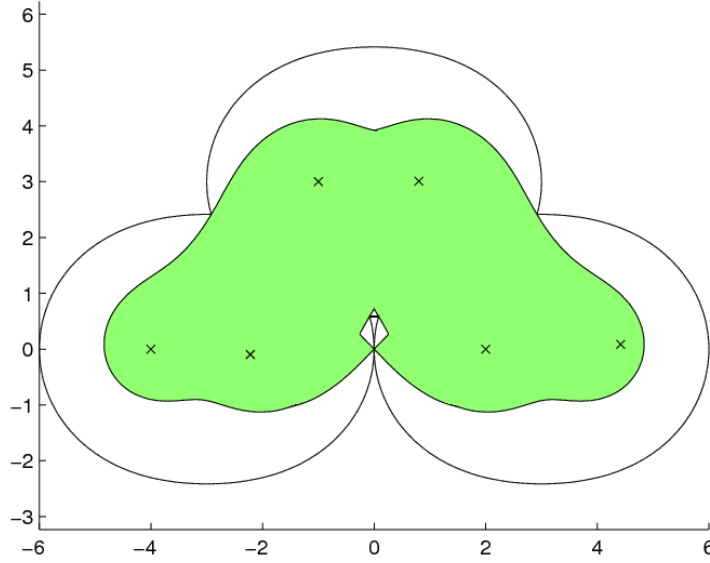


Figura 3-3: Gráfica del conjunto particionado de Brauer $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ para la matriz A (sombreado) y el conjunto de Gershgorin $\Gamma(A)$.

Además, tenemos la extensión de la definición 5 de los conjuntos equiradial y equiradial extendido para la matriz particionada A .

Definición 23. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n y $\phi \in \Phi_\pi$. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la cual es particionada por π , entonces:

1. El conjunto equiradial de la matriz particionada A como:

$$\omega_\pi^\phi(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : B_{i,i} = A_{i,i}, \text{ y } r_{i,\pi}^\phi(B) = r_{i,\pi}^\phi(A), (i \in L)\}. \quad (3.19)$$

2. El conjunto equiradial extendido de la matriz particionada A como:

$$\hat{\omega}_\pi^\phi(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : B_{i,i} = A_{i,i} \text{ y } r_{i,\pi}^\phi(B) \leq r_{i,\pi}^\phi(A), (i \in L)\}. \quad (3.20)$$

3. Definimos los espectros de los anteriores conjuntos (3.19) y (3.20) respectivamente como

$$\sigma(\omega_\pi^\phi(A)) = \bigcup_{B \in \omega_\pi^\phi(A)} \sigma(B) \quad (3.21)$$

$$\sigma(\hat{\omega}_\pi^\phi(A)) = \bigcup_{B \in \hat{\omega}_\pi^\phi(A)} \sigma(B). \quad (3.22)$$

Como consecuencia inmediata de la definición 23 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 25. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ y $\phi \in \Phi$, entonces

$$\sigma(\omega_\pi^\phi(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}_\pi^\phi(A)) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A). \quad (3.23)$$

En el siguiente ejemplo se puede notar que el resultado (2.12) del Teorema 8 no se cumple al extenderlo a matrices particionadas por bloques.

Ejemplo 10. Sea $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ definida como

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1/2 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right)$$

sean $\pi = \{0, 2, 4\}$, $\phi = (\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty) \in \Phi$ y A particionada por π , entonces

$$(\|(zI - A_{1,1})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{|z+3||z+1|}{|z+2|+1}$$

$$(\|(zI - A_{2,2})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{|z-3||z-1|}{|z-2|+1}$$

$$\|A_{1,2}\|_\infty = \|A_{2,1}\|_\infty = 1$$

Así, tenemos la siguiente gráfica.

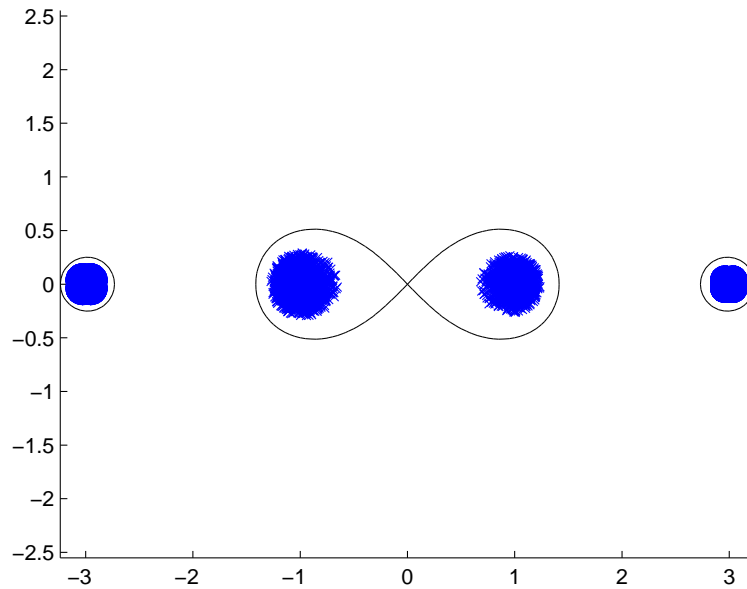


Figura 3–4: Gráfica del conjunto particionado de Brauer $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ para la matriz A y el conjunto $\sigma(\hat{\omega}_\pi^\phi(A))$ para 1000 matrices.

Aunque en la gráfica anterior el conjunto $\sigma(\hat{\omega}_\pi^\phi(A))$ es trazado con 1000 matrices del conjunto $\hat{\omega}_\pi^\phi(A)$, se puede ver en la forma en que esta definida la matriz A que este conjunto no alcanza a cubrir todo el conjunto de Brauer $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$.

3.2.2. Conjunto de Brualdi para Matrices Particionadas por Bloques

Definición 24. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ y $\phi \in \Phi_\pi$, consideremos la matrix $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{l \times l}$, donde

$$b_{i,j} = \begin{cases} (\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} & \text{si } i = j, \\ \|A_{i,j}\|_\phi & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.24)$$

con grafo dirigido $\mathbb{G}(B)$ y conjunto de ciclos fuertes y débiles $C(B)$, entonces se definen

- El grafo dirigido de A con respecto a π como $\mathbb{G}_\pi(A) = \mathbb{G}(B)$.
- Si γ es un ciclo fuerte en $\mathbb{G}(B)$, entonces es un ciclo fuerte en $\mathbb{G}_\pi(A)$, de manera similar sucede con los ciclos débiles.

- El conjunto de todos los ciclos fuertes y débiles de $\mathbb{G}_\pi(A)$ se nota $C_\pi(A)$.
- La matriz A es irreducible ó reducible con respecto a π si la matriz B es irreducible ó reducible respectivamente.

Se puede ver claramente en la definición 24 que el grafo dirigido de la matriz A con respecto a π no depende del vector norma ϕ escogido, sino solo de la partición π .

Si la matriz $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{l \times l}$ de (3.24) es reducible, entonces existe una matriz permutación $P \in \mathbb{R}^{l \times l}$ tal que

$$PBP^t = \left(\begin{array}{c|c|c|c} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,3} \\ \hline 0 & R_{2,2} & \cdots & R_{2,3} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & R_{s,s} \end{array} \right) \quad (3.25)$$

Ahora, definamos la matriz $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como

$$P_1 = \begin{cases} I_{s_k} & \text{si } p_{k,k} = 1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.26)$$

entonces

$$P_1AP_1^t = \left(\begin{array}{c|c|c|c} R'_{1,1} & R'_{1,2} & \cdots & R'_{1,3} \\ \hline 0 & R'_{2,2} & \cdots & R'_{2,3} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & R'_{v,v} \end{array} \right) \quad (3.27)$$

Donde $R'_{i,j} = A_{r,k}$ para algún $r, k \in L$ ó $R'_{i,j}$ es una matriz irreducible con respecto a π .

