

**MODELO DE TRANSPORTE DE SEDIMENTO PARA FLUJO NO
PERMANENTE CON LAS FUNCIONES DE YANG Y ACKERS-WHITE**

Por

Julio César Coaquira Nina

Tesis sometida en cumplimiento parcial
de los requisitos para el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS
en
Ingeniería Civil

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ
2006

Aprobado por:

Walter Silva Araya, Ph.D.
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Jorge Rivera Santos, Ph.D.
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Ingrid Padilla, Ph.D.
Miembro, Comité graduado

Fecha

José R. Arroyo, Ph.D.
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Prof. Ismael Pagán Trinidad, MsC.
Director del Departamento

Fecha

ABSTRACT

A mathematical model is presented for studying aggradation and degradation due to base level lowering in open channels. The Saint-Venant equations for unsteady flow and the sediment continuity equations for one-dimensional flow were solved using the second-order-accurate explicit finite difference scheme of MacCormack. This algorithm was proposed by Bhallamudi and Chaudhry, (1991). The sediment transport functions of Yang and Ackers-White were introduced in this algorithm. The application of both functions is only for non-cohesive sediments. The initial condition was assumed as steady state for water and sediment flow. The equilibrium state was interrupted by increasing the sediment supply rate for aggradation and base level lowering for degradation. The model was verified with experimental data for aggradation, degradation and filling of a trench. The model produced satisfactory results and could be used to simulate geomorphic changes in alluvial channels as long as the Yang and Ackers-White functions are applicable. In some cases artificial viscosity was added to the algorithm to satisfy stability requirements.

RESUMEN

Un modelo matemático es presentado para estudiar la agradación y degradación debido a un descenso en la elevación del fondo al extremo final aguas abajo en canales aluviales. Las ecuaciones Saint Venant para flujo no-permanente y la ecuación de continuidad de sedimento para flujo unidimensional fueron resueltas usando el esquema de diferencias finitas de MacCormack. Las condiciones iniciales fueron asumidas como flujo uniforme para agua y el flujo de sedimento en equilibrio. La condición de equilibrio fue interrumpida inyectando sedimento en el primer nodo para simular agradación y descendiendo la elevación del fondo al extremo aguas abajo para provocar degradación aguas arriba. El modelo fue verificado con datos experimentales para agradación, degradación, y agradación en una trinchera. El modelo produce resultados satisfactorios y puede ser usado para simular cambios en canales aluviales, siempre que las funciones de Yang y Ackers-White puedan ser aplicados a los datos. En algunos casos se usó viscosidad artificial en el modelo para mantener la estabilidad.

INDICE

1	CAPITULO 1: INTRODUCCION	1
	1.1 Introducción.....	1
	1.2 Objetivos.....	2
2	CAPITULO 2: REVISION DE LITERATURA	3
3	CAPITULO 3: ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL FLUJO UNI-DIMENSIONAL EN CANALES	13
	3.1 Ecuaciones de Saint Venant	13
	3.1.1 Ecuación de Continuidad.....	14
	3.1.2 Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento.....	14
	3.2 Ecuación de Continuidad de Sedimento.....	15
	3.3 Esquemas Numéricos.....	16
	3.3.1 Esquema numérico de MacCormack.....	17
	3.3.2 Método de las Características.....	19
4	CAPITULO 4: FUNCIONES DE TRANSPORTE	21
	4.1 Función de transporte de Yang.....	21
	4.1.1 Conclusiones y Limitaciones de la función de transporte de Yang....	22
	4.2 Función de transporte de Ackers – White.....	25
	4.2.1 Parámetro adimensional de Tamaño.....	26
	4.2.2 Parámetro adimensional de Movilidad.....	27
	4.2.3 Parámetro adimensional de Transporte.....	27
	4.2.4 Resumen y Conclusiones de la función de transporte de Ackers – White.....	30
5	CAPITULO 5: DESCRIPCION DE EXPERIMENTOS DE AGRADACION Y DEGRADACION	32
	5.1 Descripción del experimento de agradación	32
	5.2 Descripción del experimento de degradación	34
6	CAPITULO 6: MODELO DE AGRADACION Y DEGRADACION USANDO LAS FUNCIONES DE TRANSPORTE DE YANG Y ACKERS-WHITE	36
	6.1 Desarrollo del modelo	37
	6.1.1 Aplicación del esquema numérico de MacCormack a las ecuaciones gobernantes.....	41

6.2	Condiciones de Frontera	44
6.2.1	Condiciones de frontera para el modelo de agradación.....	44
6.2.1.1	Condiciones de frontera aguas arriba	44
6.2.1.2	Condicion de frontera aguas abajo.....	45
6.2.2	Condiciones de frontera para el modelo de degradación.....	46
6.2.2.1	Condiciones de frontera aguas arriba	46
6.2.2.2	Condicion de frontera aguas abajo.....	46
6.3	Estabilidad.....	48
6.4	Viscosidad Artificial.....	49
6.5	Procedimiento de Calculo	49
7	CAPITULO 7: ANALISIS DE RESULTADOS.....	51
7.1	Resultados del canal con agradación	51
7.1.1	Condiciones iniciales del modelo de agradación.....	51
7.1.2	Ajuste del modelo de agradación.....	52
7.1.3	Análisis de los perfiles calculados por el modelo de agradación....	54
7.2	Resultados del canal con degradación	53
7.2.1	Condiciones iniciales del modelo de degradación.....	53
7.2.2	Ajuste del modelo de degradación.....	54
7.2.3	Análisis de los perfiles calculados por el modelo de degradación...54	
7.3	Aplicación del modelo con Otros experimentos.....	62
7.3.1	Kerssens y Van Rijn (1977)	62
7.3.1.1	Breve descripción del experimento.....	62
7.3.1.2	Condiciones iniciales para los datos de Kerssens y Van Rijn (1977).....	63
7.3.1.3	Ajuste del modelo con el experimento de Kerssens y Van Rijn (1977).....	64
7.3.1.4	Análisis de los perfiles calculados.....	64
7.3.2	R. Gallapati y C.B. Vreugdenhil (1985).....	69
7.3.2.1	Breve descripción del experimento.....	67
7.3.2.2	Condiciones iniciales para los datos de Gallapati y Vreugdenhill (1985).....	67
7.3.2.3	Ajuste del modelo con los datos de Gallapati y Vreugdenhill (1985).....	68

	7.3.2.4 Análisis de los perfiles calculados.....	68
8	CAPITULO 8: RESUMEN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	71
	8.1 Resúmenes.....	71
	8.2 Conclusiones.....	72
	8.3 Recomendaciones.....	74
9	CAPITULO 9: BIBLIOGRAFIA	75
10	APENDICE 1: EJEMPLO DEL USO DE LAS FUNCIONES DE YANG Y ACKERS – WHITE	78
	Apéndice 1.1 Ejemplo de calculo usando la función de transporte de Yang ...	78
	Apéndice 1.2 Ejemplo de calculo usando la función de transporte de Ackers-White.....	79

LISTA DE TABLAS

CAPITULO 4

Tabla 4. 1	Intervalos de los parámetros de la función de transporte de Yang.....	24
Tabla 4. 2	Intervalos de los parámetros de la función de transporte de Ackers-White	31

CAPITULO 7

Tabla 7. 1	Datos usados en la simulación de Agradacion	52
Tabla 7.2	Razón de incremento del flujo de sedimento en el modelo de agradación.	53
Tabla 7.3	Error medio cuadrático entre el perfil calculado y medido.....	53
Tabla 7.4	Datos usados en la simulación de Degradación	54
Tabla 7.5	Constantes de disipación y errores.....	57
Tabla 7.6	Limites para la aplicación de las funciones de Transporte de Yang (1973) y Ackers-white (1973).....	61

LISTA DE FIGURAS**CAPITULO 3**

- Figura 3. 1 Esquema del volumen de control de una columna de agua transportando sedimento. 15
- Figura 3. 2 Esquema de la Malla para diferencias finitas..... 19
- Figura 3. 1 Esquema de las condiciones de frontera aguas arriba (a) y abajo del canal (b)..... 20

CAPITULO 5

- Figura 5. 1 Esquema del perfil del fondo aguas arriba y abajo de la sección de inyección de sedimento 33

CAPITULO 6

- Figura 6. 2 Esquema de agradación debido a sobrecarga de sedimento en una Sección del canal..... 38

CAPITULO 7

- Figura 7. 1 Perfiles de agradación con diferentes funciones de transporte, $t=30$ min ...51
- Figura 7.2 Perfiles de agradación con diferentes funciones de transporte, $t=40$ min. . 52
- Figura 7.3 Perfil calculado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), $t=37$ min55
- Figura 7.4 Perfil normalizado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), $t=37$ min.56
- Figura 7.5 Perfil calculado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), $t=1320$ min.59
- Figura 7.6 Perfil normalizado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), $t=1320$ min. 60
- Figura 7.7 Perfil de la trinchera experimental (Kerssens y Van Rijn, 1977)..... 63
- Figura 7.8 Resultados de agradación comparados con datos experimentales de Kerssens y Van Rijn (1977), $t=7$ y 14 hrs.66
- Figura 7.9 Perfil de la trinchera experimental (Gallapati y Vreugdenhill, 1985) ... 67

Figura 7.10 Resultados de agradación comparados con datos experimentales de
R. Galappatti y C.B. Vreugdenhill (1985), $t=7.5$ hrs... 70

LISTA DE SIMBOLOS

q	Caudal por unidad de ancho del canal;
h	Profundidad de flujo
V	Velocidad promedio del agua
q_s	Flujo de sedimento
q_o, h_o, q_{so}	Valores iniciales del modelo
S_o	La pendiente del canal
S_f	Pendiente de la línea de energía
n	El coeficiente de Manning
w	Velocidad de caída del sedimento en agua
d, d_{50}	Diámetro medio del sedimento
ν	Viscosidad cinemática del agua
U_f, U_*	La velocidad de fricción en el fondo
g	Aceleración de la gravedad
Re	El numero de Reynolds de la partícula $Re = \frac{U_f d}{\nu}$
$\frac{V_{critico}}{\omega}$	La razón de la velocidad crítica y la velocidad de caída del sedimento en agua, para iniciar el movimiento.
C_t	Concentración de total de arena en el flujo de agua en ppm por peso
VS	Potencia unitaria de la corriente.
$V_{critico} S$	Potencia unitaria crítica del cauce.
τ_{cg}	Esfuerzo cortante de material grueso
α	Coficiente en la ecuación turbulenta aproximadamente igual a 10

V	Velocidad promedio del agua,
ρ	Densidad del agua
F_{gr}	Movilidad del sedimento
D_{gr}	Parámetro adimensional de tamaño
G_{gr}	Parámetro adimensional para el transporte de sedimento
n	Exponente de transición que depende del tamaño medio del sedimento
γ_s	Peso específico del sedimento
γ	Peso específico del agua
X	Concentración de sedimento por unidad de flujo de agua
SG	Gravedad específica del sedimento, usualmente igual a 2.65.
C	Coefficiente en la función de transporte de sedimento
A	Valor del parámetro adimensional de movilidad para iniciar el movimiento
m	Exponente en la función de transporte de Ackers-White
x	Longitud del canal en la dirección del flujo
z	Elevación del canal
p	Porosidad del sedimento
a, b	Coefficientes en la función de transporte Potencial.
k	Coefficiente de difusión promedio igual a $500\text{cm}^2 / \text{s}$ en la ecuación propuesta por Begin (1981).
Δt y Δx	Paso temporal y espacial para el esquema de diferencias finitas
h_i^k, q_i^k	Valores de la profundidad y caudal por unidad de ancho en el nodo i y en el tiempo k .

c	Velocidad de onda en la ecuación característica, $c = \sqrt{gA/B}$
A	Area de la sección transversal del canal
B	Ancho de la superficie del canal.
C_n	Numero de Courant
k	Constante de disipación para corregir por viscosidad artificial.
$\Delta q_s / q_{so}$	Razón del flujo de sedimento inyectado y el flujo de sedimento en equilibrio.
$D = \frac{A}{B}$	Profundidad hidráulica
y	Profundidad de flujo en las ecuaciones de flujo

CAPITULO 1

INTRODUCCION**1.1 Introducción**

Un canal se encuentra en equilibrio cuando el flujo de agua y sedimento no producen erosión o deposición en el fondo del canal. Varios factores naturales o hechos por el hombre pueden contribuir a romper este delicado balance produciendo agradación o degradación del fondo del canal. La modelación de estos procesos es muy importante para el manejo de ríos, proyectos de recursos de agua, estimación de la elevación de la superficie del agua durante inundaciones, o para estimar los cambios relacionados a las avenidas.

Varios investigadores desarrollaron modelos matemáticos para simular agradación y degradación utilizando funciones empíricas para estimar el flujo de sedimento en un canal aluvial. Las funciones empíricas son halladas de un análisis de regresión usando datos de campo o laboratorio, los cuales no están disponibles para todos los canales aluviales. Las funciones empíricas son solo función de la velocidad del flujo; a diferencia de las funciones de transporte de sedimento en el que la concentración del sedimento en el agua es función de las características de flujo y sedimento; llámese la pendiente de la línea de energía, flujo de agua, profundidad del flujo y diámetro medio del sedimento.

Modelos analíticos fueron desarrollados para casos especiales de agradación y degradación en canales aluviales. Los modelos analíticos son resultados de varias asunciones y simplificaciones a las ecuaciones gobernantes de flujo y de sedimento. Los modelos numéricos utilizan diferencias finitas y pueden ser modificados para diferentes condiciones de frontera.

En esta investigación se utiliza el algoritmo propuesto por Bhallamudi y Chaudhry, (1991) y las funciones de transporte de sedimento de Yang y Ackers-White para simular agradación y degradación del fondo en canales aluviales. Las funciones de transporte fueron previamente seleccionadas por Villalta (2004) como las que mejor aplican a los Río Yagüez, Guanajibo y Grande de Añasco. El modelo es verificado con datos experimentales disponibles.

1.2 Objetivos

Los objetivos de esta investigación incluyen:

Introducir las funciones de transporte de sedimento de Yang y Ackers-White al algoritmo propuesto por Bhallamudi y Chaudhry, (1991); para desarrollar un modelo de transporte de sedimento que simule los procesos de agradación y degradación del fondo en canales aluviales.

Verificar el modelo con datos experimentales disponibles, utilizando los datos experimentales de Soni et al. (1980) de agradación debido a una sobre carga del flujo de sedimento en una sección del canal, y los datos de Begin et al. (1981) de degradación del fondo del canal debido a un descenso en la elevación del fondo al final aguas abajo.

CAPITULO 2

REVISIÓN DE LITERATURA

Varias soluciones analíticas y numéricas a las ecuaciones que gobiernan el flujo unidimensional y la ecuación de continuidad para sedimento han sido propuestas para la modelación de los procesos de agradación y degradación del fondo en canales aluviales. A continuación se presenta un resumen de las investigaciones previas. El orden que se sigue es el siguiente; publicaciones de estudios analítico-experimentales básicos, métodos de soluciones analíticas utilizados mayormente hasta la década de 1980. Luego se resumen algunas publicaciones de estudios que usan técnicas numéricas, las cuales se impusieron a partir de 1990. Finalmente se mencionan las investigaciones recientes y las funciones de transporte que serán usadas en esta investigación.

Kerssens y Rijn (1977) realizaron un modelo para flujo no-permanente para sedimento suspendido. Las ecuaciones gobernantes de flujo y la ecuación de difusión del sedimento fueron usadas. Estos autores asumieron que las variables de flujo y sedimento no cambian en tiempo solo en espacio. Este modelo fue verificado con datos experimentales de una trinchera trapezoidal.

Soni, et al. (1980) estudiaron el problema de agradación en canales aluviales originalmente en equilibrio debido a un exceso del flujo de sedimento mayor a la capacidad de transporte del flujo de agua. El exceso del flujo de sedimento fue asumido continuo y constante con el tiempo. Este flujo de sedimento fue introducido al canal en una sección determinada; produciéndose agradación aguas abajo de esta sección. La profundidad de agradación aguas abajo de esta sección fue determinada analítica y experimentalmente, para un tiempo de 30 y 40 min. El modelo matemático desarrollado esta basado en varias simplificaciones de las

ecuaciones gobernantes, y los datos experimentales no se ajustaron satisfactoriamente a los calculados con el modelo. Una de las partes importantes en este estudio fue el uso de una ecuación potencial como función de transporte de sedimento obtenido a partir de datos de laboratorio.

Llama la atención que los datos de Soni et al. y de Newton, obtenidos en 1980 y 1951 respectivamente, hayan sido utilizados por investigadores hasta recientemente. Se encontró escasez de datos experimentales en estudios de agradación y degradación. Es posible que esta deficiencia se deba a lo complejo que resulta la realización de estos experimentos tanto por los mecanismos de control que se deben usar como por la duración de los mismos.

Begin, et al. (1981) estudiaron la degradación de canales aluviales con sedimento cohesivo; en un canal de laboratorio con una longitud máxima de 20 m, 2 m de ancho con pendiente de 0.009 m/m. La degradación del lecho fue provocada disminuyendo la elevación del fondo del canal en el extremo aguas abajo (base level lowering method, en inglés) hasta una elevación fija. El desarrollo del perfil longitudinal del canal es comparado con los resultados del modelo analítico formulado usando la ecuación de difusión. Este modelo está basado en la ecuación de continuidad de sedimento, conocido como la ecuación de Exner; combinada con una ecuación de transporte de sedimento que asume que el flujo de sedimento es linealmente proporcional a la pendiente de energía del canal. Esto es, $q_s = kS_f$, donde q_s = flujo de sedimento en m^2/s , k es un coeficiente de difusión promedio y S_f = pendiente de energía hallada de la ecuación de Manning. El modelo analítico resultó muy sensible a las condiciones iniciales y a las condiciones de frontera impuestas en el experimento. Este modelo calcula la elevación del lecho a lo largo del canal como una función de la profundidad disminuida al final del canal y del coeficiente de difusión propuesto.

Varios investigadores desarrollaron modelos analíticos para describir el proceso de agradación en un canal aluvial. Muchos de ellos usaron los datos experimentales publicados

por **Soni et al. (1980)** para validar los modelos. Modelos de degradación también fueron desarrollados y validados con datos experimentales, muchos de estos modelos son el resultado de varias simplificaciones a las ecuaciones gobernantes del flujo uni-dimensional. La función de transporte de sedimento usada en el modelo de agradación es la relación potencial obtenida de datos de laboratorio. **Begin et al. (1981)** usaron una función de transporte proporcional a la pendiente de la energía para modelar degradación causada por un descenso al extremo aguas abajo del canal.

Jaramillo y Jain (1984) desarrollaron un modelo analítico, parabólico, no-lineal para describir el proceso de **agradación y degradación** del fondo en canales aluviales debidos a sobrecarga y déficit de sedimento, para ocasionar agradación y degradación, respectivamente. Los resultados del modelo analítico fueron validados comparando con datos experimentales de **Soni et al. (1980)** y de **Newton (1951)** para agradación y degradación respectivamente. La función de transporte usada para agradación y degradación es la relación potencial usada por **Soni et al. (1980)**. En el caso de degradación asumieron que el flujo de sedimento aguas abajo negativo, esto se entiende como la condición de frontera aguas abajo para producir degradación.

Lu y Shen (1986) desarrollaron cuatro modelos de degradación, el primero es analítico y es el resultado de asumir la pendiente de energía igual a la del lecho. Para este modelo las ecuaciones gobernantes de flujo y sedimento son simplificadas para dar lugar a la ecuación de difusión siguiente $\frac{\partial Z}{\partial t} = K \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ donde $Z =$ es la elevación, $x =$ distancia, $t =$ tiempo y $K =$ coeficiente de difusión. Esta ecuación sirve para predecir la profundidad de degradación desde el extremo aguas arriba hacia aguas abajo. El segundo y tercer modelo consisten en modelos numéricos explícitos no acoplados. Un modelo acoplado es cuando las tres ecuaciones gobernantes de flujo y sedimento son resueltas simultáneamente, caso contrario es no-

acoplado. Para el primer modelo numérico se asume que la pendiente de energía es igual a la pendiente del lecho y el cambio de la concentración de sedimento en una sección es mucho menor que el cambio de la elevación del lecho en la misma sección. Este modelo usa diferencias finitas centrales y la degradación es causada debido al déficit de sedimento en el agua limpia que fluye por el canal. El segundo modelo no-acoplado asume que las variables de flujo no cambian con el tiempo solo en espacio y la degradación es causada por un déficit de sedimento en el agua limpia. El cuarto modelo numérico es implícito y asume que el flujo de agua es conocido para luego resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad de sedimento. Estos modelos fueron verificados usando datos experimentales de Suryanarayana (1969). La degradación fue producida desde aguas arriba hacia aguas abajo, se encontraron varias limitaciones debido a las asunciones.

