

**TEOREMA DE SCHRÖDER-BERNSTEIN Y EL AXIOMA DE  
ELECCIÓN**

Por

Ruth Yolibeth López Fajardo

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICA PURA

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO  
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2018

Aprobada por:

---

Robert Acar, Ph.D  
Miembro, Comité Graduado

---

Fecha

---

Alejandro Vélez, Ph.D  
Miembro, Comité Graduado

---

Fecha

---

Hector Salas, Ph.D  
Presidente, Comité Graduado

---

Fecha

---

Jonathan Muñoz , Ph. D  
Representante de Estudios Graduados

---

Fecha

---

Victor Ocasio González, Ph.D  
Director del Departamento

---

Fecha

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada  
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los  
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

**TEOREMA DE SCHRÖDER-BERNSTEIN Y EL AXIOMA DE  
ELECCIÓN**

Por

Ruth Yolibeth López Fajardo

Julio 2018

Consejero: Hector Salas Olaguer  
Departamento: Matemática

En el presente trabajo se discute sobre dos resultados muy importantes en la teoría de conjuntos y en las matemáticas en general: (a) El teorema de Schröder-Bernstein; (b) El axioma de elección. Para ambos se presenta una breve reseña histórica. Para el teorema de Schröder-Bernstein se presentan cinco demostraciones y se comparan éstas demostraciones entre si. De igual forma para el axioma de elección, se discuten dos demostraciones del teorema del buen orden y se presentan cuatro enunciados equivalentes al axioma.

Copyright © 2018

por

Ruth Yolibeth López Fajardo

A mi familia

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi asesor Hector Salas, que es una persona maravillosa tanto en el aspecto personal como en el profesional. Por toda su orientación, atención, por todas las discusiones fructíferas y por su increíble paciencia al enseñarme lo que necesitaba. Agradezco a mi familia, que siempre me ha apoyado en mi educación.

A mis compañeros, les agradezco todo el tiempo que pasamos juntos aprendiendo, luchando y riendo.

Me gustaría agradecer a los miembros de mi comité, Robert Acar y Alejandro Vélez por sus comentarios y sugerencias.

Agradezco al departamento de matemáticas en el RUM por la hospitalidad y apoyo.

## Índice general

	<u>página</u>
RESUMEN EN ESPAÑOL . . . . .	II
AGRADECIMIENTOS . . . . .	V
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Georg Cantor 1845-1918 . . . . .	2
2. Definiciones y teoremas preliminares . . . . .	6
2.1. Preliminares . . . . .	6
2.1.1. Conceptos de topología . . . . .	8
3. Teorema de Schröder-Bernstein . . . . .	10
3.1. Demostraciones del Teorema . . . . .	11
3.2. Comentarios . . . . .	24
3.3. Propiedad Schröder-Bernstein . . . . .	25
4. Axioma de Elección . . . . .	27
4.1. Historia del Axioma de Elección . . . . .	27
4.2. Teorema de Zermelo del Buen Orden . . . . .	30
4.3. El Axioma de Elección y Algunas Equivalencias . . . . .	34
4.4. Teorema de Tychonoff . . . . .	36
4.5. Teorema de Comparabilidad . . . . .	39
5. CONCLUSIONES . . . . .	41

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

La naturaleza del infinito siempre ha sido objeto de controversia. Las famosas paradojas de Zenón de Elea, quien explicó con inquietante lucidez que el movimiento es imposible, porque exige que el móvil pase por una infinidad de puntos en un tiempo finito, suscitaron ya la controversia sobre la naturaleza del infinito en la antigüedad. En tiempos modernos han aparecido nuevos problemas asociados con el infinito, específicamente en la teoría de conjuntos abstractos, teoría que proporciona fundamento y cimentación a prácticamente la totalidad de las matemáticas contemporáneas. La idea de infinito ha estado siempre, a través de la historia, cargada de tintes y matices teológicos, que han pesado en la aceptación o en el rechazo de este concepto y de las doctrinas matemáticas o filosóficas con él asociadas. Todas estas corrientes de pensamiento convergen en la vida y obra del matemático Georg Cantor [1].

En el presente trabajo se tratan dos enunciados que son de particular importancia cuando se tratan conjuntos infinitos: El teorema de Schröder-Bernstein y el axioma de elección. El teorema de Schröder-Bernstein fue propuesto por G. Cantor y el axioma fue presentado para dar solución al problema del buen orden, problema propuesto también por G. Cantor. Con esto en mente, empezamos por presentar un resumen del trabajo de Georg Cantor.

Entre los objetivos del trabajo están ubicar en la historia las diferentes demostraciones que se presentan así como comparar y contrastar sus métodos. En el capítulo 2 damos conceptos y definiciones preliminares. El capítulo 3 trata sobre el teorema de Schröder-Bernstein; se inicia con una reseña histórica de como surgió, luego se presentan cinco diferentes demostraciones y por último se discute lo que se conoce como problema de Schröder-Bernstein. En el mismo capítulo 3 se hace referencia a demostraciones presentadas en el texto “Abstract set theory” [2] y a un artículo que busca solución al problema de Schröder-Bernstein en espacios de Banach [3].

El capítulo 4 trata sobre el axioma de elección y empieza con una reseña histórica. Se hace una comparación entre dos demostraciones del teorema del buen orden, luego se presentan cuatro principios equivalentes al axioma y por último como consecuencias del axioma de elección se trata el teorema de Tychonoff y el teorema de comparabilidad. El último capítulo son las conclusiones del trabajo.

En el desarrollo de este trabajo se consideraron como principales fuentes de referencia los siguientes dos textos; (a) Abstract set theory [2]; (b) Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite [1].

### **1.1. Georg Cantor 1845-1918**

Georg Cantor (3 de marzo de 1845 - 6 de enero de 1918) fue un matemático nacido en San Petersburgo, Rusia. De ascendencia alemana y judía. Inició sus estudios universitarios en 1862 en Swiss Federal Polytechnic, Zürich, pero al siguiente año, después de la muerte de su padre, pasó a la Universidad de Berlín donde se especializó en matemáticas, filosofía y física. Tuvo como profesores en el campo de las matemáticas a Ernst Kummer, Karl Weierstrass y Leopold Kronecker. Cantor culminó sus estudios en 1866 en la Universidad de Berlin.

Su disertación así como sus primeros trabajos reflejaban su interés en teoría de números pero luego por sugerencias de Edward Heine, colega de la universidad de Halle donde laboraba, Cantor empezó a trabajar con series trigonométricas. En particular con la difícil pregunta: dada una función arbitraria representada por una serie trigonométrica. ¿Es esta representación necesariamente única?.

En ese entonces teoremas de unicidad para clases especiales de funciones bajo ciertas condiciones ya habían sido presentados por otros matemáticos. Gracias a los avances de sus colegas y predecesores, Cantor pudo modificar viejas ideas y forjar nuevas con el fin de establecer la unicidad de la representación de una función arbitraria como una serie trigonométrica. Hizo publicaciones sobre sus avances en este problema durante los años 1870-1872. En el proceso empezó a formular una nueva disciplina matemática: Teoría de conjuntos transfinita.

La naturaleza de las demostraciones de Cantor para el teorema de unicidad dependían más de la relación de los puntos en la recta que en las funciones trigonométricas mismas. Resulta natural así que Cantor se enfocara en la manera en la cual conjuntos de puntos con varias propiedades específicas podían ser definidos. Su enfoque requirió el desarrollo de una teoría de números reales rigurosa. Este fue un paso necesario antes de que estructuras complicadas pudieran ser identificadas, descritas y analizadas satisfactoriamente. Ver Capítulos 1 y 2 en [1].

El más notable logro de Cantor consistió en demostrar, con rigor matemático, que no todos los conjuntos infinitos son de igual “tamaño”, por lo tanto es posible establecer comparaciones entre estos “tamaños”. Estas ideas resultaron ser un punto de inflexión en su estudio de conjuntos infinitos independiente de la teoría de funciones. Trabajos de Cantor en teoría de conjuntos en este periodo incluían una prueba de que el conjunto de números reales no se puede poner en biyección con

el conjunto de los números racionales. Conceptos como potencia o cardinal de un conjunto que indican el número o cantidad de elementos de un conjunto, sea esta cantidad finita o infinita fueron introducidos por Cantor.

Estos conceptos resultaron tan chocantes a la intuición de sus contemporáneos, que el eminente matemático francés Henri Poincaré condenó la teoría de números transfinitos como una “enfermedad” de la que algún día llegarían las matemáticas a curarse. Leopold Kronecker, que fue uno de los maestros de Cantor, y miembro preeminente de la matemática institucional alemana, llegó incluso a atacarle directa y personalmente, calificándolo de “charlatán científico”, “renegado” y “corruptor de la juventud”.

Sobre la base de estos trabajos se pudo concluir que hay al menos dos números cardinales infinitos, el del conjunto de los números naturales  $\aleph_0$  y el del conjunto de los números reales  $\aleph_1$ . Fue en 1878 cuando Cantor declaró su hipótesis del continuo, enunciado que afirma que no existen conjuntos infinitos cuya cardinalidad esté estrictamente comprendida entre la cardinalidad del conjunto de los números naturales y la cardinalidad del conjunto de los números reales.

En artículos publicados entre 1879 a 1884, Cantor introdujo la teoría de números cardinales y ordinales. En esta teoría los cardinales transfinitos y ordinales son los elementos llamativos. Cantor desarrolló este trabajo en la revista “*Mathematische Annalen*”. “*Grundlagen*” es el primer trabajo de Cantor sobre la teoría general de conjuntos, fue publicado en 1883. El resultado más importante de este trabajo fue la presentación de los números transfinitos como una extensión sistemática y autónoma de los números naturales [1, pág 96-].

“Las Contribuciones a la Explicación de la Teoría de Conjuntos Transfinitos” es la traducción del nombre en alemán de la última de las publicaciones de Cantor. En el

texto [1] lo abrevian como “*Beiträge*”

.

## Capítulo 2

# DEFINICIONES Y TEOREMAS PRELIMINARES

### 2.1. Preliminares

*Definición 2.1.* Sean  $X$  y  $Y$  conjuntos. El producto cartesiano de  $X$  y  $Y$  es el conjunto  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}$ . Donde  $(x, y) = (u, v)$  si y solo si  $x = u$  y  $y = v$ .

*Definición 2.2.* Una relación binaria es una relación definida entre dos conjuntos. Se puede representar mediante un conjunto de pares ordenados. Así una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos.