Así, para estudiar el conjunto de Brualdi en el caso particionado solo debemos estudiar las matrices $R'_{k,k}$ de (3.27).

Luego podemos definir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} (\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A)\}, \quad \forall \gamma \in C_\pi(A) \\ \text{Donde } \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A) = r_k(R'_{t,t}) \text{ y } R'_{t,t} \text{ es una matrix bloque de } P_1^t A P_1 \\ \mathcal{B}_\pi^\phi(A) = \bigcup_{\gamma \in C_\pi(A)} \mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Si $\gamma = \{j\} \in C_\pi(A)$ es un ciclo débil, entonces

$$\mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in \gamma} (\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A)\} = \sigma(A_{j,j}).$$

Además, $\sigma(A_{k,k}) \subseteq \mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A)$ para todo $k \in \gamma$ y todo $\gamma \in C(A)$.

Con lo anterior tenemos el siguiente teorema correspondiente al Teorema 10 del caso escalar del conjunto de Brualdi para matrices particionadas.

Teorema 26. *Dada una partición $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ de \mathbb{C}^n con $l \geq 2$ y $\phi \in \Phi_\pi$, sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la cual es particionada por π , y sea $C_\pi(A)$ su conjunto de ciclos. Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces existe $\gamma \in C_\pi(A)$ tal que*

$$\lambda \in \mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A).$$

Como esto es cierto para todo $\lambda \in \sigma(A)$, podemos concluir que

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{B}_\pi^\phi(A).$$

Demostración: Sea $\lambda \in \sigma(A)$ y A irreducible con respecto a π , entonces existe $x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Luego

$$(A_{i,i} - \lambda I)X_i + \sum_{j \in L - \{i\}} A_{i,j}X_j = 0,$$

donde $X_i = P_j x$ y P_j es el operador proyección de \mathbb{C}^n a W_j . Así

$$(A_{i,i} - \lambda I)X_i = - \sum_{j \in L - \{i\}} A_{i,j}X_j. \quad (3.29)$$

Aplicando la norma a ambos lados de (3.29) se tiene

$$\phi_i((A_{i,i} - \lambda I)X_i) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \phi_i(A_{i,j}X_j) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j). \quad (3.30)$$

Ahora, por definición de $\|\cdot\|_\phi$ y (3.30) tenemos

$$(\|(A_{i,i} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_i(X_i) \leq \phi_i((A_{i,i} - \lambda I)X_i) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j).$$

Sea $k \in L$, tal que $\phi_k(X_k) = \max_{j \in L - \{i\}} \{\phi_j(X_j)\}$ y $A_{i,k}X_k \neq 0$, entonces

$$(\|(A_{i,i} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_i(X_i) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_j(X_j) \leq \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_\phi \cdot \phi_k(X_k)$$

$$(\|(A_{i,i} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_i(X_i) \leq r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_k(X_k)$$

Tomando $i = i_1$ y $k = i_2$ en la ecuación anterior resulta

$$(\|(A_{i_1,i_1} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_{i_1}(X_{i_1}) \leq r_{i_1,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_{i_2}(X_{i_2}) \quad (3.31)$$

Similarmente, si tomamos $i = i_2$ y $k = i_3$ resulta

$$(\|(A_{i_2,i_2} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_{i_2}(X_{i_2}) \leq r_{i_2,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_{i_3}(X_{i_3}) \quad (3.32)$$

Si $i_3 = i_1$, entonces se tiene el ciclo fuerte $\gamma = (i_1, i_2)$ de $C_\pi(A)$, tal que

$$\prod_{i \in \gamma} (\|(A_{i,i} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_i(X_i) \leq \prod_{i \in \gamma} r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot \phi_i(X_i)$$

$$\prod_{i \in \gamma} (\|(A_{i,i} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq \prod_{i \in \gamma} r_{i,\pi}^\phi(A)$$

Así, $\lambda \in \mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A)$.

Si $i_3 \neq i_1$, podemos seguir con el proceso y conseguir una sucesión $\gamma = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_p)$ con $i_{p+1} = i_1$ tal que

$$(\|(A_{i_s, i_s} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot \phi_{i_s}(X_{i_s}) \leq r_{i_s, \pi}^\phi(A) \cdot \phi_{i_{s+1}}(X_{i_{s+1}}) \quad (3.33)$$

para cada $i_s \in \gamma$ y

$$\prod_{i=i_1}^{i_p} (\|(A_{i,i} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \phi_i(X_i) \leq \prod_{i=i_1}^{i_p} r_{i,\pi}^\phi(A) \phi_i(X_i)$$

De igual manera cancelando en ambos lados $\prod_{i=i_1}^{i_p} \phi_i(X_i)$ se tiene que

$$\prod_{i=i_1}^{i_p} (\|(A_{i,i} - \lambda I)^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq \prod_{i=i_1}^{i_p} r_{i,\pi}^\phi(A)$$

Y $\lambda \in \mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\pi(A)$.

Si A es reducible, entonces consideremos la representación de $P_1 A P_1^t$ en (3.27) y como $\sigma(A) = \sigma(P_1 A P_1^t) = \bigcup_{i=1}^v \sigma(R'_{i,i})$ solo basta con realizar el proceso anterior para las submatrices $R'_{i,i}$.

□

Teorema 27. Dada una partición $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ de \mathbb{C}^n con $l \geq 2$ y $\phi \in \Phi_\pi$, sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la cual es particionada por π y sea $C_\pi(A)$ su conjunto de ciclos, si $\lambda \in \sigma(A)$ entonces

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{B}_\pi^\phi(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A).$$

Demostración: Como para todo $i \in L$, se tiene que

$$\sigma(A_{i,i}) \subseteq \mathcal{K}_{i,j,\pi}^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : (|(zI - A_{i,i})^{-1}|_\phi)^{-1} \cdot (|(zI - A_{j,j})^{-1}|_\phi)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(A) \cdot r_{j,\pi}^\phi(A)\},$$

entonces si $\gamma = \{i\}$ es un ciclo débil en $C_\pi(A)$ se tiene que $\mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A) = \sigma(A_{i,i})$.

$$\text{Así, } \mathcal{B}_{\gamma,\pi}^\phi(A) \subseteq \mathcal{K}_{i,j,\pi}^\phi(A).$$

Supongamos que $\gamma = \{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}, i_p\}$, $p \geq 2$ es un ciclo fuerte en $C_\pi(A)$ con $i_{p+1} = i_1$ y tomemos las nuevas sumas por filas $\{\tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A)\}_{i=1}^l$ (si A es irreducible con respecto a π , $\{r_{i,\pi}^\phi(A)\}_{i=1}^l$), entonces

$$0 < \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A) \leq r_{i,\pi}^\phi(A) \quad (\forall i \in \gamma). \quad (3.34)$$

