SUBESPACIOS INVARIANTES DE FUNCIONES ANALÍTICAS

Por

Elkin Yessid González Mercado

Tesis sometida en el cumplimiento parcial
de los requisitos para el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS
en
Matemáticas

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2004

Aprobado por:

Héctor Salas — 12/7/04

Salas Olaguer, Héctor Ph.D. — Fecha
Presidente, Comité Graduado

Julio E. Barety — 14/7/04

Barety, Julio Ph.D. — Fecha
Miembro, Comité Graduado

14/7/2004

Rózga, Krzysztof Ph.D. — Fecha
Miembro, Comité Graduado

14. julio. 04

Walker Ramos, Uroyoán Ph.D. — Fecha
Representante, Estudios Graduados

7/15/04

Vásquez Urbano, Pedro D.Sc. — Fecha
Director del Departamento

Abstract

The present work is concerned with several results obtained by Arne Beurling for invariant subspaces of the operator “multiplication by z”, that is, the operator $M_z\left(f\left(z\right)\right)=zf\left(z\right)$, where $f\left(z\right)\in H^2(D)$, $H^2\left(D\right)$ is the space of Hardy, $z\in D$, and D is the unit circle $\left|z\right|<1$.

There are two problems relating to the operators T and T^*, defined on a Hilbert space H which are the starting point for studying the invariant subspaces of M_z. These are called the closure and extinction problems, T^* and T, respectively.

The solution to the closure problem is that the invariant subspaces of M_z in Hardy space are the subspaces $\varphi H^2\left(D\right)$, where φ is an inner function on $H^2\left(D\right)$. The extinction problem is related to the invariant subspaces of the operator M_z^*. Finally, we analyzed Sarason’s approach to the characterization of invariant subspaces of Volterra operator.

Resumen

En el presente trabajo se hace una revisión de varios resultados obtenidos por Arne Beurling para los subespacios invariantes del operador "multiplicación por z", este es $M_z(f(z)) = zf(z)$ donde $f(z) \in H^2(D)$, $H^2(D)$ es el espacio de Hardy, $z \in D$, y D es el disco unidad $|z| < 1$.

Se presentan dos problemas concernientes a los operadores T y T^*, definidos en un espacio de Hilbert H, que fueron el punto de partida para conseguir los subespacios invariantes del operador M_z. Estos son llamados los problemas de clausura (T^*) y extinción (T).

La solución al problema de clausura es que los subespacios invariantes del operador M_z en el espacio de Hardy son los subespacios $\varphi H^2(D)$ donde φ es una función interior en $H^2(D)$. El problema de extinción está relacionado con los subespacios invariantes del operador M_z^*.

Finalmente, se analiza el enfoque presentado por Sarason para la caracterización de los subespacios invariantes del operador de Volterra.

Dedicatoria

A mis padres Santiago González y Neyla Mercado y al resto de mi familia por su apoyo incondicional durante todos estos años.

Agradecimientos

A mi director de tesis y amigo, el Dr. Héctor Salas Olaguer, por sus innumerables y valiosas sugerencias en el desarrollo de este trabajo.

A todos los miembros del comité que leyeron versiones preliminares del presente trabajo e hicieron importantes anotaciones.

Al Departamento de Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez de la Universidad de Puerto Rico y a todo su personal, a quienes les doy las gracias por toda la ayuda ofrecida durante mis estudios en este Recinto.

Tabla de Contenido

Capítulo 1

Introducción

Sea H un espacio de Hilbert y T un operador lineal acotado sobre H. Un subespacio invariante no trivial (o propio) S de T es un subespacio lineal cerrado S en H, tal que si $x \in S$ entonces $Tx \in S$.

En un artículo de 1949, Arne Beurling describió todos los subespacios invariantes para el operador "multiplicación por z" en el espacio de Hilbert H^2(espacio de Hardy). Este operador es usualmente llamado el operador traslación (en H^2). Es el operador lineal M_z en el espacio de Hardy H^2, descrito como sigue:

$M_z\left(f(z)\right) = zf(z)$, $f(z) \in H^2(D)$, donde $H^2(D)$ es el espacio de funciones analíticas en el disco unidad D para las cuales las funciones $f_r(\theta) = f\left(re^{i\theta}\right)$ son acotadas en la norma L^2.

El trabajo de Beurling fue ampliado inicialmente en varias direcciones por matemáticos como Lowdenslager, Lax, Nelson y por Halmos entre otros.

El problema de Beurling es encontrar todos los subespacios cerrados S de H^2 los cuales sean invariantes bajo multiplicación por z, es decir, $zS \subseteq S$.

Un ejemplo sencillo de un subespacio invariante es el subespacio de funciones que se anulan en el origen, o el subespacio de funciones que se anulan en cualquier conjunto de puntos en el disco abierto.

Un ejemplo más general de un subespacio invariante es $S = \varphi H^2$, donde φ es una *función interior* fija. Esta fue la observación inspiradora para que Beurling descubriera que las funciones interiores están íntimamente relacionadas con la descripción de los subespacios invariantes del operador multiplicación por z, M_z.

Nuestro objetivo principal es el mejor entendimiento de los resultados obtenidos por Beurling, quien fue uno de los primeros en trabajar con subespacios invariantes para los espacios H^p, en particular H^2.

En el capítulo 2 se dan las definiciones y resultados necesarios para el adecuado entendimiento del resto del trabajo.

En el capítulo 3 se exponen y desarrollan todas las ideas dadas en el clásico artículo de Beurling.

En el capítulo 4 se presenta el resultado de Sarason que utiliza el teorema de Beurling para conseguir todos los subespacios invariantes del operador de Volterra.

Capítulo 2

Preliminares Generales

2.1 Espacios $\boldsymbol{H^p}$

Aquí se dan algunas definiciones y resultados necesarios sobre los espacios que estaremos considerando en el desarrollo de este trabajo. Ver [3] Duren P. L.

Recordemos que un espacio de Banach B es un espacio lineal normado completo. Mientras que un espacio de Hilbert H es un espacio de Banach con la norma definida por $\| \ \| = \sqrt{(\ , \ )}$. A menos que no se diga lo contrario estaremos trabajando siempre en espacios de Hilbert.

Para funciones en un disco, las siguientes expresiones

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty; \ \text{ y}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \le \theta < 2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|$$

proporcionan una medida de crecimiento para funciones analíticas en el disco y llevan a una teoría particularmente rica con muchas aplicaciones.

2.1.1 Definición: *Una función* $f(z)$ *analítica en el disco unidad* $|z|<1$ *se dice que es de clase* H^p*, con* $(0<p\leq\infty)$ *si* $\|f\|_p$ *permanece acotada cuando* $r\to 1$*. (* H *por G.H. Hardy).*

Así H^∞ es la clase de funciones analíticas acotadas en el disco, mientras que H^2 es la clase de series de potencias $\sum a_n z^n$ con $\sum |a_n|^2 < \infty$.

2.1.2 Definición: *Una función de valor real* $u(z)$ *armónica en* $|z|<1$ *se dice que es de clase* h^p*, (*$0<p\leq\infty$*) si* $\|u\|_p$ *es acotada.*

Observación: Sea $f(z)=a+ib$, entonces

$$a^p \leq |f(z)|^p = \left(a^2+b^2\right)^{p/2} \leq (a+b)^p \leq 2^p\left(a^p+b^p\right), \quad a\geq 0,\ b\geq 0,$$

para $0<p<\infty$, luego una función analítica pertenece a H^p si y solo si las partes real e imaginaria están ambas en h^p.

La misma desigualdad demuestra que H^p y h^p son espacios lineales. Finalmente, se tiene que $H^q \subset H^p$ si $0<p<q\leq\infty$, y lo mismo se cumple para espacios h^p.

Además si $1\leq p\leq\infty$, entonces H^p es un espacio de Banach bajo la norma

$$\|f\|_p = \lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right\}^{1/p}.$$

2.2 Estructura básica de funciones H^p

En esta sección presentamos definiciones y resultados importantes respecto a las funciones en los espacios H^p. Ver [3].

2.2.1 Definición: *Una función* $f(z)$ *analítica en* $|z|<1$ *se dice que pertenece a la clase* N *si las integrales*

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta$$

son acotadas para $r<1$.

2.2.2 Teorema (F. y R. Nevanlinna): *Una función analítica en el disco unidad pertenece a la clase* N *si y solo si es el cociente de dos funciones analíticas acotadas.*

2.2.3 Teorema: *Para cada función* $f(z) \in N$ *, el límite no tangencial* $f\left(e^{i\theta}\right)$ *existe casi en todas partes(c.t.p.), y* $\log\left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|$ *es integrable a menos que* $f(z) \equiv 0$.

Si $f \in H^p$ *para algún* $p>0$, *entonces* $f\left(e^{i\theta}\right) \in L^P$.

2.2.4 Teorema: *Sea* f *una función no nula, analítica en* $|z|<1$, *y sea* $\{z_n\}$ *la sucesión de sus ceros, repetidos de acuerdo a su multiplicidad, en* $|z|<1$.

Entonces $\int_0^{2\pi} \log\left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta$ *es acotada si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-|z_n|\right) < \infty$.

2.2.5 Corolario: *Los ceros* $\{z_n\}$ *de una función en* N *satisfacen* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-|z_n|\right) < \infty$.