*Definición 2.3.* Sea  $X$  un conjunto y  $R \subset X \times X$  una relación. Se dice que  $R$  es una relación de equivalencia en  $X$  si para todo  $x, y, z \in X$  se satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) Reflexiva:  $xRx$ ;
- (ii) Simétrica: si  $xRy$ , entonces  $yRx$ ;
- (iii) Transitiva: si  $xRy$  y también  $yRz$ , entonces  $xRz$

*Definición 2.4.* Sea  $X$  un conjunto. Un orden parcial en  $X$  es una relación binaria  $R \subset X \times X$  tal que para todo  $x, y, z \in X$  se satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) Reflexiva:  $xRx$ ;
- (ii) Antisimétrica: si  $xRy$  y  $yRx$ , entonces  $x = y$ ;

(iii) *Transitiva: si  $xRy$ ,  $yRz$ , entonces  $xRz$ ;*

*Si además  $R$  satisface:*

(iv) *Total:  $x, y \in X$  implica que  $xRy$  o  $yRx$ ;*

*entonces se dice que  $R$  define un orden lineal [también conocido como orden total].*

*Si  $R$  es un orden lineal tal que:*

(v)  *$\emptyset \neq A \subset X$  implica que existe un elemento  $a \in A$  tal que  $aRx$  para cada  $x \in A$  [a es el elemento mínimo de  $A$ ], entonces  $R$  es un buen orden en  $X$ .*

Un conjunto parcialmente ordenado es un par ordenado  $(X, R)$  donde  $X$  es un conjunto y  $R$  un orden parcial en  $X$ . Si  $R$  es un orden lineal,  $(P, R)$  es un conjunto linealmente [totalmente] ordenado. Si  $R$  es un buen orden,  $(P, R)$  es un conjunto bien ordenado. De ahora en adelante la relación de orden parcial la vamos a denotar como sigue:  $a \leq b$ .

*Definición 2.5.* Sea  $(P, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y sea  $A \subset P$ . Un elemento  $u \in P$  es cota superior de  $A$  si  $x \leq u$  para cada  $x \in A$ . Un elemento  $m \in P$  es un elemento maximal de  $P$  si  $x \in P$  and  $m \leq x$  implica  $m = x$ . De manera similar se definen cota inferior y elemento minimal. Una cadena en  $P$  es cualquier subconjunto  $C$  de  $P$  tal que  $C$  es linealmente ordenado bajo la relación de orden  $\leq$  en  $P$ .

*Definición 2.6.* Sea  $A$  un conjunto totalmente ordenado, un segmento inicial de  $A$  determinado por  $x$  es el conjunto de todos los elementos de  $A$  que preceden estrictamente a  $x$ .

*Definición 2.7.* Si los elementos de un conjunto  $T$  se pueden relacionar con los elementos de un conjunto  $S$  en una relación uno-a-uno, i.e un elemento de  $T$  corresponde a cada elemento de  $S$  y viceversa, se habla de una función uno-a-uno de

$S$  sobre  $T$ . En este caso el conjunto  $T$  se dice es equivalente al conjunto  $S$ , y se denota  $T \sim S$ .

La equivalencia entre conjuntos como recién se definió no es una propiedad pero una relación binaria.

**Teorema 2.1.** *La equivalencia entre conjuntos es una relación de equivalencia. Por lo tanto en una colección de conjuntos tal que cada conjunto es equivalente a un conjunto definido, cada conjunto es equivalente a cualquier otro.*

### 2.1.1. Conceptos de topología

**Definición 2.8.** *Un espacio topológico es un par  $(X, \tau)$ , donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  es tal que:*

- i)  $X \in \tau, \emptyset \in \tau$
- ii) Si  $A_1, \dots, A_n \in \tau$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$
- iii) Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia que cumple que  $A_i \in \tau \forall i \in I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ .

Los elementos de  $\tau$  se llaman conjuntos abiertos. Para abreviar, se suele hacer referencia a  $X$  como un espacio topológico cuando no hay confusiones respecto a la topología que se está considerando.

**Definición 2.9.** *Dado un conjunto  $X$  no vacío, una familia  $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  que cumple  $\bigcup \mathcal{S} = X$  es llamada una subbase para cierta topología sobre  $X$ . Dicha topología, llamada topología generada por  $\mathcal{S}$ , es la que tiene como abiertos las uniones de intersecciones finitas de miembros de  $\mathcal{S}$ , es decir, uniones de conjuntos de la forma  $\left\{ \bigcap_{i=1}^n S_{i_k} : i_k \in I \right\}$ .*

**Definición 2.10.** *Un cubrimiento por abiertos de un espacio topológico  $(X, \tau)$  es una familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  donde  $A_i \in \tau$  para todo  $i \in I$  y  $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ . Un subcubrimiento de un cubrimiento  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una subfamilia  $\{A_i\}_{i \in I_0}$ ,  $I_0 \subset I$  tal que  $\bigcup_{i \in I_0} A_i = X$ .*

*Definición 2.11.* Un espacio topológico es compacto si todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento finito

*Definición 2.12.* Sea  $X$  un conjunto no vacío,  $\{Y_i\}_{i \in I}$  una familia de espacios topológicos y  $p_i : X \rightarrow Y_i$  una función para todo  $i \in I$ . La topología inicial en  $X$  respecto a  $\{p_i\}_{i \in I}$  es la generada por el  $\{p_i^{-1}(U) : U \subset Y_i \text{ abierto, } i \in I\}$ .

*Definición 2.13.* Si  $\{X_i\}_{i \in I}$  es una familia de espacios topológicos, para cada  $i \in I$  se define la proyección en la  $i$ -ésima coordenada como  $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  tal que  $p_i(f) = f(i)$ .

*Definición 2.14.* Definimos la topología producto en  $\prod_{i \in I} X_i$  como la topología inicial respecto a las proyecciones  $\{p_i\}_{i \in I}$ .

## Capítulo 3

# TEOREMA DE SCHRÖDER-BERNSTEIN

El Teorema de Schröder-Bernstein es un teorema elemental pero no trivial de la teoría de conjuntos que establece un criterio para saber si existe una función biyectiva entre dos conjuntos cualesquiera  $A$  y  $B$ . El teorema fue publicado de forma explícita por Georg Cantor en el año 1887 y lo llamó teorema de equivalencia [1]. Georg Cantor no propuso una demostración para el teorema hasta años después cuando dio una basada en el axioma de elección. A inicios del siglo XX se empieza a hacer referencias a este teorema como el teorema de Schröder-Bernstein, esto dado que estos dos matemáticos fueron los primeros en publicar demostraciones completas para el teorema, ambos en el año 1898, aunque años después se mostró que la demostración de Schröder era errónea. También se le conoce como el teorema de Cantor-Bernstein y en el texto “Proofs of the Cantor-Bernstein Theorem” se afirma que la forma correcta de llamarlo sería teorema de Cantor-Dedekind-Bernstein, esto para hacer alusión a los matemáticos que aportaron una demostración completa y correcta al teorema en sus inicios.

Desde el año en el cual Georg Cantor formuló el teorema hasta el presente una variedad de demostraciones se han presentado para el mismo, en el año 2013 - Science Networks. Historical Studies - publicó el texto “Proofs of the Cantor-Bernstein Theorem” que presenta una recopilación de demostraciones publicadas hasta entonces. En este texto se pueden encontrar revisiones de trabajos de matemáticos prominentes como ser: Cantor, Dedekind, Schröder, Bernstein, Borel, Zermelo, Poincaré, Russell, Peano, Hausdorff, Sierpinski, Tarski, Banach, Brouwer entre otros, principalmente

de las escuelas polacas y holandesas. ver [4].

El teorema dice lo siguiente:

**Teorema 1.** *Si dados dos conjuntos, cada conjunto es equivalente a un subconjunto del otro, entonces dichos conjuntos son equivalentes, i.e sus cardinales son iguales.*

### 3.1. Demostraciones del Teorema

En el texto "Abstract Set Theory" de A. Fraenkel se presentan dos diferentes tipos fundamentales de demostraciones para este teorema [2, pág 73-77]. La primera que presenta coincide con el tipo de la primera demostración completa publicada para este teorema que fue dada por Felix Bernstein. La primera prueba del segundo tipo fue dada por Dedekind en 1887 y 1899 pero no fue publicada hasta el año 1932, basicamente la misma prueba fue redescubierta independientemente por Peano y Zermelo entre otros matemáticos.

Una de las demostraciones distinguidas por su lucidez y que ha producido notables generalizaciones, en particular en la teoría de equivalencia con respecto a clases de funciones pertenece al primer tipo y fue publicada por el matemático húngaro J. König en 1906. Referencias a este y otros artículos que presentan diferentes tipos de demostraciones se pueden encontrar en [2, pág 77].

La mayoría de las demostraciones existentes para este teorema pertenecen a uno de estos dos tipos.

Empezamos por discutir la primera demostración publicada para este teorema que aparecio en el libro "Lecons sur la theorie des fonctions" publicado en el año 1898 por Émile Borel[5]. En este texto antes de dar la demostración del teorema se plantean el problema de comparabilidad de conjuntos.

Se plantea el teorema de la siguiente manera: Hay un subconjunto  $A_1$ , de  $A$ , que tiene la misma potencia que  $B$  y hay un subconjunto  $B_1$ , de  $B$  que tiene la

misma potencia que  $A$ . Se debe probar que  $A$  tiene la misma potencia que  $B$ .

*Demostración.* Se procede como sigue: Dado que los conjuntos  $B$  y  $A_1$  tienen la misma potencia, existe una biyección entre estos conjuntos. De hecho existen infinitas biyecciones, pero se elige una. Es claro que para esta biyección para cualquier subconjunto de  $B$  corresponde un subconjunto de  $A_1$ . Sea  $A_2$  el subconjunto de  $A_1$  que corresponde a  $B_1$ . De acuerdo con la definición de potencia  $A_2$  tiene la misma potencia que  $B_1$  y consecuentemente la misma potencia que  $A$ . Ahora, dado que  $A_2$  tiene la misma potencia que  $A$ ; se elige una biyección de  $A$  a  $A_2$ ;  $A_1$ , que es subconjunto de  $A$  se convertirá en un subconjunto  $A_3$  de  $A_2$  y  $A_2$  que es un subconjunto de  $A_1$  se convertirá en un subconjunto  $A_4$  de  $A_3$ . Esto se muestra en la figura siguiente, donde la biyección de  $A$  sobre  $A_2$  es una transformación homotética.