Sea $z \in \mathcal{B}_\pi^\phi(A)$, entonces

$$\prod_{k=1}^p (|(zI - A_{i_k, i_k})^{-1}|_\phi)^{-1} \leq \prod_{k=1}^p \tilde{r}_{i_k, \pi}^\phi(A).$$

$$\prod_{k=1}^p (|(zI - A_{i_k, i_k})^{-1}|_\phi)^{-2} \leq \prod_{k=1}^p \left(\tilde{r}_{i_k, \pi}^\phi(A) \right)^2.$$

$$\frac{\prod_{k=1}^2 (|(zI - A_{i_k, i_k})^{-1}|_\phi)^{-1}}{\prod_{k=1}^2 \tilde{r}_{i_k, \pi}^\phi(A)} \cdot \frac{\prod_{k=2}^3 (|(zI - A_{i_k, i_k})^{-1}|_\phi)^{-1}}{\prod_{k=2}^3 \tilde{r}_{i_k, \pi}^\phi(A)} \dots \frac{\prod_{k=p}^{p+1} (|(zI - A_{i_k, i_k})^{-1}|_\phi)^{-1}}{\prod_{k=p}^{p+1} \tilde{r}_{i_k, \pi}^\phi(A)} \leq 1.$$

De la anterior expresión vemos que no todos los factores pueden ser mayores que 1. Así

$$\frac{(\|(zI - A_{i_s, i_s})^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot (\|(zI - A_{i_{s+1}, i_{s+1}})^{-1}\|_\phi)^{-1}}{(\tilde{r}_{i_s, \pi}^\phi(A) \cdot \tilde{r}_{i_{s+1}, \pi}^\phi(A))} \leq 1 \quad \text{para algùn } 1 \leq s \leq p.$$

Luego

$$(\|(zI - A_{i_s, i_s})^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot (\|(zI - A_{i_{s+1}, i_{s+1}})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq \tilde{r}_{i_s, \pi}^\phi(A) \cdot \tilde{r}_{i_{s+1}, \pi}^\phi(A),$$

por tanto, por (3.34) tenemos

$$(\|(zI - A_{i_s, i_s})^{-1}\|_\phi)^{-1} \cdot (\|(zI - A_{i_{s+1}, i_{s+1}})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{i_s, \pi}^\phi(A) \cdot r_{i_{s+1}, \pi}^\phi(A).$$

Con lo cual $z \in \mathcal{H}_{i_s, i_{s+1}, \pi}^\phi(A) \subseteq \mathcal{H}_\pi^\phi(A)$.

□

Ejemplo 11. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$, definida y particionada como en (3.7) y

$$\phi = (\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty)$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 3 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 3i & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ \hline A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{array} \right)$$

luego, la matriz A es irreducible con respecto a π , los ciclos fuertes de $C_\pi(A)$ son

$$\gamma_1 = (1, 2) \text{ y } \gamma_2 = (1, 2, 3) \text{ y } \tilde{r}_{1, \pi}(A) = \tilde{r}_{2, \pi}(A) = r_{3, \pi}(A) = 2$$

$$B_{\gamma_1, \pi}^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z+4||z+2|}{|z+3|+1} \right) \cdot \left(\frac{|z-4||z-2|}{|z-3|+1} \right) \leq 4\}$$

$$B_{\gamma_2, \pi}^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : \left(\frac{|z+4||z+2|}{|z+3|+1} \right) \cdot \left(\frac{|z-4||z-2|}{|z-3|+1} \right) \cdot \left(\frac{|z+1-3i||z-1-3i|}{|z-3i|+1} \right) \leq 8\}$$

De donde se obtienen las siguientes gráficas.

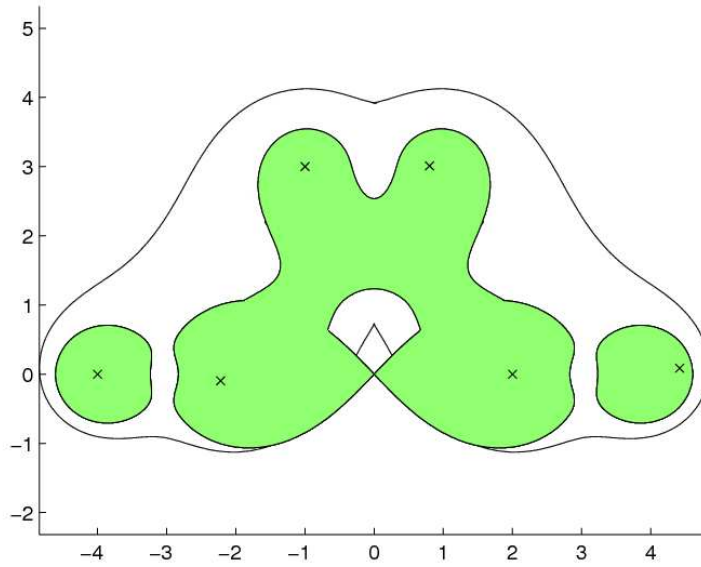


Figura 3–5: Gráfica del conjunto particionado de Brualdi $\mathcal{B}_\pi^\phi(A)$ para la matriz A (sombreado) y el conjunto particionado de Brauer $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ para la matriz A .

De igual manera que en la sección 2.2.1 podemos extender las definiciones de los conjuntos equiradial de Brualdi y equiradial de Brualdi extendido a matrices particionadas por bloques.

Definición 25. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n y $\phi \in \Phi_\pi$, sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la cual es particionada por π , entonces se definen los siguientes conjuntos

1. El conjunto equiradial de Brualdi de la matriz particionada A como:

$$\omega_{\pi, \mathcal{B}}^\phi(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : B_{i,i} = A_{i,i}, \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(B) = \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A) \text{ y } C_\pi(B) = C_\pi(A), (i \in L)\}. \quad (3.35)$$

2. El conjunto equiradial de Brualdi extendido de la matriz particionada A como:

$$\hat{\omega}_{\pi, \mathcal{B}}^\phi(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : B_{i,i} = A_{i,i}, \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(B) \leq \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A) \text{ y } C_\pi(B) = C_\pi(A), (i \in L)\}. \quad (3.36)$$

3. Definimos los espectros de los anteriores conjuntos (3.35) y (??) respectivamente como

$$\sigma(\omega_{\pi, \mathcal{B}}^{\phi}(A)) = \bigcup_{B \in \omega_{\pi, \mathcal{B}}^{\phi}(A)} \sigma(B) \quad (3.37)$$

$$\sigma(\hat{\omega}_{\pi, \mathcal{B}}^{\phi}(A)) = \bigcup_{B \in \hat{\omega}_{\pi, \mathcal{B}}^{\phi}(A)} \sigma(B). \quad (3.38)$$

De la definición 25 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 28. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ y $\phi \in \Phi$, entonces

$$\sigma(\omega_{\pi, \mathcal{B}}^{\phi}(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}_{\pi, \mathcal{B}}^{\phi}(A)) \subseteq \mathcal{B}_{\pi}^{\phi}(A).$$

Demostración: La demostración es consecuencia inmediata de la definición (25).

□

3.2.3. S -Conjunto de Gershgorin para Matrices Particionadas por Bloques

Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , A particionada por π , $\phi \in \Phi$ y $S \subseteq L = \{1, 2, 3, \dots, l\}$ no vacío, entonces

$$r_{i,\pi}^{\phi}(A) = \sum_{j \in L - \{i\}} \|A_{i,j}\|_{\phi} = \sum_{j \in S - \{i\}} \|A_{i,j}\|_{\phi} + \sum_{j \in \bar{S} - \{i\}} \|A_{i,j}\|_{\phi}$$

$$r_{i,\pi}^{\phi}(A) = r_{i,\pi}^{\phi,S}(A) + r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)$$

donde

$$r_{i,\pi}^{\phi,S}(A) = \sum_{j \in S - \{i\}} \|A_{i,j}\|_{\phi} \quad \text{y} \quad r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) = \sum_{j \in \bar{S} - \{i\}} \|A_{i,j}\|_{\phi}$$

Si $S = \{i\}$, entonces $r_{i,\pi}^{\phi,S}(A) = 0$ y $r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) = r_{i,\pi}^{\phi}(A)$.