2.2.6 Teorema: *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números complejos tales que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$ *y* $0\leq|a_1|\leq|a_2|\leq\ldots<1$. *Entonces el producto infinito*

$$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}$$

converge uniformemente en cada disco $|z|\leq R<1$. *Cada* a_n *es un cero de* $B(z)$, *con multiplicidad igual al número de veces que aparece en la sucesión; y* $B(z)$ *no tiene ningún otro cero en* $|z|<1$. *Además* $|B(z)|<1$ *en* $|z|<1$, *y* $\left|B\left(e^{i\theta}\right)\right|=1$ *c.t.p.*

2.2.7 Definición: Si $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)<\infty$ *se puede definir una función de la forma*

$$B(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}$$

la cual es llamada producto de Blaschke, m *es un entero no negativo. El conjunto* $\{a_n\}$ *puede ser finito, o incluso vacío. Si* $\{a_n\neq 0\}$ *es vacío, entonces se tiene* $B(z)=z^m$, $m>0$.

2.2.8 Teorema (Riesz): *Cada función* $f(z)$ *no nula de clase* H^p $(p>0)$ *puede ser factorizada en la forma* $f(z)=B(z)g(z)$, *donde* $B(z)$ *es un producto de Blaschke y* $g(z)$ *es una función de* H^p *la cual no se anula en* $|z|<1$. *Similarmente, cada* $f\in N$

tiene una factorización $f(z)=Bg$*, donde* g *es una función sin ceros de clase* N.

2.2.9 Teorema: *Si* $f\in H^P$*, (*$0<p<\infty$*), entonces*

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta=\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\,,$$

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)-f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta=0\,.$$

2.2.10 Corolario: *Si* $f\in H^P$ *para algún* $p>0$*, entonces*

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left|\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|-\log^+\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\right|^p d\theta=0\,.$$

La factorización de Riesz (Teorema 2.2.8) puede ser refinada para obtener una factorización canónica la cual es clave para la teoría de espacios H^p y sus aplicaciones. Este refinamiento se basa en la siguiente desigualdad.

2.2.11 Teorema: *Si* $f\in H^p$, $p>0$*, entonces*

$$\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(r,\theta-t\right)\log\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt\,.$$

2.2.12 Definición: *Una función exterior para la clase* H^p *es una función de la forma*

$$F(z)=e^{i\gamma}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\psi(t)\,dt\right\}$$

donde γ *es un número real,* $\psi(t)\ge 0$, $\log\psi(t)\in L^1$*, y* $\psi(t)\in L^p$.

Por ejemplo, $F(z) = \exp\left\{\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt\right\}$ es una función exterior (para la clase N).

2.2.13 Definición: *Una función interior es cualquier función* $f(z)$ *analítica en el disco abierto* $|z|<1$, *con las siguientes propiedades*

(i) $|f(z)|\leq 1,\ \forall z\in D$.

(ii) $\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$ *c.t.p.*

Observación: Cada función interior tiene una factorización $e^{i\gamma}B(z)S(z)$, donde $B(z)$ es un producto de Blaschke y $S(z)$ es una función de la forma:

$$S(z) = \exp\left\{-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right\},$$

donde $\mu(t)$ es una función singular acotada no decreciente($\mu'(t)=0$ c.t.p). A $S(z)$ se le llama *función interior singular.*

2.2.14 Teorema (Lema de Factorización): *Cada función no nula en* $H^p\ (p>0)$, *tiene una factorización única de la forma* $f(z) = B(z)S(z)F(z)$, *donde* $B(z)$ es *un producto de Blaschke,* $S(z)$ *es una función interior singular, y* $F(z)$ *es una función exterior para la clase* H^p *(con* $\psi(t) = \left|f\left(e^{it}\right)\right|$. *Recíprocamente, cada tal producto* $B(z)S(z)F(z)$ *pertenece a* H^p.

A $B(z)S(z)$ *se le llama el factor interior de* f *y* $F(z)$ *el factor exterior de* f *.*

La siguiente es la descripción de la factorización de una función en $H^p\,(p>0)$:

Sea $f(z)\neq 0$ holomórfica en $|z|<1$ que este en el espacio de Hardy.

Entonces el límite radial $f\left(e^{i\theta}\right)$ existe en casi todas partes y $\log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|$ es integrable.

Consideremos

$$\begin{aligned} f_1(z) &= e^{i\gamma}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt + i\gamma\right\} \end{aligned}$$

donde γ es el argumento del primer coeficiente no nulo de Taylor de $f(z)$.

La siguiente desigualdad,

$$|f(z)|\leq|f_1(z)|,\quad |z|<1,$$

se cumple siempre, y además la función $f_0(z)$ definida por la relación

$$f(z)=f_0(z)\,f_1(z),$$

tiene las siguientes propiedades,

$$|f_0(z)|\leq 1,\qquad |z|<1,$$

$$\lim_{r\to 1}\left| f_0\left(re^{i\theta}\right)\right| = 1, \qquad \text{c.t.p.}$$

En vista de la normalización de $f_1(z)$, el primer coeficiente de Taylor no nulo de $f_0(z)$ será real y positivo. La expresión general para una función de este tipo es:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= B(z)S(z) \\ &= \prod \frac{a_v - z}{1 - z\overline{a_v}} \frac{\overline{a_v}}{|a_v|} \exp\left\{ -\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu \right\}, \end{aligned}$$

donde $\sum\left(1-|a_v|\right) < \infty$, $|a_v| < 1$, y donde $\mu = \mu(t)$ es una función real no decreciente de variación acotada, cuyos puntos donde crece forman un conjunto de casi medida cero.

Si alguno de los a_v son cero, definimos los correspondientes factores en el producto de Blaschke como z. En casos especiales ambos el producto de Blaschke y el factor exponencial pueden, en alguna forma, ser reducidos a la constante 1.

Las funciones especiales f_0 y f_1 definidas arriba, serán llamadas el *factor interior* y el *factor exterior* de f respectivamente.

Esta descomposición está obviamente determinada únicamente si $f \neq 0$, y será referida como el *Lema de Factorización.* Manteniendo la misma notación tenemos

2.2.15 Teorema: *Sea*

$$g_0(z) = \prod \frac{b_v - z}{1 - z\overline{b_v}} \frac{\overline{b_v}}{b_v} \exp\left\{ -\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\beta \right\}$$

una función interior. Cuando $\frac{g_0}{f_0}$ *es acotada en el círculo unidad, esta es una función interior, y diremos que* f_0 *es un divisor de* g_0. *Para esto es necesario y suficiente que* $\{a_v\}$ *sea un subconjunto de* $\{b_v\}$ *y que* $\beta - \mu$ *sea no decreciente. En el caso general definimos el máximo factor común de* f_0 *y* g_0 *como la función interior*

$$h_0(z) = \prod \frac{c_v - z}{1 - z\overline{c}_v} \frac{\overline{c}_v}{c_v} \exp\left\{ -\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\alpha \right\}$$

donde $\{c_v\}$ *es la intersección de los conjuntos* $\{a_v\}, \{b_v\}$.

La conexión entre α, β *y* μ *es tal que* α *es el mayor minorante común de* μ *y* β.

2.2.16 Corolario: *La función* h_0 *de arriba tiene la siguiente propiedad característica: si* z *es un punto con* $|z| < 1$ *tal que* $|f_0(z)| + |g_0(z)| \neq 0$, *entonces* $|h_0(z)| < |k_0(z)|$ *para cualquier función interior* $k_0 \neq h_0$ *la cual sea divisor de ambos* f_0 *y* g_0.

En el caso $h_0 \equiv 1$, *diremos que* f_0 *y* g_0 *no tienen factor común.*

Capítulo 3

Dos problemas de Beurling en Subespacios Invariantes

3.1 Introducción

A continuación se exponen las ideas fundamentales dadas por Beurling en su importante artículo. Ver [1].

Sean H un espacio de Hilbert, T y T^* dos operadores lineales donde T^* es el adjunto de T, ambas definidas en todo el espacio H.

Sea Φ_λ el conjunto de autovectores de T, correspondientes al autovalor λ, es decir, las soluciones $\varphi \neq 0$ de la ecuación $T\varphi = \lambda\varphi$; y sea Φ la unión de todos los Φ_λ , esto es

$$\Phi = \bigcup_{\lambda \in \sigma(\lambda)} \Phi_\lambda$$

Primero supongamos que

(A) el *conjunto* Φ *es fundamental o total en* H.

Que el conjunto Φ sea fundamental o total en H significa que el subespacio generado por Φ es denso en H.($\overline{span\,\Phi} = H$).

Denotemos por $C(f)$ y $C^*(g)$ los subespacios lineales cerrados generados por $\{T^n f\}_0^\infty$ y $\{T^{*n} g\}_0^\infty$, respectivamente; donde f y g son vectores de H.

Es decir, $C(f) = \overline{span\{T^n f\}_0^\infty}$ y $C^*(g) = \overline{span\{T^{*n} g\}_0^\infty}$ para $f, g \in H$.

Este capítulo se dedicará a dos problemas generales concernientes a los operadores T y T^* los cuales Beurling llama los problemas de extinción y de clausura.

3.1.1 Definición: *T tiene un teorema de extinción si, para cada $f \neq 0$, se cumple que el subespacio $C(f)$ contiene al menos un autovector φ de T.*

3.1.2 Definición: *Sea $g \in H$, g es un vector cíclico para T si $C(g) = H$.*

3.1.3 Definición: *El problema de clausura es la caracterización de los vectores cíclicos $g \in H$ para T^*, es decir, los vectores g que hacen que $\{T^{*n} g\}_0^\infty$ sea fundamental en H.*

De las relaciones $\left(\varphi_\lambda, T^{*n} g\right) = \left(T^n \varphi_\lambda, g\right) = \lambda^n (\varphi_\lambda, g), n \geq 0$, se sigue que la condición

(1) $$(\varphi, g) \neq 0, \quad \varphi \in \Phi,$$

es necesaria para la clausura.