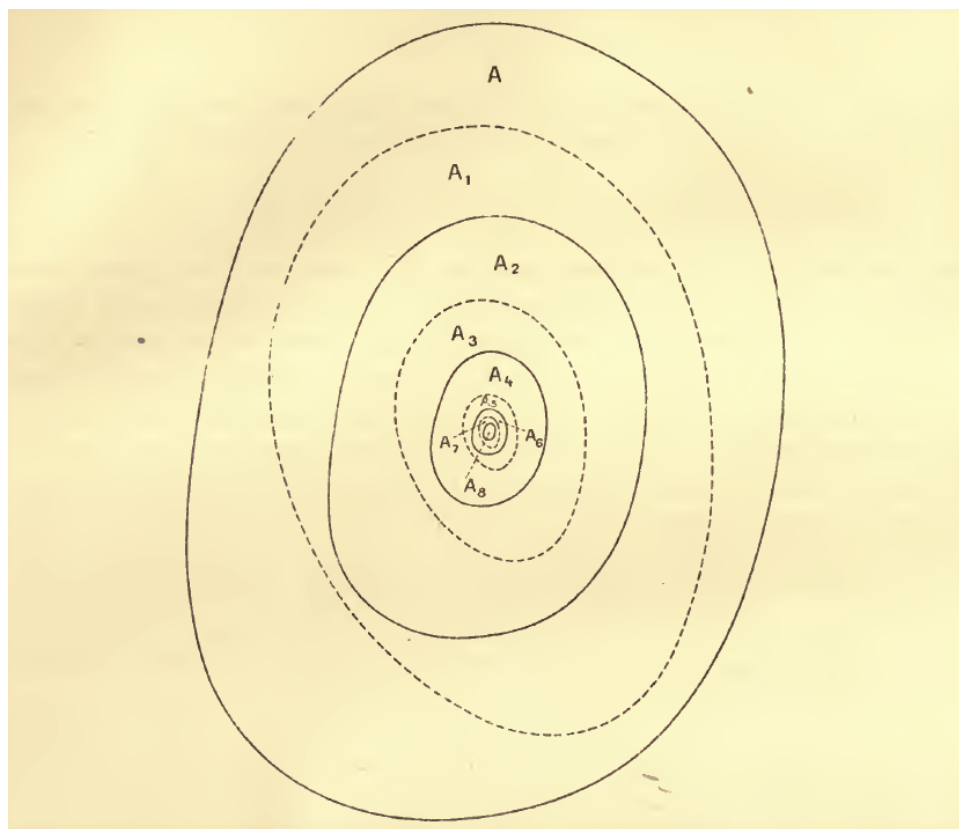


Figura 3-1: 1

Además  $A_3$  tiene la misma potencia que  $A_1$  y  $A_4$  la misma potencia que  $A$ . Si se sigue de esta manera se tiene la sucesión:

$$A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots,$$

Donde cada conjunto es un subconjunto del anterior y los conjuntos con subíndice par tienen la misma potencia que  $A$  y los conjuntos con subíndice impar tienen la misma potencia que  $A_1$ . Esta construcción se puede seguir de forma indefinida.

Se considera el conjunto  $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Así se tiene que:

$$A = D \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$$

Dado que  $A_{n+1}$  es un subconjunto de  $A_n$ , podemos escribir:

$$A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_4 \setminus A_5) \dots$$

Ahora es fácil mostrar que los conjuntos  $A$  y  $A_1$  tienen la misma potencia; solo note que podemos verlos como unión contable de conjuntos que tienen dos a dos la misma potencia. Resulta, de hecho, de la biyección por la cual obtuvimos los conjuntos  $A_3, A_4, \dots$  que  $A \setminus A_1$  tiene la misma potencia que  $A_2 \setminus A_3$ , que  $A_4 \setminus A_5$ , que  $A_6 \setminus A_7, \dots$ . De manera similar, los conjuntos  $A_1 \setminus A_2, A_3 \setminus A_4, A_5 \setminus A_6, \dots$  todos tienen la misma potencia. Basta, por lo tanto, reescribir  $A_1$  como sigue:

$$A_1 = D \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_6 \setminus A_7) \dots$$

para reconocer que cada uno de los términos de esta serie tiene la misma potencia que el término correspondiente en la serie que define a  $A$ . El teorema, por lo tanto queda demostrado.  $\square$

A continuación otras demostraciones que se han presentada para el teorema.

### **Demostración 1.**

La siguiente demostración se encuentra en un artículo búlgaro publicado en el año 1985, ver [6].

En el desarrollo de esta demostración se plantea un teorema equivalente al teorema de Schröder-Bernstein y este se prueba con el contexto de dos definiciones y cuatro lemas.

**Definición 3.1.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una función. Un conjunto  $M \subset X$  se dice invariante respecto a  $f$  si  $f(M) \subset M$  y  $f^{-1}(M) \subset M$ . El conjunto  $X$  es invariante con respecto a  $f$  como un subconjunto de  $X$ .

**Lema 3.1.** La intersección de cualquier familia de subconjuntos invariantes de  $X$  con respecto a  $f$  es un subconjunto invariante de  $X$  con respecto a  $f$ .

*Demostración.* En efecto, sea  $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$  una familia de subconjuntos invariantes de  $X$  con respecto a  $f$  y sea  $M = \bigcap \{M_\alpha : \alpha \in A\}$ . para  $x \in M$  arbitrario y para  $\alpha \in A$  arbitrario, tenemos  $x \in M_\alpha$  y dado que  $M_\alpha$  es invariante, entonces  $f(x) \in M$  y  $f^{-1}(x) \in M$ , por lo tanto  $f(x) \in M$  y  $f^{-1}(x) \in M$  lo que prueba el lema.  $\square$

**Lema 3.2.** El complemento de cualquier subconjunto invariante de  $X$  con respecto a  $f$  es invariante con respecto a  $f$ .

*Demostración.* En efecto, sea  $M$  un subconjunto invariante de  $X$  y sea  $x \in X \setminus M$ . Si  $f(x) \in M$ , resulta que  $x \in f^{-1}(M) \subset M$ , que es contradictorio, por lo tanto  $f(x) \in X \setminus M$ . De forma similar, si  $f^{-1}(x) \cap M \neq \emptyset$  tenemos que  $x \in f(M) \subset M$  que es una contradicción. Así,  $f^{-1}(x) \subset X \setminus M$  y se concluye que  $X \setminus M$  es invariante.  $\square$

**Definición 3.2.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una función y  $a \in X$ . Por envolvente invariante  $\Phi(a)$  de  $a$  (con respecto a  $f$ ) se entiende la intersección de todos los subconjuntos invariantes de  $X$  con respecto a  $f$  que contienen a  $a$ . El Lema 3.1 dice que  $\Phi(a)$  es un subconjunto invariante de  $X$ . De acuerdo con esta definición, este envolvente

*invariante está contenido en cualquier conjunto invariante que contiene a, esto es,  $\Phi(a)$  es el conjunto invariante más pequeño que contiene a.*

**Lema 3.3.** *La familia  $\{\Phi(a) : a \in X\}$  es una partición de  $X$ .*

*Demostración.* En efecto, dado que para cada  $a \in X$  se tiene que  $a \in \Phi(a)$ , entonces  $X = \cup \{\Phi(a) : a \in X\}$ . Por lo tanto, solo se tiene que probar que si  $\Phi(a) \cap \Phi(b) \neq \emptyset$ , entonces  $\Phi(a) = \Phi(b)$ . Por tanto, sea  $\Phi(a) \cap \Phi(b) \neq \emptyset$ , probaremos que  $a \in \Phi(b)$ . Asumamos lo opuesto i.e,  $a \in X \setminus \Phi(b)$ , de acuerdo con el Lema 3.2 el conjunto  $X \setminus \Phi(b)$  es invariante y dado que  $\Phi(a)$  es el conjunto invariante más pequeño el cual contiene a,  $\Phi(a) \subset X \setminus \Phi(b)$  contradiciendo el hecho que  $\Phi(a) \cap \Phi(b) \neq \emptyset$  por lo tanto,  $a \in \Phi(b)$ , así  $\Phi(a) \subset \Phi(b)$ . De forma análoga se prueba la inclusión inversa y así el lema queda probado.  $\square$

### Condición suficiente para la equivalencia

**Lema 3.4.** *Sea la familia  $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$  una partición de  $X$  y  $Y \subset X$ . Bajo estas suposiciones, si  $X_\alpha \sim X_\alpha \cap Y$  para cada  $\alpha \in A$ , entonces  $X \sim Y$ .*

*Demostración.* Se tiene que;  $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$  para  $\alpha \neq \beta$ . Tomemos  $\alpha \in A$  arbitrario para indicar  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_\alpha \cap Y$  una función invertible de  $X_\alpha$  en  $X_\alpha \cap Y$ . Definimos la función  $f : X \rightarrow Y$  de la siguiente manera:  $f(x) = f_\alpha(x)$  si  $x \in X_\alpha$ . Como  $f$  es una función invertible de  $X$  en  $Y$ , el lema está probado.  $\square$

El Teorema de Schröder-Bernstein es equivalente a la siguiente declaración.

**Teorema 3.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función inyectiva y  $Y \subset X$ . Entonces  $X \sim Y$ .*

*Demostración.* De acuerdo con lemas anteriores es suficiente probar que para cada  $a \in X$  el conjunto  $\Phi(a)$  tiene la misma potencia que el conjunto  $\Phi(a) \cap Y$ . Se tienen las siguientes dos opciones :

- (a) El conjunto  $\Phi(a) \cap Y$  es infinito
- (b) El conjunto  $\Phi(a) \cap Y$  es finito

Considerese el primer caso (a): Dado que  $f$  es invertible, el conjunto  $M = \cdots f^{-2}(a) \cup f^{-1}(a) \cup \{a\} \cup \{f(a)\} \cup \{f^2(a)\} \cdots$  donde  $f^{-n}(a) = f^{-1}(f^{-(n-1)}(a))$  y  $f^n(a) = f(f^{(n-1)}(a))$ ,  $f^1(a) = f(a)$ ,  $n = 2, 3, \dots$  es invariante con respecto a  $f$  y contiene a  $a$ . Por lo tanto,  $\Phi(a) \subset M$ . Por otro lado, dado que  $f$  es invertible se sigue que el conjunto  $M$  es a lo más enumerable y por lo tanto  $\Phi(a)$  es a lo más enumerable. El conjunto  $\Phi(a) \cap Y$  es infinito, por lo tanto;  $\Phi(a)$  y  $\Phi(a) \cap Y$  son enumerables y consecuentemente tienen la misma potencia.

Ahora consideremos el caso (b): Probaremos que  $\Phi(a) \subset Y$ . Sea  $x \in \Phi(a)$ , entonces  $\Phi(x) \subset \Phi(a)$  y por lo tanto  $\Phi(x) \cap Y$  es finito. Obviamente  $f^n(x) \in \Phi(a) \cap Y$   $n = 1, 2, 3, \dots$  y por lo tanto la secuencia  $f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$  contiene solo un número finito de diferentes miembros; al menos dos de sus miembros con diferentes números coinciden i.e  $f^n(x) = f^{n+k}(x)$  para  $n > 0$  y  $k > 0$ . De la última desigualdad y el hecho que  $f$  es invertible:  $x = f^k(x)$ ; así  $x \in Y$ . Se ha probado que  $\Phi(a) \subset Y$ . Así  $\Phi(a) = \Phi(a) \cap Y$  y el teorema queda demostrado.  $\square$

### **Demostración 2.**

Esta demostración se encuentra en el texto “Introduction to Mathematical Logic” de Jeromet Malitz publicado en 1979, ver [7, pág 17-18]. Aquí el teorema se enuncia con notación de cardinales y se prueba usando el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.** Si  $C \subseteq B \subseteq A$  y  $A \sim C$ , entonces  $A \sim B$

*Demostración.* Por hipótesis existe una función  $f : A \rightarrow C$  biyectiva. Así,  $f(A \setminus B) = \{f(x) : x \in A, x \notin B\} \subseteq C$ . Sea  $A_0 = A \setminus B$ ,  $A_1 = f(A \setminus B)$ ,  $A_2 = f(A_1)$ , etc. Sea  $D = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ . Se define la función  $f' : A \rightarrow B$  como sigue:

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in D \\ a & \text{si } a \notin D \end{cases}$$

Ahora, se desea probar que  $f'$  es una biyección. Se inicia por probar que es una función uno-a-uno. Para esto se toman dos elementos  $a_1$  y  $a_2$  distintos en  $A$  y se consideran cuatro casos:

**Caso 1**  $a_1 \in D$  y  $a_2 \in D$ . Entonces  $f'(a_1) = f(a_1) \neq f(a_2) = f'(a_2)$ , dado que  $f$  es inyectiva.

