

SIMULACIÓN DE LA DISTORSIÓN ATMOSFÉRICA EN UN FRENTE DE ONDA  
ELECTROMAGNÉTICA

Por

Julio César León Téllez

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

en

Computación Científica

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO  
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ  
2005

Aprobado por:

\_\_\_\_\_  
Acar Birbarah Robert, Ph.D.  
Presidente, Comité Graduado

\_\_\_\_\_  
Fecha

\_\_\_\_\_  
Bollman Dorothy, Ph.D.  
Miembro, Comité Graduado

\_\_\_\_\_  
Fecha

\_\_\_\_\_  
Quintana Díaz Julio, Ph.D.  
Miembro, Comité Graduado

\_\_\_\_\_  
Fecha

\_\_\_\_\_  
Macchiavelli Raúl, Ph.D.  
Representante de Estudios Graduados

\_\_\_\_\_  
Fecha

\_\_\_\_\_  
Vásquez Pedro, D.Sc.  
Director, Departamento de Matemáticas

\_\_\_\_\_  
Fecha

## ABSTRACT

We describe the implementation of two methods, proposed by Harding et al. [2] and Lane et al. [5], for simulating the effects of atmospheric turbulence on the phase of wavefronts of light. The results of the simulation methods are the so-called phase screens, which are two-dimensional grids of points whose values represent the local phase of the wavefront. We calculate the covariance matrix from the analytic expression of a phase screen obeying Kolmogorov statistics, giving a basis of eigenvectors. The phase screens are found as a linear combination of these vectors with Gaussian random coefficients. The low resolution phase screens, found by the Fourier transform of the spatial power spectrum of Kolmogorov turbulence, are inadequate because simply applying the Fourier transform produces a phase screen that deviates from the analytic model in all but the small central region.

## RESUMEN

En este trabajo se describe la implantación de dos métodos propuestos por Harding et al. [2] y Lane et al. [5], para simular los efectos de la turbulencia atmosférica en la fase del frente de onda. Los resultados de los métodos de simulación se denominan “capas de fase“, y son rejillas de dos dimensiones de puntos que representan los valores de la fase local del frente de onda. La matriz de covarianza se calculó con la expresión analítica de una capa de fase obedeciendo la estadística de Kolmogorov [2], lo que brinda una base de vectores propios. La capa de fase es representada como una combinación lineal de dichos vectores con coeficientes aleatorios que siguen una distribución normal. La capa de fase de baja resolución encontrada por la transformada de Fourier del espectro de potencia de la teoría de turbulencia de Kolmogorov es inadecuada porque dicha transformada produce una capa de fase que se desvía en todo el modelo analítico excepto en la pequeña región central.

## DEDICATORIA

Esto es una triple dedicatoria:

A mi ciudad, **Cartagena de Indias**.

La ciudad más linda de **Colombia** y del mundo, distrito turístico, patrimonio histórico y cultural de la humanidad.

Al **Departamento de Matemáticas** de la **Universidad de Cartagena**.

Por todo lo que aprendí, por la gente que conocí y por los deseos de enseñar a un pueblo que aun no sabe qué es la matemática a utilizarla.

A mi familia, **Familia Téllez**, en especial a mis sobrinos la nueva generación.

Lo que hago hoy o haga en el futuro no solo lo hago por mi, también lo hago por mi familia y para servir de ejemplo a la nueva generación (**Valeria, Héctor José y Jocelyn**).

## AGRADECIMIENTOS

A **Robert Acar** por confiar en mí y darme una oportunidad.

A **Julio Quintana** por darme animo en el momento que lo necesite.

A **Dorothy Bollman** por empeñarse en que se hicieran las cosas bien.

A **Raúl Macchiavelli** por su optimismo y sus ganas de colaborar.

A **Haedeh Gooransarab** por que siempre se preocupo por mí.

A **Johanna Suárez** por su apoyo incondicional.

A la familia **Trespacios** que son para mí como mi familia.

A mis colegas **Luís Fernando** y **Luís Gabriel** por ser buenos amigos.

A la gente de de la **Universidad de Cartagena** que esta en el **Departamento de Matemáticas** en el **Recinto de Mayagüez** (**Luís Ramon, Sindy, La Mona, Ana María**).

Por que son mis amigos y están dando un buen ejemplo de **Colombia** en el extranjero.

A **Nazly Estrada** por que con ella aprendí a ver la vida de otra manera.