Zhang y Kahawita en 1987 y 1990 desarrollaron un modelo parabólico no lineal simplificando las ecuaciones gobernantes de flujo y continuidad de sedimento. Asumieron que la velocidad y la profundidad de flujo no cambian con el tiempo. La ecuación simplificada fue resuelta analítica y numéricamente. Los resultados del modelo no-lineal fueron comparados con los datos de Soni et al. (1980), la función de transporte usada en este modelo fue la relación potencial.

Más recientemente **Cao, et al. (2002)** compararon cuatro modelos de agradación y degradación, dos modelos están basados en soluciones analíticas (simplificación de la ecuación de continuidad de agua y sedimento) y dos modelos resuelven las ecuaciones por diferencias finitas. Los resultados fueron comparados con datos experimentales de Soni, et al. 1980 y Newton, 1951 para agradación y degradación respectivamente, la función de transporte usada fue la función potencial.

La revisión de literatura permite concluir que soluciones analíticas de Soni et al. (1980), Kerssens-Rijn (1977), Jaramillo-Jain (1984), Zhang-Kahawita (1987, 1990), no son muy

precisas debido a las numerosas simplificaciones de las ecuaciones gobernantes de flujo y de sedimento. A partir de 1986 comienzan a aparecer resultados de investigaciones que proponen soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales para conservación de masa, cantidad de movimiento y de sedimento.

En 1987, **Park y Jain** desarrollaron un modelo de degradación usando el esquema de diferencias finitas de Preissmann. La degradación es causada por la reducción de la concentración del sedimento, que hace que el sistema no este en equilibrio y que necesite más sedimento del fondo del canal para alcanzar el equilibrio. En este estudio también se midió y predijo la distribución granulométrica del sedimento en el fondo del canal, notando el cambio de la granulometría con el tiempo, el flujo de sedimento y la velocidad del flujo de agua fueron calculadas usando las relaciones propuestas por **Karim (1983)**. Los resultados del modelo numérico fueron comparados con los datos experimentales de **Little y Mayer (1972)** quienes realizaron una serie de experimentos con sedimento de diferentes diámetros.

El esquema de diferencias finitas de MacCormack (MacCormack 1969; Anderson, et al., 1984) fue usado por **Bhallamudi y Chaudhry (1991)** para determinar la agradación debido a un exceso del flujo de sedimento aguas arriba, degradación debido a un descenso de la elevación del fondo del canal al extremo aguas abajo y cambios asociados con la migración de cambios abruptos en el perfil del fondo, fenómeno conocido como “knickpoint migration” en inglés. Este modelo matemático es acoplado, es decir; cambios de la elevación del fondo afectan a los cambios de la velocidad y profundidad de flujo. Los resultados del modelo fueron comparados con datos de laboratorio de **Soni et al. (1980)** y **Begin et al. (1981)** para agradación y degradación respectivamente. La función de transporte usada para modelar agradación es la relación potencial usada por **Soni et al. (1980)**. Para modelar la degradación se usó una función de transporte proporcional a la pendiente de la energía propuesta por **Begin et al. (1981)**, para

modelar cambios abruptos en el perfil del fondo del canal usaron una versión modificada de la función de transporte potencial.

Yen et al. (1992) desarrollaron un modelo de transporte de sedimento basado en la ecuación de continuidad de sedimento y la asunción de una relación lineal entre el sedimento de salida y el sedimento almacenado en una longitud del canal. Una ecuación para agradación y degradación resultado de cambios en la carga de sedimento fue derivada también. Resultados experimentales fueron hallados para diferentes condiciones de carga y gradación de sedimento. Este modelo se uso para estudiar el efecto de la gradación del sedimento y el flujo de sedimento sobre el proceso de agradación, degradación y las características de flujo en un canal aluvial. Se encontró que para un flujo de sedimento la razón de agradación y degradación incrementa con el incremento del tamaño del sedimento. Cuando el flujo de sedimento disminuye la razón de agradación y degradación disminuye cuando el tamaño del sedimento aumenta.

El fenómeno de agradación y degradación se ha modelado usando otros métodos de solución numérica de las ecuaciones gobernantes del flujo uní-dimensional y otras funciones de transporte diferentes a la relación potencial. A continuación se presenta resúmenes de algunas investigaciones recientes.

López y Falcón (1999) desarrollaron un modelo numérico uni-dimensional para calcular cambios en elevación y distribución del material en el lecho en un río de montaña caracterizado por tener gran pendiente, cambios abruptos en su geometría, variación en el régimen del flujo y elementos que hacen que la rugosidad sea muy grande, el modelo asume flujo casi permanente y régimen supercrítico. El modelo fue validado usando datos de campo recolectados aguas arriba de una pequeña presa de retención en un río de Venezuela.

Ying et al. (2004) resolvieron numéricamente las ecuaciones de Saint Venant usando el método de volúmenes finitos. El modelo fue ensayado con varios ejemplos: problemas de

rompimiento de presas con secciones rectangular y triangular, salto hidráulico parcial, en flujo permanente y otros. Finalmente los resultados numéricos son comparados con soluciones exactas o experimentales y queda demostrado que el método propuesto es capaz de simular numéricamente flujo en canales abiertos de régimen crítico, sub-crítico, supercrítico y flujo transicional. Se concluyó también que el esquema es inherentemente robusto, estable y simple. En este método no se requiere tratamiento especial tal como la viscosidad artificial u otra técnica especial para tratar gradientes fuertes o discontinuidades en la solución.

Wu et al. (2004) desarrollaron un modelo uní-dimensional para simular flujo no permanente y transporte de sedimento en un sistema de canales usando el esquema numérico de Preissmann. El modelo simula un proceso en desequilibrio de sedimento no uniforme en flujo no permanente. La capacidad de transporte es calculada por una de cuatro fórmulas de transporte los cuales consideran el efecto de la no uniformidad del sedimento. El análisis del método revela que su solución es más estable y menos sensible a la elección de parámetros del modelo cuando comparamos con el método tradicional. El modelo es ensayado para varios casos reales y se concluye que el modelo es apto para determinar transporte de sedimento y cambios morfológicos en sistemas de canales.

Yang y Wan (1991) realizaron comparaciones entre varias fórmulas de transporte de sedimento desarrolladas por diferentes investigadores. Estas fórmulas fueron comparadas enfatizando su precisión; sin tomar en cuenta las condiciones hidráulicas y condiciones del sedimento bajo las cuales fueron medidas en laboratorio o campo. El parámetro usado para determinar la precisión es la razón de discrepancia definida como la razón entre la concentración calculada con una fórmula y la concentración medida.

Villalta (2004) utilizó el modelo uni-dimensional HEC-6 y datos de sedimento del fondo y de los bancos para seleccionar funciones de transporte de sedimento que mejor se ajustan a las características granulométricas, hidráulicas y geométricas existentes para la bahía

de Mayagüez. Es así que las funciones de transporte Ackers-White y Yang fueron seleccionadas como las que mejor aplican a los Ríos Grande de Añasco, Guanajibo y Yagüez en Puerto Rico.

Ackers y White (1973) desarrollaron una función de transporte para sedimentos totales bajo la asunción de que el transporte de sedimentos finos se relaciona con las fluctuaciones turbulentas en la columna de agua y que el transporte de sedimentos gruesos se relaciona de una manera más apropiada con el esfuerzo cortante neto del grano, usando la velocidad promedio como la variable representativa. La función de transporte general fue desarrollada en términos de tres grupos adimensionales que son; D_{gr} tamaño, F_{gr} movilidad y G_{gr} transporte. La función esta basada en muchos resultados experimentales en canales de laboratorio. Estas mediciones fueron llevadas a cabo con sedimento uniforme o casi uniforme y una profundidad no mayor de 0.4m. La función es aplicable a arenas de tamaño mayor a los 0.04 mm. Según estos investigadores el transporte de material fino se relaciona mejor en términos del esfuerzo cortante total, siendo la velocidad de corte la variable representativa. En el caso del material grueso es mejor utilizar el esfuerzo cortante neto y como variable representativa la velocidad promedio. En función al diámetro medio del sedimento se define la zona de transición que está entre 0.04 mm a 2.5 mm. Sedimento con diámetro mayor a 2.5 mm se considera grueso. Una serie de configuraciones de fondo de canal fueron utilizadas en los experimentos, entre ellas dunas, ondulaciones y fondos de canal planos. Se encontró además que la ecuación no aplica a fases superiores de transporte como las antidunas con números de Froude mayores a 0.8.

Yang (1973) revisó las asunciones básicas usadas en la derivación de las ecuaciones convencionales para el transporte de sedimentos. Este autor concluyó que la asunción de que la razón de transporte de sedimentos podría ser determinada de la descarga de agua, la velocidad promedio de flujo, pendiente de energía y/o esfuerzos cortantes es cuestionable. Consecuentemente, la generalidad y aplicabilidad de cualquier ecuación derivada de alguna de

esas asunciones es limitada. Según Yang, la concentración total de sedimentos esta directamente relacionada a la potencia unitaria de la corriente, definida como la energía por unidad de tiempo por unidad de peso del fluido disponible para el transporte de sedimentos. Yang para determinar la concentración total de sedimentos, consideró una relación entre las siguientes variables relevantes: concentración total de sedimentos en partes por millón por peso, potencia unitaria de la corriente, velocidad de fricción, viscosidad cinemática, velocidad de caída del sedimento y diámetro medio del sedimento. Usando el análisis dimensional obtuvieron relaciones empíricas para determinar la concentración del sedimento.

De todos estos estudios previos se concluye que varios investigadores Soni et al. (1980), Jaramillo-Jain (1984), Zhang-Kahawita (1987, 1990), Cao (2002), Bhallamudi-Chaudhry (1991), Yen et al. (1992) describieron el fenómeno de agradación usando como función de transporte la relación potencial, que es resultado de datos de campo y laboratorio. En el caso de degradación se encontraron varios casos Begin et al. (1981), Lu-Shen (1986), Park-Jain (1987), Yen et al. (1992) de degradación aguas arriba y aguas abajo del canal, provocadas por déficit de sedimento o por un descenso al extremo aguas abajo, las funciones de transporte usadas fueron distintas, proporcional a la pendiente de energía, en función del volumen de sedimento que sale del canal u otra. De la literatura revisada no se encontró modelos de transporte que usen funciones de transporte para sedimento.

CAPITULO 3

**ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL FLUJO
UNIDIMENSIONAL EN CANALES**

La agradación y degradación en canales aluviales son descritas matemáticamente por las ecuaciones gobernantes de flujo de agua y la ecuación de continuidad de sedimento. El flujo de sedimento se estima usando funciones de transporte de sedimento. Los parámetros necesarios para describir el transporte de sedimento en un canal son: la profundidad de agua, la velocidad o caudal en el cauce y la descarga de sedimentos. Los primeros dos parámetros se obtienen mediante la solución de las ecuaciones de Saint Venant, la ecuación de continuidad de sedimento sirve para estimar el cambio de la elevación en el fondo del canal.

3.1 Ecuaciones de Saint Venant

Se conoce como ecuaciones de Saint Venant al conjunto formado por las ecuaciones de continuidad y conservación de cantidad de movimiento para un flujo unidimensional no permanente sujeto a las siguientes limitaciones (Chaudhry 1993)

1. La distribución de presiones es hidrostática, esta presunción es valida si las líneas de flujo no tienen cambios abruptos.
2. La pendiente del lecho es muy pequeña, por consiguiente la profundidad medida perpendicular al canal es lo mismo que la profundidad medida verticalmente.
3. La velocidad del flujo es uniforme en toda la sección.
4. El canal es prismático. Es decir, la sección y la pendiente del canal no cambian con la distancia, la variación en la sección o la pendiente del canal puede ser tomado en consideración aproximando el canal en varios canales prismáticos.

5. Pérdidas de energía en flujo no-permanente pueden ser simuladas usando leyes de resistencia para flujo permanente, tales como la ecuación de Manning o Chézy.

3.1.1 Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial y}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{q_l}{B} = 0 \quad 3.1$$

Donde: V = velocidad promedio del flujo, y = profundidad de agua, B = ancho superficial del canal, D = profundidad hidráulica $D = \frac{A}{B}$, donde A = área de la sección transversal del canal, x = longitud a lo largo del canal en dirección del flujo, q_l = caudal del flujo que entra o sale del sistema por unidad de longitud del canal

3.1.2 Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} + y \right) = g(S_o - S_f) \quad 3.2$$

Donde: g = aceleración de la gravedad, S_o = pendiente del fondo del canal, S_f = pendiente de energía calculada con la ecuación de Manning.

La derivación detallada de estas ecuaciones está publicada en textos tales como Chaudhry (1993) y Sturm (2001).

3.2 Ecuación de Continuidad de Sedimento

La conservación de sedimento se expresa como el balance o equilibrio entre el volumen de sedimento transportado por el agua y el sedimento depositado o degradado del fondo. La derivación de esta ecuación se presenta a continuación.

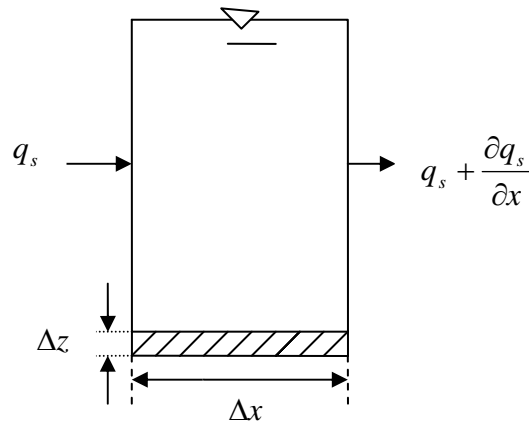


Figura 3. 1 Esquema del volumen de control de una columna de agua transportando sedimento.

Del volumen de control mostrado en la Figura 3.1 se realiza un balance de masa entre el flujo de sedimento que transporta el agua y la erosión o deposición del sedimento en el fondo del canal. La suma del cambio de volumen de sedimento suspendido y depositado en el tramo Δx es igual a cero. Si q_s es el flujo de sedimento por unidad de ancho y B es el ancho del canal, el cambio unitario del flujo de sedimento para un tramo Δx es $\frac{\partial q_s}{\partial x}$. Por otra parte,

la definición de porosidad $p = \frac{V_v}{V_T}$ donde V_v = volumen de poros y V_T = volumen total del

lecho, permite establecer la siguiente relación:

$$1 - p = \frac{V_s}{V_T} \tag{3.3}$$

donde V_s = volumen de sedimento. Usando el volumen de una capa de sedimento con ancho B y profundidad Δz , se tiene que el cambio del volumen del lecho del sedimento es:

$$\Delta V_T = B\Delta z\Delta x \quad 3.4$$

Sustituyendo la ecuación 3.4 en 3.3 resulta el cambio del volumen de sedimento depositado o degradado del lecho.

$$\Delta V_s = (1 - p)B\Delta z\Delta x \quad 3.5$$

Sumando el cambio del volumen de sedimento suspendido y el cambio del sedimento depositado o degradado para un lapso de tiempo Δt se obtiene:

$$\Delta q_s B\Delta t + (1 - p)B\Delta z\Delta x = 0 \quad 3.7$$

Dividiendo la ecuación 3.7 por $B\Delta t\Delta x$ y agrupando los términos se obtiene la ecuación de continuidad de sedimento conocida como la ecuación de Exner:

$$\frac{\Delta q_s}{\Delta x} + (1 - p)\frac{\Delta z}{\Delta t} = 0 \quad 3.8$$

Rescribiendo la ecuación en forma diferencial se obtiene:

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + (1 - p)\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad 3.9$$

3.3 Esquemas Numéricos

En flujo transitorio las soluciones a las ecuaciones gobernantes se realiza usando técnicas de aproximaciones numéricas (diferencias finitas) u otros métodos computacionales. En el desarrollo del modelo presentado en esta investigación se utilizó el esquema de MacCormack (1969) para resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de agradación y degradación del lecho del canal. El método de las características se usó en los nodos de las fronteras solamente. A continuación se presenta una breve descripción de este esquema numérico.

3.3.1 Esquema Numérico de MacCormack

MacCormack (1969) propuso un esquema explícito, de dos pasos, predictor y corrector. El esquema es de segundo orden de precisión en espacio y tiempo, además es capaz de capturar ondas de choque sin necesidad de aislarlas como casos especiales. Este método fue usado para analizar flujo unidimensional en canales abiertos por Fennema y Chaudhry (1986, 1987).

Según **Anderson et al. (1984)** y **Chaudhry (1993)** para flujo unidimensional existen dos alternativas de aplicación del método. En la **primera alternativa** para el paso predictor se usa una aproximación por diferencias finitas “hacia atrás” (*backward, en inglés*) en las derivadas respecto al espacio, y para el paso corrector se usa una aproximación “hacia adelante” (*forward, en inglés*). En la **segunda alternativa**, para el paso predictor se usa una aproximación por diferencias finitas hacia adelante (*forward, en inglés*), y para el paso corrector se usa una aproximación hacia atrás (*backward, en inglés*). Los valores determinados en el paso predictor son usados en el paso corrector. Una recomendación es alternar estas dos alternativas en el tiempo, es decir durante un paso en el tiempo usar la primera alternativa y en el siguiente paso usar la otra alternativa, y continuar alternando estas alternativas en lo sucesivo.

A continuación se presenta las aproximaciones por diferencias finitas de las derivadas respecto al espacio y al tiempo,

Alternativa 1: Predictor el superíndice * se usa para referirse a la variable calculada en el paso predictor.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^* - f_i^k}{\Delta t} \quad 3.25$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i^k - f_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (\mathbf{Backward}) \quad 3.26$$

El superíndice k representa el nivel de tiempo conocido, i representa el nodo espacial en estudio y f es la variable a calcular.

Alternativa 1: Corrector el símbolo $**$ se usa para referirse a la variable calculada durante este paso.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{**} - f_i^k}{\Delta t} \quad 3.27$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^* - f_i^*}{\Delta x} \quad (\mathbf{Forward}) \quad 3.28$$

Alternativa 2: Predictor.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^* - f_i^k}{\Delta t} \quad 3.29$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} \quad (\mathbf{Forward}) \quad 3.30$$

Alternativa 2: Corrector el símbolo $**$ se usa para referirse a la variable calculada durante este paso.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{**} - f_i^k}{\Delta t} \quad 3.31$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i^* - f_{i-1}^*}{\Delta x} \quad (\mathbf{Backward}) \quad 3.32$$

Para ambas alternativas, el valor de la variable U_i al tiempo $k + 1$, es dado por

$$f_i^{k+1} = \frac{1}{2} [f_i^* + f_i^{**}] \quad 3.33$$

En las relaciones anteriores f es la variable, la Figura 3.2 muestra un esquema de la malla para el metodo de MacCormack (1969).

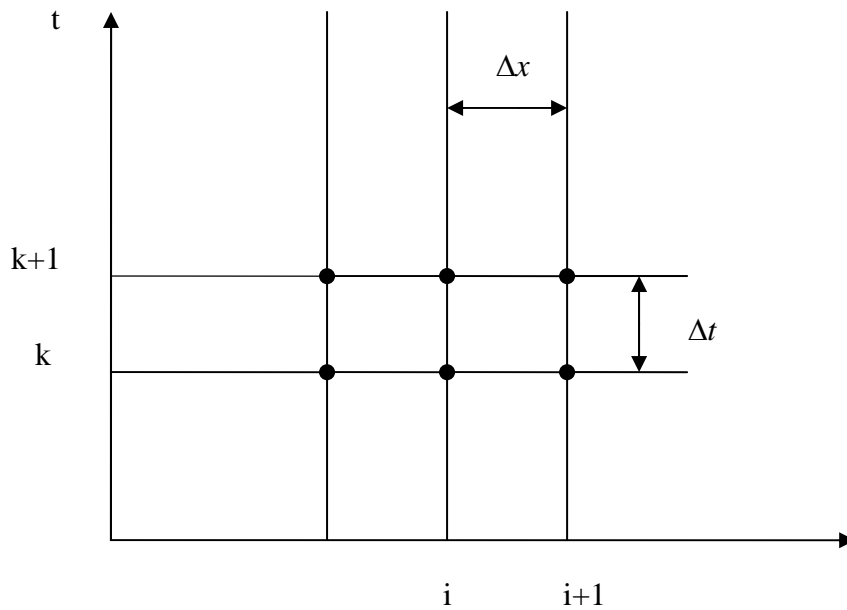


Figura 3. 2 Esquema de la malla para diferencias finitas

3.3.2 Método de las características

Al comienzo y al final del canal no es posible usar el esquema de MacCormack ya que no existen puntos antes del primer nodo y después del último nodo en la malla. Una manera de resolver este problema es utilizando el método de las características propuesto por Chaudhry (1993). Las Ecuaciones 3.34 y 3.35 son las ecuaciones características positiva y negativa, respectivamente:

$$V_P - V_A + \left(\frac{g}{C}\right)_A (y_P - y_A) = g(S_o - S_f)_A (t_P - t_A) \quad 3.34$$

y

$$V_P - V_B - \left(\frac{g}{C}\right)_B (y_P - y_B) = g(S_o - S_f)_B (t_P - t_B) \quad 3.35$$

Donde $c =$ la velocidad de onda definida como $c = \sqrt{gA/B}$, $A =$ área de la sección transversal del canal y $B =$ ancho del canal.