3.1.4 Teorema (Teorema de Clausura de Wiener): *La condición suficiente y necesaria para que $g \in H$ sea cíclico es $(\varphi, g) \neq 0,\ \varphi \in \Phi$.*

En otras palabras, el teorema de clausura de Wiener es la caracterización de los vectores ciclicos de T^* por medio del conjunto fundamental Φ, formado por autovectores de T.

El nombre se debe al siguiente teorema de Wiener, ver [10] Pág.151.

Si $f(x)$ es una función de L^1, una condición suficiente y necesaria para que el conjunto de todas las traslaciones de $f(x)$ sea cerrado L^1 es que su transformada de Fourier

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iux}dx$$

no tenga ceros reales.

Observación: De acuerdo con (1), se cumple que el teorema de extinción implica el teorema de clausura de Wiener.

En efecto, si $C^*(g)$ es un subespacio propio de H, existe un elemento $f \neq 0$, tal que

$$0 = \left(f, T^{*n}g\right) = \left(T^n f, g\right), \quad n \geq 0.$$

Así g es ortogonal a cada $h \in C(f)$, y luego al autovalor φ, el cual, de acuerdo al teorema de extinción, debe pertenecer a $C(f)$.

Si además de (A), también suponemos que T es una isometría, el teorema de extinción se cumple y es una consecuencia simple del teorema ergódico de V. Neumann, el cual enunciamos en la siguiente forma generalizada, debido a F. Riesz y G. Birkhoff: Recordemos que un espacio de Banach B es uniformemente convexo si dados dos elementos $x, y \in B$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq 1 - \delta$ implica que $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

3.1.5 Teorema: *Si el operador T es una isometría de un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} T^{v} f = S(f)$$

existe para cada f. Además $\|S(f)\| \leq \|f\|$.

3.1.6 Corolario: *Si $S(f) \neq 0$, entonces T tiene como autovector $S(f)$ para el autovalor 1.*

3.1.7 Definición: *f es ortogonal a g, denotado por $f \perp g$, si $\|f + cg\| \geq \|f\|$ para cada número complejo c.*

Observación: En todo espacio con producto interior se tiene que la anterior definición es equivalente a la definición usual de ortogonalidad. En particular esto se cumple en todo espacio de Hilbert. En un espacio de Banach $f \perp g$ no implica que $g \perp f$.

3.1.8 Teorema: *Si T tiene un vector fijo, o sea $\varphi_0 = T\varphi_0$, que no es ortogonal a f, entonces el límite $S(f)$ será diferente del vector nulo.*

Demostración: Como φ_0 no es ortogonal a f, existe un número complejo c tal que $\|\varphi_0 + cf\| < \|\varphi_0\|$.

Por el teorema 3.1.5 se tiene $\|S(g)\| \leq \|g\|$ y además $S(\varphi_0) = \varphi_0$, puesto que $\varphi_0 = T\varphi_0$.

Entonces $\|S(cf)\| = \|S(\varphi_0 + cf) - \varphi_0\| \geq \|\varphi_0\| - \|\varphi_0 + cf\| > 0$, es decir $S(f) \neq 0$. □

Tenemos la siguiente forma general del teorema de extinción:

3.1.9 Teorema: *Sea T una transformación lineal isométrica en un espacio de Banach uniformemente convexo tal que el conjunto Φ de autovectores de T tiene la propiedad*

(A') *si* $\varphi \perp f$, *para todo* $\varphi \in \Phi$ *entonces* $f = 0$.

Entonces para cada $f \neq 0$, el subespacio $C(f)$ tendrá al menos un autovector de T.

Demostración: Sea $f \neq 0$, entonces por (A') existe un autovector φ de T, $T\varphi = \lambda\varphi$ tal que φ no es ortogonal a f. Como T es una isometría, tenemos que $|\lambda| = 1$, el operador $T_\lambda = \lambda^{-1}T$ es también una isometría, y tiene a φ como elemento fijo. Entonces $S_\lambda(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{v=0}^{n-1} T_\lambda^v f \neq 0$ por el teorema 3.1.8 y $T_\lambda(S_\lambda f) = S_\lambda f$, luego

$T(S_\lambda f) = \lambda S_\lambda f$ lo que prueba el teorema, puesto que $S_\lambda(f)$ pertenece a $C(f)$ y a Φ. □

Observación: La importancia de este teorema se debe principalmente al hecho que la relevante ortogonalidad es $\varphi \perp f$ y no la contraria pero más natural $f \perp \varphi$.

3.2 Un Isomorfismo

Sea H un espacio de Hilbert, sea T una contracción métrica propia, es decir,

(B) $$\forall f \neq 0, \quad \|Tf\| \leq \|f\|, \quad \lim_{n\to\infty} \left\|T^n f\right\| = 0,$$

y T^* una isometría,

(C) $$\forall f, \quad \left\|T^* f\right\| = \|f\|.$$

O de manera equivalente $\left(T^* f, T^* g\right) = (f, g)$ para cada $f, g \in H$.

Se pide además que

(D) *al menos un autovalor sea simple.*

Que un operador T satisfaga (A), junto con las condiciones anteriores (B), (C), y (D), significa que los autovectores de T generan a H, que T^n converge fuertemente al operador 0, que T^* es una isometría y que el espacio correspondiente al autovector dado por ese autovalor es de dimensión 1.

Bajo estas hipótesis, Beurling encontró que T^* es unitariamente equivalente a multiplicar por z en el espacio de Hardy. Esto significa que existe un operador unitario $U^{-1} = U^*$ tal que $UT^* = T^*U$.

3.2.1 Proposición: *Las condiciones* (A), (B), (C), y (D), *implican la existencia de un conjunto ortonormal completo* $\{e_n\}_0^\infty$ *, tal que*

(2) $$\begin{cases} Te_0 = 0 \\ Te_n = e_{n-1}, \quad n \geq 1, \end{cases}$$

(3) $$T^* e_n = e_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Los autovalores de T *son todos simples y llenan el disco unidad abierto* $|\lambda| < 1$.

Los correpondientes autovectores, normalizados por la condición $(\varphi_\lambda, e_0) = 1$, *son de la forma*

(4) $$\varphi_\lambda = \sum_0^\infty \lambda^n e_n.$$

Demostración: De acuerdo con (C),

$$(TT^* f, g) = (T^* f, T^* g) = (f, g),$$

para cada par de elementos f, g , y así,

(5) $$TT^* = I \ .$$

Por (D) existe un autovalor simple $\lambda = \alpha$, luego por (B), $|\alpha| < 1$. Si φ_α es el autovector correspondiente, entonces $e_0 = \varphi_\alpha - \alpha T^* \varphi_\alpha$ será diferente del elemento nulo.

Puesto que por (C),

$$\begin{aligned} \|e_0\| &= \| \varphi_\alpha - \alpha T^* \varphi_\alpha \| \\ &\geq \|\varphi_\alpha\| - |\alpha| \|T^* \varphi_\alpha\| \\ &\geq \|\varphi_\alpha\| (1 - |\alpha|) \\ &> 0. \end{aligned}$$

En lo que sigue, asumimos que φ_α está normalizada por la condición $\|e_0\| = 1$.

Se sigue de (5) que

(6) $$Te_0 = T\varphi_\alpha - \alpha TT^* \varphi_\alpha = \alpha\varphi_\alpha - \alpha\varphi_\alpha = 0\,;$$

luego e_0 es un autovector correspondiente a $\lambda = 0$.

Sea $e_n = T^{*n} e_0$, para $n \geq 0$, entonces se sigue de (6) que para $n > m \geq 0$,

$$(e_n, e_m) = \left(T^{*n} e_0, T^{*m} e_0\right) = \left(e_0, T^{n-m} e_0\right) = 0, \;\; n \geq 0.$$

En vista de la normalización $\|e_0\| = 1$ y que T^* y por lo tanto T^{*n} son isometrías tenemos que

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Por la definición del conjunto $\{e_n\}_0^\infty$ las relaciones (2) y (3) son satisfechas, y así φ_α definida por la serie (4), es un autovector.

En efecto, supongamos que $\varphi_\lambda = \sum_0^\infty \beta_n e_n,\ T\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda,\ (\varphi_\lambda, e_0) = 1.$

Entonces se tiene que $T\varphi_\lambda = \sum_0^\infty \beta_n T e_n = \sum_1^\infty \beta_n e_{n-1} = \sum_0^\infty \lambda\beta_n e_n,$ de donde $\beta_n = \lambda\beta_{n-1}$ y por lo tanto $\beta_n = \lambda^n \beta_0,\ n \geq 1.$

De $(\varphi_\lambda, e_0) = 1$ se obtiene que $\beta_0 = 1,$ por lo tanto $\beta_n = \lambda^n,\ n \geq 0,$ y así se sigue que $\varphi_\lambda = \sum_0^\infty \lambda^n e_n.$ Colocando $\lambda = \alpha$ en la serie, regresamos al vector original $\varphi_\alpha.$

Solo falta probar que cada autovalor es simple.

Supongamos que no es cierto, entonces existe un número β, con $|\beta| < 1,$ tal que la ecuación $T\varphi = \beta\varphi,$ además de la solución φ_β de la fórmula (4), también tiene una solución $\varphi'_\beta \neq 0$, ortogonal a φ_β.

A partir del autovector φ'_β obtenemos de la misma forma que antes, un conjunto ortonormal $\{e'_n\}_0^\infty$ con las mismas propiedades que $\{e_n\}_0^\infty$.