Al **Recinto Universitario de Mayagüez** por darme la oportunidad de hacer una maestría.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	7
<b>1.1</b>	<b>CONCEPTOS BÁSICOS</b>	9
1.1.1	TURBULENCIA ATMOSFÉRICA	9
1.1.2	FRENTE DE ONDA	9
1.1.3	FUNCIÓN DE ESTRUCTURA	10
1.1.4	TRANSFORMADA DE FOURIER UNIDIMENSIONAL	11
1.1.5	TRANSFORMADA DE FOURIER BIDIMENSIONAL	11
1.1.6	TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER UNIDIMENSIONAL	12
1.1.7	TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER BIDIMENSIONAL	12
1.1.8	TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER UNIDIMENSIONAL	13
1.1.9	TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER BIDIMENSIONAL	14
1.1.10	ESPECTRO DE POTENCIAS	15
1.1.11	MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO	16
<b>1.2</b>	<b>MÉTODOS PROPUESTOS POR R. G. LANE Y C. M. HARDING</b>	16
1.2.1	CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DEL ESPECTRO DE POTENCIAS	16
1.2.2	CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE SU MATRIZ DE COVARIANZA	17
<b>2</b>	<b>MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO</b>	21
<b>2.1</b>	<b>ADICIÓN ALEATORIA SUCESIVA</b>	21
<b>3</b>	<b>CÓMO GENERAR UNA CAPA DE FASE KOLMOGOROV</b>	23
<b>3.1</b>	<b>CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DEL ESPECTRO DE POTENCIAS</b>	23
3.1.1	REPRESENTACIÓN DE LA MUESTRA	23
3.1.2	NATURALEZA FRACTAL DE LA CAPA DE FASE	23
3.1.3	ESPECTRO DE LAS FLUCTUACIONES DE LA FASE	24
3.1.4	DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO BIDIMENSIONAL	25
<b>3.2</b>	<b>CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE SU MATRIZ DE COVARIANZA</b>	31
3.2.1	FUNCIÓN DE ESTRUCTURA	31
3.2.2	OPERADOR DE REORDENAMIENTO	32
3.2.3	COVARIANZA DE LA CAPA DE FASE	33
3.2.4	DERIVACIÓN DEL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO	36
<b>4</b>	<b>IMPLANTACIÓN</b>	41
<b>4.1</b>	<b>CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DEL ESPECTRO DE POTENCIAS</b>	41
<b>4.2</b>	<b>CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE LA MATRIZ DE COVARIANZA</b>	44
4.2.1	PROPIEDADES DE $C$	45
4.2.2	CÓMO HALLAR LA INTEGRAL DOBLE DE LA FUNCIÓN DE	49

	ESTRUCTURA	
4.2.3	CÓMO HALLAR LA INTEGRAL CUÁDRUPLE DE LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA	49
4.2.4	CÓMO HALLAR LA COVARIANZA DE LA CAPA DE FASE	49
4.2.5	CÓMO HALLAR LA CAPA DE FASE	50
<b>4.3</b>	<b>INTERPOLACIÓN DE LA CAPA DE FASE</b>	<b>50</b>
4.3.1	PASO 1	52
4.3.2	PASO 2	53
4.3.3	PASO 3	54
<b>4.4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>56</b>
4.4.1	FUNCIÓN DE ESTRUCTURA	56
4.4.2	CONTORNOS DE LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA	58
4.4.3	CAPA DE LA TURBULENCIA GENERADA CON EL ESPECTRO DE POTENCIAS	60
4.4.4	CAPA DE LA TURBULENCIA GENERADA CON LA MATRIZ DE COVARIANZA	61
<b>5</b>	<b>DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS ALGORITMOS</b>	<b>62</b>
<b>5.1</b>	<b>ALGORITMO PARA HALLAR LA MATRIZ DE COVARIANZA</b>	<b>62</b>
<b>5.2</b>	<b>ALGORITMO PARA HALLAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE LA MATRIZ DE COVARIANZA</b>	<b>64</b>
<b>5.3</b>	<b>MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO</b>	<b>65</b>
<b>5.4</b>	<b>MÉTODO DEL ESPECTRO DE POTENCIAS</b>	<b>66</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>67</b>
<b>7</b>	<b>REFERENCIAS</b>	<b>69</b>