En cada frontera existe sólo una línea característica, cuya ecuación puede ser utilizada para hallar la variable desconocida en esa frontera. Para la condición de frontera aguas arriba del canal se usa la línea característica negativa, y para la condición de frontera aguas abajo se usa la línea característica positiva; como se muestra en la Figura 3.3. Se necesita una ecuación adicional para resolver por la velocidad y profundidad de flujo.

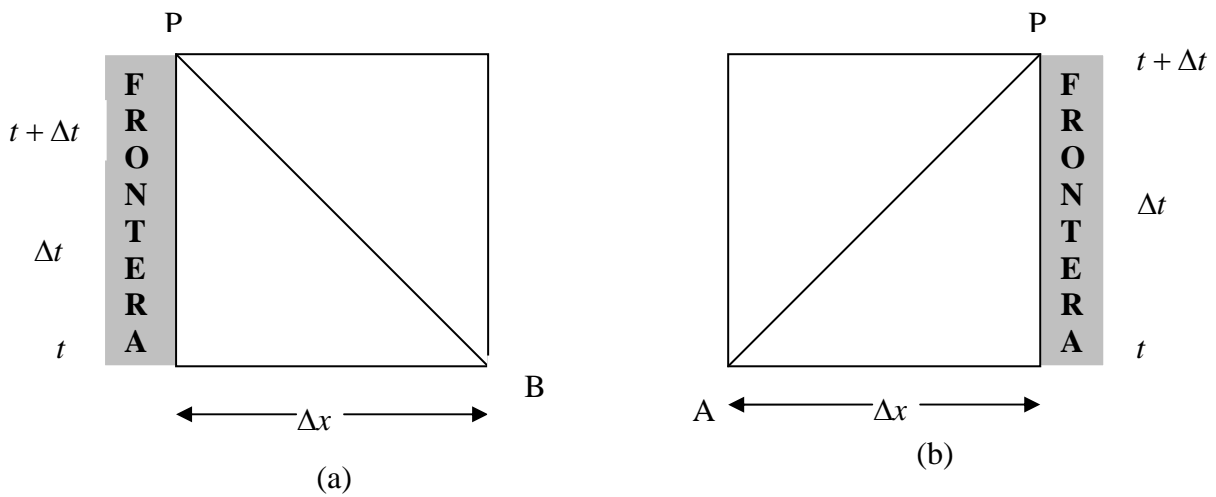


Figura 3. 3 Esquema de las condiciones de frontera aguas arriba (a) y abajo del canal (b)

CAPITULO 4

FUNCIONES DE TRANSPORTE

Las funciones de transporte de sedimentos se clasifican en tres grupos importantes, el primer grupo incluye aquellas funciones que calculan el transporte por carga de fondo, esto se refiere a todo aquel material grueso, que rueda, se desliza o en ocasiones brinca a lo largo del fondo del río o canal. El segundo grupo incluye aquellas funciones que calculan la carga de sedimento en suspensión, este caso se refiere al sedimento que se mantiene en suspensión por causa de la turbulencia en la corriente y que no permite que el material se sedimente, estos son materiales finos. El tercer grupo incluye a las funciones de transporte que incorporan ambos efectos, el transporte de fondo y el suspendido en una ecuación. Esta es la carga de transporte total.

A continuación se incluye la derivación de dos ecuaciones utilizadas en el desarrollo del modelo de agradación y degradación. Dichas dos ecuaciones se refieren a transporte por carga total y son las de Yang 1973 y Ackers-White 1973.

4.1 Función de Transporte de Yang

Yang (1973) revisó las asunciones usadas en la derivación de las ecuaciones convencionales para el transporte de sedimentos, y concluyó que, la presunción de que la razón de transporte de sedimentos podría ser determinada de la descarga de agua, velocidad de flujo, pendiente de la línea de energía o esfuerzos cortantes es cuestionable; consecuentemente, también lo es la aplicabilidad de cualquier ecuación derivada de una de estas.

Yang (1973) introdujo el concepto de “potencia unitaria de la corriente” definida como el flujo de energía por unidad de peso de agua disponible para transportar agua y sedimento en un canal. La expresión matemática es VS donde; V = velocidad promedio de la corriente y S = pendiente de la línea de energía.

Para determinar la concentración total de sedimentos, Yang (1973) consideró una relación entre las variables relevantes, de la forma:

$$\phi(C_t, VS, U_*, \nu, \omega, d_{50}) = 0 \quad 4.1$$

Donde;

C_t = concentración total de sedimentos en partes por millón por peso, sin incluir la carga de lavado.

VS = potencia unitaria de la corriente

U_* = velocidad de fricción

ν = viscosidad cinemática

ω = velocidad de caída del sedimento

d_{50} = diámetro medio del sedimento

Usando el análisis adimensional, C_t puede ser expresada de la siguiente forma adimensional:

$$C_t = \phi\left(\frac{VS}{\omega}, \frac{U_*}{\omega}, \frac{\omega d_{50}}{\nu}\right) \quad 4.2$$

Debido a que el sedimento necesita una potencia unitaria de corriente crítica la ecuación 4.2 fue modificada para introducir el valor de $V_{crit}S$ crítico correspondiente a la potencia unitaria crítica. Así la concentración total de sedimento en el flujo de agua es función de:

$$C_t = \phi\left(\frac{VS}{\omega} - \frac{V_{crit}S}{\omega}, \frac{U_*}{\omega}, \frac{\omega d_{50}}{\nu}\right) \quad 4.3$$

A partir de estudios experimentales, Yang (1973) encontró que la mejor forma de la ecuación 4.3 esta dada por:

$$\log C_t = I + J \log \left(\frac{VS}{\omega} - \frac{V_{crit} S}{\omega} \right) \quad 4.4$$

Donde I y J son parámetros adimensionales que reflejan las características del flujo y del sedimento. Dicho autor hizo un análisis de regresión múltiple con 463 grupos de datos de laboratorio. La ecuación obtenida se muestra a continuación;

$$\log C_t = 5.435 - 0.286 \log \frac{\omega d_{50}}{\nu} - 0.457 \log \frac{U_*}{\omega} + \left(1.799 - 0.409 \log \frac{\omega d_{50}}{\nu} - 0.314 \log \frac{U_*}{\omega} \right) \log \left(\frac{VS}{\omega} - \frac{V_{critico} S}{\omega} \right) \quad 4.5$$

Donde:

$\frac{V_{critico} S}{\omega}$ = Potencia crítica de la corriente, adimensional y calculada con la ecuación 4.6, mostrada más adelante.

La relación dada con la ecuación 4.5 tiene un coeficiente de correlación de 0.971 y un error estándar de 0.188 en términos de unidades logarítmicas para los 463 grupos de datos. Los resultados estadísticos derivados del análisis de Yang (1973), indican claramente que el parámetro adimensional de la potencia unitaria juega un papel muy importante en la determinación de la concentración total de sedimentos.

El parámetro adimensional crítico experimental de la potencia unitaria $\frac{V_{critico}}{\omega}$ está dado por:

$$\frac{V_{critico}}{\omega} = \begin{cases} \frac{2.5}{\log(U_* d_{50} / \nu) - 0.06} + 0.66 & \text{para } 0 < \frac{U_* d_{50}}{\nu} < 70 \\ 2.05 & \text{para } 70 \leq \frac{U_* d_{50}}{\nu} \end{cases} \quad 4.6$$

La aplicación de la ecuación 4.5 se limita al intervalo dado para los tamaños de arena mostradas en la Tabla 4.1.

Tabla 4. 1 Intervalos de los parámetros de la función de transporte de Yang

Parámetro	Unid.	Símbolo	Límite	
			Inferior	Superior
Diámetro	mm	D	0.062	2
Velocidad promedio	m/s	V	0.229	1.966
Pendiente	m/m	S	0	0.028
Temperatura	°C	T	0	34.3
Profundidad	m	h	0.011	15.21
Ancho	m	B0	0.134	532.181
Concentración	ppm	C	10	585000

4.1.1 Resumen y Conclusiones de la Función de Transporte de Yang

- La ecuación 4.5 fue derivada usando análisis dimensional, conceptos de potencia unitaria de la corriente y concentración máxima. Este fue verificado por datos de laboratorio y en algunos cauces naturales los cuales cubren diversas condiciones de flujo y sedimento.
- Para caudales de agua muy bajos la razón de sedimento transportado por una corriente aluvial es cero. Cuando el caudal de agua y la potencia unitaria de la corriente aumentan gradualmente, en algún punto y tiempo las partículas sobre el lecho empezarán a moverse. Conforme los valores de caudal de agua y potencia unitaria de la corriente sigan aumentando, estos alcanzaran a un valor para los cuales las condiciones de flujo de agua y sedimento alcanzaran a un equilibrio dinámico; entre la concentración de sedimento total y la potencia unitaria efectiva.
- El concepto de potencia unitaria de corriente puede ser aplicado para estudiar el transporte de sedimento.

- El concepto de concentración máxima o de equilibrio es importante para simplificar el problema de transporte de sedimentos. El flujo en canales aluviales puede mantenerse en equilibrio cuando $\frac{(VS - V_{cr}S)}{C_t}$ alcance a un valor mínimo
- Los efectos de la variación del tamaño de partícula, temperatura del agua y profundidad de flujo sobre la concentración total fueron estudiados. Este estudio indica que la ecuación 4.5 esta de acuerdo con algunas de las características básicas del transporte de sedimentos en canales aluviales.
- La ecuación de transporte de Yang esta limitada a sedimento no-cohesivo, arena natural con diámetro medio entre 0.062 mm a 2 mm, gravedad específica de 2.65, y un factor de forma de 0.7, transportado por agua en un canal aluvial bajo condiciones de equilibrio. Esta última condición conlleva que la pendiente de la línea de energía puede ser aproximada por la pendiente del lecho del canal.
- La Tabla 4.1 muestra los intervalos de los parámetros para aplicar la función de transporte de Yang.

4.2 Función de Transporte de Ackers-White

Ackers y White (1973) desarrollaron una función de transporte de sedimentos totales, desarrollada bajo la asunción de que el transporte de sedimentos finos se relaciona con las fluctuaciones turbulentas en la columna de agua y que el transporte de sedimentos gruesos se relaciona de una manera más apropiada con el esfuerzo cortante neto del grano, usando la velocidad promedio como la variable representativa.

La función de transporte fue desarrollada en términos de tres parámetros adimensionales, relacionados con el tamaño de la partícula, movilidad y transporte.

4.2.1 Parámetro adimensional de tamaño

Se incorpora un parámetro adimensional de tamaño para clasificar entre el grano fino, el transitorio y el grueso. Los sedimentos finos son limos de tamaño menor de 0.04 mm y el sedimento grueso son arenas de tamaño mayor a los 2.5 mm.

Se considera que un material grueso es transportado principalmente por un proceso del fondo del río. La relación entre el esfuerzo cortante en el fondo y la velocidad promedio está dada por la ecuación.

$$\sqrt{\frac{\tau_{cg}}{\rho}} = \frac{V}{\sqrt{32} \log \frac{\alpha h}{d}} \quad 4.7$$

Donde τ_{cg} = esfuerzo cortante de material grueso, α = coeficiente igual a 10, V = velocidad promedio del agua, ρ = densidad del agua, h = profundidad del flujo de agua, d = diámetro medio del sedimento.

Para el caso del material fino se considera que este se transporta en el agua, donde es suspendido por la turbulencia del río. Para este tipo de material se utiliza la ecuación:

$$U_* = \sqrt{ghS} \quad 4.8$$

Donde U_* = velocidad de fricción; S = pendiente del canal; g = aceleración de la gravedad y h = profundidad de flujo.

El parámetro adimensional del **tamaño** del grano se define como la raíz cúbica de la razón del peso sumergido del sedimento a las fuerzas viscosas, o sea;

$$D_{gr} = d \left[\frac{g(\gamma_s / \gamma - 1)}{\nu^2} \right]^{1/3} \quad 4.12$$

Donde; D_{gr} = parámetro adimensional de tamaño, γ_s = peso específico del sedimento, γ = peso específico del agua, ν = viscosidad del agua, d = diámetro medio del sedimento. Este parámetro adimensional es aplicable a material grueso, fino e intermedio.

4.2.2 Parámetro adimensional de movilidad

La movilidad del sedimento se define como la razón entre la fuerza cortante por unidad de área del lecho y el peso sumergido de una capa de granos dada. La definición general está basada en el número de movilidad, dado por

$$F_{gr} = \frac{U_*^n}{\sqrt{gd(\gamma_s/\gamma - 1)}} \left[\frac{V}{\sqrt{32} \log\left(\frac{\alpha d}{h}\right)} \right]^{1-n} \quad 4.9$$

Donde; n = exponente de transición que depende del tamaño medio del sedimento.

Para sedimentos gruesos $n=0$ y la expresión se reduce a:

$$F_{gr} = \frac{V}{\sqrt{gd(\gamma_s/\gamma - 1)}} \frac{1}{\sqrt{32} \log\left(\frac{\alpha h}{d}\right)} \quad 4.10$$

Para sedimentos finos $n=1$ y obtenemos como ecuación:

$$F_{gr} = \frac{U_*^n}{\sqrt{gd(\gamma_s/\gamma - 1)}} \quad 4.11$$

Para casos intermedios n puede tomar valores entre 0 y 1. La hipótesis inicial de la teoría fue que este valor podría depender principalmente de una expresión adimensional para el tamaño del grano.

4.2.3 Parámetro adimensional de transporte

El parámetro adimensional para el **transporte** de sedimento se basa en el concepto de potencia unitaria de la corriente. Este parámetro es función de la velocidad de corte en el fondo, la velocidad promedio del flujo, la profundidad del flujo, el tamaño medio del sedimento y la concentración de sedimento en el flujo de agua. Esta relación está dada por:

$$G_{gr} = \frac{X}{SG} \frac{h}{d} \left(\frac{U_*}{V} \right)^n \quad 4.13$$

Para sedimento grueso ($n = 0$)

$$G_{gr} = \frac{X}{SG} \frac{h}{d} \quad 4.14$$

Y para sedimento fino ($n = 1$)

$$G_{gr} = \frac{X}{SG} \frac{h}{d} \frac{U_*}{V} \quad 4.15$$

Donde X = concentración de sedimento por unidad de flujo de agua y SG = gravedad específica del sedimento, usualmente 2.65.

Ackers y White 1973 relacionaron los parámetros de transporte, movilidad y tamaño de la siguiente manera:

$$G_{gr} = f_1(F_{gr}, D_{gr}) \quad 4.16$$

Donde los valores de G_{gr} y F_{gr} dependen del parámetro de transición de tamaño n , definido más adelante.

Basados en el análisis tanto para material grueso como para el material en transición hacia la parte fina, se encontró experimentalmente que la ecuación que describía la relación entre G_{gr} , F_{gr} y D_{gr} es de la forma:

$$G_{gr} = C \left(\frac{F_{gr}}{A} - 1 \right)^m \quad 4.17$$

En donde C = coeficiente en la función de transporte de sedimento, A = valor del parámetro adimensional de movilidad para iniciar el movimiento: m = exponente en la función de transporte de sedimento. C , A y m son parámetros adimensionales definidos en las ecuaciones 4.18 y 4.19 presentados más adelante.

A partir de esta ecuación, se inicia la segunda parte del análisis, en el cual los coeficientes C , A , m y n varían con el parámetro adimensional del tamaño D_{gr} . Ellos utilizaron aproximadamente 925 experimentos de transporte de sedimentos para dicho

análisis. El valor de D_{gr} fue constante durante toda una serie de experimentos para un tamaño de sedimento a temperatura constante, razón por la que los grupos de datos pudieron ser considerados separadamente y la ecuación 4.17 puede ser usada para evaluar los valores óptimos de C , A , m y n , para un D_{gr} específico.

Mediante un programa de computadora, Ackers y White, 1973 obtuvieron valores óptimos de estas constantes. La relación entre A , n y D_{gr} fue mejor definida que para C , m y D_{gr} .

Para la transición en el tamaño del grano, en donde $1 < D_{gr} \leq 60$, se encontró:

$$n = 1.0 - 0.56 \log D_{gr} \quad 4.18$$

$$A = \frac{0.23}{\sqrt{D_{gr}}} + 0.14 \quad 4.19$$

Para los sedimentos gruesos, con $D_{gr} > 60$, se recomiendan los siguientes valores constantes adimensionales $n = 0.00$, $A = 0.17$, $m = 1.50$, $C = 0.025$. Con estos valores se determinó la siguiente relación y tendencia seguida por m y D_{gr} en la zona de transición:

$$m = \frac{9.66}{D_{gr}} + 1.34 \quad 4.20$$

En la etapa final de esta optimización, el mejor ajuste para C se encontró usando los valores de n , A y m definidos en las ecuaciones anteriores. Los resultados para la transición del tamaño del grano definido con el parámetro n , dan la siguiente ecuación:

$$\log C = 2.86 \log D_{gr} - (\log D_{gr})^2 - 3.53 \quad 4.21$$

Y para la parte gruesa del sedimento:

$$C = 0.025 \quad 4.22$$

Con el parámetro adimensional de **transporte** calculado con la ecuación 4.17, se calculó la concentración de sedimento en un flujo de agua X , a partir de la ecuación 4.16, de la siguiente manera:

$$X = \frac{G_{gr} d(\gamma_s / \gamma)}{h(U_* / v)^n} \quad 4.23$$

Donde X = concentración del sedimento en el flujo de agua, adimensional.

4.2.4 Resumen y Conclusiones de la Función de Transporte de Ackers-White

- La función de transporte de sedimentos se basa en tres grupos adimensionales: el D_{gr} para el tamaño del grano, F_{gr} para la movilidad y G_{gr} para el transporte. Esta función fue hallada en base a casi 1000 experimentos, los cuales fueron realizados con flujo uniforme o cercanamente uniforme y profundidades menores o iguales a 0.4m.
- La función es aplicable a tamaños de grano con un D_{gr} mayor de uno, es decir arenas de tamaño mayor a los 0.04 mm.
- Se demuestra la hipótesis de que el transporte de materiales finos se relaciona mejor en términos del esfuerzo cortante, siendo la velocidad de corte la variable representativa y que en el caso del material grueso es mejor utilizar el esfuerzo cortante y como variable representativa, la velocidad promedio.
- La función incorpora un exponente de transición, el cual define el cambio que hay de la velocidad de corte a la velocidad promedio a través del rango intermedio de tamaños de partículas.
- El límite inferior de tamaños del rango intermedio está dado por $D_{gr} = 1$, es decir, aproximadamente un tamaño de arena de 0.04 mm, mientras que el límite superior

corresponde a un $D_{gr} = 60$, aproximadamente 2.5 mm de tamaño de arena. Tamaños mayores a 2.5 mm corresponden a materiales considerados gruesos.

- Una serie de configuraciones del fondo del canal fueron utilizados en los experimentos, entre ellas dunas, ondulaciones y fondos de canal planos. Además se encontró que la ecuación no aplica a configuraciones como las antidunas con números de Froude mayores a 0.8.
- Comparaciones con resultados experimentales indican que los resultados son aproximados a los reales y que la función necesita trabajo adicional para incorporar material con granulometría no uniforme y para aplicaciones en flujo transitorio.

La Tabla 4.2 resume los valores de los parámetros y sus intervalos para la teoría desarrollada por Ackers - White (1973);

Tabla 4. 2 Intervalo de los parámetros de la función de transporte de Ackers-White

Parámetro	Unid.	Símbolo	Límite	
			Inferior	Superior
Diámetro	mm	D	0.04	2.5
Velocidad promedio	m/s	V	0.021	2.164
Pendiente	m/m	S	0	0.037
Temperatura	°F	T	46	89
Profundidad	m	h	0.003	0.402
Ancho	m	B0	0.07	1.219
Pendiente del talud	H:1V	s	1	2.7

CAPITULO 5

DESCRIPCION DE EXPERIMENTOS DE AGRADACION Y DEGRADACION

Para verificar el modelo desarrollado en esta investigación se usaron datos experimentales de Soni et al. (1980) y Begin et al. (1981). Un canal se encuentra en equilibrio cuando las características hidráulicas del flujo y del sedimento no cambian. Los cambios causados natural o artificialmente en el cauce de un río, ocasionan cambios en la capacidad de transporte de sedimento. La capacidad de transporte puede ser reducida o aumentada produciéndose degradación o agradación en el fondo y en las paredes del canal, respectivamente.

5.1 Descripción del Experimento de Agradación

La agradación en un canal aluvial originalmente en equilibrio, es causada por una sobrecarga del flujo de sedimento, en una sección aguas arriba. **Soni et al. (1980)**, estudiaron esta condición analítica y experimentalmente. La Figura 5.1 muestra un esquema de los cambios en el perfil con el tiempo. Los valores de k , $k + 1$ y $k + 2$ indican el tiempo después de iniciado la inyección del sedimento al canal.