Además,

$$\begin{aligned}
(e_0, e'_0) &= \left(\varphi_\beta - \beta T^*\varphi_\beta, \varphi'_\beta - \beta T^*\varphi'_\beta\right) \\
&= \left(\varphi_\beta, \varphi'_\beta\right) - \overline{\beta}\left(\varphi_\beta, T^*\varphi'_\beta\right) - \beta\left(T^*\varphi_\beta, \varphi'_\beta\right) + |\beta|^2\left(T^*\varphi_\beta, T^*\varphi'_\beta\right) \\
&= -\overline{\beta}\left(T\varphi_\beta, \varphi'_\beta\right) - \beta\left(\varphi_\beta, T\varphi'_\beta\right) + |\beta|^2\left(\varphi_\beta, \varphi'_\beta\right) \\
&= -\overline{\beta}\left(\beta\varphi_\beta, \varphi'_\beta\right) - \beta\left(\varphi_\beta, \beta\varphi'_\beta\right) \\
&= -2|\beta|^2\left(\varphi_\beta, \varphi'_\beta\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

entonces $(e_n, e'_m) = \left(T^{*n}e_0, T^{*m}e'_0\right) = \left(e_0, T^{n-m}e'_0\right) = 0$ para $n \geq m \geq 0$, por lo tanto, los subespacios lineales cerrados generados por los dos conjuntos son ortogonales.

Esto implica que, para cada λ en el disco unidad, φ_λ de la fórmula (4) y $\varphi'_\lambda = \sum_0^\infty \lambda^n e'_n$, son linealmente independientes.

De lo anterior, es claro que las condiciones (A), (B), y (C) implican que la dimensión del conjunto Φ_λ es la misma para todo λ en el disco unidad abierto, la cual es igual a 1, por (D). Como Φ es fundamental por hipótesis, y (4) representa a todos los autovectores normalizados, el conjunto $\{e_n\}_0^\infty$ debe ser completo, y esto completa la prueba. $\square$

Para cada $f \in H$ tenemos que

$$f = \sum_0^\infty f_n e_n, \quad f_n = (f, e_n),$$

$$\|f\|^2 = \sum_0^\infty |f_n|^2.$$

Además, la clase de las series de Taylor $f(z)$ forman el espacio de Hilbert $H^2(D)$ llamado el espacio de Hardy con el producto escalar $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\overline{g\left(e^{i\theta}\right)}d\theta$ y la norma $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Con ayuda de un operador unitario U y el operador T la función $f(z)$ es enviada en $M_z^* f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$, mientras que U y el operador

T^* envía a $f(z)$ sobre $M_z f(z) = zf(z)$. En efecto, para $m, n \geq 0$

$$\left(z^m, z^n\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

luego

$$\left(\varphi_z, z^n\right) = \left(\sum_0^\infty z^m e_m, z^n\right) = \sum_0^\infty e_m \left(z^m, z^n\right) = e_n, \quad n \geq 0$$

Entonces podemos definir $U : H \to H^2(D)$ por $U(e_n) = z^n$, $n \geq 0$ .Con ayuda de (3), obtenemos para M_z y M_z^*

$$\begin{aligned}
\left(UT^*U^*\right)\left(f(z)\right) &= \left(UT^*\right)\left(\sum_0^\infty a_n e_n\right) \\
&= U\left(\sum_0^\infty a_n e_{n+1}\right) \\
&= \sum_0^\infty a_n z^{n+1} \\
&= zf(z) \\
&= M_z\left(f(z)\right) \\
\left(UTU^*\right)\left(f(z)\right) &= (UT)\left(\sum_0^\infty a_n e_n\right) \\
&= U\left(\sum_1^\infty a_n e_{n-1}\right) \\
&= \sum_1^\infty a_n z^{n-1} \\
&= \frac{f(z) - f(0)}{z} \\
&= M_z^*\left(f(z)\right)
\end{aligned}$$

Los autovectores de M_z^* en el espacio $H^2(D)$ son las funciones $\frac{1}{1-\lambda z}, |\lambda|<1.$

De hecho, como $\varphi_\lambda = \sum_0^\infty \lambda^n e_n = U^*\left(\sum_0^\infty \lambda^n z^n\right) = U^*\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$, $|\lambda|<1$, entonces se sigue

que $\left(UTU^*\right)\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right) = U\left(T\left(\varphi_\lambda\right)\right) = \lambda U\left(\varphi_\lambda\right) = \lambda \frac{1}{1-\lambda z}$.

Por lo tanto, $M_z^*\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right) = \lambda\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$.

3.3 Los problemas de clausura y extinción en el espacio $\boldsymbol{H^2(D)}$

En el espacio $H^2(D)$ formulamos el problema de clausura de la siguiente forma: ¿Para qué funciones $f(z)$ es cierto que el conjunto

(7) $$\left\{M_z^n f\right\}_0^\infty = \left\{z^n f(z)\right\}_0^\infty$$

es fundamental en $H^2(D)$? Si $f(z)$ no es cíclico, ¿qué funciones están contenidas en el subespacio lineal cerrado $C^*(f) = \overline{span\left\{z^n f\right\}_0^\infty}$ generado por el conjunto (7)?

Definamos $\delta(f)$ como:

(8) $$\delta(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log\left|\dfrac{f\left(e^{i\theta}\right)}{f(0)}\right| d\theta, & f(0) \neq 0 \\ +\infty & f(0) = 0 \end{cases}$$

la condición suficiente y necesaria para que f sea cíclico es que $\delta(f) = 0.$ En efecto si $f(z) \neq 0$ para todo $|z| < 1$ entonces

(9) $$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right|d\theta \geq 0.$$

Esto se tiene de la desigualdad $\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt$, ver 2.2.11, integrando con respecto a θ desde 0 hasta 2π. Luego tomamos el límite en ambos lados cuando $r\to 1$, teniendo en cuenta que $\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)d\theta \leq 1$.

La relación $\delta(f)=0$ requiere además que

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{f(0)}\right|d\theta = 0.$$

Es decir que $f(z)$ no tenga ceros en el círculo unitario, y que el limite (9) se anule, lo cual significa que $|f(z)|$ no sea tan pequeño cuando $|z|\to 1$.

Sea $f = f_0 f_1$, donde f_0 es el factor interior y f_1 es el factor exterior.

Tenemos que $\delta(f_1)=0$ para toda función exterior.

$$\delta(f_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f_1\left(e^{i\theta}\right)}{f_1(0)}\right|d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f_1\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta \;-\; \log\left|f_1(0)\right|$$

$$= 0$$

puesto que f_1 es una función exterior.

Entonces $\delta(f) = \delta(f_0 f_1) = \delta(f_0) + \delta(f_1) = \delta(f_0)$.

Para una función interior se tiene que $\left| f_0\left(e^{i\theta}\right) \right| = 1$ en casi todo punto y también que

$$f_0(0) = \Pi |a_v| \exp\left\{ -\int_0^{2\pi} d\alpha \right\},$$

luego

$$\delta(f_0) = \log \frac{1}{f_0(0)} = \sum_v \log \frac{1}{|a_v|} + \int_0^{2\pi} d\alpha \geq 0.$$

La relación $\delta(f) = 0$ implica que $|a_v| = 1$ y $\int_0^{2\pi} d\alpha = 0$, entonces se sigue que $f_0(z) = 1$, es decir, el factor interior de f se reduce a la constante 1. En este caso f es una función exterior.

Observación: El conjunto $\overline{\left\{ z^n f(z) \right\}_0^\infty} = H^2(D)$ si y solo si f es una función exterior.

El criterio de clausura establecido $\delta(f) = 0$ es una consecuencia del siguiente teorema, puesto que la propiedad $C^*(f) = H^2(D)$ exige que el factor interior f_0 de f sea un divisor de cualquier función interior, lo cual es cierto solamente si $f_0 \equiv 1$, es decir, si $\delta(f) = 0$.

3.3.1 Teorema: *Sean* $f, g \in H^2(D)$ *diferentes de cero. Entonces* g *pertenece al sub-espacio* $C^*(f) = \overline{span\{M_z^n f\}_0^\infty}$ *si y sólo si, el factor interior de f es un divisor del factor interior de* g.

Demostración: Primero probemos que si f_0 es un divisor de g_0 entonces se cumple $g \in C^*(f)$. Para esto, solo basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un polinomio p tal que $\|pf - g\| < \varepsilon$. (Teorema de Aproximación de Beurling).

Como $\left|f_0\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$, $\left|g_0\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$ c.t.p. entonces $\dfrac{g_0}{f_0} = h_0$ es una función interior, y de $f = f_0 f_1$, $g = g_0 g_1$ se tiene que $\|pf - g\| = \|pf_1 - h_0 g_1\|$. Para demostrar la siguiente igualdad, $C^*(f_1) = H^2(D)$, es suficiente demostrar que las ecuaciones

(10) $$\left(M_z^n f_1, k\right) = 0, \quad n \geq 0$$

no tienen otra solución $k \in H^2(D)$ más que $k \equiv 0$.

Coloquemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1\left(e^{i\theta}\right)\overline{k\left(e^{i\theta}\right)}e^{-in\theta}d\theta \\ &= \left(f_1, z^n k\right) \\ &= \left(f_1, M_z^n k\right) \\ &= \overline{\left(M_z^n k, f_1\right)} \end{aligned}$$

Entonces de (10), $c_n = 0,$ para todo $n \leq 0$ y por lo tanto

$$(11) \qquad f_1\left(e^{i\theta}\right)\overline{k\left(e^{i\theta}\right)} \sim \sum_1^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

donde $\sim$ es el símbolo usual en la teoría de series de Fourier. Como el lado izquierdo en (11) es una función sumable, por Cauchy-Schwarz , entonces la serie de Taylor

$$(12) \qquad \psi(z) = \sum_1^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < 1,$$

tiene las siguientes propiedades,

$$(13) \qquad \psi\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{r \to 1} \psi\left(re^{i\theta}\right) = f_1\left(e^{i\theta}\right)\overline{k\left(e^{i\theta}\right)}$$

$$(14) \qquad \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\psi\left(e^{i\theta}\right) - \psi\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = 0.$$

De acuerdo al Lema de Factorización Canónica, si k_1 y ψ_1 denotan los factores exteriores de k y ψ, respectivamente, se tiene

$$|\psi(z)| \leq |\psi_1(z)| = |f_1(z)||k_1(z)|, \quad |z| < 1.$$

Entonces

$$\left|\frac{\psi(z)}{f_1(z)}\right| \le |k_1(z)|, \quad |z|<1,$$

y así la función $\dfrac{\psi}{f_1}$ pertenece a $H^2(D)$ y se anula en el origen. Entonces se sigue de (13), que

(15) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{k\left(e^{i\theta}\right)}\, e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi\left(e^{i\theta}\right)}{f_1\left(e^{i\theta}\right)}\, e^{in\theta} d\theta = 0, \quad n \ge 0.$$

Como $k \in H^2(D)$,

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k\left(e^{i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta \ = 0, \quad n \ge 1.$$

Entonces $k\left(e^{i\theta}\right) = \sum_0^{\infty} a_n e^{in\theta}$ y si tomamos el conjugado de (15), tenemos que todos los coeficientes de $k\left(e^{i\theta}\right)$ se anulan; entonces $k \equiv 0$ y $C^*(f_1) = H^2(D)$.

Por lo tanto $g \in C^*(f)$.

Ahora probaremos que g_0 es divisible por f_0 si $g \in C^*(f)$. Esto es, que $\dfrac{g_0}{f_0}$ es una función interior.

Sea $m(r) = \min\left\{ |f_0(z)| : |z| = r < 1 \right\}$, y sea r un valor fijo para el cual $m(r) = m > 0$.

Como $g \in C^*(f)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $p = p(r, \varepsilon)$, tal que $\|pf - g\| < \varepsilon m.$

Luego para $|z| = \rho, \quad 0 \le \rho \le 1$, tenemos

(16) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(z)\, f(z) - g(z)|^2\, d\theta \le \|pf - g\|^2 < \varepsilon^2 m^2.$$

Colocando $\frac{g_0}{f_0} = h$, tenemos que en el círculo $|z| = r$

(17) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p(z)\, f_1(z) - h(z)\, g_1(z)|^2\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| pf_1 - \frac{g_0 g_1}{f_0} \right|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{pf - g}{f_0} \right|^2 d\theta$$

$$\le \frac{1}{m^2}\|pf - g\|^2 < \varepsilon^2 .$$

y obtenemos, para $|z| = r$, usando la desigualdad de Minkowski,

(18) $$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(z)\, g_1(z)|^2\, d\theta \right)^{1/2} \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|hg_1 - pf_1| + |pf_1| \right)^2 d\theta \right)^{1/2}$$

$$\le \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |pf_1 - hg_1|^2\, d\theta \right]^{1/2} + \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |pf_1|^2\, d\theta \right]^{1/2}$$

$$< \varepsilon + \|pf_1\| = \varepsilon + \|pf\| \le \varepsilon + \|pf - g\| + \|g\|$$

$$< \varepsilon(1 + m) + \|g\|$$

Haciendo que $r \to 1$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario se tiene que la función hg_1 pertenece a $H^2(D)$ y como $\left|h\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$ c.t.p. entonces g_1 debe ser el factor exterior de hg_1, y así h su factor interior.

Por lo tanto g_0 es divisible por f_0, lo cual demuestra el teorema. □

3.3.2 Definición: Decimos que C^* es un *subespacio invariante* de M_z si es un subconjunto lineal y cerrado de $H^2(D)$ con la propiedad

(19) $$M_z C^* \subset C^*,$$

esto es, $M_z f \in C^*$ cuando $f \in C^*$.

Observación: Se sigue del teorema anterior que una función genera el mismo subespacio invariante que su factor interior, es decir, $C^*(f) = C^*(f_0)$. Más generalmente, $C^*(f)$ y $C^*(g)$ son iguales si y solo si f_0 es un divisor de g_0, y recíprocamente, g_0 es un divisor de f_0, lo cual solo ocurre si $f_0 = g_0$.

El factor interior, junto con la cantidad $\delta(f)$, también pueden ser caracterizadas por ciertas propiedades en el subespacio $C^*(f)$.

Si e denota el elemento unidad $(e(z) \equiv 1)$, tenemos

(20) $$M_z^n e = z^n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

y, si d es la distancia de e a $C^*(f)$, entonces la condición $d=0$ es necesaria y suficiente para la clausura. En este caso tenemos $f_0 = e$.

En el caso general se cumple lo siguiente:

3.3.3 Teorema: *La proyección de e en $C^*(f)$ coincide con el factor interior f_0 de f multiplicado por la constante $\sqrt{1-d^2}$. Las cantidades d y $\delta = \delta(f)$ están conectadas por la ecuación*

(21)
$$d^2 = 1 - e^{-2\delta}.$$

Si $f(z)$ se anula en sus primeras $p-1$ derivadas en el origen entonces la proyección de $M_z^p e = z^p$ en $C^*(f)$ es igual a $\sqrt{1-d_p^2}\, f_0$, donde d_p es la distancia de z^p a $C^*(f)$.

Demostración: Para la prueba de la primera parte del teorema, consideraremos el caso $f(0)=0$ como caso trivial, puesto que entonces $d=1$ y $\delta=\infty$.

Supongamos que $f(0)\neq 0$ y sea g la proyección de e en $C^*(f)$. Entonces $g-e$ es ortogonal a todos los elementos de $C^*(f)$, en particular a $\{z^n g\}_0^\infty$, lo cual produce,

(22)
$$\left(z^n g, g-e\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\overline{g\left(e^{i\theta}\right)}-1\right) g\left(e^{i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta = 0, \quad n\geq 0,$$

(23) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 e^{in\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g\left(e^{i\theta}\right)e^{in\theta}d\theta=\begin{cases}g(0), & n=0\\ 0 \quad , & n\geq 1.\end{cases}$$

Tomando la parte conjugada de la primera integral, vemos que la serie de Fourier de $\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^2$ se reduce al término constante $g(0)$ y por lo tanto, $\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^2=g(0)$ de lo que se sigue,

(24) $$\delta(g)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{g(0)}$$

(25) $$d^2=\|g-e\|^2=\|e\|^2-\|g\|^2=1-g(0)=1-e^{-2\delta(g)}.$$

Comparemos ahora $g(z)$ con la función $h(z)=f_0(0)\,f_0(z)$; donde f_0 es el factor interior de f ($f_0(0)>0$, $\left|f_0\left(e^{i\theta}\right)\right|=1$). Entonces

(26) $$\|h-e\|^2=\|h\|^2-(h,e)-(e,h)+\|e\|^2=1-f_0^2(0)=1-e^{-2\delta(f_0)}.$$

Como f_0 debe ser un divisor del factor interior de g, entonces $\delta(g)\geq\delta(f_0)$; luego por (25) y (26), se tiene

(27) $$\|h-e\|\leq\|g-e\|=d.$$

Por otro lado, se sigue de la definición de g que $\|h-e\| \geq \|g-e\|$.

Entonces el signo de igualdad se debe cumplir en (27), lo cual implica $h=g$, puesto que el subespacio $C^*(f)$ es lineal y el espacio de Hilbert es uniformemente convexo. Entonces, $g(z)=f_0(0)\,f_0(z)=\sqrt{1-d^2}\,f_0(z)$ y la primera parte del teorema queda establecida.

Para la última parte del teorema, sea H_p el subconjunto de H consistente de todas las funciones que se anulan en sus primeras $p-1$ derivadas en el origen.

La transformación definida como una multiplicación por z^{-p} es entonces una isometría y está determinada por todos los H_p. De esto es claro, que la segunda parte del teorema es una consecuencia de las propiedades ya probadas.

Notemos solamente que si $f_0(z)=a_p z^p+\ldots,\quad a_p \geq 0,$ entonces

(28) $$d_p^2 = 1-a_p^2,$$

y $g_p(z)=a_p f_0(z)$, donde g_p es la proyección de z^p en $C^*(f)$. □

3.3.4 Teorema: *El subespacio lineal cerrado* $C^*(f,g)$ *generado por los conjuntos*

$$\left\{z^n f(z)\right\}_0^\infty, \quad \left\{z^n g(z)\right\}_0^\infty,$$

donde f *y* g *no son idénticamente nulas, es idéntico con el subespacio* $C^*(h_0)$ *gene-*

rado por el máximo común divisor h_0 *de los factores interiores de* f *y* g *.*

3.3.5 Teorema (Beurling): *Todo subespacio invariante* C^* *de* M_z *no idéntico al elemento nulo, contiene una función interior* f_0 *determinada de manera única que genera a* C^* *en el sentido que*

$$C^* = C^*(f_0). \tag{29}$$

Demostración: Sea $p \geq 0$ el menor entero tal que C^* contiene una función cuya p-ésima derivada es diferente de cero en el origen. Entonces, la distancia d_p de $M_z^p e = z^p$ a C^*, es menor que 1, y podemos definir así una función f_0 por la relación:

$\sqrt{1-d_p^2}\, f_0 =$ la proyección de z^p en C^*.

En la misma forma que en el teorema 3.3.3, encontramos que f_0 es una función interior,

$$f_0(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots,$$

tal que

$$d_p^2 = 1 - a_p^2.$$

Se sigue entonces que $C^*(f_0) \subset C^*$. Más aún, si (29) no es cierto, existiría una función interior $g_0 \in C^*$ la cual no sería divisible por f_0.