**Caso 2**  $a_1 \notin D$  y  $a_2 \notin D$ . Entonces  $f'(a_1) \neq f'(a_2)$ , dado que  $f'(a_1) = a_1$  y  $f'(a_2) = a_2$ .

**Caso 3**  $a_1 \in D$  y  $a_2 \notin D$ . Entonces  $f'(a_1) = f(a_1) \in D$  y  $f'(a_2) = a_2 \notin D$ .

**Caso 3**  $a_1 \notin D$  y  $a_2 \in D$ . Entonces, como en el caso anterior  $f'(a_1) = a_1 \notin D$  y  $f'(a_2) = f(a_2) \in D$ .

Ahora se prueba que  $f'$  es sobreyectiva. Supongase que  $b \in B$ . Si  $b \notin D$ , entonces  $f'(b) = b$  y  $b \in \text{Ran} f'$ . Si  $b \in D$ , entonces  $b \in A_i$  para algún  $i > 0$  ( $i \neq 0$  dado que  $A_0 \cap B = \emptyset$ ). Como  $A_i = f(A_{i-1})$ ,  $b = f(c)$  para algún  $c \in A_{i-1}$ . Luego  $c \in D$ , por lo que  $f'(c) = f(c) = b$ . Así  $b \in \text{Ran} f'$  y por lo tanto  $f'$  es sobreyectiva en  $B$ .

Se ha probado que  $f' : A \rightarrow B$  es biyectiva; i.e,  $A \sim B$  como establece el teorema.  $\square$

**Teorema 3.3** (Cantor-Bernstein). *Si  $A \preceq B$  y  $B \preceq A$ , entonces  $A \sim B$ .*

*Demostración.* Por hipótesis existen funciones  $f$  y  $g$  inyectivas tales que  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow A$ . Entonces  $g \circ f : A \rightarrow A$  es inyectiva. Sea  $C = g \circ f(A)$ . Entonces  $A \sim C$  y  $C \subseteq A$ . Sea  $B' = g(B)$ . Si  $x \in C$ , entonces  $x = g(f(a))$  para algún  $f(a) \in B$ , así  $x \in B'$ . Luego  $C \subseteq B' \subseteq A$  y  $A \sim C$ . Por el teorema previo se concluye que  $A \sim B'$ . Dado que  $g : B \rightarrow g(B)$  es biyectiva,  $B \sim B'$  y así  $A \sim B$  y el teorema queda probado.  $\square$

### **Demostración 3.**

La siguiente demostración fue publicada y presentada en 1975 por Germán Posada en el V coloquio Colombiano de Matemáticas.

ver [8].

En el artículo el teorema se enuncia con funciones inyectivas.

**Teorema 3.4.** *Schröder-Bernstein Sean  $A$  y  $B$  conjuntos tales que existen dos funciones uno-a-uno,  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$ . Entonces existe una función  $p : A \rightarrow B$ , que es uno-a-uno y sobre.*

El teorema enunciado de esta manera sugiere dar una demostración directa, es decir encontrar dicha función  $p$ . En la siguiente demostración se hace uso de un lema y del teorema del punto fijo en retículos completos para encontrar dicha función, veamos.

**Lema 3.5.** *Sean  $A, B, f, g$ , como en la hipótesis del teorema anterior; si  $H$  es un subconjunto de  $A$  tal que:  $H^c \subset g(B)$  y  $f(H)^c = g^{-1}(H^c)$ , entonces la función  $p : A \rightarrow B$ , dada por:*

$$p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in H \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in H^c \end{cases}$$

*es uno a uno y sobre.*

*Demostración.* El rango de  $p$  es:  $f(H) \cup g^{-1}(H^c) = f(H) \cup f(H)^c = B$ , de modo que  $f$  es sobre;  $p$  es uno a uno ya que es la unión de dos funciones uno a uno con dominios disjuntos y rangos disjuntos.  $\square$

Se puede usar este lema para demostrar el Teorema 3.4 si se encuentra un  $H$  adecuado; para encontrar este  $H$  se hace uso del teorema de punto fijo en retículos completos. Recordar que un retículo completo es un conjunto no vacío  $R$ , provisto de un orden parcial tal que cada subconjunto no vacío de  $R$  tiene supremo e ínfimo.

**Ejemplo 3.1.** *El intervalo cerrado  $[0, 1]$  con el orden usual es un retículo completo.*

**Ejemplo 3.2.** *Si  $M$  es un conjunto, entonces  $\mathcal{P}(M)$ , el conjunto de los subconjuntos de  $M$ , con la inclusión, es un retículo completo.*

El teorema del punto fijo es el siguiente:

**Teorema 3.5.** Sea  $(R, <)$  un retículo completo. Si  $f : R \rightarrow R$  es una función creciente, entonces existe  $\alpha \in R$ , tal que  $f(\alpha) = \alpha$ .

*Demostración.* Sea  $P = \{x \in R \mid x \leq f(x)\}$ , entonces  $P \neq \emptyset$ , ya que  $\inf(R) \in P$ . Sea  $\alpha = \sup(P)$ , mostraremos que  $f(\alpha) = \alpha$ . Si  $x \in P$  entonces  $x \leq f(x)$  y  $x \leq \alpha$  luego  $f(x) \leq f(\alpha)$ , de modo que  $x \leq f(\alpha)$ , entonces  $f(\alpha)$  es una cota superior de  $P$ , y, por lo tanto,  $\alpha \leq f(\alpha)$ . De esto se sigue que  $f(\alpha) \leq f(f(\alpha))$ , luego  $f(\alpha) \in P$ , entonces  $f(\alpha) \leq \alpha$  y obtenemos  $f(\alpha) = \alpha$ .  $\square$

Con base en el teorema previo se da la demostración del Teorema 3.4.

*Demostración.* Considerese la función  $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , definida como sigue:  $T(x) = g(f(x)^c)^c$  para  $x \in \mathcal{P}(A)$ .

Ahora, si  $x, y \in \mathcal{P}(A)$ , se tiene que  $x \subseteq y \implies f(x) \subseteq f(y) \implies f(x)^c \supseteq f(y)^c \implies g(f(x)^c) \supseteq g(f(y)^c) \implies g(f(x)^c)^c \subseteq g(f(y)^c)^c \implies T(x) \subseteq T(y)$ , Entonces  $T$  es una función creciente. Como  $\mathcal{P}(A)$  es un retículo completo el teorema 3.5 asegura la existencia de un punto fijo para la función  $T$ .

Es decir, existe  $H \subseteq A$ , tal que:

$$\begin{aligned} g(f(H)^c)^c &= H, \text{ o} \\ g(f(H)^c) &= H^c, \text{ entonces} \\ H^c &= g(f(H)^c) \subseteq g(B) \end{aligned}$$

y como  $g$  es uno a uno, obtenemos:

$$f(H)^c = g^{-1}(g(f(H)^c)) = g^{-1}(H^c);$$

De acuerdo con el lema esto completa la demostración.  $\square$

#### **Demostración 4.**

La siguiente demostración se da con base en el cuento “El hotel infinito de Hilbert”. Dicho cuento fue creado por el matemático alemán David Hilbert explica

de manera simple e intuitiva, hechos relacionados con el concepto matemático de infinito.

El cuento trata sobre un hotel que tiene una cantidad infinita numerable de cuartos, los cuales todos están ocupados por un huésped y aún así el hotel puede albergar invitados adicionales, incluso una cantidad infinita de invitados y este proceso puede repetirse infinitamente.

Para ver la demostración sin la perspectiva de la metáfora ver el texto “Elements of Set Theory” publicado en 1977 [9, pág. 147].

*Teorema 3.6. Schröder-Bernstein Sean  $A$  y  $B$  conjuntos tales que existen dos funciones uno-a-uno,  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$ . Entonces existe una función  $p : A \rightarrow B$ , que es uno-a-uno y sobre.*

*Demostración.* El cuento se usa para crear la función biyectiva  $p$  entre estos dos conjuntos. Supongase que los elementos del conjunto  $A$  son los huéspedes y cada elemento del conjunto  $B$  es un cuarto en el hotel. La función  $f$  asigna a cada huésped una habitación y la función  $g$  identifica el huésped en determinado cuarto, así  $g(B)$  es el conjunto de huéspedes que ocupan cada uno de los cuartos en el hotel, luego  $A_0 = A \setminus g(B)$  representa los huéspedes que no tienen cuarto asignado, ahora para asignar un cuarto a cada uno de estos huéspedes se usa la función  $f$ ;  $f(A_0)$ , pero estos cuartos ya están ocupados con los huéspedes  $A_1 = g(f(A_0))$ , entonces a estos huéspedes se les reasigna cuarto,  $f(A_1)$ . Si se sigue este proceso de reasignar cuartos, al generalizar, se tiene  $A_{n+1} = (g \circ f)(A_n)$ .

Se define  $A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  y la función  $p : A \rightarrow B$  como sigue:

$$p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \notin A_\infty \end{cases}$$

Esta función en terminos del hotel nos da una correspondencia entre el huésped y el cuarto que este ocupa. Si  $x \in A_\infty$  el huésped se acomoda en un cuarto usando la función  $f$ , si  $x \notin A_\infty$  entonces el huésped ya tiene un cuarto asignado y este está dado por la función  $g^{-1}$ .

Ahora se va a verificar que la función  $p$  es uno-a-uno. Supongase que  $p(x) = p(y)$ .

Se tienen los siguientes casos:

- i Si  $x, y \in A_\infty$  dado que  $f$  es 1-1,  $x = y$ .
- ii Si  $x, y \notin A_\infty$  dado que  $g$  es 1-1,  $x = y$ .
- iii Si  $x \in A_\infty$  pero  $y \notin A_\infty$ , entonces  $x \in A_n$  para algún  $n$  y por definición de  $p$ ;  $p(x) = f(x)$  y  $p(y) = g^{-1}(y)$  esto es  $f(x) = g^{-1}(y)$ .

Así se tiene que  $y = (g \circ f)(x) \in (g \circ f)(A_n) = A_{n+1}$ . Esto significa que  $y \in A_\infty$  lo cual es una contradicción.

Ahora se va a verificar que la función  $p$  es sobre. Se desea probar que para cada  $z \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $p(x) = z$ .

Considerese  $x = g(z)$ , esto es  $x \notin A_0$ .

- i Si  $x \notin A_\infty$ , entonces  $p(x) = g^{-1}(x) = z$ .
- ii Si  $x \in A_\infty$ , entonces  $x \in A_n$  para algún  $n$ , con  $n > 0$ . Así  $x \in (g \circ f)(A_{n-1})$ , esto es,  $x = (g \circ f)(x')$  para  $x' \in A_{n-1}$ . Así  $z = g^{-1}(x) = f(x') = p(x')$ .