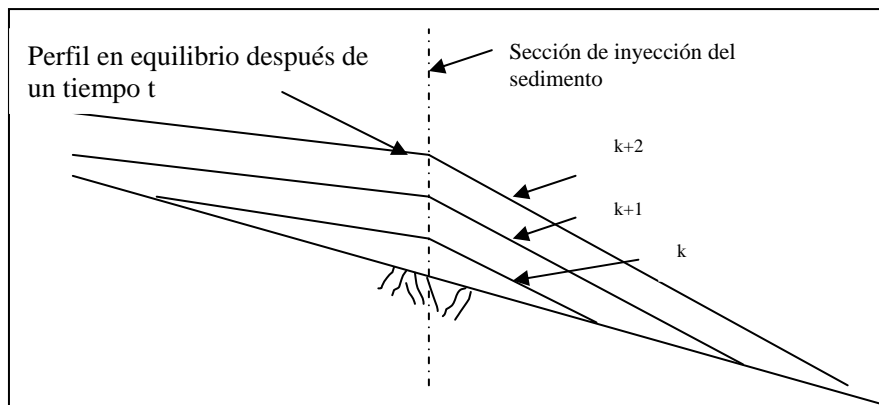


Figura 5. 1 Esquema del perfil del fondo aguas arriba y abajo de la sección de inyección de sedimento (modificado de Soni et al. (1980))

Soni et al. (1980) realizaron experimentos en un canal rectangular de 200 mm de ancho, 500 mm de profundidad de sedimento y 30 m de longitud. El flujo de agua fue controlado por una válvula y el caudal medido con un medidor por orificio ubicado en la tubería de abastecimiento. La arena de la que está compuesto el sedimento del fondo y el material inyectado al canal tienen un diámetro promedio de 0.32 mm (0.012 in) y una desviación estándar geométrica de 1.30 mm. Después de establecido las condiciones de equilibrio, flujo uniforme para un caudal y pendiente; la razón del flujo de sedimento inyectado al canal aguas arriba fue incrementado continuamente a un valor predeterminado. Se estimó que 5% del sedimento inyectado fue depositado aguas arriba de la sección de inyección. Entonces se presumió que el flujo de sedimento en exceso fue depositado en el fondo del canal. El perfil transitorio fue medido en cada intervalo de tiempo. El flujo de sedimento para cada perfil transitorio fue determinado gráficamente del volumen de agradación en el perfil. La máxima diferencia entre los valores individuales del flujo de sedimento para varios intervalos de tiempo fue del 15%. En estos cálculos se asumió la porosidad $p = 0.4$.

El perfil del fondo y la superficie fue medida cada 2.5 m de longitud a intervalos de tiempo de 10 min - 20 min. Los ensayos fueron continuados hasta que la agradación se

aproximó al final del canal aguas abajo. El flujo de sedimento medido al final del canal aguas abajo fue prácticamente igual al flujo de sedimento antes de adicionar el sedimento aguas arriba del canal, lo que indica que todo el sedimento agregado al canal fue depositado a lo largo del canal.

Los experimentos de agradación fueron conducidas usando dos flujos de 4.00 l/s y 7.00 l/s , la pendiente del canal estuvo en el intervalo de 0.00212 - 0.00652 para diferentes razones de adición de sedimento. La razón de adición de sedimento fue variado de $0.30 q_{so}$ a $4.00 q_{so}$ donde; q_{so} es el flujo de sedimento en equilibrio del canal. Un total de 11 ensayos fueron conducidos para obtener 30 perfiles transitorios del fondo y la superficie del canal.

5.2 Descripción del Experimento de Degradación

En el experimento desarrollado por **Begin et al. (1981)** se estudio la degradación en un canal en equilibrio causada por la remoción del sedimento en el extremo aguas abajo. Este descenso en el lecho causa que la razón de degradación aumente aguas arriba hasta alcanzar un valor pico y luego disminuya hasta que el canal alcance el equilibrio. En el experimento el fondo tenía un material cohesivo (mezcla de arena y arcilla). Los experimentos fueron realizados en un canal de 20 m de longitud y 2 m de ancho con una pendiente de 0.009 m/m . La degradación fue iniciada por un descenso de la elevación del fondo al extremo aguas abajo del canal; a partir de este punto el canal se degrada aguas arriba.

Antes del experimento el fondo del canal fue ligeramente compactado con una pendiente de 0.009 m/m . Luego la base del canal al final aguas abajo fue descendida de 0.1425 m a una elevación fija 0.0705 m . Agua con sedimento más fino que el fondo fue circulada con un flujo uniforme. El caudal por unidad de ancho y la profundidad de flujo, respectivamente, fueron $q_o = 0.0029 \text{ m}^2 / \text{s}$, $h_o = 0.012 \text{ m}$ y el coeficiente de Manning $n = 0.021$. Se usó un tanque aguas arriba al que se le inyectó sedimento más fino que el del fondo del canal. La

pendiente del canal cambia debido al descenso aguas abajo. El perfil del canal fue medido varias veces después de iniciado el experimento.

En el experimento se usó un material cohesivo arena-arcilla con un peso específico de $\gamma_s = 2.53 \text{ g/cm}^3$, para mantener el equilibrio del canal; antes y durante el experimento se inyectó un flujo de sedimento desconocido. Este sedimento inyectado tenía un peso específico de $\gamma_s = 1.81 \text{ g/cm}^3$; es así que el sedimento del fondo del canal y el sedimento que transporta inicialmente el canal en equilibrio fueron diferentes; el sedimento del fondo del canal tuvo un diámetro medio $d_{50} = 0.3 \text{ mm}$ y el sedimento inyectado para mantener el equilibrio inicial $d_{50} = 0.1 \text{ mm}$.

CAPITULO 6

**MODELO DE AGRADACION Y DEGRADACION
USANDO LAS FUNCIONES DE TRANSPORTE DE
YANG Y ACKERS-WHITE**

Bhallamudi y Chaudhry (1991) utilizaron el esquema de MacCormack (1969) junto con la ecuación potencial para transporte de sedimentos en la solución numérica de problemas de agradación y degradación en canales. El uso de la ecuación potencial está limitado por falta de mediciones de flujo de sedimento en gran mayoría de los ríos, por lo que se hace necesario recurrir a funciones de transporte.

Justificado por el trabajo previo de Villalta (2004), se seleccionaron las funciones de transporte de Ackers-White y Yang para ser incorporados al modelo matemático de Bhallamudi y Chaudhry (1991), la cual amplía el uso del mismo para aplicaciones en ríos que no cuenten con datos medidos durante largos periodos de tiempo. El objetivo es predecir el perfil del fondo del canal y la superficie del agua después de iniciado el estado transitorio del modelo. Las ecuaciones usadas en el modelo fueron presentadas en los capítulos 3 y 4. A continuación se presentan las ecuaciones gobernantes de flujo y sedimento considerando los cambios requeridos para introducir las funciones de transporte usadas en esta investigación.

6.1 Desarrollo del modelo

Para desarrollar el modelo se resuelven simultáneamente las ecuaciones gobernantes de flujo y de continuidad de sedimento, utilizando el esquema numérico de MacCormack (1969) este esquema fue descrito en la sección 3.3.2. A continuación se presenta las ecuaciones gobernantes:

- **Ecuación de continuidad para agua**

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad 6.1$$

- **Ecuación de conservación de cantidad de movimiento para agua**

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + gh \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + ghS_f = 0 \quad 6.2$$

- **Ecuación de continuidad para sedimento**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1-p)z + \frac{q_s h}{q} \right] + \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad 6.3$$

En estas ecuaciones q = descarga unitaria de agua por unidad de ancho; h = profundidad de flujo; z = elevación del fondo del canal; q_s = descarga unitaria de sedimento; g = aceleración de la gravedad; S_f = pendiente de energía; x = distancia a lo largo del canal; t = tiempo; p = porosidad del fondo del canal. Una diferencia importante entre la ecuación general de cantidad de movimiento para agua (Ecuación 3.2) y la Ecuación 6.2 es el término $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ que representa a la pendiente del lecho del canal S_o . Este término es función del tiempo ya que controla el proceso de agradación y degradación. En la Figura 6.1 se muestra este cambio temporal de la pendiente y elevación del fondo. Este término también hace que la ecuación de continuidad de sedimento esté relacionada con las ecuaciones del flujo de agua. Por consiguiente el modelo es acoplado.

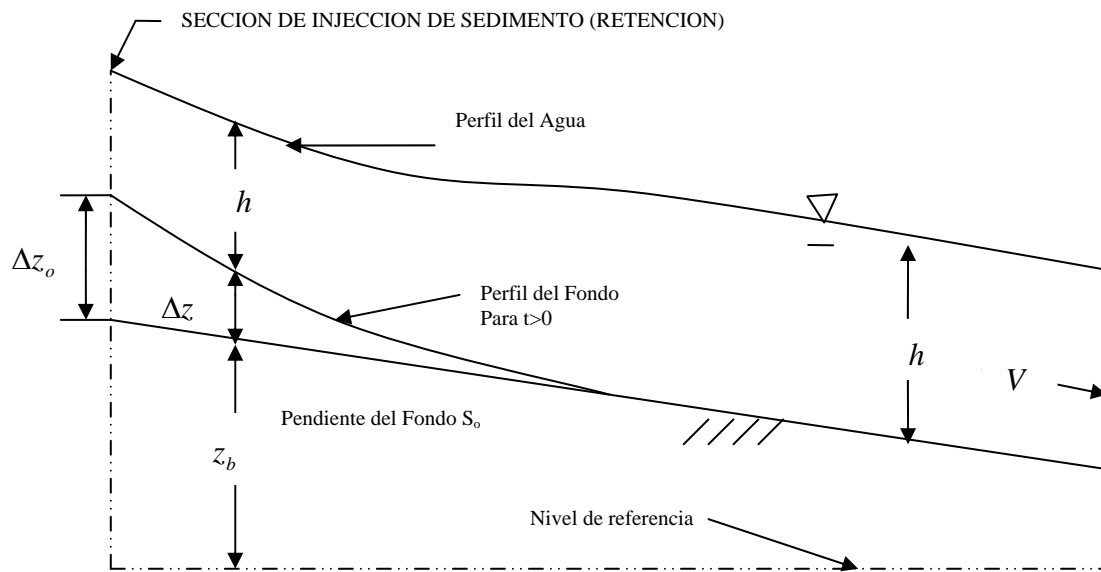


Figura 6. 1 Esquema de agradación debido a sobrecarga de sedimento en una sección del canal

Se utiliza la ecuación de Manning para obtener la pendiente de la línea de energía, esto es:

$$S_f = \frac{q^2 n^2}{h^{3.333}} \quad 6.4$$

En el cual n = coeficiente de Manning, q = caudal por unidad de ancho del canal, h = profundidad de flujo. En esta ecuación se asume que el ancho del canal es muy grande con relación a la profundidad por lo que el radio hidráulico es aproximadamente igual a la profundidad. El análisis se realiza para una sección de ancho unitario en el que el perímetro mojado es igual al ancho unitario de la base, y el radio hidráulico igual a la profundidad del agua.

En el cálculo del flujo de sedimento q_s se usaron las funciones de transporte de sedimento de Yang y Ackers – White. Estas funciones reemplazan a las funciones de transporte inicialmente usadas por Bhallamudi y Chaudhry (1991) para agradación y degradación.

La función potencial inicialmente usada por Bhallamudi y Chaudhry (1991) para simular agradación, es la siguiente:

$$q_s = a \left(\frac{q}{h} \right)^b \quad 6.5$$

Donde; q_s = es el flujo de sedimento en m^2/s , q = caudal por unidad de ancho, h = profundidad de flujo, a y b , son coeficientes hallados por un análisis de regresión usando datos de campo o de laboratorio.

La función usada por Bhallamudi y Chaudhry (1991) para simular degradación, fue inicialmente propuesta por Begin et al. (1981) y es la siguiente:

$$q_s = k S_f \quad 6.6$$

$$q_s = 4.5 \times 10^{-7} \frac{q^2}{h^{3.333}}$$

Donde; k = coeficiente de difusión promedio igual a $500 \text{ cm}^2/s$, S_f = pendiente de la línea de energía calculada con la ecuación de Manning.

Las ecuaciones inicialmente propuestas por Bhallamudi y Chaudhry (1991), son reemplazadas por las ecuaciones de Yang y Ackers-White para los dos casos de agradación y degradación.

Para usar la función de transporte de Yang es necesario conocer varios parámetros del flujo y del sedimento. Esta es más elaborada que la función potencial que sólo necesita el caudal y la profundidad del agua.

$$\log C_t = 5.435 - 0.286 \log \frac{\omega d_{50}}{\nu} - 0.457 \log \frac{U_*}{\omega} + \quad 4.5$$

$$\left(1.799 - 0.409 \log \frac{\omega d_{50}}{\nu} - 0.314 \log \frac{U_*}{\omega} \right) \log \left(\frac{VS}{\omega} - \frac{V_{\text{critico}} S}{\omega} \right)$$

$$q_s = q \times C_t / 1000000 \quad 6.7$$

Donde; C_t = concentración total de sedimentos en partes por millón por peso, sin incluir la carga de lavado, ω = velocidad de caída del sedimento, d_{50} = diámetro medio del sedimento, ν = viscosidad cinemática del agua, U_* = velocidad de fricción, VS = potencia unitaria de la corriente, $V_{critico}S$ = potencia crítica de la corriente.

Para usar la función de Ackers-White se deben calcular los tres parámetros adimensionales discutidos en la sección 4.3, luego hallar la concentración de sedimento en el flujo.

Parámetro adimensional de tamaño:

$$D_{gr} = d \left[\frac{g(\gamma_s / \gamma - 1)}{\nu^2} \right]^{1/3} \quad 4.12$$

Parámetro adimensional de Movilidad

$$F_{gr} = \frac{U_*^n}{\sqrt{gd(\gamma_s / \gamma - 1)}} \left[\frac{V}{\sqrt{32} \log\left(\frac{\alpha d}{h}\right)} \right]^{1-n} \quad 4.9$$

Parámetro adimensional de Transporte

$$G_{gr} = C \left(\frac{F_{gr}}{A} - 1 \right)^m \quad 4.13$$

El flujo de sedimento se calcula usando la siguiente relación:

$$q_s = q^* \frac{G_{gr} d(\gamma_s / \gamma)}{h(U_* / \nu)^n} \quad 6.8$$

Las Ecuaciones (6.1) – (6.3) son un conjunto de ecuaciones hiperbólicas no-lineales que son resueltas por aproximaciones numéricas. El método de diferencias finitas desarrollado por MacCormack (1969), tiene la capacidad de capturar cambios abruptos en el perfil del agua, es explícito, simple de programar y no requiere de grandes matrices. Es fácil

añadir ecuaciones empíricas para determinar la pendiente de energía, el coeficiente de Manning y el flujo de sedimento.

6.1.1 Aplicación del esquema numérico de MacCormack a las ecuaciones gobernantes

El esquema es de segundo orden de precisión en ambos espacio y tiempo. Este esquema es de dos pasos Predictor y Corrector. En el paso predictor se utiliza diferencias finitas hacia adelante para aproximar los términos diferenciales espaciales. En el paso corrector se usa diferencias finitas hacia atrás, pero usando los valores hallados en el paso predictor, según se explica en la sección 3.3.1 Con referencia a la malla para diferencias finitas mostrada en la Figura 3.2, estas aproximaciones para las derivadas de una variable f son como sigue.

Las aproximaciones de las derivadas para el paso predictor son:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^* - f_i^k}{\Delta t} \quad 6.9$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} \quad 6.10$$

En el cual $i =$ el nodo en espacio, $k =$ el nodo en tiempo; un asterisco se refiere al valor de las variables en el paso predictor; Δx y $\Delta t =$ los pasos de espaciales y temporales, respectivamente.

Reemplazando las aproximaciones numéricas de las Ecuaciones (6.9) y (6.10) a las Ecuaciones (6.1) a (6.3), estas pueden ser escritas como sigue para determinar los valores al final del paso predictor h_i^* , q_i^* , y z_i^*

Paso Predictor

$$h_i^* = h_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i+1}^k - q_i^k) \quad 6.11$$

$$q_i^* = q_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{(q_{i+1}^k)^2}{h_{i+1}^k} - \frac{(q_i^k)^2}{h_i^k} + \frac{g}{2} \left[(h_{i+1}^k)^2 - (h_i^k)^2 \right] \right\} - g h_i^k \frac{\Delta t}{\Delta x} (z_{i+1}^k - z_i^k) - g h_i^k \Delta t \frac{(q_i^k n)^2}{(h_i^k)^{3.33}} \quad 6.12$$

$$z_i^* = z_i^k + \frac{1}{1-p} \left[\left(\frac{q_s h}{q} \right)_i^k - \left(\frac{q_s h}{q} \right)_i^* \right] - \frac{\Delta t}{(1-p)\Delta x} \left[(q_s)_{i+1}^k - (q_s)_i^k \right] \quad 6.13$$

En estas ecuaciones el asterisco indica los valores al final del paso del predictor, el flujo de sedimento es calculado usando las funciones de Yang, Ackers-White u otra. Para generalizar este paso en el modelo se escribe el flujo de sedimento como función de la profundidad y caudal unitario al final del paso predictor.

$$(q_s)_i^* = f(h_i^*, q_i^*) \quad 6.14$$

Donde $(q_s)_i^*$ = flujo de sedimento al final del paso predictor, este es calculado reemplazando los valores de h_i^* y q_i^* en las funciones de transporte.

Para el paso corrector, las aproximaciones de las derivadas son:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{**} - f_i^*}{\Delta t} \quad 6.15$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i^* - f_{i-1}^*}{\Delta x} \quad 6.16$$

En los cuales ** denotan los valores al final del paso corrector. Sustituyendo estas aproximaciones de diferencias finitas ecuaciones (6.15) y (6.16) en las ecuaciones diferenciales parciales (6.1) a (6.3) obtenemos las siguientes ecuaciones para determinar los valores al final del paso corrector h_i^{**} , q_i^{**} , y z_i^{**}

Paso Corrector

$$h_i^{**} = h_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_i^* - q_{i-1}^*) \quad 6.17$$

$$q_i^{**} = q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{(q_i^*)^2}{h_i^*} - \frac{(q_{i-1}^*)^2}{h_{i-1}^*} + \frac{g}{2} [(h_i^*)^2 - (h_{i-1}^*)^2] \right\} - gh_i^* \frac{\Delta t}{\Delta x} (z_i^* - z_{i-1}^k) - gh_i^* \Delta t \frac{(q_i^*)^2}{(h_i^*)^{3.33}} \quad 6.18$$

$$z_i^{**} = z_i^* + \frac{1}{1-p} \left[\left(\frac{q_s h}{q} \right)_i^* - \left(\frac{q_s h}{q} \right)_i^{**} \right] - \frac{\Delta t}{(1-p)\Delta x} [(q_s)_i^* - (q_s)_{i-1}^*] \quad 6.19$$

De igual manera que en el paso predictor, el flujo de sedimento $(q_s)_i^{**}$ es calculado usando las funciones de transporte de Yang y Ackers-White, se escribe el flujo de sedimento como función del caudal unitario y profundidad al final del paso corrector.

$$(q_s)_i^{**} = f(h_i^{**}, q_i^{**}) \quad 6.20$$

Finalmente, los valores de las variables al nivel temporal $k+1$, al final del intervalo Δt , están dados por:

$$h_i^{k+1} = \frac{1}{2}(h_i^k + h_i^{**}) \quad 6.21$$

$$q_i^{k+1} = \frac{1}{2}(q_i^k + q_i^{**}) \quad 6.22$$

$$z_i^{k+1} = \frac{1}{2}(z_i^k + z_i^{**}) \quad 6.23$$

6.2 Condiciones de frontera

Para cada paso temporal en el modelo los cálculos en el primer y último nodo se realizarán utilizando el método de las características y la ecuación de continuidad de sedimento. El método de las características fue descrito en la sección 3.3.2.

6.2.1 Condiciones de Frontera para el Modelo de Agradación

Para modelar la agradación se usa como condición de frontera aguas arriba, el caudal por unidad de ancho constante. La condición de frontera aguas abajo es la profundidad de flujo constante, ya que se asume que las condiciones de flujo no cambian en un punto muy lejano del punto de inyección de sedimento. La elevación del fondo aguas arriba y abajo se calcula aplicando la ecuación de continuidad de sedimento con diferencias finitas hacia atrás en espacio.