A continuación daremos una extensión de la definición de S -diagonalmente dominante para matrices por bloques.

Definición 26. Dada una matriz $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$, $\phi \in \Phi_\pi$ y dado cualquier $S \subseteq L$ no vacío, entonces A se dice S -estrictamente diagonal dominante por bloques si

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad (\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} > r_{i,\pi}^{\phi,S}(A) \quad \text{para todo } i \in S \\ ii) \quad ((\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)) \cdot ((\|A_{j,j}^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)) > r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) \cdot r_{j,\pi}^{\phi,S}(A) \\ \quad \text{para todo } i \in S \text{ y para todo } j \in \bar{S} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Como por (3.39) (i), $(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A) > 0$, entonces

$$(\|A_{j,j}^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) > \frac{r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) \cdot r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)}{(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)} > 0$$

Así, $(\|A_{j,j}^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) > 0$

Si $S = L$, $\bar{S} = \emptyset$, entonces resulta la definición usual de diagonalmente dominante por bloques

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\phi)^{-1} > r_{i,\pi}^\phi(A) \quad \text{para todo } i \in L$$

Teorema 29. Dada una matriz $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ y $\phi \in \Phi_\pi$, si A es S -estrictamente diagonal dominante por bloques, entonces A no es singular.

Demostración: Si $S = L$, tenemos que $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalmente dominante por bloques y por Teorema 19 A es no singular.

Supongamos que S es un subconjunto no vacío de L , entonces como A es S -estrictamente diagonal dominante por bloques, se tiene que

$$\frac{r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)} < \frac{(\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)}$$

para todo $i \in S$ y para todo $j \in \bar{S}$.

Además

$$\max_{i \in S} \frac{r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)} < \min_{j \in \bar{S}} \frac{(\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)}$$

Definamos la matriz $W = \text{diag}[W_1, W_2, W_3, \dots, W_l]$ como

$$W_k = \begin{cases} \gamma I, & \text{para todo } k \in S \\ I, & \text{para todo } k \in \bar{S} \end{cases}$$

con γ satisfaciendo

$$\max_{i \in S} \frac{r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)} < \gamma < \min_{j \in \bar{S}} \frac{(\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)} \quad (3.40)$$

Luego $AW = [\Lambda_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

$$\Lambda_{i,j} = \begin{cases} \gamma A_{i,j}, & \text{para todo } i \in L \text{ y } j \in S \\ A_{i,j}, & \text{para todo } i \in L \text{ y } j \in \bar{S} \end{cases} \quad (3.41)$$

Veamos que la matriz AW es diagonalmente dominante por bloques

Por (3.40) tenemos que γ satisface

$$\frac{r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)} < \gamma < \frac{(\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)}$$

Para todo $i \in S$ y para todo $j \in \bar{S}$. Así,

$$\gamma > \frac{r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)} \quad \text{y} \quad \frac{(\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)}{r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)} > \gamma$$

Luego,

$$\gamma((\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)) > r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) \quad \text{y} \quad (\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) > \gamma r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)$$

$$\gamma(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \gamma r_{i,\pi}^{\phi,S}(A) + r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) \quad \text{y} \quad (\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) + \gamma r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)$$

$$(\|(\gamma A_{i,i})^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \sum_{k \in S - \{i\}} \gamma \|A_{i,k}\|_{\phi} + \sum_{k \in \bar{S} - \{i\}} \|A_{i,k}\|_{\phi} \quad \text{para todo } i \in S$$

$$(\|A_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \sum_{k \in \bar{S} - \{j\}} \|A_{j,k}\|_{\phi} + \sum_{k \in S - \{j\}} \gamma \|A_{j,k}\|_{\phi} \quad \text{para todo } j \in \bar{S}$$

de donde

$$(\|(AW)_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \sum_{k \in S - \{i\}} \|(AW)_{i,k}\|_{\phi} + \sum_{k \in \bar{S} - \{i\}} \|(AW)_{i,k}\|_{\phi} \quad \text{para todo } i \in S \quad (3.42)$$

$$(\|(AW)_{j,j}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \sum_{k \in \bar{S} - \{j\}} \|(AW)_{j,k}\|_{\phi} + \sum_{k \in S - \{j\}} \|(AW)_{j,k}\|_{\phi} \quad \text{para todo } j \in \bar{S} \quad (3.43)$$

Luego de (3.42) y (3.43) tenemos que

$$(\|(AW)_{i,i}^{-1}\|_{\phi})^{-1} > \sum_{k \in L - \{i\}} \|(AW)_{i,k}\|_{\phi} = r_{i,\pi}^{\phi}(A) \quad \text{para todo } i \in L. \quad (3.44)$$

Así, la matriz AW es estrictamente diagonal dominante por bloques y por tanto no es singular.

Como W no es singular y AW no es singular, entonces A tampoco es singular. \square

Definición 27. Sea $S \subseteq L = \{1, 2, 3, \dots, l\}$ no vacío, $n \geq 2$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ con $\phi \in \Phi_\pi$, se definen los conjuntos:

$$\Gamma_{i,\pi}^{\phi,S}(A) = \{z \in \mathbb{C} : (|| (zI - A_{i,i})^{-1} ||)^{-1} \leq r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)\} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{i,j,\pi}^{\phi,S}(A) &= \{z \in \mathbb{C} : ((|| (zI - A_{i,i})^{-1} ||)^{-1} - r_{i,\pi}^{\phi,S}(A)) \cdot ((|| (zI - A_{j,j})^{-1} ||)^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A)) \\ &\leq r_{i,\pi}^{\phi,\bar{S}}(A) \cdot r_{j,\pi}^{\phi,S}(A)\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Se define el S -conjunto particionado de Gershgorin de la matriz A como

$$\mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) = \Gamma_\pi^{\phi,S}(A) \bigcup \mathcal{V}_\pi^{\phi,S}(A)$$

donde

$$\Gamma_\pi^{\phi,S}(A) = \bigcup_{i \in S} \Gamma_{i,\pi}^{\phi,S}(A) \quad y \quad \mathcal{V}_\pi^{\phi,S}(A) = \bigcup_{i \in S, j \in \bar{S}} \mathcal{V}_{i,j,\pi}^{\phi,S}(A)$$

Del Teorema 29, (3.45) y (3.46) tenemos el siguiente resultado de inclusión de autovalores.

Teorema 30. Sea $S \subseteq L = \{1, 2, 3, \dots, l\}$ no vacío, $n \geq 2$ y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ con $\phi \in \Phi_\pi$, entonces, si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces

$$\lambda \in \Gamma_{i,\pi}^{\phi,S}(A) \bigcup \mathcal{V}_{i,j,\pi}^{\phi,S}(A)$$

para algún $i \in S$ y algún $j \in \bar{S}$.