Por el teorema 3.3.4, el máximo factor común $h_0(z) = b_p z^p + b_{p+1} z^{p+1} + \ldots,$ de f_0, g_0 podría también pertenecer a C^*.

Entonces

$$\left|\frac{f_0(z)}{h_0(z)}\right| < 1, \quad |z| < 1,$$

lo cual implica que $a_p < b_p$, esto lleva a la contradicción

$$\left\| z^p - b_p h_0(z) \right\|^2 = 1 - b_p^2 < d_p^2 ,$$

lo cual finaliza la prueba. $\square$

Observación: El teorema anterior usualmente se expresa diciendo que cada subespacio invariante de M_z tiene la forma $C^* = f_0 H^2(D)$, donde f_0 es una función interior. Además si f_0, g_0 son funciones interiores entonces $f_0 H^2(D) \subset g_0 H^2(D)$ si y solo si $\frac{f_0}{g_0}$ es una función interior.

Ejemplo 1: Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, entonces $\mathbb{Z}$ es un anillo de ideales principales y sus ideales son de la forma $m\mathbb{Z}$, donde $m \in \mathbb{Z}$.

Si I_a, I_b son dos de estos ideales se tiene que $I_a \cap I_b = I_c$ donde $c = mcm(a,b)$. Por otro lado el ideal generado por I_a, I_b es I_d donde $d = MCD(a,b)$.

En $H^2(D)$ ocurre algo similar para los subespacios invariantes de M_z.

Sean $f_0 H^2(D), g_0 H^2(D)$ subespacios invariantes de M_z , f_0, g_0 son funciones interiores, entonces $f_0 H^2(D) \cap g_0 H^2(D) = h_0 f_1 g_1 H^2(D)$, $h_0 = MCD(f_0, g_0)$, donde $f_0 = h_0 f_1$, $g_0 = h_0 g_1$ y además f_1 y g_1 no tienen nada en común.

En el caso del subespacio invariante generado por $f_0H^2(D)$ y $g_0H^2(D)$ se tiene que $gen\left(f_0H^2(D), g_0H^2(D)\right) = h_0H^2(D)$, con $h_0 = MCD(f_0, g_0)$.

3.3.6 Corolario: *Cada conjunto no vacío de funciones interiores* $\{f_0\}$*, enumerable o no, tiene un máximo factor común* h_0 *determinado de manera única definido por las siguientes propiedades:* h_0 *es una función interior que es divisor de cada* $f_0 \in \{f_0\}$*; mientras que cada* k_0 *con esta propiedad es un divisor de* h_0.

3.3.7 Teorema: *Sea* C *un subespacio invariante de* $H^2(D)$ *bajo* M_z^* *no idéntico al elemento nulo. Entonces* C *tendrá, al menos un autovector*

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-\lambda z}, \quad |z| < 1,$$

o, si no, una función de la forma

(30)
$$\psi(z) = 1 - exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{i\theta}} d\mu\right\} \not\equiv 0$$

donde $\mu = \mu(\theta)$ *es una función acotada y no creciente cuyos puntos donde crece forman un conjunto de a lo más medida cero.*

Demostración: Sea C^* el complemento ortogonal de C, y sean $f \in C$ y $g \in C^*$.

Entonces,

$$0 = (f, g) = \left(M_z^{*n} f, g\right) = \left(f, M_z^n g\right), \quad n \geq 0$$

lo cual implica que $M_z C^* \subset C^*$. Es decir, C^* es subespacio invariante de M_z. Como el teorema se cumple en el caso $C = H^2(D)$ podemos suponer que $C \subsetneq H^2(D)$, y por lo tanto que C^* contiene funciones diferentes de cero.

De acuerdo con el teorema 3.3.5, existirá una función interior h que genera a C^*, y la condición

$$\left(f, M_z^n h\right) = 0, \quad n \geq 0,$$

es entonces necesaria y suficiente para que f pertenezca a C.

En particular, un autovector φ_λ pertenece a C si y solo si $(\varphi_\lambda, h) = 0$. En este caso φ_λ pertenece a C si y solo si $(h, \varphi_\lambda) = h(\overline{\lambda}) = 0$.

En efecto, usando la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$(h, \varphi_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\theta}{1 - \overline{\lambda} e^{-i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta} - \overline{\lambda}} = h\left(\overline{\lambda}\right).$$

Por otra parte, una propiedad general de funciones interiores h, es que $1 - h(0) h(z)$ es ortogonal a $\left\{z^n h(z)\right\}_0^\infty$.

Entonces, $1 - h(0) h(z)$ pertenece a C, y, en el caso que $h(z) \neq 0$, $|z| < 1$, es decir, que h no tenga ceros en el disco abierto unidad, tenemos

$$h(z) = \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\alpha\right\} \not\equiv 1.$$

$$1-h(0)h(z)=1-\exp\left\{-\int_0^{2\pi}\frac{2}{1-ze^{-i\theta}}d\alpha\right\}\not\equiv 0,$$

entonces, la función $1-h(0)h(z)$ que pertenece a C, es una función de la forma (31), lo que demuestra el teorema. □

Ejemplo 2: Sea $S\subset H$, H un espacio de Hilbert y $T:H\to H$ un operador lineal. Entonces $TS\subset S\Leftrightarrow T^{*}S^{\perp}\subset S^{\perp}$. Esto nos permite conocer subespacios invariantes de M_z^{*} a partir de los de M_z.

Tenemos por ejemplo que

$$\left[\left(\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right)H^2(D)\right]^{\perp}=span\left\{\frac{1}{1-\lambda z}\right\}.$$

$$\left[\left(\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right)^2H^2(D)\right]^{\perp}=span\left\{\frac{1}{1-\lambda z},\frac{z}{(1-\lambda z)^2}\right\}.$$

$$\left[\left(\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right)^3H^2(D)\right]^{\perp}=span\left\{\frac{1}{1-\lambda z},\frac{z}{(1-\lambda z)^2},\frac{z^2}{(1-\lambda z)^3}\right\}.$$

En el caso de un producto de Blaschke en general se tiene

$$\left[B(z)H^2(D)\right]^{\perp}=span\left\{1,z,\dots,z^{n-1},\frac{1}{1-a_k},\frac{z}{(1-a_k)^2},\dots,\frac{z^{n_k-1}}{(1-a_k)^{n_k-1}},k=1,2,\dots,\right\}$$

donde $B(z)=z^n\prod_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|^{n_k}}{a_k^{\,n_k}}\left(\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}\right)^{n_k}$, $n>0,\ a_k\neq a_j$ si $k\neq j$.

Consideremos en particular la función interior ψ definida por $\psi(z) = \exp\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}$,

para $z \in D$, entonces $\psi H^2(D)$ es un subespacio invariante de M_z. Sea U el complemento ortogonal de $\psi H^2(D)$. Esto es $U = \left(\psi H^2(D)\right)^{\perp}$.

Sea $T: H^2(D) \to U$ la proyección de M_z sobre U, esto es, el operador en U definido por: $Tf = PM_z f$, donde P es la proyección ortogonal en $H^2(D)$ con rango U. Por lo tanto el operador adjunto T^* de T será la restricción de M_z^* a U.

Las consideraciones anteriores, junto con los siguientes lemas serán de gran utilidad para el desarrollo del próximo capítulo.

Notación: $Lat A$ denota el conjunto de todos los subespacios invariantes de A.

3.3.8 Lema (Rosenthal): *Sea A un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert H. Sean $M, N \in Lat A$ tales que $M \subset N$ y $N \cap M^{\perp}$ es infinito dimensional. Si P es la proyección ortogonal sobre $N \cap M^{\perp}$, y $B = PA\big|N \cap M^{\perp}$ entonces se tiene que $K \in Lat B$ si y solo si $K \oplus M \in Lat A$ y $K \oplus M \subset N$.*

Observación: En el lema anterior sea $A = M_z$, $M = \psi H^2(D)$, $N = \varphi H^2(D)$ donde ψ, φ son funciones interiores tales que $\frac{\psi}{\varphi}$ es interior.(φ divide a ψ).

Entonces $\psi H^2(D) \subset \varphi H^2(D)$ y además se tiene que las únicas funciones interiores que dividen a ψ son las funciones

$$\psi_a(z) = \exp\left\{\frac{a(z+1)}{z-1}\right\}, \quad 0 \le a \le 1.$$

Por el Teorema de Beurling, los subespacios invariantes de T corresponden a las funciones interiores que dividen a ψ_1.

Más precisamente, si $\frac{\psi_1}{\varphi_a}$ es una función interior, se tiene que $\psi_1 H^2(D), \psi_a H^2(D)$ son subespacios invariantes de M_z tales que $\psi_1 H^2(D) \subset \psi_a H^2(D)$, y luego el subespacio $\psi_a H^2(D) \cap \left(\psi_1 H^2(D)\right)^{\perp}$ es invariante sobre T, y todos los subespacios invariantes de T se obtienen de la misma forma.

En efecto sea $T = PM_z \left| \left(\psi_1 H^2(D)\right)^{\perp}\right.$, donde P es la proyección ortogonal sobre $\left(\psi_1 H^2(D)\right)^{\perp}$.

Entonces por el lema anterior se tiene que $S \in LatT$ si y solo si $S \oplus M \in LatM_z$ y $S \oplus M \subset N$ donde $M = \psi_1 H^2(D), N = \psi_a H^2(D)$.

Capítulo 4

Subespacios Invariantes del Operador de Volterra. Enfoque de Sarason.

El operador de Volterra V en $L^2(0,1)$ es definido por:

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad , \; 0 < x < 1 , \quad f \in L^2(0,1) .$$

Nuestro propósito aquí es demostrar que los subespacios invariantes de V son los subespacios $L^2(a,1)$, donde $0 \le a \le 1$.