6.2.1.1 Condición de Frontera Aguas Arriba

Sustituyendo $q_p = q_o$ para el caudal unitario aguas arriba y resolviendo la ecuación característica negativa se obtiene:

$$q_p - \left[\frac{q_A}{h_A} + g(S_o - S_f)(t_p - t_A) + \left(\frac{g}{c} \right)_A h_A \right] h_p + \left(\frac{g}{c} \right)_A h_p^2 = 0 \quad 6.24$$

$$a = \left(\frac{g}{c} \right)_A$$

$$b = - \left[\frac{q_A}{h_A} + g(S_o - S_f)(t_p - t_A) + \left(\frac{g}{c} \right)_A h_A \right] h_p \quad 6.25$$

$$c = q_p$$

Resolviendo la ecuación se obtiene el valor de la profundidad del agua como:

$$h_p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad 6.26$$

La elevación del fondo del canal se calcula aplicando las diferencias finitas

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$ y $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}$ a la ecuación de continuidad de sedimento para obtener:

$$z_1^{k+1} = z_1^k + \frac{1}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_s h}{q} \right)_1^k - \left(\frac{q_s h}{q} \right)_1^{k+1} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(q_{s0} + \Delta q_s) - (q_s)_1^k \right] \quad 6.27$$

En esta ecuación se asume un punto ficticio aguas arriba del primer nodo en el que el flujo de sedimento es $q_s = q_{s0} + \Delta q_s$, donde; q_{s0} = flujo de sedimento inicial correspondiente al estado de equilibrio, Δq_s = incremento en el flujo de sedimento.

6.2.1.2 Condición de Frontera Aguas Abajo

Sustituyendo una profundidad constante para la sección aguas abajo $h_p = h_0$, se resuelve la ecuación característica positiva para la velocidad como:

$$V_p = V_A - \left(\frac{g}{c} \right)_A (y_p - y_A) + g(S_o - S_f)_A (t_p - t_A) \quad 6.28$$

$$q_p = V_p h_p \quad 6.29$$

La elevación z_{N+1}^{k+1} se calcula aplicando $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$ y $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}$ a la

ecuación de continuidad de sedimento obteniéndose.

$$z_{N+1}^{k+1} = z_{N+1}^k + \frac{1}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_s h}{q} \right)_{N+1}^k - \left(\frac{q_s h}{q} \right)_{N+1}^{k+1} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(q_s)_N^k - (q_s)_{N+1}^k \right] \quad 6.30$$

6.2.2 Condiciones de Frontera para el Modelo de Degradación

En el modelo de degradación la condición de frontera aguas arriba es el caudal unitario constante $q_1^k = q_o$, aguas abajo la condición de frontera es la profundidad de flujo normal entre los dos últimos nodos. La degradación es causada por un descenso continuo y constante hasta una elevación fija, a partir de la cual no ocurrirá degradación en el último nodo.

6.2.2.1 Condición de Frontera Aguas Arriba

Las características de flujo h_1^k y q_1^k se calculan de la misma manera que en el modelo de agradación. La diferencia está en el cálculo de la elevación; en el que se asume un punto ficticio aguas arriba del primer nodo. En el nodo ficticio el flujo de sedimento es el correspondiente al flujo estable q_{s0} , con el fin de relacionar el nodo ficticio y el primer nodo se aplica diferencias finitas hacia atrás en espacio y hacia delante en tiempo a la ecuación de continuidad de sedimento para obtener:

$$z_1^{k+1} = z_1^k + \frac{1}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_s h}{q} \right)_1^k - \left(\frac{q_s h}{q} \right)_1^{k+1} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(q_{s0}) - (q_s)_1^k \right] \quad 6.31$$

6.2.2.2 Condición de Frontera Aguas Abajo

Aguas abajo primero se halla la pendiente del fondo correspondiente a los dos últimos nodos del canal S_x usando la Ecuación 6.32, luego se calcula la profundidad normal correspondiente a los dos últimos nodos h_n con la ecuación 6.33; entonces la condición de frontera es la profundidad normal $h_{N+1}^{k+1} = h_n$. Este cálculo se realiza para cada paso temporal del modelo. Con la profundidad normal se procede a calcular la velocidad y el caudal por unidad de ancho usando la ecuación característica positiva, de la misma manera que en el modelo de agradación.

La elevación z_{N+1}^{k+1} corresponde a un descenso constante en cada intervalo de tiempo, se realiza este descenso hasta que se llegue a la elevación fija del fondo del canal, en el extremo final aguas abajo. Este valor fue obtenido del experimento de **Begin et al. (1981)** para la simulación.

$$S_x = \frac{z_N^k - z_{N+1}^k}{\Delta x} \quad 6.32$$

$$h_n = \left(q_N^k * n / (S_x)^{0.5} \right)^{0.6} \quad 6.33$$

El descenso en la elevación del último nodo se determina por la Ecuación 6.34, los valores de $0.1425m$ y $0.0705m$ son el valor inicial y final de la elevación del último nodo la razón de $(0.1425 - 0.0705) / 2000$ fue seleccionado por prueba y error para que el esquema fuese estable.

$$z_{N+1}^{k+1} = z_{N+1}^k - (0.1425 - 0.0705) / 2000 \quad 6.34$$

La elevación del último nodo en el modelo se calcula usando la Ecuación 6.35, esta elevación es fija y no ocurrirá más degradación después de alcanzar la elevación z_{out} .

$$z_{out} = z_0 - S_o * CHL - (0.1425 - 0.0705) \quad 6.35$$

donde; CHL = longitud del canal, z_o = profundidad inicial del lecho del canal al extremo aguas arriba.

Sustituyendo $h_p = h_n$ en la ecuación característica positiva y resolviendo para obtener la velocidad se obtiene la Ecuación 6.36, el caudal por unidad de ancho se obtiene multiplicando la velocidad por la profundidad de flujo como se ve en la Ecuación 6.37.

$$V_p = V_A - \left(\frac{g}{c} \right)_A (h_p - y_A) + g(S_x - S_f)_A (t_p - t_A) \quad 6.36$$

$$q_p = V_p h_p \quad 6.37$$

6.3 Estabilidad

El esquema de MacCormack (1969) es estable si se satisface la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). En todos los puntos del modelo, esta condición puede escribirse como:

$$C_n = \left(\frac{q}{h} + \sqrt{gh} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad 6.38$$

En el cual C_n = número de Courant. La Ecuación 6.38 debe ser cumplida en todos los puntos de la malla del modelo para que el esquema sea estable.

Esquemas de segundo orden, como el caso del esquema numérico de MacCormack (1969), usualmente producen oscilaciones numéricas cerca de los frentes de onda. Estas oscilaciones, causadas por la dispersión de los errores asociado con los términos impares cuando se trunca el error, pueden ser suavizadas introduciendo el concepto de viscosidad artificial. Para este propósito el método desarrollado por Jameson et al. (1981) es usado.

6.4 Viscosidad Artificial

Los valores de las variables al final de cada paso temporal deberán ser corregidos usando el algoritmo propuesto por Jameson et al. (1981), para cada punto del modelo.

$$v_i = \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{|h_{i+1}| + |h_i| + |h_{i-1}|} \quad 6.39$$

$$\epsilon_{i-(1/2)} = k \max(v_{i-1}, v_i) \quad 6.40$$

$$\epsilon_{i+(1/2)} = k \max(v_i, v_{i+1}) \quad 6.41$$

donde; k = constante de disipación, el valor corregido de f para el siguiente paso temporal es dado por:

$$f_i^{k+1} = f_i^{k+1} + \epsilon_{i+(1/2)} (f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1}) - \epsilon_{i-(1/2)} (f_i^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}) \quad 6.42$$

La constante de difusión deberá ser el valor mínimo posible, al mismo tiempo que las oscilaciones deberán ser lo más suave posible. Este algoritmo de viscosidad artificial fue utilizado en el modelo de degradación para evitar inestabilidad. De tal forma que el modelo pueda ser aplicado para cualquier lapso de tiempo sin problemas.

6.5 Procedimiento de Cálculo

Para iniciar los cálculos, se deben conocer las condiciones iniciales, es decir los valores de h_i^k , q_i^k y z_i^k para $t = 0$ en todos los nodos del sistema. Las condiciones iniciales o de equilibrio corresponden a flujo uniforme en el canal. Los valores de las variables al final de un paso temporal $t = t + \Delta t$ son calculados como sigue.

1. Calcular los valores de las fronteras aguas arriba y abajo del canal $h_1^{k+1}, q_1^{k+1}, z_1^{k+1}$ y $h_{N+1}^{k+1}, q_{N+1}^{k+1}, z_{N+1}^{k+1}$; usando el método de las características y aplicando diferencias finitas hacia atrás a la ecuación de continuidad de sedimento.
2. Calcular los valores del paso Predictor $h_i^*, q_i^*, z_i^*, (q_s)_i^*$ para los nodos interiores del sistema ($i = 2, \dots, N$) aplicando las Ecuaciones (6.11) – (6.13), el flujo de sedimento se halla usando las funciones de transporte de Yang y Ackers-White con las Ecuaciones 6.7 y 6.8, respectivamente.
3. Calcular los valores del paso Corrector $h_i^{**}, q_i^{**}, z_i^{**}, (q_s)_i^{**}$ para los nodos interiores del sistema ($i = 2, \dots, N$) aplicando las Ecuaciones (6.17) – (6.19), el flujo de sedimento se determina usando las Ecuaciones 6.7 y 6.8.
4. Los valores al final del paso temporal ($t = t + \Delta t$) $h_i^{k+1}, q_i^{k+1}, z_i^{k+1}$ son determinados usando las Ecuaciones (6.21)-(6.23).

5. Los valores calculados son ligeramente corregidos (sólo si es necesario) por viscosidad artificial, esto si existen altas oscilaciones en los valores calculados. Esto usando las Ecuaciones 6.39 a 6.42.
6. Los valores finales $h_i^{k+1}, q_i^{k+1}, z_i^{k+1}$ ahora son h_i^k, q_i^k y z_i^k para el siguiente paso temporal $t = t + \Delta t$. Estos valores son usados nuevamente para determinar el flujo de sedimento q_s , que es necesario para realizar los cálculos en el paso predictor y en las fronteras del modelo.
7. Δt es calculado usando la condición del número de Courant.
8. El procedimiento es repetido hasta el tiempo requerido.

CAPITULO 7

ANÁLISIS DE RESULTADOS**7.1 Resultados del canal con agradación**

Se verificó el modelo con los datos del experimento de agradación debido a un incremento en el flujo de sedimento en una sección, ejecutado por Soni et al. (1980). Este experimento fue descrito en la sección 5.2. En esta parte del estudio se utiliza las funciones de transporte de Yang, Ackers-White y la función potencial en el modelo de agradación.

7.1.1 Condiciones iniciales del modelo de agradación

En el modelo matemático las condiciones iniciales son consistentes con el rango de valores de los datos del experimento de Soni et al. (1980) y son los siguientes: profundidad de flujo uniforme $h_o = 0.0747 m$, caudal por unidad de ancho uniforme $q_o = 0.033 m^2 / s$, la elevación del fondo es determinada de la pendiente inicial $S_o = 0.003$ y el flujo de sedimento inicial q_{so} calculado usando cada una de las funciones de transporte. Estos valores fueron especificados en cada nodo del sistema como condiciones iniciales o de equilibrio. El estado transitorio fue iniciado incrementando el flujo de sedimento en equilibrio q_{so} a $q_{so} + \Delta q_s$, donde Δq_s es el incremento del flujo de sedimento en el primer nodo aguas arriba del canal.

Además en el modelo matemático; el canal tiene 50 m de longitud, un total de 51 nodos y 50 segmentos de longitud $\Delta x = 1.0 m$. Esta longitud permite asegurar que no habrá efectos en el flujo de agua y sedimento provenientes de la condición de frontera aguas abajo.

El flujo de sedimento en equilibrio o inicial fue calculado usando los datos de esta condición. En la Tabla 7.1 se muestra los parámetros necesarios para de cada función de transporte, qué a diferencia de la función empírica, para las funciones de transporte se necesita conocer el diámetro medio del sedimento en ambos casos. En esta Tabla también se muestra el número de Courant el que es necesario para calcular los pasos temporales para la simulación.

Tabla 7.1 Datos usados en la simulación de Agradación

Funcion de Transporte	Numero de Courant (Cr)	ω (m/s)	d (m)	γ_s / γ	Re	V_{cr} / ω	α
Ackers-White	0.9		0.00032	2.65			10
Yang	0.9	0.037	0.00032		12.82	3.0458	
Potencial	0.9						

Para utilizar la función de transporte de Yang se requiere conocer otras variables además de los datos de flujo y la elevación inicial del fondo. La velocidad de caída del sedimento en agua fue asumida constante, para un factor de forma del sedimento de 0.7 y una temperatura del agua de 14 °C según Yang (1993). El diámetro medio del sedimento, la viscosidad cinemática del agua y la temperatura también son necesarios. La función de Ackers-White es aplicable a sedimento no-cohesivo con gravedad específica de 2.65. En la Tabla 7.1 se muestran los valores de estos datos y otros parámetros necesarios para la condición inicial del modelo.

7.1.2 Ajuste del modelo de agradación

Se ajusto los perfiles calculados por el modelo con el perfil medido por Soni et al. (1980), el incremento del sedimento en el primer nodo $\frac{\Delta q_s}{q_{so}}$ es la variable de ajuste para cada función de transporte. Según Bhallamudi y Chaudhry (1991) $\frac{\Delta q_s}{q_{so}} = 4$, al introducir las funciones

de transporte de Yang y Ackers-White al modelo, inicialmente se usó el valor de cuatro veces el flujo de sedimento en equilibrio como incremento del sedimento aguas arriba, propuesto por Bhallamudi y Chaudhry (1991). Este valor era muy alto y ocasionaba cambios abruptos en el perfil del lecho y por consiguiente inestabilidad del modelo. Este problema fue resuelto reduciendo la cantidad del flujo de sedimento inyectado al canal, el intervalo del flujo de sedimento inyectado al canal varia de 0.3 a 4.0 veces el flujo de sedimento inicial, tal como fue indicado en la descripción del experimento sección 5.2. Para este estudio el valor del incremento es diferente para cada función de transporte, debido a la precisión de cada función. Estos valores fueron hallados de tal manera que los perfiles calculados se ajusten con el perfil medido en los primeros nodos del modelo.

Tabla 7. 2 Razón de incremento del flujo de sedimento en el modelo de agradación

Función de Transporte	$\frac{\Delta q_s}{q_{so}}$	
	30 min.	40 min.
Potencial	1.80	1.80
Yang	0.94	0.94
Ackers-White	2.00	2.00
Experimental, Soni et al. (1980)	entre 0.30 y 4.00	

Tabla 7. 3 Error medio cuadrático entre el perfil calculado y medido

Función de transporte	Error medio cuadrático (m)	
	t=30 min.	t=40 min.
Potencial	0.0090	0.0104
Yang	0.0084	0.0090
Ackers-White	0.0086	0.0125

Los errores medios cuadráticos de los resultados con los datos medidos se muestran en la Tabla 7.3, según esta Tabla el perfil calculado con la función de transporte de Yang produce menor error medio cuadrático que los demás perfiles calculados con el modelo. Cabe mencionar

que los resultados del modelo de agradación no necesitaron ser corregidos por viscosidad artificial debido a que no presentaron problemas de inestabilidad del modelo.

7.1.3 Análisis de los perfiles calculados por el modelo de agradación

La **Figura 7.1 y 7.2** muestran gráficamente los perfiles obtenidos con el modelo de agradación, comparado con los datos experimentales de Soni et al. (1980) para 30 y 40 minutos, respectivamente. La Figura 7.1 muestra las diferencias de los perfiles calculados por el modelo comparado con el perfil medido a los 30 minutos de iniciado el experimento. Esta Figura muestra que el perfil calculado con la función de Yang alcanza mayor agradación en el primer nodo seguida por los perfiles de Ackers-White y la función Potencial. A partir de los 2m hasta los 10m el perfil del fondo calculado con la función potencial es mayor a las de Ackers-White y Yang. Los perfiles calculados coinciden a partir de los 11m y son prácticamente igual al inicial. Esta Figura también muestra el perfil de la superficie del agua la cual por sus oscilaciones no coincide con los perfiles calculados por el modelo. Al inicio de 1m a 7m los perfiles de la superficie del agua calculadas por las funciones de Ackers-White y Yang son menores que el perfil medido.

La Figura 7.2 es similar a la Figura 7.1 pero con datos experimentales a los 40 minutos. En esta Figura se puede ver que en los primeros 2m del canal los perfiles calculados por las funciones de Yang y Ackers-White son mayores al medido y al calculado por la función potencial. De los 2m hasta los 12m el perfil calculado con la función potencial es mayor a las de Yang y Ackers-White.

Según la Tabla 7.2 el perfil calculado con la función de Yang produce menos incremento de sedimento en el primer nodo. Observando las Figuras 7.1 y 7.2 se afirma que con el uso de la función de transporte de Yang se obtiene mayor agradación en el primer nodo que con la función

de Ackers-White. Esta diferencia se debe a que la concentración de sedimento suspendido calculada a lo largo del canal con la función de Yang, disminuye más rápidamente que la concentración de sedimento calculada con la función de Ackers-White. Consecuentemente utilizando la función de transporte de Yang se produce mayor deposición que cuando se utiliza la función de Ackers-White.

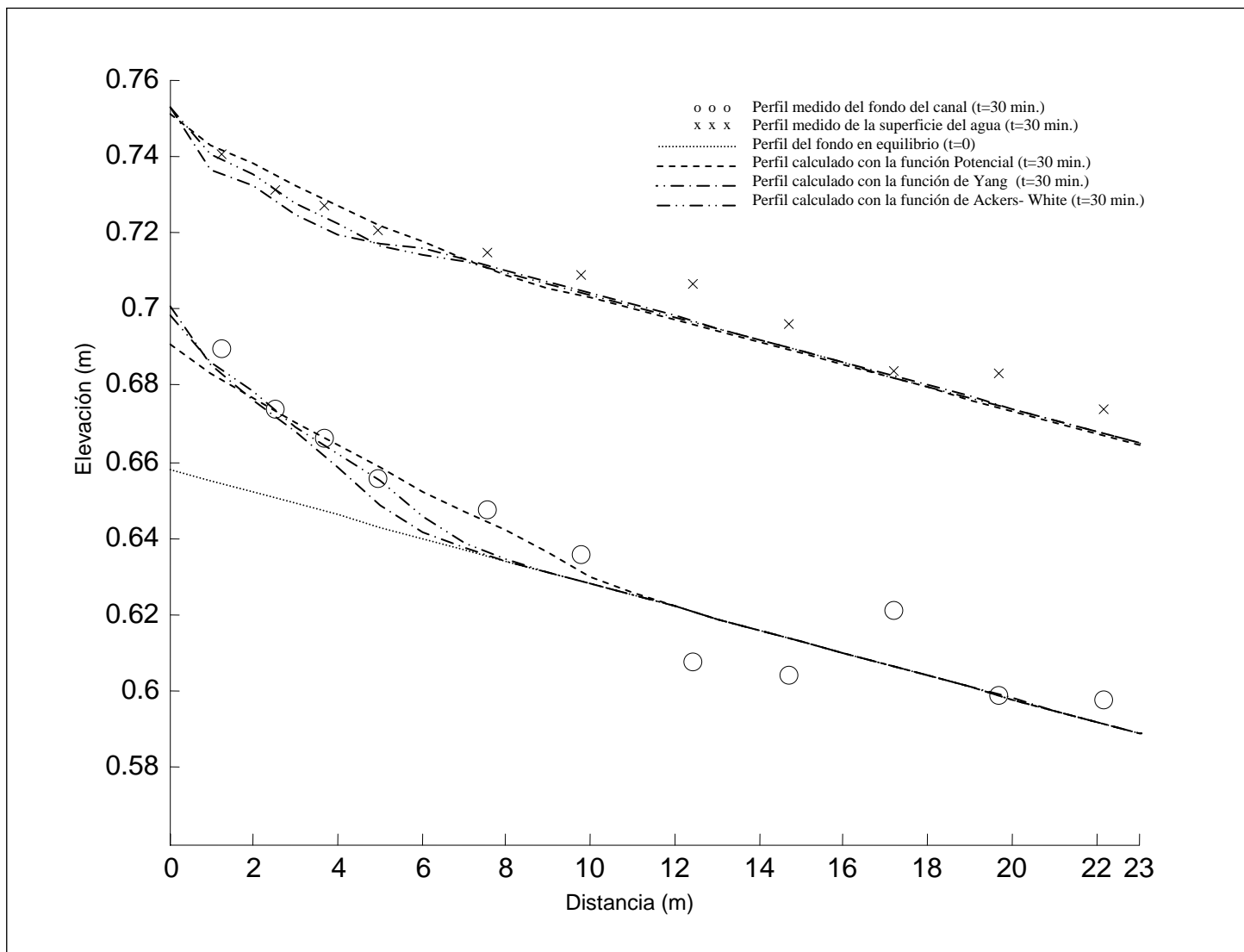


Figura 7. 1 Perfiles de agradación con diferentes funciones de transporte, t=30 min