Además

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) = \Gamma_\pi^{\phi,S}(A) \bigcup \mathcal{V}_\pi^{\phi,S}(A)$$

donde

$$\Gamma_\pi^{\phi,S}(A) = \bigcup_{i \in S} \Gamma_{i,\pi}^{\phi,S}(A) \quad y \quad \mathcal{V}_\pi^{\phi,S}(A) = \bigcup_{i \in S, j \in \bar{S}} \mathcal{V}_{i,j,\pi}^{\phi,S}(A)$$

Demostración: Supongamos que $\lambda \in \sigma(A) \not\subseteq \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A)$ y definamos la matriz $B = [B_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ como

$$B_{i,j} = \begin{cases} \lambda I - A_{i,i}, & \text{si } i = j \\ -A_{i,j}, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.47)$$

Luego, por la forma en que esta definida B en (3.47) satisface (3.39). Así, B no es singular, lo cual es una contradicción.

Por tanto $\sigma(A) \subseteq \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A)$.

□

Cuando A es particionada en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right)$$

entonces $\mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) = \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ para cualquier $S \subset L = \{1, 2\}$ distinto de vacío, con $\mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A)$ el S -conjunto particionado de Gershgorin y $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ el conjunto particionado de Gershgorin.

Definición 28. Sea la matriz $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$, $\phi \in \Phi_\pi$, entonces se define el conjunto

$$\mathcal{C}_\pi^\phi(A) = \bigcap_{S \subseteq L} \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) = \bigcap_{S \subseteq L} \left(\Gamma_\pi^{\phi,S}(A) \cup \mathcal{V}_\pi^{\phi,S}(A) \right) \quad (3.48)$$

Si $S \subseteq L$, no necesariamente se tiene que $\mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$, pero el siguiente teorema hace uso de cada $\mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A)$ para obtener una region de inclusión contenida en $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$.

Teorema 31. Sea la matriz $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$, $\phi \in \Phi_\pi$, entonces

$$\mathcal{C}_\pi^\phi(A) = \bigcap_{S \subseteq L} \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A).$$

Demostración: Consideremos todos los subconjuntos S de L de la forma $S = \{i\}$, entonces definamos

$$\mathcal{D}_\pi^\phi(A) = \bigcap_{i \in L} \mathcal{C}_\pi^{\phi,\{i\}}(A) = \bigcap_{i \in L} \mathcal{V}_\pi^{\phi,\{i\}}(A). \quad (3.49)$$

Entonces,

$$\mathcal{C}_\pi^\phi(A) = \bigcap_{S \subseteq L} \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) \subseteq \mathcal{D}_\pi^\phi(A). \quad (3.50)$$

Ahora, solo debemos probar que $\mathcal{D}_\pi^\phi(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$.

Sea $z \in \mathcal{D}_\pi^\phi(A)$, entonces por (3.49) para todo $i \in L$, $z \in \mathcal{V}_\pi^{\phi,\{i\}}(A)$.

Así, existe $j \in L - \{i\}$, tal que $z \in \mathcal{V}_{i,j,\pi}^{\phi,\{i\}}(A)$, pero $\mathcal{V}_{i,j,\pi}^{\phi,\{i\}}(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$.

Luego, existe $k \in L$ tal que $(\|(zI - A_{k,k})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{k,\pi}^\phi(A)$. Tomemos $i = k$, entonces

$$\begin{aligned} & \left((\|(zI - A_{k,k})^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{k,\pi}^{\phi,\{k\}}(A) \right) \cdot \left((\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} - r_{j,\pi}^{\phi,\{k\}}(A) \right) \leq r_{k,\pi}^{\phi,\{k\}}(A) \cdot r_{j,\pi}^{\phi,\{k\}}(A) \\ & \left((\|(zI - A_{k,k})^{-1}\|_\phi)^{-1} \right) \cdot \left((\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} \right) \leq \left((\|(zI - A_{k,k})^{-1}\|_\phi)^{-1} \right) \cdot \left(r_{j,\pi}^\phi(A) - \|A_{j,k}\|_\phi \right) \\ & \quad + r_{k,\pi}^\phi(A) \cdot \|A_{j,k}\|_\phi \\ & \left((\|(zI - A_{k,k})^{-1}\|_\phi)^{-1} \right) \cdot \left((\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} \right) \leq r_{k,\pi}^\phi(A) \cdot \left(r_{j,\pi}^\phi(A) - \|A_{j,k}\|_\phi \right) + r_{k,\pi}^\phi(A) \cdot \|A_{j,k}\|_\phi \\ & \left((\|(zI - A_{k,k})^{-1}\|_\phi)^{-1} \right) \cdot \left((\|(zI - A_{j,j})^{-1}\|_\phi)^{-1} \right) \leq r_{k,\pi}^\phi(A) \cdot r_{j,\pi}^\phi(A) \end{aligned}$$

de donde de $z \in \mathcal{K}_{k,j,\pi}^\phi(A)$ y

$$\mathcal{D}_\pi^\phi(A) \subseteq \mathcal{K}_{k,j,\pi}^\phi(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A) \quad (3.51)$$

Por tanto de (3.50) y (3.51) tenemos que

$$\mathcal{C}_\pi^\phi(A) = \bigcap_{S \subseteq L} \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$$

□

Veamos un ejemplo de este conjunto.

Ejemplo 12. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$, definida y particionada como en (3.7) y $\phi = (\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, el conjunto $\mathcal{C}_\pi^\phi(A) = \bigcap_{S \subseteq N} \mathcal{C}_\pi^{\phi,S}(A)$ se muestra en la siguiente figura.

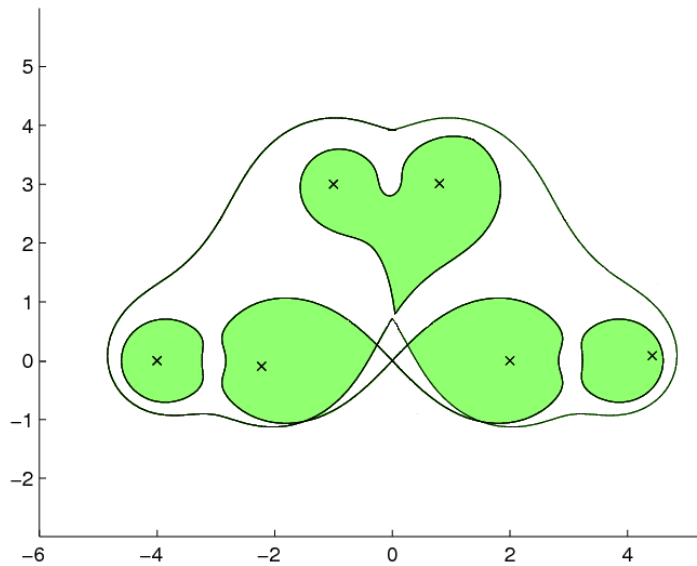


Figura 3-6: Gráfica del conjunto de Brauer $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ para la matriz A y el conjunto $\mathcal{C}_\pi^\phi(A)$ para la matriz A (interior).

3.3. Conjunto Minimal de Gershgorin para Matrices Particionadas por Bloques

Este conjunto fue introducido por R. Varga (1970) en [16] de una forma compleja haciendo un poco difícil la visualización de este, luego R. Varga y A. Krautstengl (1995) en [17] y [18] ampliaron y mejoraron los resultados obtenidos en torno a este conjunto permitiendo una mejor visualización de este por medio del conjunto equimodular extendido para la matriz particionada A . En esta sección enunciaremos los resultados obtenidos por R. Varga y A. Krautstengl y luego compararemos el conjunto minimal particionado de Gershgorin con los conjuntos obtenidos en las secciones anteriores.