Es importante destacar la conexión de este resultado con el teorema de convolución de Titchmarsh. Esta caracterización de los subespacios invariantes del Volterra fue probada originalmente usando el teorema de convolución.

Recíprocamente, el teorema de convolución puede ser obtenido sabiendo que los subespacios invariantes de V son los subespacios $L^2(a,1)$, donde $0 \le a \le 1$. Ver [6].

Para nuestro propósito especial usaremos el teorema de Beurling, que caracteriza los subespacios invariantes del operador M_z.

4.1 Definición: *Sea* S *el semiplano superior (* $\operatorname{Im} w > 0$ *). El espacio de Hilbert* $H^2(S)$ *consiste de todas las funciones* f *holomórficas en* S *que satisfacen*

$$\|f\|^2 = \sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) \right|^2 dx < \infty .$$

De manera similar se define $H^2(W)$*, donde* W *es el semiplano derecho (* $\operatorname{Re} w > 0$ *).*

4.2 Teorema: *Sea* f *una función analítica en el semiplano derecho (* $\operatorname{Re} w > 0$ *). Entonces* f *está en* $H^2(W)$ *si y solo si la función* $(1+w)f(w)$ *es transformada por la aplicación* $z = \dfrac{w-1}{w+1}$ *en una función* h *de* $H^2(D)$*,* $h(z) = \dfrac{2}{1-z} f\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right), z \in D$*. Además, la aplicación* $f \to \sqrt{\pi}\, h$ *es una isometría de* $H^2(W)$ *sobre* $H^2(D)$. Ver [5].

Observación: El teorema anterior nos permite definir una isometría natural J_1 de $H^2(S)$ sobre $H^2(D)$ donde S es el semiplano superior.

En efecto, si f está en $H^2(S)$ entonces $g(w) = f(iw)$ está en $H^2(W)$. Por lo tanto, la función $(1+w)f(iw)$ es transformada en una función h de $H^2(D)$ mediante la aplicación $z = \dfrac{w-1}{w+1}$.

De $z = \dfrac{w-1}{w+1}$ se tiene que $w = \dfrac{1+z}{1-z}$, con $z \in D$, de donde $1+w = \dfrac{2}{1-z}$.

El teorema implica entonces que la aplicación $(J_1 f)(z)=\frac{2\sqrt{\pi}}{1-z}\, f\left(i\frac{1+z}{1-z}\right),\ z\in D$ es una isometría de $H^2(S)$ sobre $H^2(D)$.

Será conveniente de ahora en adelante considerar a $L^2(0,1)$ como el subespacio de $L^2(-\infty,\infty)$ consistente de todas aquellas funciones que se anulan fuera del intervalo $(0,1)$, y análogamente para $L^2(a,b)$, para a y b tales que $-\infty\le a\le b\le\infty$.

Esto nos permitirá hablar de transformadas de Fourier de funciones en $L^2(a,b)$.

4.3 Teorema (Teorema de Paley -Wiener): *Una función de valor compleja f en el semiplano derecho pertenece a $H^2(W)$ si y solo si tiene la forma*

$$f(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(t)e^{-wt}dt$$

para alguna función $\hat{f}$ en $L^2(0,\infty)$.Esta representación es única.

Este es un teorema clásico cuya demostración se encuentra, por ejemplo, en [5].

Observación: El teorema de Paley-Wiener nos permite definir una isometría J_2 de $L^2(0,\infty)$ sobre $H^2(S)$. La cual viene dada por

$$(J_2 f)(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)e^{iwt}dt\text{, donde } f\in L^2(0,\infty) \text{ y } w\in S.$$

4.4 Proposición: $J = J_1 J_2$ *es una isometría de* $L^2(0,\infty)$ *sobre* $H^2(D)$*.La transformación lineal* J *de* $L^2(0,\infty)$ *sobre* $H^2(D)$ *es dada por*

$$(J\,f)(z) = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(t)\exp\left[-\frac{1+z}{1-z}t\right]dt.$$

Además J *envía a* $L^2(a,\infty)$ *en* $\psi_a H^2(D)$*, donde* $\psi_a(z) = \exp\left\{a\frac{z+1}{z-1}\right\}$ *y de esto se tiene que envía a* $L^2(0,1)$ *sobre* $U = \left(\psi_1 H^2(D)\right)^\perp$.

Demostración: Probemos que $J\left(L^2(a,\infty)\right) = \psi_a H^2(D)$.

Supongamos que $f \in L^2(a,\infty)$, entonces $f = 0$ c.t.p. en $[0,a]$.

Luego

$$\begin{aligned}\frac{(Jf)(z)}{\psi_a} &= \exp\left\{-\frac{z+1}{z-1}a\right\}\frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(t)\exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}t\right\}dt\\ &= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_a^\infty f(t)\exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}(t-a)\right\}dt\\ &= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(t+a)\exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}t\right\}dt\end{aligned}$$

Entonces $\left(\frac{Jf}{\psi_a}\right) \in H^2(D)$, o sea, $Jf \in \psi_a H^2(D)$. Luego $J\left(L^2(a,\infty)\right) \subseteq \psi_a H^2(D)$.

Para la inclusión inversa, sea $\psi_a g \in \psi_a H^2(D)$. Entonces $g = Jf$ para alguna función $f \in L^2(0,\infty)$; es decir $g(z) = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(t)\exp\left[-\frac{1+z}{1-z}t\right]dt$.

Entonces

$$\psi_a g(z) = \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty f(t)\exp\left[-\frac{1+z}{1-z}(t+a)\right]dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_a^\infty f(t-a)\exp\left[-\frac{1+z}{1-z}t\right]dt$$

Definamos $h(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0 \quad\quad\;\; , & t \le a \end{cases}$,

entonces $h \in L^2(a,\infty)$ y $\psi_a g = Jh$, de lo cual $\psi_a H^2(D) \subseteq J\left(L^2(a,\infty)\right)$.

Por lo tanto $J\left(L^2(a,\infty)\right) = \psi_a H^2(D)$.

En particular si $a = 1$, se tiene $J\left(L^2(1,\infty)\right) = \psi_1 H^2(D)$, donde $\psi_1(z) = \exp\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}$.

De lo cual se obtiene que $J\left(L^2(0,1)\right) = \left(\psi_1 H^2(D)\right)^\perp$. □

4.5 Proposición: *El operador* $(V+I)^{-1} = Q(I-K)\big|_{L^2(0,1)}$, Q *es la proyección de* $L^2(0,\infty)$ *sobre* $L^2(0,1)$ *y* $(Kf)(x) = \int_0^x f(t)e^{t-x}dt$, *donde* $f \in L^2(0,1)$.

En otras palabras, $(V+I)^{-1}$ *es la proyección sobre* $L^2(0,1)$ *del operador* $I-K$ *en* $L^2(0,\infty)$, *donde* K *es el operador de convolución con la función*

$$k(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Además $Kf \in L^2(0,1)$.

Demostración: Primero veamos que $Kf \in L^2(0,1)$. Por la definición de convolución

$(Kf)(x) = (f * k)(x) = \int_0^x f(t)k(x-t)\,dt$.

Usando la bien conocida desigualdad $\|f*k\|_p \le \|f\|_p \|k\|_1$ para $f \in L^p$ y $k \in L^1(0,\infty)$, $1 < p < \infty$ tenemos que $\|K\|_2 = \|f*k\|_2 \le \|f\|_2 \|k\|_1 \le \|f\|_2$, puesto que $\|k\|_1 = 1$. Esta se puede encontrar, por ejemplo, en Rudín [8].

Ahora probemos que $(V+I)Q(I-K)\,f = f$ para $f \in L^2(0,1)$.

Para $s \in [0,1]$, $(QKf)(s) = \int_0^s f(t)e^{t-s}dt$, puesto que $Kf \in L^2(0,1)$.

Entonces

$$\left[(I+V)Q(I-K)\,f\right](s) = f(s) + \int_0^s f(t)\,dt - \int_0^s f(t)e^{t-s}dt - \int_0^s \int_0^x f(t)e^{t-x}dtdx.$$

Aplicando el teorema de Fubini tenemos,

$$\int_0^s \int_0^x f(t)e^{t-x}dtdx = \int_0^s f(t)\left[\int_t^s e^{t-x}dx\right]dt = \int_0^s f(t)\left[1-e^{t-s}\right]dt$$

De lo cual se obtiene

$$\left[(I+V)Q(I-K)\,f\right](s) = f(s).$$

Por lo tanto $(V+I)^{-1} = Q(I-K)\big|_{L^2(0,1)}$. $\square$

4.6 Proposición: *$I-K$ es unitariamente equivalente a $\dfrac{I+M_z}{2}$. En particular se tiene* $J(I-K)=\left(\dfrac{I+M_z}{2}\right)J$.

Demostración: Sea $f\in L^2(0,\infty)$, entonces

$$(JKf)(z)=\frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty\left(\int_0^t f(s)e^{s-t}ds\right)\exp\left[-\frac{1+z}{1-z}t\right]dt$$

Luego

$$(JKf)(z)=\frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty\left(\int_s^\infty \exp\left[\frac{-2}{1-z}t\right]ds\right)f(s)e^s dt$$

$$(JKf)(z)=\frac{\sqrt{2}}{1-z}\int_0^\infty\frac{1-z}{2}\exp\left[\frac{-2s}{1-z}\right]f(s)e^s dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty\exp\left[-\frac{1+z}{1-z}s\right]f(s)dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1-z)}{\sqrt{2}}(Jf)(z)$$

$$=\frac{(1-z)}{2}(Jf)(z)$$

$$=\frac{(1-M_z)}{2}(Jf)(z)$$

Por lo tanto $JK=\dfrac{(I-M_z)}{2}J$.