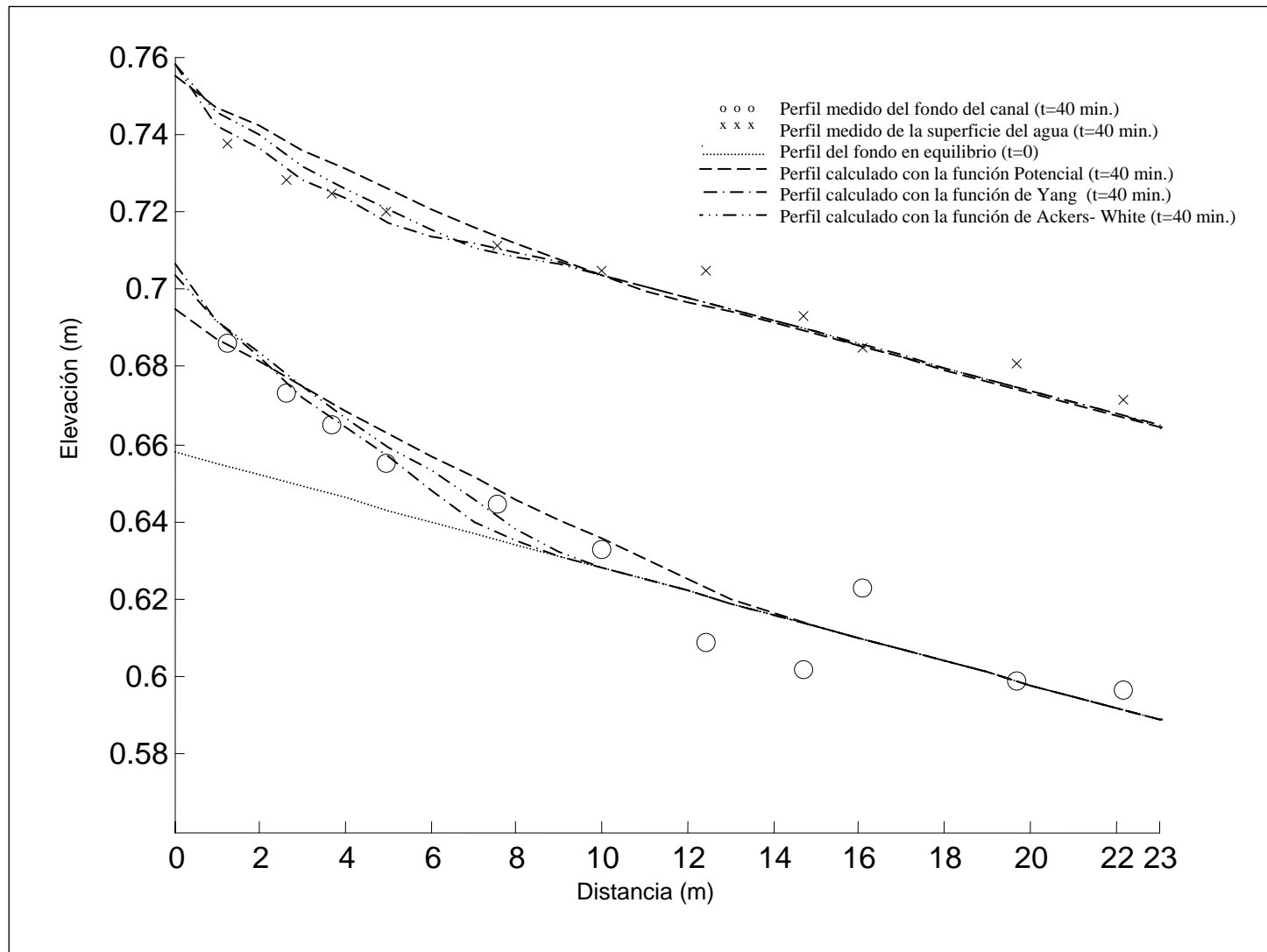


Figura 7. 2 Perfiles de agradación con diferentes funciones de transporte, t=40 min.

7.2 Resultados del canal con degradación

El modelo fue verificado usando el experimento desarrollado por Begin et al. (1981). Este experimento fue descrito en la sección 5.3. Estos investigadores propusieron también una función de transporte proporcional a la pendiente de la línea de energía dada por la Ecuación 6.6. Esta función de transporte fue usada por Bhallamudi y Chaudhry (1991) para simular degradación debido a un descenso del fondo del canal en el extremo aguas abajo. Bhallamudi y Chaudhry (1991) compararon los resultados de su modelo para 210 minutos con datos experimentales obtenidos a los 1320 minutos de iniciado el experimento. Estos autores no explican por qué la comparación numérica con los datos experimentales no se hizo al mismo tiempo.

7.2.1 Condiciones iniciales del modelo de degradación

En el modelo matemático las condiciones iniciales fueron especificadas en cada nodo del sistema como; profundidad de flujo uniforme $h_o = 0.012 m$, caudal por unidad de ancho constante $q_o = 0.0029 m^2 / s$, la elevación del fondo determinada de la pendiente inicial $S_o = 0.009$ y la longitud del canal $21 m$. Se especificó un total de 71 nodos con segmentos $\Delta x = 0.3 m$. Estos valores son consistentes con los datos experimentales de Begin et al. (1981).

Las funciones de transporte utilizadas en el modelo tienen la limitación de ser aplicables sólo a materiales no-cohesivos. Debido a esto se asumió que el material era no-cohesivo, con gravedad específica de 2.65. También se usó un diámetro medio promedio entre el sedimento del fondo y el suspendido $d_{50} = 0.3 mm$. Cabe aclarar que en el experimento el material fue cohesio mezcla de arena y arcilla.

7.2.2 Ajuste del modelo de degradación

El ajuste del modelo se realizó utilizando la condición de frontera aguas abajo, en la última sección del canal se asume que el fondo se degrada a una razón constante en cada paso temporal. El valor de esta razón de degradación es de tal manera que no ocasione inestabilidad del modelo y además que los resultados del perfil calculado por el modelo se aproximen al medido. La Tabla 7.4 muestra la razón de degradación para el modelo usando cada función de transporte. En la misma tabla se muestran las variables necesarias para aplicar las funciones de transporte a los datos experimentales. Las condiciones de frontera impuestas al modelo fueron descritas en la sección 6.3.

Tabla 7.4 Datos usados en la simulación de Degradación

Función de transporte	VARIABLES						
	$\frac{\Delta z}{\Delta t}$	$m / \Delta t$	ω (m/s)	d (m)	γ_s / γ	Re	V_{cr} / ω
Potencial	3.60E-06						
Yang	3.60E-06		0.037	0.0003		13.1895	3.018
Ackers-White	3.60E-06			0.0003	2.65		

Para modelar este experimento fue necesario corregir los valores calculados por viscosidad artificial debido a las oscilaciones y por consiguiente inestabilidad del modelo.

7.2.3 Análisis de los perfiles calculados por el modelo de degradación

Las Figuras 7.3 y 7.4 muestran los resultados del modelo comparados con los resultados experimentales a los 37 minutos de iniciado el experimento. La Figura 7.3 muestra que la degradación medida fue mayor que las obtenidas por el modelo usando las funciones de Yang y Ackers-White. La degradación calculada por el modelo usando la función propuesta por Begin et. al. (1981) es mayor a la medida. Observando la misma figura se afirma que el perfil

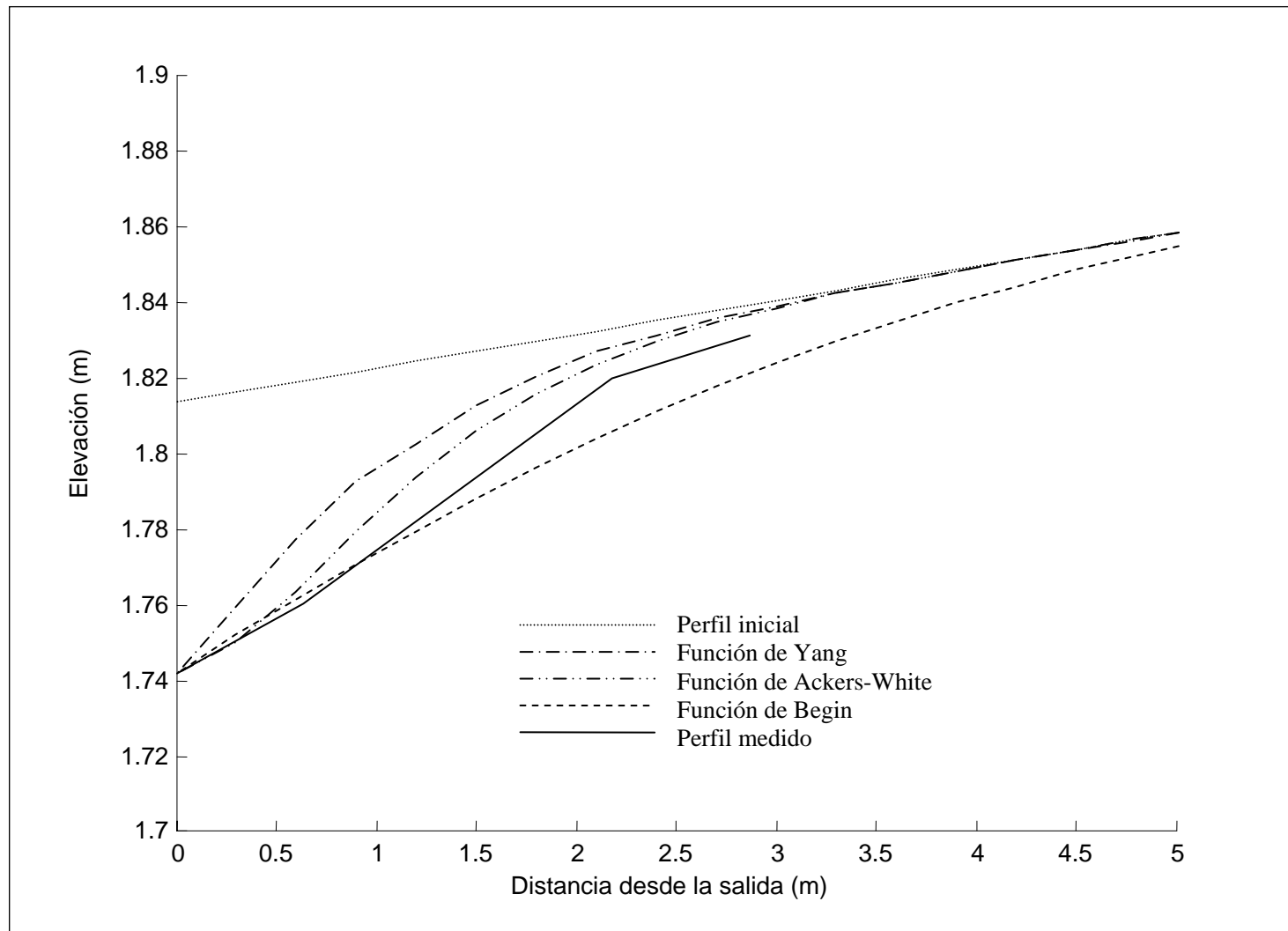


Figura 7. 3 Perfil calculado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), t=37 min

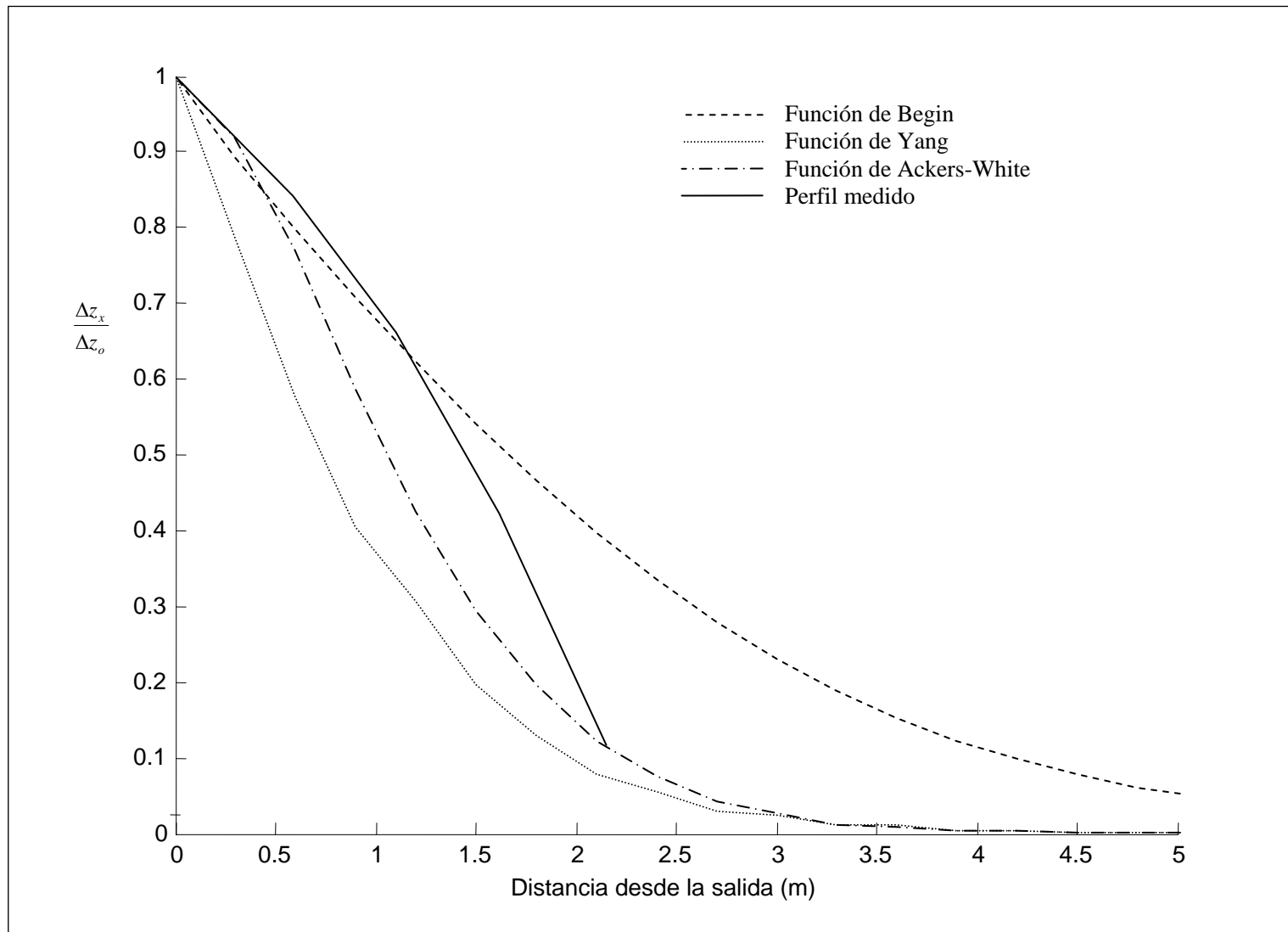


Figura 7. 4 Perfil normalizado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), t=37 min.

calculado con la función de Ackers-White es la que mejor se aproxima al perfil medido. El error medio cuadrático para este perfil es menor que para los demás perfiles tal como se muestra en la Tabla 7.5 para un lapso de 37 minutos. En los primeros 0.6m de la salida del canal el perfil calculado con la función de Ackers-White predice con mayor exactitud que el perfil calculado con la función de Yang. El perfil calculado con la función propuesta por Begin et. al (1981) predice muy bien hasta 1.20m de la salida del canal. Aguas arriba de 1.20m el perfil sobreestima la degradación del canal.

La Figura 7.4 muestra la degradación relativa que es el resultado de dividir la degradación en una sección del canal entre la degradación al final del canal. El perfil medido de esta figura no necesariamente es consistente con el perfil medido de la Figura 7.3 debido a que el perfil inicial del experimento no tenía una pendiente uniforme y además el material del fondo era una mezcla de arena y arcilla. Según la Figura 7.4 el perfil calculado con la función de Ackers-White y Yang son prácticamente el mismo a partir de los 2.5m de la salida del canal.

Observando las Figuras 7.3 y 7.4 los perfiles calculados usando la función de Yang son los que menos degradación producen en comparación con los demás perfiles. El error medio cuadrático del perfil calculado con esta función es el mayor de los tres perfiles para un lapso de 37 minutos, tal como se muestra en la Tabla 7.5.

Tabla 7.5 Constantes de disipación y errores

Función de Transporte	Constante de disipación (k)	Error medio cuadrático t=37 min (m)	Error medio cuadrático t=1320 min. (m)
Ackers-White	1.00	0.0048	0.0086
Yang	0.95	0.0110	0.0080
Begin	1.00	0.0087	N/A

Las Figuras 7.5 y 7.6 muestran el perfil calculado y el perfil normalizado utilizando las funciones de transporte de Yang y Ackers-White para un lapso de 1320 minutos. En estas figuras no se muestra el perfil calculado con la función propuesta por Begin et. al. (1981) debido a que para este tiempo la degradación calculada es mucho mayor que la medida.

En la Figura 7.5 se observa que el perfil calculado usando la función de Yang es prácticamente la misma que el perfil calculado usando la función de Ackers-White. Aunque ningún perfil se ajusta exactamente con el perfil medido, el perfil calculado con la función de Yang es más preciso que el perfil calculado con la función de Ackers-White. Esto se puede ver en la Tabla 7.5 que el error medio cuadrático usando la función de Yang es menor que el usando la función de Ackers-White.

En la Figura 7.6 se observa que los perfiles normalizados resultado de dividir la degradación en una sección del canal entre la degradación al final del canal aguas abajo. Estos perfiles calculados con las funciones de Yang y Ackers-White prácticamente coinciden con el perfil normalizado medido hasta los 6.3m. Esto indica que la profundidad de degradación calculada y medida es prácticamente lo mismo. Esto no es consistente con el perfil mostrado en la Figura 7.5 debido a que el canal del experimento no tenía una pendiente uniforme. Vale recalcar que los perfiles medidos de las Figuras 7.5 y 7.6 fueron tomados directamente de la publicación de Begin et al. (1981).

Los resultados de esta investigación demuestran que usando la función de transporte propuesta por Begin et al. (1981) en el modelo numérico de Bhallamudi y Chaudhry (1991) se obtiene que el canal experimental se degrada más lentamente de lo predicho por los resultados del modelo.