Queda demostrado que  $p$  define una biyección entre los conjuntos  $A$  y  $B$ .

□

### **Demostración 5.**

La siguiente demostración es similar a la anterior pero llega a la biyección  $p$  con otro enfoque. Tenemos la misma forma del teorema.

*Teorema 3.7. Schröder-Bernstein Sean  $A$  y  $B$  conjuntos tales que existen dos funciones uno-a-uno,  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$ . Entonces existe una función  $p : A \rightarrow B$ , que es uno-a-uno y sobre.*

*Demostración.* Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$  funciones uno-a-uno tales que ninguna es sobreyectiva. Se tiene que probar que existe una función  $p : A \rightarrow B$  que es uno-a-uno y sobreyectiva. Una forma de construir dicha función es encontrar un conjunto  $T \subset B$  tal que si definimos  $p$  como sigue:

$$p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \setminus g(T) \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in g(T) \end{cases} \quad (3.1)$$

tenemos que  $p$  es biyectiva. Dado que  $p(g(T)) = T$ , se tiene que cumplir también que:

$$f(A \setminus g(T)) = B \setminus T \quad (3.2)$$

si  $T$  y  $p$  satisfacen las condiciones 3.1 y 3.2, entonces:

- (i)  $p$  es uno-a-uno dado que  $p|_{g(T)}$  y  $p|_{A \setminus g(T)}$  son uno-a-uno y los conjuntos  $p(g(T)) = T$  y  $p(A \setminus g(T)) = B \setminus T$  son disjuntos.
- (ii)  $p$  es sobreyectiva dado que  $p(g(T)) \cup p(A \setminus g(T)) = T \cup (B \setminus T) = B$ .

Resta encontrar dicho conjunto  $T$ . Dado que  $B \setminus f(A)$  no puede ser determinado por  $f$ , tiene que determinarse con  $g^{-1}$ . Esto es  $p|_{g(B \setminus f(A))} = g^{-1}|_{g(B \setminus f(A))}$  y por lo tanto se tiene que

$$B \setminus f(A) \subset T. \quad (3.3)$$

Se necesita que  $T$  sea invariante bajo la función  $f \circ g$ , esto es

$$(f \circ g)(T) = f(g(T)) \subset T. \quad (3.4)$$

¿Por qué? de otra manera  $f(g(T)) \cap (B \setminus T) \neq \emptyset$  y la inyectividad de  $f$  implicaría que

$$f(g(A \setminus g(T))) \subsetneq B \setminus T.$$

Se sigue de (3.3) y (3.4), que

$$(f \circ g)(B \setminus f(A)) \subset T \quad y \quad (f \circ g)^2(B \setminus f(A)) \subset T \quad (3.5)$$

etcétera.

Por lo tanto definamos  $T$  como el menor conjunto invariante bajo  $f \circ g$  que contiene  $B \setminus f(A)$ ; esto es

$$T = \bigcup_{k=0}^{\infty} (f \circ g)^k(B \setminus f(A)). \quad (3.6)$$

Resta probar que 3.2 se satisface. Dado que  $(B \setminus f(A)) \setminus T = \emptyset$  se sigue

$$B \setminus T = ((B \setminus f(A)) \cup f(A)) \setminus T = f(A) \setminus T. \quad (3.7)$$

Como  $f(A) \setminus (B \setminus f(A)) = f(A)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} f(A) \setminus T &= f(A) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (f \circ g)^k(B \setminus f(A)) = \\ &= f(A) \setminus f(g(\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (f \circ g)^k(B \setminus f(A)))) = f(A) \setminus f(g(T)) = f(A \setminus g(T)) \end{aligned}$$

la última igualdad se sigue del hecho que  $f$  siendo uno-a-uno implica que

$$f(A) \setminus f(S) = f(A \setminus S)$$

para todo  $S \subset A$ . Por lo tanto

$$f(A) \setminus T = f(A \setminus g(T)) \quad (3.8)$$

Se ha probado que  $T$  definido como en 3.6, satisface 3.7 y 3.8 así la condición 3.2 se satisface y la demostración del teorema está completa. demostración del teorema está completa.  $\square$

Por el enfoque que se da en esta última demostración el conjunto que se encuentra está definido en el conjunto de llegada, esto es se define en  $B$ . De hecho si hacemos  $B_0 = B \setminus f(A)$ ,  $B_1 = (f \circ g)B_0$  y en general  $B_{n+1} = (f \circ g)B_n$  se tiene que

$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = B_{\infty}$ . Vemos así que se usa la misma idea que en la demostración 4 pero sobre el otro conjunto.

### 3.2. Comentarios

Sin duda de las demostraciones aquí presentadas la más elegante y a su vez la más corta es la segunda. De hecho en el texto publicado por - Science Networks. Historical Studies -[4] enuncia el Teorema 3.2 como la formulación en un solo conjunto del teorema de Schröder-Bernstein y se consideran ambos enunciados equivalentes. En la demostración 1, el teorema 3.1 que se demuestra es la formulación en un solo conjunto del teorema de Schröder-Bernstein;  $f : X \rightarrow Y$  invertible, implica que  $f : X \rightarrow f(X)$  es biyectiva, esto es  $f(X) \sim X$ . Así se tiene que  $f(X) \subset Y \subset X$  y  $f(X) \sim X$  que es la hipótesis del teorema 3.2 de la demostración 2.

Las últimas tres demostraciones definen de forma explícita la función biyectiva entre ambos conjuntos, en los tres casos la función que se define es seccionada y hace uso de las funciones inyectivas ya dadas y el método de demostración consiste en encontrar un conjunto adecuado donde se define la función. El conjunto  $A_{\infty}$  que se define en la demostración 4 cumple una de las condiciones que se establecen en el Lema 3.5 para el conjunto  $H$ .

Se definió  $A_{\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  donde  $A_{n+1} = (g \circ f)(A_n)$  con  $A_0 = A \setminus g(B)$ . Dado que  $g \circ f : A \rightarrow A$ .  $A_{\infty} \subset A$ .

Usando propiedades de imágenes y preimágenes de uniones e intersecciones de familias de conjuntos se tiene:

$$A_{\infty}^c = \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c$$

y  $A_0^c = g(B)$  así  $A_{\infty}^c \subseteq g(B)$ . En la demostración 5 las condiciones que se establecen para la función  $p$  y el conjunto  $T$  son equivalentes a las condiciones del lema 3.5: En esta demostración el conjunto correspondiente al conjunto  $H$  de la tercera demostración es el conjunto  $A \setminus g(T)$ .

**condición 1**  $H^c \subset g(B)$ ; esta condición se tiene de la definición del conjunto;

$$(A \setminus g(T))^c = g(T) \subset g(B).$$

**condición 2**  $f(H)^c = g^{-1}(H^c)$ ; se tiene de la condición 3.2 en la demostración 5

$$f(A \setminus g(T)) = B \setminus T \rightarrow f(A \setminus g(T))^c = T = g^{-1}(g(T)).$$

Una característica de las demostraciones 4 y 5 es que se da específicamente la biyección. Surge la pregunta ¿Qué propiedades cumple la biyección  $p$ ? El siguiente es un ejemplo que prueba que en general  $p$  no es una función boreleana:

Sea  $A$  un subconjunto no medible de  $[1/3, 2/3]$ . Sean  $X = [0, 1] \cup (A + 2)$  y  $Y = [0, 1]$ . Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  donde  $f(x) = x/4$  si  $x$  está en  $[0, 1]$  y  $f(x) = x/3$  si  $x$  está en  $A + 2$  y  $g(x) = x$ . Aquí  $Y$  es cerrado y  $X$  no es medible Lebesgue, con lo cual no pueden ser equivalente Borel.

La diferencia entre estas demostraciones es el método con el cual definen la biyección entre ambos conjuntos. La primera y la cuarta demostración se asemejan en el uso de cantidad numerables de clases de conjuntos.

### 3.3. Propiedad Schröder-Bernstein

Se conoce como propiedad de Schröder-Bernstein a la propiedad matemática que sigue el siguiente patrón:

*Si dados dos objetos matemáticos  $X$  y  $Y$ ,  $X$  es similar a parte de  $Y$  y  $Y$  es similar a parte de  $X$ , entonces  $X$  y  $Y$  son similares entre si.*

En el teorema de Schröder-Bernstein los objetos  $X$  y  $Y$  son conjuntos, “ser parte” se interpreta como ser subconjunto y la relación “similar” corresponde a ser equivalentes. El problema de responder si la propiedad se satisface para cierta estructura se conoce como problema de Schröder-Bernstein. Por ejemplo:

Sean  $(X, \tau_X)$  y  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos. Sean  $f : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo de

$X$  en  $f(X)$  y  $g : Y \rightarrow X$  homeomorfismo de  $Y$  en  $f(Y)$ . ¿Existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  entre  $X$  y  $Y$ ?

Aunque resulta tentador pensar que sí. Se pueden dar algunos contraejemplos sencillos:

- 1 Sean  $X = [0, 1]$  y  $Y = [0, 1)$  con la topología usual. Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  definidas como siguen  $f(x) = x/2$  y  $g(x) = x$ . Los espacios  $X$  y  $Y$  no pueden ser homeomorfos pues  $X$  es compacto y  $Y$  no.
- 2 Sean  $X = [0, 1] \cup [2, 3]$  y  $Y = [0, 1]$  con la topología usual. Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  definidas como siguen:

$$f(x) = \begin{cases} x/4 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x/3 & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases} \quad (3.9)$$

y  $g(x) = x$ . Los espacios  $X$  y  $Y$  no pueden ser homeomorfos pues  $X$  no es conexo y  $Y$  si lo es.

En el artículo [3] se trata el problema de Schröder-Bernstein para espacios de Banach. Busca darle respuesta al problema: Si  $X$  y  $Y$  son espacios de Banach y cada uno es isomorfo a un subespacio complementado del otro, ¿Son  $X$  y  $Y$  espacios isomorfos? la respuesta es no y en el artículo [3] se construye un contraejemplo.

## Capítulo 4

# AXIOMA DE ELECCIÓN

### 4.1. Historia del Axioma de Elección

El axioma de elección es uno de los axiomas más discutidos e interesantes en matemáticas. Fue formulado en 1904 por el matemático alemán Ernst Zermelo, buscando solución al problema del buen orden que Georg Cantor planteó en 1883. El axioma dice lo siguiente.

**Axioma de Elección.** *Para toda familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos no vacíos, existe una función  $f$  tal que  $f(S) \in S$  para cada conjunto  $S$  en la familia  $\mathcal{F}$ .*

A dicha función se le llama función de elección en  $\mathcal{F}$ . Hay casos particulares en los que este enunciado es evidente, por ejemplo, si existe una regla para definir una función que elija un elemento de cada conjunto; sea  $\mathcal{F}$  la familia que consiste de todos los conjuntos de la forma  $\{a, b\}$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces la función

$$f(\{a, b\}) = \min(a, b)$$

es una función de elección en  $\mathcal{F}$ .