Sea $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , A particionada por π como

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,l} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,l} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{l,1} & A_{l,2} & \dots & A_{l,l} \end{array} \right) \quad (3.52)$$

Sea $D_\pi = \text{diag}[A_{1,1}, A_{2,2}, \dots, A_{l,l}]$

$$D_\pi = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_{2,2} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{l,l} \end{array} \right) \quad (3.53)$$

entonces se definen los siguientes conjuntos.

- El conjunto particionado de Householder como

$$H_\pi^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : z \notin \sigma(D_\pi) \text{ y } \|(zI - D_\pi)^{-1}(A - D_\pi)\|_\phi \geq 1\} \quad (3.54)$$

■

$$G_\pi^\phi(A) = H_\pi^\phi(A) \cup \sigma(D_\pi) \quad (3.55)$$

■ El conjunto minimal particionado de Gershgorin como

$$G_\pi(A) = \bigcap_{\phi \in \Phi} G_\pi^\phi(A) \quad (3.56)$$

Es evidente de (3.55) y (3.56) que el conjunto minimal se puede expresar como

$$G_\pi(A) = H_\pi(A) \cup \sigma(D_\pi) \quad (3.57)$$

donde $H_\pi(A) = \bigcap_{\phi \in \Phi} H_\pi^\phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : z \notin \sigma(D_\pi) \text{ e } \inf_{\phi \in \Phi} \|(zI - D_\pi)^{-1}(A - D_\pi)\|_\phi \geq 1\}$

El primer resultado obtenido por R. Varga en [16] es el siguiente:

Teorema 32. *Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ y $\phi \in \Phi$, entonces*

$$\sigma(A) \subseteq G_\pi^\phi(A) \subseteq G_\pi(A)$$

Como vemos el conjunto $G_\pi(A)$ definido en (3.56) es complicado de visualizar, a continuación mostraremos una forma más sencilla de visualizarlo.

Definición 29. *Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n y $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por π , entonces se definen los siguientes conjuntos como*

■ *El conjunto equimodular para la matriz particionada A*

$$\Omega_\pi(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : B_{i,i} = A_{i,i}, 1 \leq i \leq l \text{ y } B_{i,j} = \exp(i\psi_{i,j})A_{i,j}, 1 \leq i, j \leq l\}. \quad (3.58)$$

En el caso de la partición mas fuerte π_s , tenemos que $\Omega_\pi(A) = \Omega(A)$.

- *El conjunto equimodular extendido para la matriz particionada A como*

$$\hat{\Omega}_\pi(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n \times n} : B_{i,i} = A_{i,i}, 1 \leq i \leq l \text{ y } B_{i,j} = \tau \exp(i\psi_{i,j})A_{i,j}, 1 \leq i, j \leq l, i \neq j, 0 \leq \tau \leq 1\} \quad (3.59)$$

En el caso de la partición mas fuerte π_s , tenemos que $\hat{\Omega}_\pi(A) = \Omega(\hat{A})$.

- *El espectro del conjunto equimodular como*

$$\sigma(\Omega_\pi(A)) = \bigcup_{B \in \Omega_\pi(A)} \sigma(B)$$

- *El espectro del conjunto equimodular extendido como*

$$\sigma(\hat{\Omega}_\pi(A)) = \bigcup_{B \in \hat{\Omega}_\pi(A)} \sigma(B)$$

Como resultado de las anteriores definiciones se obtienen los siguientes resultados dados por R. Varga y A. Krautstengl en [18] y [19].

Teorema 33. *Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$, entonces*

$$\sigma(\Omega_\pi(A)) \subseteq \sigma(\hat{\Omega}_\pi(A)) \subseteq G_\pi(A)$$

Teorema 34. *Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$, entonces*

$$\sigma(\hat{\Omega}_\pi(A)) = G_\pi(A) \quad (3.60)$$

En el siguiente teorema mostraremos la relación existente entre el conjunto minimal particionado de Gershgorin y los conjuntos: $\Gamma_\pi^\phi(A)$ (*Conjunto Particionado de Gerhgorin*), $\mathcal{K}_\pi^\phi(A)$ (*Conjunto Particionado de Brauer*), $\mathcal{B}_\pi^\phi(A)$ (*Conjunto Particionado de Brualdi*) y $\mathcal{C}_\pi^\phi(A)$.

Teorema 35. Sea $A = [A_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ particionada por $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ y $\phi \in \Phi$, entonces

- (i.) $G_\pi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$
- (ii.) $G_\pi(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$
- (iii.) $G_\pi(A) \subseteq \mathcal{B}_\pi^\phi(A)$
- (iv.) $G_\pi(A) \subseteq \mathcal{C}_\pi^\phi(A)$

Demostración: Veamos (i.), (ii.) y (iii.). el punto (iv.) se prueba de manera similar a (i.).

- (i.) Como por (3.60) $G_\pi(A) = \sigma(\hat{\Omega}_\pi(A))$, entonces si $z \in G_\pi(A)$, se tiene que $z \in \sigma(B)$ para algún $B \in \hat{\Omega}_\pi(A)$.

Luego, para algún $i \in L$

$$(\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} = (\|(zI - B_{i,i})^{-1}\|_\phi)^{-1} \leq r_{i,\pi}^\phi(B) \leq r_{i,\pi}^\phi(A).$$

Así, $z \in \Gamma_\pi^\phi(A)$, de donde $G_\pi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$.

- (ii.) Como por (3.60) $G_\pi(A) = \sigma(\hat{\Omega}_\pi(A))$ y por (3.23) $\sigma(\hat{\omega}_\pi(A)) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$. Luego se tiene que

$$G_\pi(A) = \sigma(\hat{\Omega}_\pi(A)) \subseteq \sigma(\hat{\omega}_\pi(A)) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$$

- (iii.) Veamos primero que $\hat{\Omega}_\pi(A) \subseteq \overline{\hat{w}_{\mathcal{B},\pi}(A)}$. Sea $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ una partición de \mathbb{C}^n , $\phi \in \Phi$ y $B \in \hat{\Omega}_\pi(A)$, entonces para $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ definamos

$$B(k) = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{si } B_{i,j} \neq 0 \\ \frac{A_{i,j}}{k}, & \text{si } B_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

por la forma en que esta definida $B(k)$ se puede ver que

$$A_{i,i} = B(k)_{i,i} \quad ; \quad \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(B(k)) \leq \tilde{r}_{i,\pi}^\phi(A) \quad \text{y} \quad C_\pi(A) = C_\pi(B(k))$$

Con lo cual

$$B(k) \in \hat{w}_{\mathcal{B},\pi}(A)$$

Además, si $k \rightarrow \infty$, entonces $B(k) \rightarrow B$.

luego $B \in \overline{\hat{w}_{\mathcal{B},\pi}(A)}$.

Así,

$$\hat{\Omega}_\pi(A) \subseteq \overline{\hat{w}_{\mathcal{B},\pi}(A)} \tag{3.62}$$

Por otro lado, como \mathcal{B}_π^ϕ es cerrado se tiene que

$$\sigma(\overline{\hat{w}_{\mathcal{B},\pi}(A)}) \subseteq \mathcal{B}_\pi^\phi(A) \tag{3.63}$$

Por tanto de (3.62) y (3.63) se tiene que $G_\pi(A) \subseteq \mathcal{B}_\pi^\phi(A)$.

(iv.) De manera análoga que en el inciso (i.) se puede mostrar que $G_\pi(A) \subseteq \mathcal{C}_\pi^\phi(A)$.