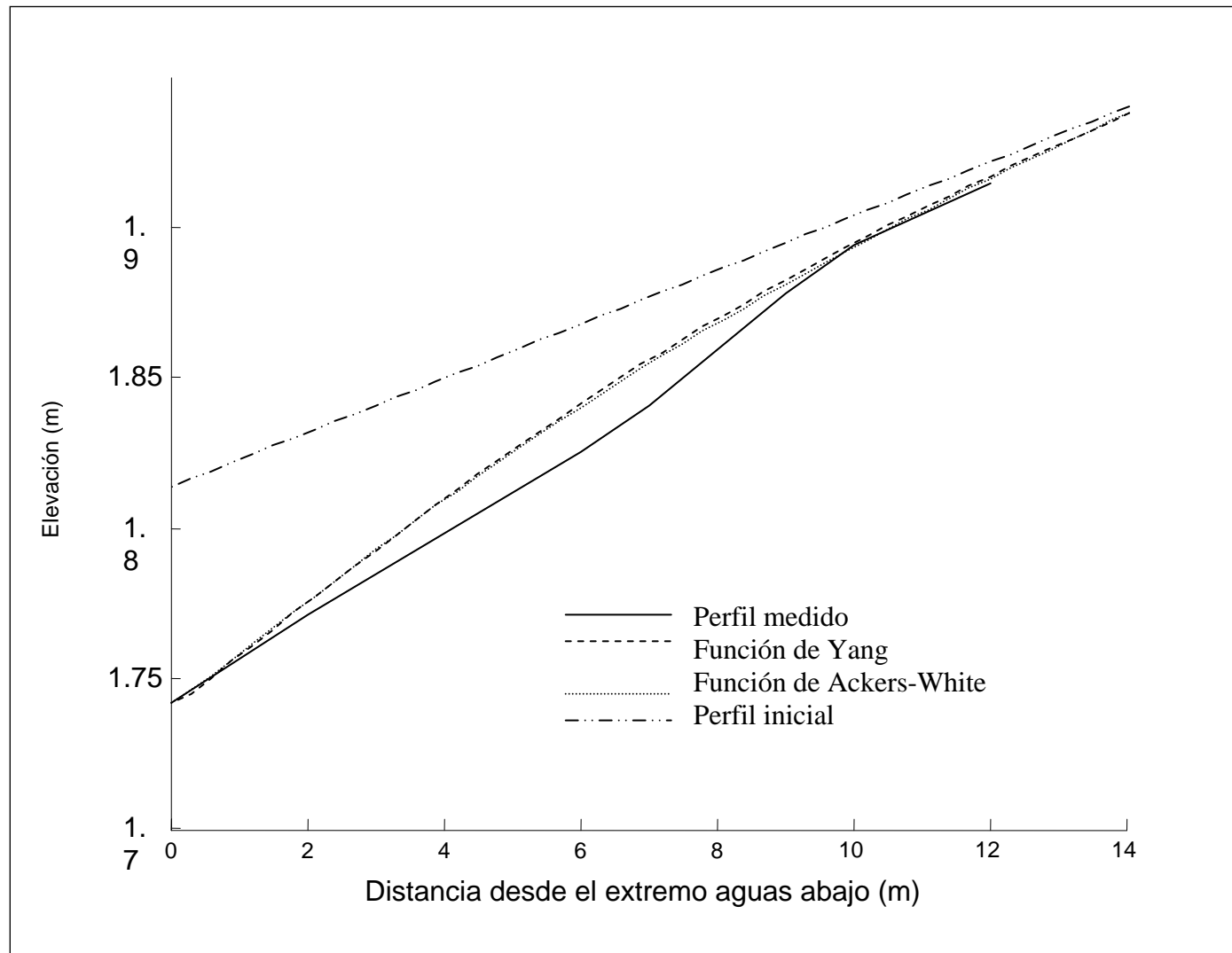


Figura 7. 5 Perfil calculado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), t=1320 min

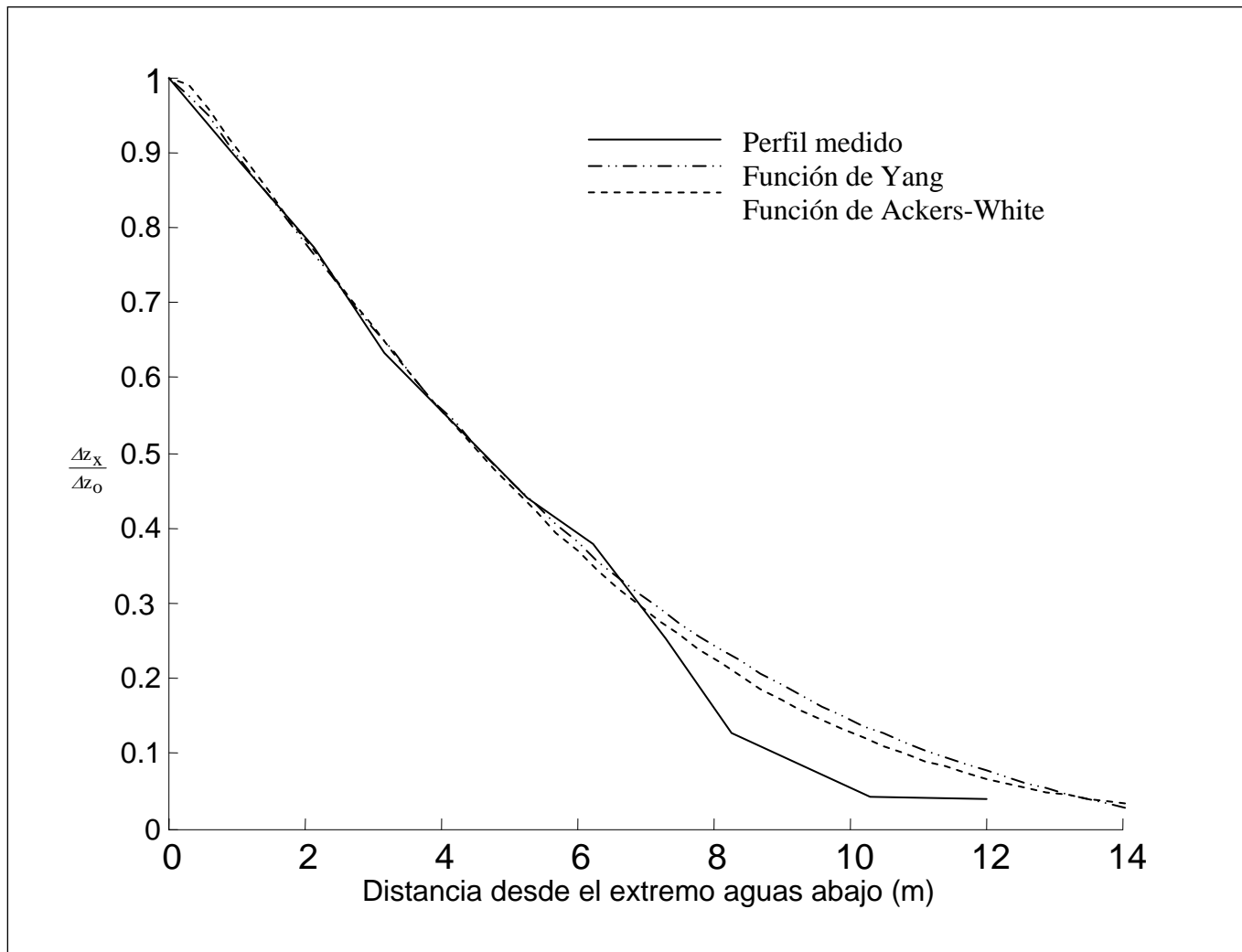


Figura 7. 6 Perfil normalizado comparado con datos experimentales de Begin et. al (1981), t=1320 min

Para simular el proceso de degradación debido a un descenso en la elevación del fondo del canal al extremo final aguas abajo, fue necesario corregir los valores calculados, por viscosidad artificial, para ello fue necesario introducir al modelo el coeficiente de disipación tal como se muestra en la Tabla 7.5. Estos tuvieron que ser cercanos a uno debido a que valores menores causaban inestabilidad del modelo.

La Tabla 7.6 resume los datos utilizados para las condiciones iniciales en las simulaciones de agradación y degradación.

Tabla 7. 6 Límites para la aplicación de las funciones de Transporte de Yang (1973) y Ackers-white (1973)

Función de Transporte	Parámetro	Unid.	Símbolo	Límite		Datos para	
				Inferior	Superior	Agradación	Degradación
Ackers - White	Diámetro	mm	D	0.04	2.5	0.32	0.3
	Velocidad promedio	m/s	V	0.021	2.164	0.442	0.246
	Pendiente	m/m	S	0	0.037	0.003	0.009
	Temperatura	°F	T	46	89		
	Profundidad	m	h	0.003	0.402	0.075	0.012
	Ancho	m	B0	0.07	1.219	0.2	3.281
	s		s	1	2.7	0	1
Yang	Diámetro	mm	D	0.062	2	0.32	0.3
	Velocidad promedio	m/s	V	0.229	1.966	0.442	0.246
	Pendiente	m/m	S	0	0.028	0.003	0.009
	Temperatura	°C	T	0	34.3		
	Profundidad	m	h	0.011	15.21	0.075	0.012
	Ancho	m	B0	0.134	532.181	0.2	3.281
	Concentración	ppm	C	10	585000	0	1

7.3 Aplicación del Modelo con Otros Experimentos

Se usó el modelo para simular los datos experimentales de Kerssens y Van Rijn (1977), y Gallapati y Vreugdenhill (1985) del laboratorio Delft de hidráulica. Ambos experimentos fueron realizados con una trinchera trapezoidal en la dirección del flujo de agua. La trinchera sufrió agradación aguas arriba y degradación aguas abajo. A continuación se detalla la simulación de ambos experimentos.

7.3.1 Kerssens y Van Rijn (1977)

Utilizando solo la función de transporte de Yang en el modelo Se simula el experimento de Kerssens y Van Rijn (1977), Este modelo es de agradación, con sedimento suspendido transportado por el agua.

7.3.1.1 Breve descripción del modelo

El experimento fue realizado en un canal de laboratorio de 30m de longitud, 0.5m de ancho, y 0.7m de profundidad, arena de diámetro medio de 0.127mm fue inyectado en el canal a razón de 20.5gr/s. La velocidad de flujo fue de 0.5m/s. el material del fondo del canal tenía un diámetro medio de 0.17mm, el material en suspensión fue de 0.11mm, la velocidad de caída de este material 0.01 m/s , la temperatura fue de $16\text{ }^{\circ}\text{C}$. En el fondo del canal se realizó una trinchera trapezoidal, perpendicular a la dirección del flujo de 2m de base y 0.19m de profundidad, con talud de 1V:10H. En la Figura 7.7 se muestran los perfiles experimentales originalmente publicado por Kerssens y Van Rijn (1977).

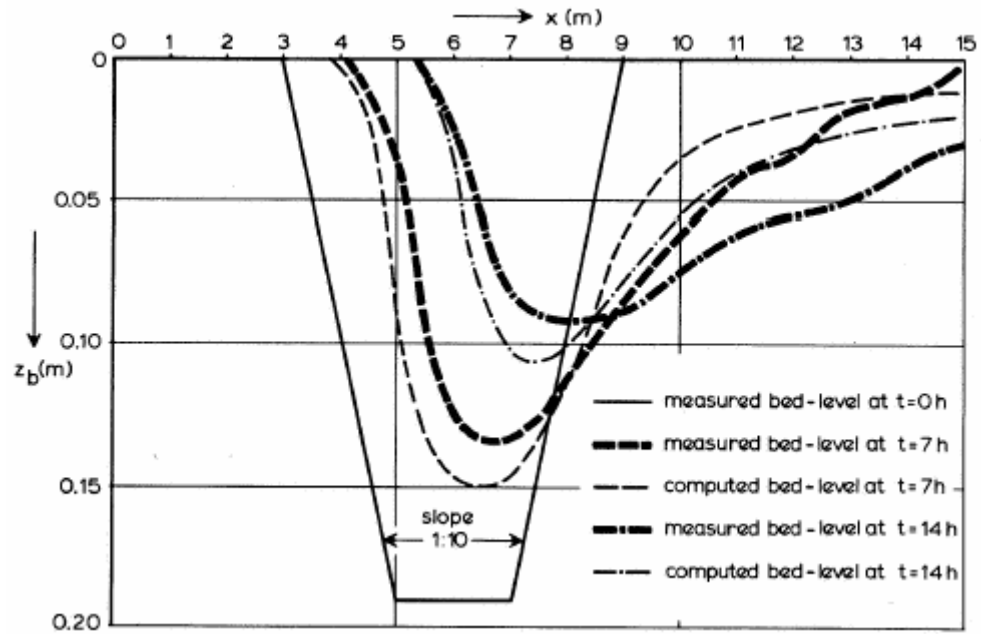


Figura 7.7 Perfil de la trinchera experimental (Kerssens y Van Rijn, 1977)

7.3.1.2 Condiciones iniciales para los datos de Kerssens y Van Rijn (1977)

Para modelar este experimento se especificó las condiciones iniciales en cada nodo del sistema. La profundidad inicial fue $h_o = 0.39m$, y el caudal por unidad de ancho $q_o = 0.2m^2/s$. De acuerdo a las gráficas de la publicación de Kerssens y Van Rijn (1977) la pendiente del canal es horizontal, para el modelo se asume una pendiente de $S_o = 0.0002$ a partir de esta pendiente se determina la elevación inicial del canal. Usar una pendiente diferente de cero en el modelo es importante debido a que la condición inicial es flujo uniforme, por consiguiente la pendiente del fondo es igual a la pendiente de la línea de energía. Además que una de las variables importantes para usar la función de transporte de Yang es conocer la pendiente de energía. Para mantener la estabilidad del modelo se asumió el talud del trapecio como 0.08V:1H.

7.3.1.3 Ajuste del modelo con el experimento de Kerssens y Van Rijn (1977)

En el modelo matemático el canal tiene una longitud de $80m$, un total de 161 nodos y 160 segmentos de longitud $\Delta x = 0.5m$. Esta prolongación del canal en el modelo es necesario para asegurar la estabilidad de los resultados. Debido a que la condición de frontera aguas abajo afecta a los resultados aguas arriba. Los resultados fueron corregidos por viscosidad artificial con una constante de disipación de $k = 0.8$ para la profundidad y caudal por unidad de ancho y $k = 0.8/800$ para la elevación del fondo del canal. El número de Courant para esta simulación fue $C_r = 0.7$. Cabe aclarar que las condiciones de frontera aguas arriba y abajo son las mismas que el modelo de agradación descrito en la sección 7.1.

7.3.1.4 Análisis de los perfiles calculados

La Figura 7.7 muestra los resultados de agradación usando la función de transporte de Yang, en una trinchera trapezoidal comparada con datos experimentales de Kerssens y Van Rijn (1977), para 7 y 14 horas de iniciado el experimento. El perfil calculado a las 7 horas se aproxima muy bien a los datos medidos hasta los 6.5 m, más adelante de esta distancia se puede observar que la elevación del perfil calculado es menor que la elevación medida y a partir de los 10.5 m hasta los 16m la elevación del perfil calculado es mayor a la elevación medida. Se puede concluir que el volumen de sedimento transportado es aproximadamente igual entre el calculado por el modelo y el medido experimentalmente. Esta figura muestra también el perfil a las 14hrs y de igual manera que la anterior ésta se aproxima muy bien hasta los 7.5m y más adelante el volumen de sedimento transportado se equilibra entre el calculado por el modelo y el medido experimentalmente.

El flujo de sedimento en el experimento fue mantenido constante e igual a 20.5 g/s . En el modelo el flujo de sedimento es calculado por la función de Yang, ésta es función de la pendiente. Para calibrar el modelo con el experimento se trató de usar una pendiente cercana a cero, la elevación del fondo del canal fue corregida por viscosidad artificial con una constante de disipación mucho menor a la constante de disipación para la corrección de la profundidad y caudal por unidad de ancho.

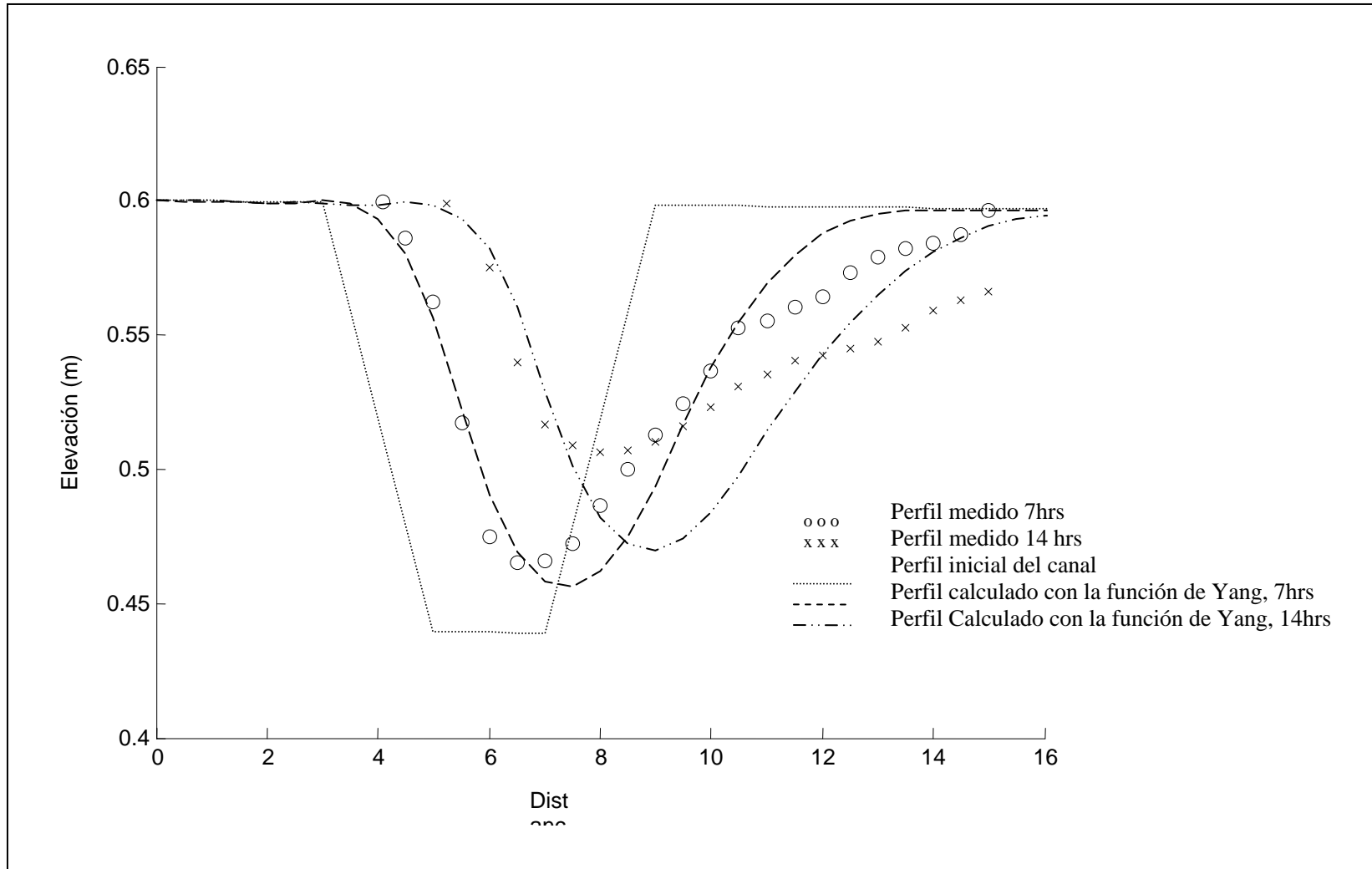


Figura 7. 8 Resultados de agradación comparados con datos experimentales de Kerssens y Van Rijn (1977), t=7 y 14 hrs

7.3.2 R. Gallappati y C.B. Vreugdenhill (1985)

El modelo también fue utilizado para simular el experimento desarrollado por Gallappati y Vreugdenhill (1985). Se utilizó solo la función de transporte de Yang para este propósito.

7.3.2.1 Breve descripción del experimento

Este experimento fue ejecutado con una profundidad de flujo y caudal unitario igual al experimento anterior. Se utilizó arena fina con $d_{50} = 0.16 \text{ mm}$. En el fondo del canal realizaron una trinchera trapezoidal, perpendicular a la dirección del flujo, con base del fondo igual a 3m, profundidad de 0.15m y taludes de 1V:10H como muestra en la Figura 7.9.

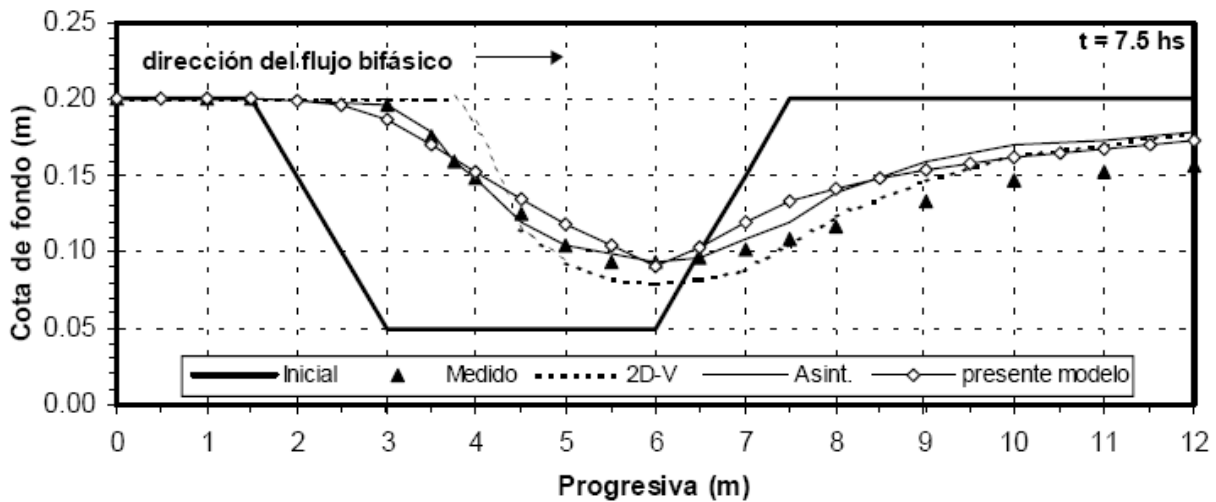


Figura 7.9 Perfil de la trinchera experimental (Gallappati y Vreugdenhill, 1985)

7.3.2.2 Condiciones iniciales para los datos de Gallappati y Vreugdenhill (1985)

En la simulación de este experimento las condiciones iniciales para cada nodo del sistema fueron especificadas como el caudal por unidad de ancho $q_o = 0.2 \text{ m}^2 / \text{s}$, y la profundidad de flujo inicial $h_o = 0.39 \text{ m}$. En la publicación original de Galappati y Vreugdenhill (1985) no se encontró dato alguno de la pendiente del canal experimental, pero en las gráficas se muestra que ésta es

horizontal. Para la simulación se usa una pendiente de $S_o = 0.0002$. Con esta pendiente se determina la elevación inicial del fondo a lo largo del canal. Usar una pendiente diferente de cero es necesario para aplicar las ecuaciones gobernantes.

7.3.2.3 Ajuste del modelo con los datos de Gallapatti y Vreugdenhill (1985)

En el modelo matemático se usa una longitud de 60m, 121 nodos y 120 segmentos de longitud $\Delta x = 0.5m$. Usar esta longitud es necesaria debido a que la condición de frontera aguas abajo afecta los resultados aguas arriba. La profundidad y el caudal unitario fueron corregidas por viscosidad artificial con una constante de disipación de $k = 0.9$, la elevación del fondo del canal fue corregida con una constante de disipación $k = 0.9/90$. Esta constante afecta en menor cantidad al perfil calculado por el modelo. El paso temporal Δt fue calculado a partir de la condición de Courant $C_r = 0.8$.