Si  $\mathcal{F}$  es una familia finita se puede probar que existe una función de elección. Es en el caso infinito y cuando no existe una regla para definir la función de elección que el axioma es de relevancia. La forma más débil no trivial del axioma de elección ocurre cuando  $\mathcal{F}$  es numerable. Este caso es conocido como el axioma de elección numerable.

El axioma justifica la existencia de una función de elección. Como resultado, el axioma fue fuertemente rechazado por matemáticos que identifican la existencia de

un objeto matemático con la construcción del mismo por una regla. Aunque originalmente fue controvertido, hoy en día es usado sin reservas por la mayoría de los matemáticos. Hay aún, sin embargo, especialmente en la teoría de conjuntos, corrientes de opinión que rechazan el axioma o que investigan consecuencias o propiedades que contradicen el axioma, para ver algunas de estas propiedades. ver [10, pag 167-182].

En este mismo texto se conoce como otra fuente de objeción el hecho de que el axioma puede ser usado para probar teoremas no agradables y que de cierta forma no están de acuerdo con el sentido común, como ser el teorema de Vitali y la Paradoja de Banach-Tarski [10, pag 2-3] . El teorema de Vitali es el teorema de existencia de conjuntos de números reales no medibles.

**Un conjunto de números reales no medible.** Uno de los ejemplos más populares que es consecuencia del axioma de elección es la existencia de un conjunto de número reales que no es medible Lebesgue, conocido como el conjunto de Vitali, este es un resultado no constructivo.

*Demostración.* Sea  $\mu(X)$  la medida de Lebesgue de un conjunto  $X$  de números reales. Como es conocido,  $\mu$  es contable aditiva, invariante bajo traslación y  $\mu([a, b]) = b - a$  para todo intervalo  $[a, b]$ . Para números reales en el intervalo  $[0, 1]$ , se define  $x \sim y$  si  $x - y$  es un número racional. La relación  $\sim$  en  $[0, 1]$  es una relación de equivalencia; denotamos por  $[x]$  la correspondiente clase de equivalencia, para cada  $x \in [0, 1]$ . Por el axioma de elección, podemos elegir un elemento de cada clase de equivalencia. Así, hay un conjunto  $M$  de números reales,  $M \subset [0, 1]$  con la propiedad de que para cada número real  $x$ , existe un único  $y \in M$  y un único número racional  $r$  tal que  $x = y + r$ . Si definimos

$$M_r = \{y + r : y \in M\}$$

para cada número racional  $r$ , entonces tenemos una partición del conjunto  $R$  de números reales en una cantidad contable de conjuntos disjuntos:

$$R = \cup \{M_r : r \text{ racional}\}$$

por lo tanto el conjunto  $M$  no es medible. Asumiendo que  $M$  es medible, se llega a una contradicción: Primero,  $\mu(M) = 0$  no es posible, pues implicaría que  $\mu(R) = 0$ . Ahora bien,  $\mu(M) > 0$  tampoco es posible, dado que implicaría:

$$\begin{aligned} \mu([0, 2]) &\geq \mu(\cup \{M_r : r \text{ racional y } 0 \leq r \leq 1\}) \\ &= \sum_{0 \leq r \leq 1} \mu(M_r) = \infty \end{aligned}$$

usando el hecho que cada  $M_r$  tiene que tener la misma medida que  $M$ . □

Antes de que se formulara el axioma, varios matemáticos entre ellos Georg Cantor hicieron uso inconscientemente e instintivamente del mismo, pero nunca se formuló de forma explícita. Entre los teoremas que se demostrarán antes de la formulación del axioma y cuyas demostraciones involucran el axioma de elección de forma implícita están:

**Teorema de la unión contable** La unión de una familia contable de conjuntos contables es contable.

**Teorema** Todo conjunto infinito  $A$  tiene un subconjunto numerable.

**Principio de partición** Si un conjunto  $M$  está particionado en una familia  $S$  de conjuntos disjuntos no vacíos, entonces  $S$  es equipotente a un subconjunto de  $M$ .

**Tricotomía de cardinales** Para cardinales  $m$  y  $n$ , se tiene que  $m < n$  o  $m = n$  o  $m > n$ .

Para entender como el axioma de elección interviene en la demostración de estos teoremas se puede ver [11, pag 9-11]. Estos teoremas junto con el Principio de Buen Orden forman la base sobre la cual se construye el axioma y su historia temprana. En la prehistoria del axioma se puede hablar de diferentes estados a través de los cuales el uso de elecciones arbitrarias fue evolucionando hasta llegar a la formulación

explícita del Axioma de Elección. Gregory H. Moore en su texto “Zermelo’s Axiom of Choice its Origins, Development and Influence” [11], dedica un capítulo sobre estos y otros aspectos en la prehistoria del Axioma.

## 4.2. Teorema de Zermelo del Buen Orden

El teorema del buen orden afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado. En sus inicios el teorema fue considerado por Georg Cantor como un “principio fundamental del pensamiento” esta suposición, sin embargo, no fue aceptada por matemáticos contemporáneos y en los años posteriores varios matemáticos entre ellos Cantor buscaron demostrar o refutar este enunciado. Fue hasta en el año 1904 cuando Ernst Zermelo presentó una demostración para dicho enunciado. En esta demostración se formuló de forma explícita el axioma de elección.

*Teorema 4.1* (Teorema del buen orden). *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

En el texto “Abstract Set Theory” presentan una demostración para este teorema que es fiel a la demostración dada por Zermelo en 1904, ver [2, pag 225-227]. La forma del axioma de elección que se usa es la siguiente:

**Principio de elección.** Para todo conjunto  $S$  existe una función de elección  $f$  que asigna a cada subconjunto no vacío  $S_0$  de  $S$  un elemento de  $S_0$ :  $f(S_0) \in S_0$ .

En esta demostración se inicia por definir los conjuntos gamma:

*Dado un conjunto  $S$  y una función de elección  $f$ . Un subconjunto  $M$  de  $S$  se conoce como un conjunto gamma (de  $S$ , con respecto a  $f$ ) si:*

- a)**  *$M$  tiene buen orden,*
- b)** *Para cada segmento inicial no vacío  $A$  de  $M$ , determinado por  $a \in M$ ;  $f(S - A) = a$ .*  
*( $S - A$  no es vacío dado que  $A$  es un subconjunto propio de  $M$ ).*

La condición **b)** significa que cualquier conjunto gamma  $M$  que no agota los elementos de  $S$  se agranda al siguiente conjunto gamma incluyendo, después de los elementos de  $M$ , el elemento seleccionado para  $S \setminus M$ , el cual determina el segmento inicial  $M$  en el nuevo conjunto gamma.

Luego de haber definido los conjuntos gamma se divide la demostración en cuatro pasos.

1. Se prueba que dados dos conjuntos gamma diferentes, uno es segmento inicial del otro.
2. Se prueba que el conjunto  $\sum = \cup\{\Gamma : \Gamma \text{ es un conjunto gamma de } S\}$  se puede ordenar de tal forma que se conserven las relaciones de orden existentes en cada conjunto gamma y este orden es de hecho un buen orden.
3. Se prueba que  $\sum$  es un conjunto gamma.
4. Se prueba que  $\sum$  contiene todos los elementos de  $S$ .

Por la propiedad **a)** de los conjuntos gamma,  $\sum$  es un conjunto bien ordenado que contiene todos los elementos de  $S$  y solo estos elementos dado que todo conjunto gamma es subconjunto de  $S$ . Con esto la demostración finaliza.

Se hizo solamente una guía de los pasos que sigue la demostración. En el texto de Fraenkel cada uno de estos pasos hace referencia a teoremas y definiciones que están a lo largo del capítulo 8 y el capítulo 11 del libro. Esta demostración es relativamente larga y algo complicada pero agradable de entender. Se presenta ahora una demostración que parece ser más simple. ver [12].

*Demostración.* I. Sea  $A$  el conjunto bajo consideración. Se define  $\alpha : P(A) \setminus A \rightarrow A$  como una función que asigna a cada  $X \subset A$  un punto  $x \in A \setminus X$ . Por el axioma de elección dicha función existe.

II. Un subconjunto  $P \subset \mathcal{P}(A)$  se dice que es regular si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (1)  $P$  es linealmente ordenado con respecto a la relación de contención; i.e, si  $p_1, p_2 \in P$ , entonces  $p_1 \subseteq p_2$  o  $p_2 \subseteq p_1$ .
- (2)  $P$  tiene buen orden con respecto a la relación de contención; i.e, si  $\gamma \subseteq P$ , entonces  $\gamma$  tiene elemento mínimo en este orden (Este elemento mínimo es  $\cap \gamma$ ).
- (3)  $\emptyset \in P$ .
- (4) Si un conjunto  $p \in P$  es no vacío, entonces  $p = p_1 \cup \{\alpha(p_1)\}$ , donde  $p_1 = \cup\{q : q \in P, q \subset p\}$ .

Conjunto regulares existen, por ejemplo  $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\alpha(\emptyset)\}\}, \{\emptyset, \{\alpha(\emptyset)\}, \alpha(\emptyset, \{\alpha(\emptyset)\})\}$  son conjuntos regulares. Notese que si  $p \in P$  y para el próximo elemento tenemos que  $p + 1 \in P$ , entonces  $p + 1 = p \cup \{\alpha(p)\}$ .

III. Sean  $P_1$  y  $P_2$  conjuntos regulares. Definimos:

$$P_3 = \{p : p \in P_1 \cap P_2, \{q : q \in P_1, q \subset p\} = \{q : q \in P_2, q \subset p\}\}.$$

Se demostrará que (\*)  $P_3 = P_1$  o  $P_3 = P_2$ .

Supongase lo contrario. Dado que  $P_3 \subset P_1 \cap P_2$  se sigue que los conjuntos  $P_1 \setminus P_3$  y  $P_2 \setminus P_3$  son no vacíos. Sea  $r_1$  el elemento mínimo de  $P_1 \setminus P_3$  y sea  $r_2$  el elemento mínimo de  $P_2 \setminus P_3$ . Dado que  $\{p : p \in P_1, p \subset r_1\} = P_3 = \{p : p \in P_2, p \subset r_2\}$ , se sigue de (4) que  $r_1 = \cup P_3 \cup \{\alpha(\cup P_3)\} = r_2$ . Por lo tanto  $r_1 \in P_3$ , lo que es imposible.

Así, suponiendo que (\*) es falso se llega a una contradicción. Entonces se tiene que  $P_1$  es segmento inicial de  $P_2$  o viceversa.

IV. Se denota por  $Q$  la unión de todos los conjuntos regulares. El conjunto  $Q$  claramente satisface las condiciones (1) y (3) para ser un conjunto regular.

Se probará que satisface la condición (2):

Sea  $\gamma \subseteq Q$ . Para algún conjunto regular  $P$  la intersección  $\gamma \cap P$  es no vacía. Sea  $m \in \gamma \cap P$ . Dado que  $P$  es regular el conjunto  $\{n : n \in \gamma, n \subseteq m\} \subseteq P$  tiene un elemento mínimo, lo denotamos por  $g$ . Por definición no es mayor que ningún elemento de  $\gamma$  menor que  $m$ , y no es mayor que ningún elemento de  $\gamma$  mayor que  $m$ ,

por lo tanto  $g \subseteq m$ .