□

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

4.1. Conclusiones:

De los temas desarrollados anteriormente podemos deducir varios aspectos interesantes:

1. El número de operaciones para calcular los diferentes conjuntos particionados tipo Gershgorin se reduce significativamente según como haya sido considerada la partición $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$. Aunque, la complejidad para describir los conjuntos particionados varía dependiendo del vector norma escogido.
2. Si $\phi = \{\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_2, \dots, \|\cdot\|_2\} \in \Phi$ y las submatrices $A_{i,i}$ de la matriz particionada por bloques A son normales para cada $i \in L$, entonces $(\|(zI - A_{i,i})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \min_{1 \leq k \leq p_i - p_{i-1}} |z - \lambda_k|$, con $\lambda_k \in \sigma(A_{i,i})$. Por tanto, el conjunto $\Gamma_{i,\pi}^\phi(A)$ consiste de $p_i - p_{i-1}$ discos cuyos centros son los autovalores de las submatrices $A_{i,i}$ para cada $i \in L$.

De igual manera para el conjunto $K_{i,j,\pi}^\phi(A)$ tenemos $(p_i - p_{i-1})(p_j - p_{j-1})$ óvalos de Cassini-Brauer.

3. En la sección 3.2.1, Teorema 25- (3.23) se mostró que el espectro del conjunto equiradial extendido de la matriz particionada A es un subconjunto del conjunto

particionado de Brauer, esto es: $\sigma(\hat{\omega}_\pi^\phi(A)) \subset \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$.

A diferencia del resultado (2.12) del Teorema 8 el cual muestra para el caso escalar que $\sigma(\hat{\omega}(A)) = \mathcal{K}(A)$. Y en consecuencia, si A es particionada en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right)$$

entonces se tiene que $G_\pi(A) \neq \mathcal{K}_\pi^\phi(A)$.

4. Varga R. en [16] (1970), Varga R. y Krautstengl A. en [17] y [18] (1995) describieron y perfeccionaron el conjunto minimal de Gershgorin para una matriz particionada A . En este trabajo se encadenó este conjunto con los diversos conjuntos tipo Gershgorin para matrices particionadas por bloques, que antes no había sido considerado.
5. Para ciertas matrices los conjuntos particionados tipo Gershgorin proporcionan una mejor región de inclusión de autovalores que los conjuntos tipo Gershgorin usuales de una matriz A .
6. Se puede notar que para las regiones de inclusión particionadas tipo Gershgorin se preservan las mismas cadenas de contención que para el caso escalar, es decir

$$\sigma(A) \subseteq G_\pi(A) \subseteq \mathcal{B}_\pi^\phi(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$$

y

$$\sigma(A) \subseteq G_\pi(A) \subseteq \mathcal{C}_\pi^\phi(A) \subseteq \mathcal{K}_\pi^\phi(A) \subseteq \Gamma_\pi^\phi(A)$$

La segunda cadena de inclusión no había sido considerada anteriormente.

4.2. Trabajos Futuros

Aún falta mucho por describir sobre los conjuntos particionados tipo Gershgorin, como por ejemplo:

1. Si consideramos el conjunto de todas las posibles particiones $\pi = \{p_j\}_{j=0}^l$ de \mathbb{C}^n : ¿Será posible que exista una partición π_s la cual produce una mejor región de inclusión de autovalores para los diversos conjuntos particionados tipo Gershgorin (Conjuntos Particionados de Gershgorin, Brauer, Brualdi)?.

De igual forma, ¿se podrá responder la anterior pregunta si consideramos el conjunto de todos los vectores normas $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l) \in \Phi$?

2. Establecer si la relación $\mathcal{B}_\pi^\phi(A) \subseteq \overline{\sigma(\hat{w}_{\mathcal{B},\pi}^\phi(A))}$ entre el conjunto particionado de Brualdi y el espectro del conjunto equiradial extendido de Brualdi de la matriz particionada A , se satisface. Si esta inclusión es cierta junto con (3.63) implica que $\mathcal{B}_\pi^\phi(A) = \overline{\sigma(\hat{w}_{\pi,\mathcal{B}}^\phi(A))}$.
3. R. Varga en [13] muestra que al definir los conjuntos minimal de Brauer ($\mathcal{K}^R(A)$) y minimal de Brualdi ($\mathcal{B}^R(A)$) de manera similar al conjunto minimal de Gershgorin ($\Gamma^R(A)$) como en (2.23) se tiene que

$$\Gamma^R(A) = \mathcal{K}^R(A) = \mathcal{B}^R(A)$$

Aún, no se han establecido las definiciones de los conjuntos minimales particionados de Brauer y Brualdi, ni la relación que guardan estos con el conjunto minimal de Gershgorin.

4. Extender los resultados de regiones de inclusión tipo Gershgorin a matrices de dimensión infinita, L. Smithies y R. Varga en [11] 2006 y H. Salas en [10] 1999 han empezado a estudiar este tema.
5. Obtener el resultado sobre matrices particionadas correspondiente al resultado en (2.25) en el cual se muestra un conjunto equivalente al conjunto $\mathcal{C}(A)$ a partir de ciertos conjuntos que componen el conjunto minimal de Gershgorin.
6. En esta oportunidad se extendieron a matrices particionadas por bloques los siguientes conjuntos: conjunto de Gershgorin, Brauer, Brualdi, S -Gershgorin y minimal de Gershgorin. Aún queda una gran cantidad de resultados sobre regiones tipo Gershgorin en el plano complejo por extender (*para mas información ver [13]*). Seria interesante saber cuales de estos resultados se mantienen al ser extendidos a matrices particionadas por bloques.

APENDICES

Apéndice A

PROGRAMAS EN MATLAB 7.0

Programa para Generar Figura 2-1

```
function[GS]=gers(A)
A=[-1+1i 2 0; 0 1+1i 2; 2 0 -i];
B=A-diag(diag(A));
hold on;
axis equal
r=0;
for n=1:length(A(:,1))
    r=norm(B(n,:));
    x=[-(r+norm(A)): 0.05: r+norm(A)];
    y=[-(r+norm(A)): 0.05: r+norm(A)];
    [X,Y]=meshgrid(x,y);
    Z=abs(X+i*Y-A(n,n))-r;
    contour(X,Y,-Z,[0 0], 'k');
end
e=eig(A)
for k=1:length(A(:,1))
    plot([ real( e(k) ) ],[imag(e(k))], 'kx');
end
```

Programa para Generar Figura 2-2

El programa utilizado para graficar 2-2 fue el mismo que para 2-1 con las matrices A y A^t

Programa para Generar Figura 2-3

```
function [BA]=brauer(A)
A=[-1+1i 2 0; 0 1+1i 2; 2 0 -i];
B=A-diag(diag(A));
L=length(A(:,1));
hold on;
axis equal
for n=1:L
    r1(n)=norm(B(n,:));
end
x=[-(2*norm(r1)+norm(A)): 0.05: 2*norm(r1)+norm(A)];
y=[-(2*norm(r1)+norm(A)): 0.05: 2*norm(r1)+norm(A)];
[X,Y]=meshgrid(x,y);
for k=1:L
    for m=k+1:L
        Z=abs(X+i*Y-A(k,k)).*abs(X+i*Y-A(m,m))-r1(k)*r1(m);
        contourf(X,Y,-Z,[0 0], 'k');
    end
end
e=eig(A)
for k=1:length(A(:,1))
    plot([ real( e(k) ) ], [ imag(e(k)) ], 'kx');
end
```