7.3.2.4 Análisis de los perfiles calculados

La Figura 7.8 muestra los resultados calculados con el modelo a las 7.5hrs con la función de transporte de Yang, comparados con los datos experimentales de Galappatti y Vreugdenhill (1985). Esta figura muestra claramente que los datos medidos se aproximan muy bien a los datos calculados con ligeras diferencias al inicio hasta los 5.7m, más adelante y hasta los 9.5m la elevación calculada por el modelo es menor a la elevación medida. Más allá de los 9.5m la elevación del perfil medido es menor a la calculada por el modelo. Esta diferencia hace ver claramente que el volumen de sedimento transportado medido y calculado es aproximadamente igual.

De igual manera que el experimento anterior a este, el modelo fue calibrado aproximando la pendiente del fondo del canal a cero y prolongando la longitud del canal para asegurar la estabilidad del modelo. La elevación del fondo del canal fue corregida con una constante de disipación cercana a cero para no afectar a los valores calculados por el modelo.

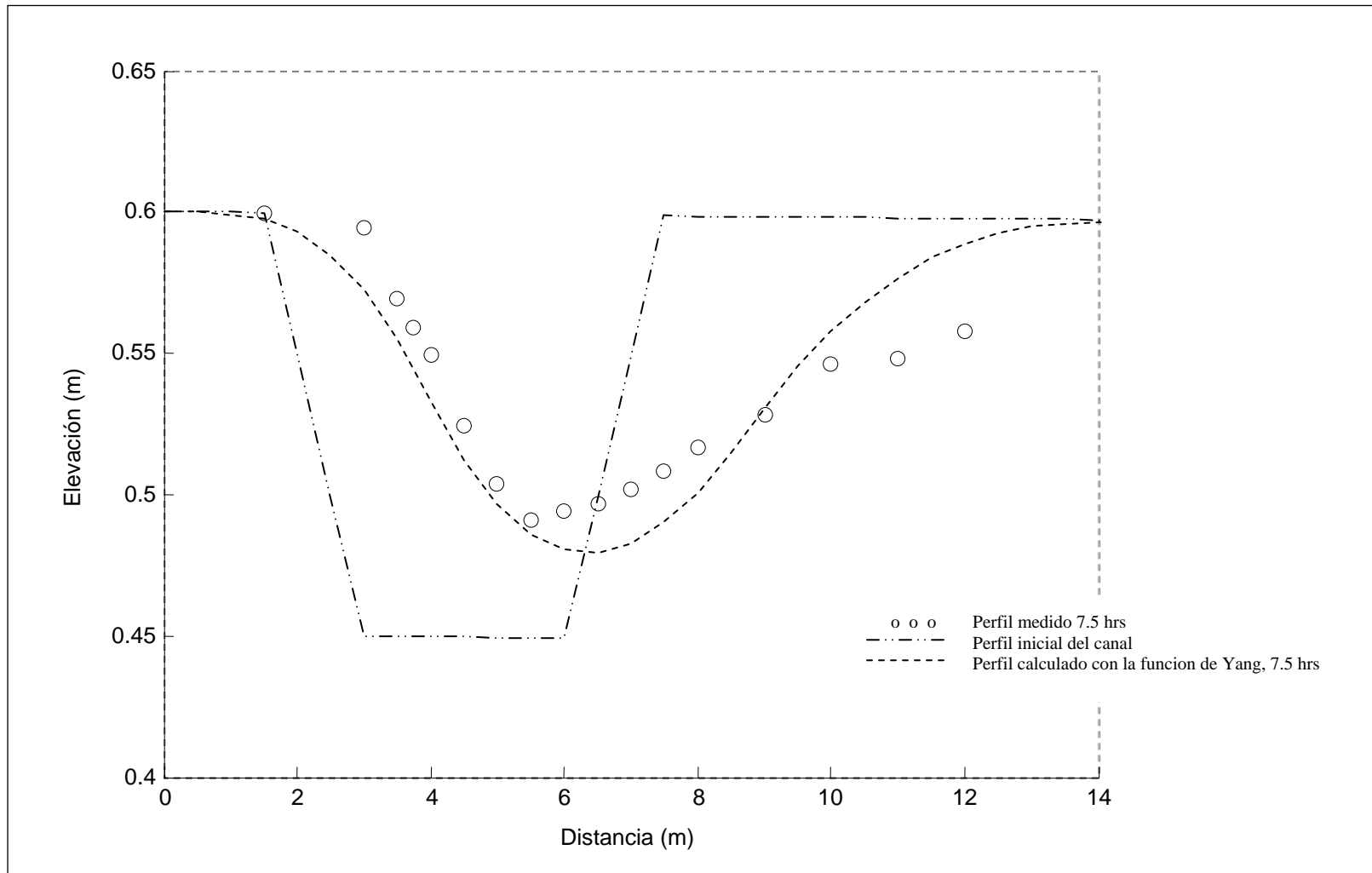


Figura 7. 10 Resultados de agradación comparados con datos experimentales de Galappatti y Vreugdenhill (1985), t=7.5 hrs.

CAPITULO 8

**RESUMEN, CONCLUSIONES Y
RECOMENDACIONES****8.1 Resumen**

- Se introdujeron las funciones de transporte de Yang y Ackers-White al algoritmo de flujo en canales desarrollado por Bhallamudi y Chaudhry, (1991). Estas funciones de transporte reemplazan a las funciones empíricas utilizadas por varios investigadores en los trabajos previos.
- Se verificó el modelo de agradación debido a sobrecarga de flujo de sedimento en una sección del canal, usando los datos experimentales de Soni et al. (1980). Este modelo se ajustó cambiando el incremento del flujo de sedimento en el intervalo de valores determinado en el experimento.
- Se verificó el modelo simulando la degradación debido a un descenso en la elevación del fondo del canal al extremo aguas abajo con los datos de Begin et al. (1981). En esta investigación se propone una razón de degradación en el extremo aguas abajo de 0.072/2000 m para cada paso temporal. En el extremo aguas abajo el canal se degradara hasta una elevación fija a partir de la cual no ocurrirá degradación. Además se usó la profundidad normal entre los dos últimos nodos del sistema calculado en cada paso temporal y la degradación del último nodo aguas abajo. Esta combinación produjo los mejores resultados.
- La función de Yang se usó para simular el experimento realizado por Kerssens y Van Rijn (1977). Los resultados muestran que la trinchera se va llenando de sedimento y se produce degradación aguas abajo. Para que el modelo sea estable se asumió el

talud del trapecio como 0.08V:1H, en lugar de 0.1V:1H. Esto representa una prueba importante para el modelo debido a la condición de pendiente fuerte que representa la trinchera. Se necesitó corregir los resultados por viscosidad artificial, usando dos coeficientes de disipación diferentes. De esta manera se evitaron oscilaciones numéricas. Los resultados reproducen satisfactoriamente los datos experimentales para 7 y 14 horas después de iniciado el experimento. Aguas abajo de la trinchera el volumen de sedimento calculado y medido se equilibran.

- El experimento de Gallapati y Vreugdenhill (1985) también fue simulado usando la función de transporte de Yang. Al igual que el caso anterior los resultados del modelo fueron corregidos por viscosidad artificial usando dos coeficientes de disipación diferentes para el flujo y la elevación del fondo del canal. Los niveles del lecho se aproximan a los datos medidos.

8.2 Conclusiones

- De los resultados del modelo de agradación se encuentra que los perfiles calculados con la función de Yang se ajustan mejor a los datos experimentales. Esto se puede observar de la Tabla 7.3 en el que el error medio cuadrático calculado con la función de transporte de Yang es menor que los demás errores.
- El modelo es sensible a cambios abruptos en el perfil del lecho. Este cambio abrupto puede causar inestabilidad del modelo. Para evitar esto se utilizó viscosidad artificial, lo cual permitió reducir oscilaciones numéricas. En el caso de agradación no fue necesaria esta corrección.
- De las dos funciones de transporte de sedimento utilizadas en esta investigación, la función de Yang estima menor concentración de sedimento en el flujo. Esto se refleja en los perfiles de lecho obtenidos en las simulaciones.

- La función de transporte proporcional a la pendiente de energía propuesta por Begin et al. (1981) produce mayor degradación de lo esperado. Esto se deduce de la Figura 7.3 y 7.5. La Figura 7.5 no muestra el perfil con la función proporcional a la pendiente de energía debido a que a los 1320 minutos el perfil calculado sobreestima el perfil del canal degradado.
- Los resultados del modelo de degradación se aproximan al perfil medido para 37 y 1320 minutos después de iniciado el experimento de Begin et al (1981). Para 37 minutos, el perfil calculado con la función de Ackers-White es la que mejor se ajusta a los datos medidos. Para 1320 minutos los perfiles calculados con las funciones de Yang y Ackers-White son prácticamente el mismo. Estos perfiles se ajustan con el perfil medido con un error medio cuadrático de 0.0080 y 0.0086 respectivamente. En este caso se usó viscosidad artificial para amortiguar oscilaciones numéricas.
- El modelo es apropiado para simular los cambios morfológicos en el lecho de canales aluviales aproximadamente rectangulares, caracterizados por régimen de flujo subcrítico y lechos de sedimento relativamente uniforme.
- El modelo contribuye al estudio de canales con lechos deformables y puede ser modificado para su uso en secciones naturales que sean aproximadas como canales trapezoidales. Varios ríos de Puerto Rico poseen cauces principales donde la aproximación trapezoidal es aceptable. Además, la función de Yang ha demostrado ser la de mejor uso en los ríos de la Bahía de Mayaguez, lo cual contribuye a la potencial aplicación del modelo en ríos de Puerto Rico.

8.3 Recomendaciones

- Se recomienda cuidar la estabilidad del modelo en caso de cambiar las condiciones de frontera. Cualquier técnica para mantener la estabilidad del modelo no debe afectar las características de flujo y de sedimento.
- El uso de un diámetro fijo d_{50} , puede ser no adecuado en representar las distintas fracciones de tamaño presentes en el sedimento. Este diámetro medio puede variar con la razón de transporte o la intensidad de flujo. Se recomienda un estudio que permita cuantificar estos efectos introduciendo los cambios necesarios en el modelo para tomar en cuenta la granulometría del sedimento.
- El modelo puede ser mejorado para condiciones iniciales con flujo no-uniforme, para este caso se recomienda utilizar el análisis de flujo gradualmente variado para determinar las condiciones iniciales.
- Para utilizar el modelo con una carga de sedimento constante o conocida, independiente de las características de flujo y sedimento, se debe modificar las condiciones del modelo. En este caso no será necesario utilizar las funciones de transporte.

CAPITULO 9

BIBLIOGRAFIA

Ackers, P., y White, W. R. (1973). "Sediment Transport: New Approach and Analysis." *Journal of Hydraulic Division*, ASCE, 99(11), 2041-2060.

Anderson, D. A., Tannehill, J. C., y Pletcher, R. H. (1984). "Computational fluid mechanics and heat transfer." *McGraw-Hill*, New York, NY

Begin, Z. B., Meyer, D. F., y Schumm, S. A. (1981). "Development of Longitudinal Profiles of Alluvial Channels in response to Base Level Lowering." *Earth Surface Processes and Land Forms*, 6(1), 49-68

Bhallamudi, S. M., y Chaudhry, M. H. (1991). "Numerical modeling of aggradation and degradation in alluvial channels", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 117(9), 1145-1164.

Bravo, M., Osterkamp W. R., y Lopes V. L. (2003). "Bedload Transport in Alluvial Channels." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 129(10) 783-795.

Cao, Z., Day, R. y Egashira S. (2002). "Coupled and Decoupled Numerical Modeling of Flow and Morphological Evolution in Alluvial Rivers", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 128(3) 306 – 321.

Chaudhry, M. H. (1993). "Open-channel flow." *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, N.J.

Galappatti, G., y Vreugdenhil, C. B. (1985). "A depth-integrated model for suspended sediment transport." *Journal of Hydraulic Research*, 23(4), 359-377

Fenema, R. J., y Chaudhry, M. H. (1986). "Explicit numerical schemes for unsteady free-surface flows with shocks." *Water Resources Research*, 22(13), 1923-1930.

Fenema, R. J., y Chaudhry, M. H. (1987). "Simulation of one-dimensional dam break flows." *Journal of Hydraulic Research*, 25(1), 41-51.

Guo, Q. C. y Jin, Y. C. (1999). "Modeling Sediment Transport using Depth-Averaged and Moment Equations." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE 125(12) 1262-1269.

Jameson, A., Schmidt, W., y Turkel, E. (1981). "Numerical solution of the Euler equations by the finite volume method using Runge-Kutta time-stepping schemes." *14th Fluid and Plasma Dyn. Conf. (Paper AIAA-81-1259)*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Palo Alto, Calif.

Jaramillo, W. F., y Jain, S. C. (1984). "Aggradation and degradation of alluvial channel beds." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 110(8), 1072-1085.

- Karim, M. F., y Kenndy, J. F. (1983). "Computer-Based Predictors for Sediment Discharges and Friction Factors of alluvial Streams," *Iowa Institute of Hydraulic Research Rep. 242, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.*
- Kerssens P. J. M. y Rijn L. C. van (1977). "Model for non-steady suspended sediment transport." *Delft Hydraulics Laboratory, Delft, Netherlands.* Pub. 191.
- Little, W. C., y Mayer, P. G., (1972). "The Role of Sediment Gradation on Channel Armoring." ERC-0672. School of Civil Engineering in Cooperation with Environmental Research Center, Georgia Institute of Technology, Atlanta.
- Lopez, J. L. y Falcon M. A. (1999). "Calculations of Bed Changes in Mountain Streams." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 125(3), 263-270.*
- Lu J. Y., y Shen H. W. (1986). "Analysis and comparisons of degradation models." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 112(4), 281-299.*
- MacCormack, R. W. (1969). "The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering." *Paper 69-354, Am. Inst. Aeronautic and Astronautic, Cincinnati, Ohio.*
- Newton, C. T. (1951). "An experimental investigation of bed degradation in an open channel." *Trans. Boston Soc. Civ. Engrs., 28-60.*
- Park, I. y Jain, S. C. (1987). "Numerical simulation of degradation of alluvial Channel Beds" *Journal of the Hydraulic Engineering, ASCE, 113(7), 845-559.*
- Simons, D. B., y Senturk, F. (1977). "Sediment transport Technology." *Water Resources Publications, Littleton, Colorado.*
- Soni J. P., Garde R. J. y Raju K. G. R. (1980). "Aggradation in streams due to overloading." *Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 106(1), 117-132.*
- Sturm, T. W., (2001). "Open Channel Hydraulics." *McGraw-Hill Water Resources and Environmental Engineering, New York.*
- Suryanarayana, B. (1969). "Mechanics of degradation and aggradation in a laboratory flume." *Tesis presentada a la Universidad del Estado de Colorado para optar el grado de Ph. D.*
- Villalta, C., (2004). "Selección De Funciones De Transporte De Sedimentos Para Los Rios De La Bahía De Mayagüez Usando SAM", *Tesis para optar el grado de maestro en ciencias de la ingeniería de la Universidad de Puerto Rico, Mayagüez.*
- Wu, W., Vieira, D. y Wang, S. Y. (2004). "One-Dimensional Numerical Model for Non-uniform Sediment Transport under Unsteady Flows in Channel Networks." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 130(9), 914 - 923.*
- Yang, C. T. (1973). "Incipient motion and sediment transport." *Journal of Hydraulics Division, ASCE, 99(10), 1679-1704.*

- Yang, C. T. (1993). "Sediment Transport Theory and Practice." *McGraw-Hill*, Colorado.
- Yang C. T. y WAN S. (1991). "Comparisons of selected bed material load formulas." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 117(8), 973–989.
- Yen, C. L., Chang, S. Y., y Lee, H. Y. (1992). "Aggradation-Degradation Process in Alluvial Channels." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 118(12), 1651-1669.
- Ying, X., Khan A. A. y Wang S. S. Y. (2004). "Upwind Conservative Scheme for the Saint Venant Equations." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 130(10), 977-987.
- Zhang, H., y Kahawita, R. (1987). "Nonlinear model for aggradation in alluvial channels." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 113(3), 353–369.
- Zhang, H., y Kahawita, R. (1990). "Linear hyperbolic model for alluvial channels." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 116(4), 478-493.

APENDICE 1

EJEMPLO DEL USO DE LAS FUNCIONES DE YANG Y ACKERS – WHITE

Apéndice 1.1 Ejemplo de cálculo usando la función de transporte de Yang

Para calcular el flujo de sedimento se deben conocer las siguientes variables:

Caudal por unidad de ancho del canal;	$q_o = 0.033 \text{ m}^2 / \text{s}$
Profundidad de flujo	$h_o = \left((q * n)^2 / S_o \right)^{0.3} = 0.0747 \text{ m}$
La pendiente del canal	$S_o = 0.003$
El coeficiente de Manning	$n = 0.022$
Velocidad de caída del sedimento	$w = 0.037 \text{ m} / \text{s}$
Diámetro medio del sedimento	$d = 0.00032 \text{ m}$
Viscosidad del agua	$\nu = 1.1706 * 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$
La velocidad cortante	$U_f = \sqrt{g * h * S_o} = 0.0469 \text{ m/s}$
El numero de Reynolds de la partícula	$Re = \frac{U_f * d}{\nu} = 12.8189$

La razón de la velocidad crítica y la de caída del sedimento, para iniciar el movimiento

$$\frac{V_{critico}}{\omega} = \begin{cases} \frac{2.5}{\log(U_* d_{50} / \nu) - 0.06} + 0.66 & \text{para } 0 < \frac{U_* d_{50}}{\nu} < 70 \\ 2.05 & \text{para } 70 \leq \frac{U_* d_{50}}{\nu} \end{cases}$$

$$\frac{V_{critico}}{\omega} = 3.0458$$

La concentración en el flujo de agua se calculara con la ecuación

$$\log C_{ts} = 5.435 - 0.286 \log \frac{\omega d_{50}}{\nu} - 0.457 \log \frac{U_*}{\omega} +$$

$$\left(1.799 - 0.409 \log \frac{\omega d_{50}}{\nu} - 0.314 \log \frac{U_*}{\omega} \right) \log \left(\frac{VS}{\omega} - \frac{V_{critico} S}{\omega} \right)$$

$$C_{ts} = 926.4731 \text{ ppm}$$

El flujo de sedimento en el agua se calcula multiplicando el caudal por la concentración.

$$q_s = q * C_{ts} / 1000000$$

$$q_s = 3.057 * 10^{-5} \text{ m}^2 / s$$

Apéndice 1.2 Ejemplo de uso de la función de transporte de Ackers-White

Caudal por unidad de ancho del canal;	$q_o = 0.033 \text{ m}^2 / s$
Profundidad de flujo	$h_o = \left((q * n)^2 / S_o \right)^{0.3} = 0.0747 \text{ m}$
La pendiente del canal	$S_o = 0.003$
El coeficiente de Manning	$n = 0.022$
Diámetro medio del sedimento	$d = 0.00032 \text{ m}$
Viscosidad del agua	$\nu = 1.1706 * 10^{-6} \text{ m}^2 / s$
La gravedad especifica del sedimento	$\gamma_s / \gamma = 2.65$
Coeficiente	$\alpha = 10$
La velocidad cortante en el fondo del canal	

$$U_f = \sqrt{g * h * S_o} / 0.3048 \text{ ft} / s = 0.1538 \text{ ft} / s$$

El parámetro adimensional de tamaño se calcula usando la siguiente ecuación:

$$D_{gr} = d \left[\frac{g(\gamma_s / \gamma - 1)}{v^2} \right]^{1/3} = 7.2878$$

Los parámetros m , A , n y C son calculados usando el valor adimensional del tamaño.

Para $1 \leq D_{gr} \leq 60$

$$m = \frac{9.66}{D_{gr}} + 1.34 = 2.6655$$

$$A = \frac{0.23}{(D_{gr})^{0.5}} + 0.14 = 0.2252$$

$$n = 1 - 0.56 * \log(D_{gr}) = 0.5169$$

$$C = 10^{(2.86 * \log(D_{gr}) - (\log(D_{gr}))^2 - 3.53)} = 0.0156$$

Para $D_{gr} \geq 60$

$$m = 1.5$$

$$A = 0.17$$

$$n = 0$$

$$C = 0.025$$

El parámetro adimensional de movilidad se calcula usando la ecuación

$$F_{gr} = \frac{U_*^n}{\sqrt{gd(\gamma_s / \gamma - 1)}} \left[\frac{V}{\sqrt{32} \log\left(\frac{\alpha d}{h}\right)} \right]^{1-n} = 0.4636$$

Parámetro adimensional de Transporte

$$G_{gr} = C \left(\frac{F_{gr}}{A} - 1 \right)^m = 0.0182$$

El flujo de sedimento se calcula usando la siguiente relación:

$$q_s = q * \frac{G_{gr} d(\gamma_s / \gamma)}{h(U_* / v)^n} = 2.1671e-05 \text{ m}^2 / s$$