Ahora, se probará que satisface la condición (4):

Suponga que  $q \in Q$  es no vacío, por definición de  $Q$  existe un conjunto regular  $P$  tal que  $q \in P$ . Por (4) tenemos que  $q = q_1 \cup \{\alpha(q_1)\}$  donde  $q_1 = \cup\{p : p \in P, p \subset q\}$ .

Así,  $Q$  es un conjunto regular. Sea  $Z = \cup Q$ .

Si  $Z \neq A$ , entonces el conjunto  $Q_1 = Q \cup \{Z \cup \{\alpha(Z)\}\}$  es regular. Esto contradice la definición de  $Q$  como la unión de todos los conjuntos regulares, dado que  $Q_1$  contiene a  $Q$  como un subconjunto propio. Así,  $Z = A$ .

V. Se considera  $\alpha$  como una aplicación de  $Q$  a  $A$ .

Se prueba que  $\alpha$  es inyectiva:

Sea  $q_1 \neq q_2$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $q_1 \subset q_2$ , entonces  $q_1 + 1 \subseteq q_2$ , dado que  $Q$  es regular, tenemos que  $q_1 + 1 = q_1 \cup \{\alpha(q_1)\}$ . Por lo tanto  $\alpha(q_1) \in q_1 + 1 \subseteq q_2$ , i.e.  $\alpha(q_1) \in q_2$  pero  $\alpha(q_2) \notin q_2$  por lo tanto  $\alpha(q_1) \neq \alpha(q_2)$ .

$\alpha$  es suryectiva:

Dado que  $\cup Q = A$  para cada  $a \in A$ , el conjunto  $M_a = \{q : q \in Q, a \in q\}$  no es vacío. Denotemos por  $r$  el elemento mínimo de  $M_a$ . Por la regularidad de  $Q$  tenemos que  $r = r_1 \cup \{\alpha(r_1)\}$ , donde  $r_1 = \cup\{q : q \in Q, q \subset r\}$ . Dado que  $r$  es el elemento mínimo que contiene a  $a$ , tenemos que  $a \notin r_1$ . Por lo tanto  $\alpha(r_1) = a$ . Así  $\alpha$  induce una relación de buen orden en  $A$ .  $\square$

Al comparar ambas demostraciones se tiene cierta similitud entre los conjuntos gamma que se definen en la demostración del texto de Fraenkel con los conjuntos regulares que se definen en la demostración anterior. Pero los conjuntos gamma son subconjuntos del conjunto bajo consideración y los conjuntos regulares son subconjuntos del conjunto potencia del mismo. Del apartado III al V se demuestra lo mismo que con los cuatro pasos de la primera demostración considerando la diferencia entre los conjuntos  $Q$  y  $\sum$ . Se finaliza demostrando que estos conjuntos son bien ordenados pero a diferencia de  $\sum$  el conjunto  $Q$  no tiene los mismos elementos del conjunto

en consideración  $A$ , por esta razón en el apartado cinco se demuestra que la función  $\alpha : Q \rightarrow A$  define una biyección entre los conjuntos  $Q$  y  $A$ .

### 4.3. El Axioma de Elección y Algunas Equivalencias

En el año 1955 el profesor Herman Rubin dictó una serie de conferencias sobre el axioma de elección en la universidad de Stanford. En la preparación para esas conferencias se dió cuenta que toda la literatura sobre el axioma de elección estaba distribuida entre varios libros y revistas. Él junto a Jean E. Rubin emprendieron un proyecto para hacer un compendio de toda esta literatura que dio como resultado el texto; “Equivalents of the Axiom of Choice” publicado en 1970. Este libro presenta una variedad de formas del axioma de elección así como postulados y enunciados equivalentes al mismo [13].

En teoría de conjuntos, algebra y análisis hay muchos problemas para los cuales el axioma de elección en su forma general no es aplicable de inmediato, pero para los cuales uno de los axiomas equivalentes puede ser aplicable de una. Los principios maximales reemplazaron a la inducción transfinita y el teorema del buen orden. A continuación se presentan cuatro axiomas equivalentes al axioma de elección [14, pag 14-16]. En [13, pág 10-13] se encuentra una discusión sobre el origen de estos axiomas.

**Axioma de elección.** Para toda familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos no vacíos, existe una función  $f$  tal que  $f(S) \in S$  para cada conjunto  $S$  en la familia  $\mathcal{F}$ .

El axioma se puede reformular en términos de conjuntos indexados, veamos.

*Definición 4.1.* Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos. El producto cartesiano de esta familia, denotado  $\prod_{i \in I} A_i$ , es el conjunto de todas las funciones  $x$  que tienen dominio  $I$  tales que  $x_i = x(i) \in A_i$  para cada  $i \in I$ . A cada  $x$  se le conoce como función de elección para la familia  $\{A_i\}_{i \in I}$ .

**Axioma de elección.** El producto cartesiano de cualquier familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío, i.e. si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de conjuntos tal que  $I \neq \emptyset$  y  $A_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in I$ , entonces existe al menos una función de elección para la familia  $\{A_i\}_{i \in I}$ .

En las demostraciones de la equivalencias se usa el axioma formulado de forma previa. Antes de dar las equivalencias veamos los siguientes conceptos y definiciones:

*Definición 4.2.* Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos. Entonces  $\mathcal{F}$  es una familia de carácter finito si para cada conjunto  $A$  se tiene  $A \in \mathcal{F}$  si y solo si cada subconjunto finito de  $A$  está en  $\mathcal{F}$ .

*Lema 4.1.* Sea  $\mathcal{F}$  una familia de carácter finito y sea  $\mathcal{B}$  una cadena en  $\mathcal{F}$ . Entonces  $\cup \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ .

*Demostración.* Es suficiente probar que cada subconjunto finito de  $\cup \mathcal{B}$  está en  $\mathcal{F}$ . Sea  $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \cup \mathcal{B}$ . Entonces existen conjuntos  $B_1, \dots, B_n$  en  $\mathcal{B}$  tales que  $x_j \in B_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Dado que  $\mathcal{B}$  es una cadena existe un  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $B_j \subset B_{j_0}$  para cada  $j = 1, \dots, n$ . Entonces  $F \subset B_{j_0} \in \mathcal{F}$ . Pero  $\mathcal{F}$  es de carácter finito y entonces  $F \in \mathcal{F}$ .  $\square$

**Lema de Tukey** Sea  $\mathcal{F}$  una familia no vacía de conjuntos. Si  $\mathcal{F}$  tiene carácter finito, entonces  $\mathcal{F}$  tiene elemento maximal.

**Principio Maximal de Hausdorff** Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene una cadena maximal.

**Lema de Zorn** Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado en el cual cada cadena tiene una cota superior tiene un elemento maximal.

**Teorema del Buen Orden** Todo conjunto puede ser bien ordenado.

El siguiente teorema así como la demostración del mismo se encuentran en el texto “Real and Abstract Analysis” [14, pág 14-16]. La demostraciones de las implicaciones son sencillas a excepción de la primera .

*Teorema 4.2.* Las siguientes cinco proposiciones son equivalentes:

- (a) *Axioma de elección;*
- (b) *Lema de Tukey;*
- (c) *Principio maximal de Hausdorff;*
- (d) *Lema de Zorn;*
- (e) *Teorema del buen orden.*

#### 4.4. Teorema de Tychonoff

Una implicación muy importante del axioma de elección en topología es el conocido Teorema de Tychonoff.

*Teorema 4.3* (Tychonoff). *Sea  $\{X_i\}_{i \in I}$  una familia de espacios topológicos compactos. Entonces  $\prod_{i \in I} X_i$  es compacto con respecto a la topología producto.*

En el texto de topología de John L. Kelley [15, 143] se dan dos demostraciones de este teorema, una en la que se hace uso del Lema de Alexander y otra alternativa en la que se formula la compacidad en terminos de conjuntos cerrados en lugar de conjuntos abiertos. Para la primera prueba que se da, se hace uso del Lema de Alexander, enunciado a continuación.

*Lema 4.2* (Alexander). *Si  $\mathcal{S}$  es una subbase para la topología de un espacio  $X$  tal que todo cubrimiento de  $X$  por elementos de  $\mathcal{S}$  tiene un subcubrimiento finito, entonces  $X$  es compacto.*

*Demostración.* Se dice que una familia de conjuntos de  $X$  es inadecuada si y solo si no cubre  $X$ , y es finitamente inadecuada si y solo si ninguna subfamilia finita cubre  $X$ . Entonces la definición de compacidad de  $X$  es equivalente a decir: cada familia finitamente inadecuada de conjuntos abiertos es inadecuada. Es fácil ver que la clase de familias finitamente inadecuada de conjuntos abiertos es de carácter finito así por el Lema de Tukey existe una familia maximal. Denotese por  $\mathcal{A}$  dicha familia. Entonces  $\mathcal{A}$  tiene la siguiente propiedad: si  $C \notin \mathcal{A}$  y  $C$  es abierto, entonces existe una

subfamilia finita  $A_1, \dots, A_m$  de  $\mathcal{A}$  tal que  $C \cup A_1 \cup \dots \cup A_m = X$ . Por lo tanto ningún conjunto abierto que contiene a  $C$  pertenece a  $\mathcal{A}$ . Si  $D$  es otro conjunto abierto tal que  $D \notin \mathcal{A}$ , entonces existen  $B_1, \dots, B_n$  en  $\mathcal{A}$  tal que  $D \cup B_1 \cup \dots \cup B_n = X$  y por operaciones de conjuntos se tiene  $(C \cap D) \cup A_1 \cup \dots \cup A_m \cup B_1 \cup \dots \cup B_n = X$ . Se sigue que  $C \cap D \notin \mathcal{A}$ . Por consiguiente, si ningún miembro de una familia finita de conjuntos abiertos pertenece a  $\mathcal{A}$ , entonces ningún conjunto abierto que contiene la intersección pertenece a  $\mathcal{A}$ ; dicho de otra forma, si un elemento de  $\mathcal{A}$  contiene una intersección finita  $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_p$  de conjuntos abiertos, entonces  $C_i \in \mathcal{A}$  para algún  $i$ .

Ahora la demostración es directa. Supongase que  $\mathcal{S}$  es una subbase tal que cada cubrimiento abierto por elementos de  $\mathcal{S}$  tiene un subcubrimiento finito (esto es, cada familia finitamente inadecuada es inadecuada) y supongase que  $\mathcal{B}$  es una familia finitamente inadecuada de conjuntos abiertos de  $X$ . Existe la familia maximal finitamente inadecuada  $\mathcal{A}$  que contiene a  $\mathcal{B}$  luego solo queda probar que  $\mathcal{A}$  es inadecuada. La familia  $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$  de todos los elementos de  $\mathcal{A}$  que pertenecen a  $\mathcal{S}$  es finitamente inadecuada y por lo tanto no cubre a  $X$ . Por consiguiente el teorema estará probado si se demuestra que cada punto en  $\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$  pertenece a  $\bigcup\{A : A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}\}$ . Como  $\mathcal{S}$  es una subbase cada punto  $x$  de un elemento  $A$  de  $\mathcal{A}$  pertenece a alguna intersección finita de elementos de  $\mathcal{S}$  contenida en  $A$  luego por la propiedad que se estableció anteriormente se tiene que alguno de los elementos de esta familia finita pertenece a  $\mathcal{A}$ , por lo tanto  $\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \bigcup\{A : A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}\}$ , y el teorema queda demostrado.  $\square$

Ahora se da la demostración del teorema de Tychonoff que hace uso del teorema anterior.