Programa para Generar Figura 2-5

```
function[B]=brualdi
x=[-3:0.05:3];
y=[-3: 0.05: 3];
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=abs(X+i*Y-(1+i)).*abs(X+i*Y-(-1+i)).*abs(X+i*Y-(-i))-8;
contourf(X,Y,-Z,[0 0],'k');
end
```

Programa para Generar Figura 2-6

```
function[S]=sger
axis equal; hold on;
x=[-3: 0.05: 3];
y=[-3: 0.05: 3];
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z1=abs(X+i*Y-(-1+i)).*(abs(X+i*Y-(1+i))-2);
contourf(X,Y,-Z1,[00],'k');
Z2=abs(X+i*Y-(-1+i)).*abs(X+i*Y-(-i))-4;
contourf(X,Y,-Z2,[00],'k');
Z3=abs(X+i*Y-(1+i)).*abs(X+i*Y-(-1+i))-4;
contourf(X,Y,-Z3,[00],'k');
Z4=abs(X+i*Y-(1+i)).*(abs(X+i*Y-(-i))-2);
contourf(X,Y,-Z4,[00],'k');
Z5=abs(X+i*Y-(-i)).*abs(X+i*Y-(1+i))-4;
contourf(X,Y,-Z5,[00],'k');
Z6=abs(X+i*Y-(-i)).*(abs(X+i*Y-(-1+i))-2);
contourf(X,Y,-Z6,[00],'k');
end
```


Programa para Generar Figura 2-7

```
function [m] =minimal(N,A)
A=[-1+1i 2 0; 0 1+1i 2; 2 0 -i];
y=eig(A);
hold on
n=length(A(1,:));
axis equal
for h=1:N
    for k=1:n
        for l=1:n
            if (k==l)
                B(k,l)=A(k,l);
            else
                B(k,l)=A(k,l)*exp(2*i*rand*pi);
            end
        end
    end
end
y=[y;eig(B)];
end
for l=1:(n*N)
    plot([real(y(l))],[imag(y(l))],'kx');
end
end
```

Programa para Generar Figura 3-1

```
function[GP]=gerp
axis equal
hold on;
x=[-7: 0.05: 7];
y=[-7: 0.05: 7];
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z1=abs(X+i*Y+4).*abs(X+i*Y+2)-2.*(abs(X+i*Y+3)+1);
contourf(X,Y,-Z1,[0 0], 'k');
Z2=abs(X+i*Y-4).*abs(X+i*Y-2)-2.*(abs(X+i*Y-3)+1);
contourf(X,Y,-Z2,[0 0], 'k');
Z3=abs(X+i*Y+1-3i).*abs(X+i*Y-1-3i)-2.*(abs(X+i*Y-3i)+1);
contourf(X,Y,-Z3,[0 0], 'k');
end
```

Programa para Generar Figura 3-3

```
function[BP]=braurp
axis equal
hold on;
x=[-7: 0.05: 7];
y=[-7: 0.05: 7];
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z1=(abs(X+i*Y+4).*abs(X+i*Y+2)).*(abs(X+i*Y-4).*abs(X+i*Y-2))
-4.*((abs(X+i*Y+3)+1).*(abs(X+i*Y-3)+1));
contourf(X,Y,-Z1,[0 0], 'k');
Z2=(abs(X+i*Y-4).*abs(X+i*Y-2)).*(abs(X+i*Y+1-3i).*abs(X+i*Y-1-3i))
-4.*((abs(X+i*Y-3)+1).*(abs(X+i*Y-3i)+1));
contourf(X,Y,-Z2,[0 0], 'k');
```

```
Z3=(abs(X+i*Y+4).*abs(X+i*Y+2)).*(abs(X+i*Y+1-3i).*abs(X+i*Y-1-3i))  
-4.*((abs(X+i*Y+3)+1).*abs(X+i*Y-3i)+1));  
contourf(X,Y,-Z3,[0 0],'k');  
end
```

Programa para Generar Figura 3-5

```
function[BR]=brualp  
axis equal  
hold on;  
x=[-7: 0.05: 7];  
y=[-7: 0.05: 7];  
[X,Y]=meshgrid(x,y);  
Z1=(abs(X+i*Y+4).*abs(X+i*Y+2).*abs(X+i*Y-4).*abs(X+i*Y-2).*abs(X+i*Y+1-3i)  
. *abs(X+i*Y-1-3i))-8.*((abs(X+i*Y+3)+1).*abs(X+i*Y-3i)+1).*abs(X+i*Y-3i)+1));  
contourf(X,Y,-Z1,[0 0],'k');  
end
```

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Brauer, A. *Limits for the Characteristic roots of a Matrix II*, DUKE Math. J., **14** (1947), 21–26.
- [2] Brualdi R. *Matrices, eigenvalues and directed graphs*, Linear Multilinear Algebra J., **11** (1982), 143–165.
- [3] Cvetkovic L., Kostic V. *Between Gersgorin and Minimal Gershgorin Sets*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **196** (2006), 452–458.
- [4] Cvetkovic L., Kostic V., Varga R. S. *A New Gershgorin-Type Eigenvalues Inclusion Set*, ETNA, **18** (2004), 73–80.
- [5] Feingold D. G. and Varga R. S. *Block Diagonally Dominant Matrices and Generalizations of the Gershgorin circle theorem*, Pacific Journal Math., **12** (1962), 1241–1250.
- [6] Fiedler M. and Pták V. *Generalized Norms of matrices and the location of the spectrum*, Czechoslovak Math. J., **12(87)** (1962a), 558–571.
- [7] Gershgorin A. Semen. *Über die Abgrenzung der Eigenwerte Einer Matrix*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat., **1** (1931), 749–754.
- [8] Roger A. Horn and Charles R. Johnson *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, First Ed., 1991.
- [9] Ostrowski A. M. *On Some Metrical Properties of Operator Matrices and Matrices Partitioned into Blocks*, J. Math. Anal. Appl., **2**, (1961), 161–209.
- [10] Salas H., *Gershgorins Theorem for Matrices of Operators*, Linear Algebra Appl., **291**, No.1-3, (1999), 15–36.
- [11] Smithies L., Varga Richard S. *Singular Value Decomposition Gershgorin-type Sets*, Linear Algebra Appl., **417** (2006), 370–380.

- [12] Taussky O. *A Recurring Theorem on Determinants*, Amer. Math. Monthly, **95** (1949), 672–676.
- [13] Varga Richard S. *Gershgorin and his Circles*, Springer, First Ed., 2004.
- [14] Varga Richard S. *Gershgorin-Type Eigenvalue Inclusion Theorems and Their Sharpness*, ETNA, **12** (2001a), 113–133.
- [15] Varga Richard S. *Minimal Gershgorin Sets*, Pacific J. Math., **15** (1965), 719–729.
- [16] Varga Richard S. *Minimal Gershgorin Sets for Partitioned Matrix*, SIAM Numer. Anal., **7 No. 4** (1970), 493–507.
- [17] Varga Richard S., Krautstengl A. *Minimal Gershgorin Sets for Partitioned Matrices, III. Sharpness of Boundaries and Monotocity as a Function of the Partition* , ETNA, **3** (1995), 83–95.
- [18] Varga Richard S., Krautstengl A. *Minimal Gershgorin Sets for Partitioned Matrices, II. The Spectral Conjeture* , ETNA, **3** (1995), 66–82.
- [19] Varga Richard S., Krautstengl A. *On Gershgorin-type Problems and Ovals of Cassini*, ETNA, **8** (1999), 15–20.