Ahora $J(I-K)(f(z))=(Jf)(z)-(JKf)(z)$, entonces $J(I-K)=\dfrac{(I+M_z)}{2}J$. □

4.7 Teorema: *El operador* $(V+I)^{-1}$ *es unitariamente equivalente al operador* $\frac{T+I}{2}$.

Donde $Tf = P(M_z f)$ *,* P *es la proyección ortogonal sobre* $\left(\psi_1 H^2(D)\right)^{\perp}$.

Demostración: Recordemos que $J = J_1 J_2$ es una isometría de $L^2(0,\infty)$ sobre $H^2(D)$. (Ver 4.2, 4.4).

Por otra parte como $(V+I)^{-1} = Q(I-K)\big|_{L^2(0,1)}$, donde Q es la proyección sobre $L^2(0,1)$ y $J(I-K) = \frac{(I+M_z)}{2}J$, se sigue que

$$J(V+I)^{-1} = JQ(I-K) = PJ(I-K) = P\left(\frac{I+M_z}{2}\right)J = \left(\frac{I+T}{2}\right)J\ ,$$

dado que $PJ = JQ$, donde P es la proyección ortogonal sobre $\left(\psi_1 H^2(D)\right)^{\perp}$.

Por lo tanto, $(V+I)^{-1}$ es unitariamente equivalente a $\frac{I+T}{2}$. □

Las consideraciones anteriores permiten determinar los subespacios invariantes de V usando el teorema de Beurling para los subespacios invariantes de M_z.

4.8 Teorema: *Los subespacios invariantes de V son los subespacios* $L^2(a,1)$*, donde* $0 \le a \le 1$.

Demostración: Los operadores V, $(V+I)^{-1}$ tienen los mismos subespacios invariantes, puesto que cada uno puede ser aproximado por polinomios en el otro.

En efecto, como V es cuasi-nilpotente tenemos $(V+I)^{-1} = \sum_0^\infty (-1)^n V^n$. Consideremos ahora el operador $B = (V+I)^{-1} - I = -V(V+I)^{-1}$, el cual también es cuasi-nilpotente.

Entonces $(B+I)^{-1} = \sum_0^\infty (-1)^n B^n$, de donde

$$\sum_0^\infty (-1)^n \left[(V+I)^{-1} - I \right]^n = \left[(V+I)^{-1} - I + I \right]^{-1} = \left[(V+I)^{-1} \right]^{-1} = V + I$$

luego

$$V = -I + \sum_0^\infty (-1)^n \left[(V+I)^{-1} - I \right]^n$$
$$V = -I + I + \sum_1^\infty (-1)^n \left[(V+I)^{-1} - I \right]^n$$
$$V = \sum_1^\infty (-1)^n \left[(V+I)^{-1} - I \right]^n$$

donde cada serie converge en la topología uniforme de operadores.

Por lo tanto, $LatV = Lat(I+V)^{-1}$. Sea ahora $W = (I-V)(I+V)^{-1} = 2(I+V)^{-1} - I$, esto dado que $(I+V)^{-1} = I - V(I+V)^{-1}$, entonces $LatW = LatV$.

De 4.5 y 4.6 se tiene que $W = Q(I-2K)\big|L^2(0,1)$, y $I - 2K = J^{-1} M_z J$ entonces W es unitariamente equivalente al operador $T = PM_z$, donde P es la proyección ortogonal sobre $\left(\psi_1 H^2(D)\right)^{\perp}$. (Ver también 4.7)

El hecho que $LatW = \left\{ L^2(a,1) :\ a \in [0,1] \right\}$, se sigue de la observación del lema 3.3.15

y que $J\left(L^2(a,\infty)\right)=\psi_a H^2(D)$, donde $\psi_a(z)=\exp\left(a\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, $a\in[0,1]$.

Como $W=J^{-1}TJ$, $T\left(\left(\psi H^2(D)\right)^{\perp}\cap\psi_a H^2(D)\right)\subseteq\left(\psi H^2(D)\right)^{\perp}\cap\psi_a H^2(D)$, y

además $J\left(L^2(0,1)\right)=\left(\psi_1 H^2(D)\right)^{\perp}$ y $J\left(L^2(a,\infty)\right)=\psi_a H^2(D)$, se obtiene entonces

que $TJ\left(L^2(0,1)\cap L^2(a,\infty)\right)\subseteq J\left(L^2(a,1)\right)$ y de aquí

$$W\left(L^2(a,1)\right)=J^{-1}TJ\left(L^2(a,1)\right)\subseteq L^2(a,1) .$$

Por tanto los subespacios invariantes del operador de Volterra V son los subespacios $L^2(a,1)$, donde $0\le a\le 1$. □

Capítulo 5

Conclusiones

1. El subespacio generado por $\{z^n f(z)\}_0^\infty$ es igual al generado por $\{z^n f_0(z)\}_0^\infty$ donde f_0 es el factor interior de f. Si $\overline{span\{z^n f_0\}} = \overline{span\{z^n g_0\}}$, entonces $f_0 = g_0$.

2. Si T satisface las condiciones (A), (B), y (C), entonces T^* es unitariamente equivalente a $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_z$ actuando en $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} H(D)$, donde n puede ser un número natural o incluso infinito. Este operador $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_z$ se llama una traslación de multiplicidad n. La multiplicidad es 1 si y solo si (D) se satisface.

En general dado un autovalor λ de T, $n = \dim\{f : Tf = \lambda f\}$. (Esta dimensión no depende del λ elegido).

3. M_z es un operador isométrico no unitario y no existen subespacios no triviales S de H que reducen a S. Esto es, si S es un subespacio cerrado de H tal que S y $S^\perp$ son invariantes para T, entonces $S = \{0\}$ o $S = H$.

4. Todos los subespacios invariantes del operador M_z son descritos, estos son $S = FH^2(D)$, donde F es una función interior.

5. El operador M_z^* no satisface un problema de extinción. Para ver esto consideramos una función interior singular φ y M_z^* restringido al subespacio invariante $\left(\varphi H^2(D)\right)^{\perp}$. En este espacio no hay ningún autovector de M_z^*.

6. Un trabajo futuro es tratar de caracterizar los subespacios invariantes de M_z cuando este actúa en el espacio de Bergman, todas las f analíticas en D tales que $\int_D |f(z)|^2\, dA(z) < \infty$, donde dA es la medida de Lebesgue de área.

Apéndice

Comentarios Sobre Beurling

Arne Carl-August Beurling nació el 3 de febrero de 1905 en Gothenburg, Suecia y murió en Estados Unidos el 20 de noviembre de 1986. Estudió en Uppsala y obtuvó un doctorado allí en 1933. Dió clases en Uppsala desde 1932 hasta 1952, donde fue profesor de Matemáticas.

Durante la temporada 1948-1949 Beurling fue profesor visitante en la Universidad de Harvard, EE.UU. En 1954 emigró a los Estados Unidos, donde fue profesor en el Instituto de Estudio Avanzado en Princeton.

Beurling trabajo en la teoría de funciones generalizadas, ecuaciones diferenciales, análisis armónico, series de Dirichlet y en la teoría del potencial. Tomó los conceptos de energía y la integral de Dirichlet para hacer una teoría global axiomática, la cual se llamó teoría de espacios de Dirichlet para funciones complejas.

Durante la segunda Guerra Mundial, Beurling trabajó descifrando los códigos de los alemanes. Sobre Beurling, Kjellberg escribió:

Beurling era una de las personas más encantadoras que uno puede encontrar.Tenía un fuerte sentimiento para la justicia y la honestidad.

Durante la segunda guerra mundial él descifró en dos semanas (en el verano de 1940) *el código de mensaje alemán G-Schreiber, siendo así conocidos todos los movimientos alemanes por los suecos.*

Para mayores referencias sobre su actuación en la segunda guerra mundial ver por ejemplo el libro “Codebreakers: Arne Beurling and the Swedish Crypto Program During World War II” por Bengt Beckman. Una crítica sobre este libro se puede encontrar en “Notices Of The AMS”, Volumen 50, número 8.

Por otra parte, la búsqueda de los subespacios invariantes de operadores es un tema de mucha actualidad. Usando, por ejemplo, el “full search” de “Mathematical Review” de la AMS se han encontrado 4238 títulos, más de 120 de ellos solo en los años 2003 y 2004.

Bibliografía

[1]. Beurling A., On Two Problems Concerning Linear Transformations In Hilbert Space. Acta math. 81, (1949), 239-255.

[2]. Conway J.B, A Course in Functional Analysis. Springer-Verlag, New York., (1990).

[3]. Duren P.L. Theory of H^p Spaces. Dover Publications, Inc. New York., (2000).

[4]. Dunford N. and Schwartz J., Linear Operators,Vol 1. Interscience publishers, New York., (1958)

[5]. Hoffman K., Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1962).

[6]. Kalisch G., A functional analysis proof of Titchmarsh's convolution theorem. Math. Anal. Appl. 5 (1962), 176-183

[7]. Radjavi H. and Rosenthal P., Invariant Subspaces, 2nd ed. Dover Publications, Inc. New York., (2003).

[8]. Rudin, W., Real and Complex Analysis, 3 ed., McGraw Hill Book Company, New York., (1987).

[9]. Sarason, D., A Remark on the Volterra Operator. J. Math. Anal. Appl. 12, (1965), 244-246.

[10]. Wiener, N., Generalizad Harmonic Analysis and Tauberian Theorems, The M.I.T Press, Cambridge, Massachussets, 1965.