*Demostración.* Sea  $Q = \prod\{X_a : a \in A\}$  donde cada  $X_a$  es un espacio topológico compacto y  $Q$  tiene la topología producto. Sea  $\mathcal{S}$  la subbase para la topología producto es decir  $\mathcal{S} = \{p_a^{-1}(U) : U \subset X_a \text{ es abierto}, a \in A\}$  por el teorema de

Alexander el espacio  $Q$  será compacto si cada subfamilia  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{S}$ , tal que ninguna subfamilia de  $\mathcal{A}$  cubre  $Q$ , no cubre  $Q$ . Para cada  $a \in \mathcal{A}$  se define  $\mathcal{B}_a = \{U : U \subset X_a \text{ abierto, } p_a^{-1}(U) \in \mathcal{A}\}$ . Entonces ninguna subfamilia finita de  $\mathcal{B}_a$  cubre  $X_a$  y así por compacidad existe un punto  $x_a$  tal que  $x_a \in U^c$  para cada  $U$  en  $\mathcal{B}_a$ . El punto  $x$  cuya  $a$ -ésima coordenada es  $x_a$  no pertenece a ningún miembro de la familia  $\mathcal{A}$  por consiguiente  $\mathcal{A}$  no es un cubrimiento de  $X$ .  $\square$

vemos ahora otra demostración, la cual no depende del Lema de Alexander.

*Demostración.* Se probará que si  $\mathcal{B}$  es una familia de subconjuntos del producto y  $\mathcal{B}$  tiene la propiedad de intersección finita, entonces  $\bigcap \{B^c : B \in \mathcal{B}\}$  es no vacía. La clase de todas las familias que tiene la propiedad de intersección finita es de carácter finito, por el Lema de Tukey tenemos que existe una familia maximal con esta propiedad, se puede asumir que  $\mathcal{B}$  es dicha familia maximal. Dado que  $\mathcal{B}$  es maximal cada conjunto que contiene un elemento de  $\mathcal{B}$  pertenece a  $\mathcal{B}$  y la intersección de dos miembros de  $\mathcal{B}$  pertenece a  $\mathcal{B}$ . además, si  $C$  intersecciona cada elemento de  $\mathcal{B}$ , entonces  $C \in \mathcal{B}$ .

Finalmente, la familia de proyecciones de miembros de  $\mathcal{B}$  en un espacio  $X_a$  tiene la propiedad de intersección finita y por lo tanto es posible escoger un punto  $x_a \in \bigcap \{p_a(B)^c : B \in \mathcal{B}\}$ . El punto  $x$  cuya  $a$ -ésima coordenada es  $x_a$  tiene la siguiente propiedad: cada vecindad  $U$  de  $x_a$  intersecciona  $p_a(B)$  para cada  $B \in \mathcal{B}$ , o equivalente  $p_a^{-1}(U) \in \mathcal{B}$ , para cada vecindad  $U$  de  $x_a$  en  $X_a$ . Por lo tanto la intersección finita de conjuntos de esta forma pertenecen a  $\mathcal{B}$ . Luego cada vecindad de  $x$  que pertenece a la base definida para la topología producto pertenece a  $\mathcal{B}$  y por lo tanto intersecciona cada miembro de  $\mathcal{B}$ . Así  $x \in B^c$  para cada  $B \in \mathcal{B}$  y el teorema queda demostrado.  $\square$

En ambas demostraciones se hace uso del Lema de Tukey y este se probó anteriormente que es equivalente al axioma de elección.

De hecho el teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección. Para demostrar la equivalencia falta demostrar que el teorema de Tychonoff implica el axioma de elección esto lo probó John L. Kelley en un artículo publicado en el año 1950. [16].

En este artículo se demuestra el siguiente enunciado, el cual es equivalente al axioma de elección: Si para cada  $a \in A$ ,  $X_a$  es un conjunto no vacío, entonces el producto cartesiano  $\prod\{X_a : a \in A\}$  es no vacío.

*Demostración.* Se empieza por agregar un solo punto,  $\Lambda$  a cada conjunto  $X_a$ : sea  $Y_a = X_a \cup \Lambda$ . Se le asigna una topología a  $Y_a$  definiendo el conjunto vacío, el conjunto  $\{\Lambda\}$  y los complementos de los conjuntos finitos abiertos. El conjunto  $Y_a$  con esta topología es compacto.

Para cada  $a \in A$ , sea  $Z_a$  el subconjunto de  $\prod_{a \in A} Y_a$  que consiste de todos los puntos tales que la  $a$ -ésima coordenada está en  $X_a$ . Se tiene que  $Z_a$  es cerrado en  $\prod_{a \in A} Y_a$  dado que  $X_a$  es cerrado en  $Y_a$ . Además para cualquier subconjunto finito  $B$  de  $A$  la intersección  $\cap_{a \in B} Z_a$  es no vacía, dado que  $X_a$  no es vacío por el axioma de elección finito se puede escoger  $x_a \in X_a$  para  $a \in B$ , y hacer  $x_a = \Lambda$  para  $a \in A - B$ . Por consiguiente la familia de todos los subconjuntos de la forma  $Z_a$ , para algún  $a \in A$ , es una familia de subconjuntos cerrados de  $\prod_{a \in A} Y_a$ , con la propiedad de que la intersección de cualquier subfamilia finita es no vacía. Luego, dado que por el teorema de Tychonoff  $\prod_{a \in A} Y_a$  es compacto, la intersección  $\cap_{a \in A} Z_a$  es no vacía. Pero esta intersección es precisamente  $\prod\{X_a : a \in A\}$  y así el axioma de elección queda demostrado.  $\square$

#### 4.5. Teorema de Comparabilidad

Una de las aplicaciones más importantes del teorema del buen orden es el teorema de comparabilidad que establece la ley de tricotomía de los cardinales.

*Teorema 4.4 (Comparabilidad). Dados dos conjuntos, al menos uno es equivalente a un subconjunto del otro. Por lo tanto dos cardinales o son iguales o uno es menor que el otro.*

Georg Cantor estableció la tricotomía de cardinales en 1895 sin proponer una prueba. Este resultado se seguía de la proposición que todo conjunto puede ser bien ordenado, que en ese entonces tampoco había sido demostrada [11]. La equivalencia de estos dos resultados la probó el matemático alemán Friedrich Hartogs en 1915. El tercer teorema del capítulo 11 del texto “Abstract Set Theory” [2, 200] establece la comparabilidad de ordinales. El teorema de comparabilidad se sigue de este teorema junto con el teorema del buen orden. Así se establece la implicación:

*axioma de elección  $\rightarrow$  teorema del buen orden  $\rightarrow$  teorema de comparabilidad*

De hecho estos tres principios son equivalentes. La equivalencia de los primeros dos ya se ha demostrado. En el texto de Fraenkel se da una prueba del teorema de comparabilidad usando directamente el axioma de elección. A continuación se da un bosquejo de esta prueba.

Para probar que dos conjuntos  $S$  y  $T$  son comparables se muestra que al menos uno de ellos es equivalente a un subconjunto del otro.

Se inicia por definir el conjunto  $\Phi$  de todas las aplicaciones parciales entre  $S$  y  $T$ . Para demostrar el teorema es suficiente probar que existe una aplicación parcial entre los conjuntos  $S$  y  $T$  que no admite una extensión simple y para probar esto se usa una función de elección de forma análoga a como se usó en la demostración del teorema del buen orden en el mismo texto.

## Capítulo 5

# CONCLUSIONES

Entre las diferentes filosofías sobre que es la matemática: esta el concepto platónico en el que la matemática existe en un mundo ideal e inmutable; otro enfoque ve la matemática como algo esencialmente humano por lo cual es importante conocer la historia. La perspectiva histórica permite comprender el porqué de cosas que hoy parecen ser muy sencillas en su momento de creación fueron revolucionarias.

Se encontró en la bibliografía que la mayoría de demostraciones para el teorema de Schröder-Bernstein se pueden clasificar en dos tipos diferentes. Se presentaron cinco demostraciones para el teorema. Una ventaja de las demostraciones 4 y 5 es que dan específicamente la biyección.

Se presentaron cinco de las más importantes equivalencias del axioma de elección. Presentando de forma más detallada el teorema del buen orden y el teorema de Tychonoff.

Si bien el enfoque principal fue la parte histórica también hay preguntas muy interesantes que están sin contestar. Es el caso del problema de Schröder-Bernstein en diferentes estructuras.

## Bibliografía

- [1] Joseph Warren Dauben. *Georg Cantor; His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton University Press, first edition, 1979.
- [2] Abraham Adolf Fraenkel. *Abstract set theory*. North-Holland Publishing, third edition, 1966.
- [3] William Timothy Gowers. A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 28(3):297–304, 1996.
- [4] Arie Hinkis. *Proofs of the Cantor-Bernstein Theorem*. Springer, 2013.
- [5] Émile Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars et fils, 1898.
- [6] Ivan Prodanov; Nikolai Hadziivanov. A proof of the Schröder-Bernstein's theorem. *Bulgarian Academy of Science*, 16:115–117, 1973.
- [7] Jerome Malitz. Introduction to mathematical logic: set theory, computable functions, model theory. Technical report, 1979.
- [8] Germán Posada. Una demostración del teorema de Schröder-Bernstein. *Boletín de Matemáticas*, 11(04-06):179–183, 1977.
- [9] Herbert B Enderton. *Elements of set theory*. Academic Press, 1977.
- [10] Thomas J Jech. *The axiom of choice*. American Elsevier, 1973.
- [11] Gregory H. Moore. *Zermelo's axiom of choice; its origins, development and influence*. Dover publications, first edition, 2013.
- [12] VV Filippov and E Yu Mychka. Simple proof of Zermelo's theorem. *arXiv preprint arXiv:1111.6991*, 2011.
- [13] Herman Rubin; Jean E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice*. North Holland Publishing Company, 1970.

- [14] Edwin Hewitt; Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, first edition, 1965.
- [15] John L. Kelley. *General topology*. Springer-Verlag, first edition, 1955.
- [16] John Kelley. The tychonoff product theorem implies the axiom of choice. *Fundamenta Mathematicae*, 37(1):75–76, 1950.

# TEOREMA DE SCHRÖDER-BERNSTEIN Y EL AXIOMA DE ELECCIÓN

Ruth Yolibeth López Fajardo

(787) XXX-XXXX

Departamento de Matemática

Consejero: Hector Salas Olaguer

Grado: Maestría en Ciencias

Fecha de Graduacion: Julio 2018

Este es el resumen para la audiencia general.

En el archivo: `GeneralAudienceAbstract.tex`