# **CAPITULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

La atmósfera no se comporta como un medio homogéneo para la propagación de la luz. El origen de este comportamiento se halla en el proceso de calentamiento del aire por el sol. Durante el día la luz solar calienta las masas terrestres. Por la noche la superficie de la tierra se enfría gradualmente y se disipa calor hacia la atmósfera. Estos procesos producen movimientos de aire a gran escala, que alcanzan el régimen turbulento, y se convierten progresivamente en movimientos a escalas menores. Como resultado se crean en las atmósferas regiones de aire con distintas temperaturas, cuyo tamaño y distribución son aleatorias. El índice de refracción del aire depende de la densidad, y en consecuencia de la temperatura, por lo que también el índice de refracción de la atmósfera es aleatorio. Por tanto, las ondas electromagnéticas que se propagan por ella encuentran un medio no homogéneo y se distorsionan.

Kolmogorov [4] desarrolló un modelo para explicar como la energía es transportada desde una región de turbulencia de gran escala a una de menor escala y dicho modelo contribuyó al conocimiento de las propiedades estadísticas de la atmósfera y sus efectos sobre la formación de imágenes. Tatarski [9] lo aplicó para resolver la ecuación de onda en el caso de propagación en regiones con fluctuaciones débiles y Fried [1] usó los resultados



previos para describir los efectos de la turbulencia en términos de polinomios de Zernike y derivar un único parámetro que describe los efectos de la atmósfera en los sistemas de formación de imágenes.

Harding et al. [2] mostraron un método sofisticado para la simulación de la capa de fase de Kolmogorov. En particular su método de interpolación hizo una simulación rápida con alta resolución. Un problema en la simulación de la distorsión atmosférica usando una abertura finita es la pérdida de las frecuencias bajas. Lane et al. [5] aprovechan la naturaleza fractal de la capa de fase para capturar dichas frecuencias.

Las simulaciones de la distorsión atmosférica realizadas con base al modelo de Kolmogorov [4] resultan ser muy útiles puesto que con éstas se pueden entender los efectos de las mismas y así poder corregir imágenes atmosféricamente distorsionadas.

El objetivo de este trabajo es utilizar los métodos propuestos por Lane y Harding [2,5], los cuales están basados en la teoría de turbulencia atmosférica de Kolmogorov [4], para hacer simulaciones numéricas de la distorsión atmosférica.

## 1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

### 1.1.1 TURBULENCIA ATMOSFÉRICA

La turbulencia atmosférica puede ser definida como la perturbación del comportamiento del flujo laminar del viento, originada por factores físicos, la cual da como resultado la formación de remolinos. Estas perturbaciones no presentan un patrón único y definido, sino que varían de acuerdo a las causas que la producen.

Existen varias causas que originan la formación de zonas turbulentas como el rozamiento del aire con la superficie terrestre, el calentamiento del aire en capas bajas o enfriamiento en capas altas, y en ocasiones pueden ser producidas por una combinación de las mismas.

### 1.1.2 FRENTE DE ONDA

Un frente de onda se define como el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma fase en un momento dado.

La función de una onda electromagnética se representa por:

$$\psi(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) \exp(i\phi(\mathbf{x})).$$

Donde  $A$  es la amplitud,  $\phi$  la fase del frente de onda y  $x$  representa la distancia entre dos puntos del frente de onda. La función tendrá un valor constante sobre el frente de onda solamente si la amplitud tiene un valor fijo en éste. En general,  $A$  es una función de  $x$  y puede no ser constante sobre un frente de onda, pero para nuestro caso se considerará como constante y de esta manera se hará énfasis sólo en la fase.

### 1.1.3 FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

$\phi(u, v)$  representa la capa de fase bidimensional y  $(u, v)$  una coordenada.

Se hace  $F(u, v, u', v') = (\phi(u + u', v + v') - \phi(u', v'))^2$ .

La distancia del punto  $(u + u', v + v')$  al punto  $(u', v')$  sólo depende de  $(u, v)$  puesto que  $(u, v) = (u + u', v + v') - (u', v')$ , es decir sin importar cuales sean los puntos  $(u + u', v + v')$  y  $(u', v')$  la distancia entre ellos siempre será el modulo de  $(u, v)$ . Por tanto  $F$  depende de  $u, v, u', v'$  pero el promedio de  $F$  agregado con respecto a  $\phi$  (ensemble average) solo depende de la distancia entre ellos es decir de  $u, v$ .

De lo anterior se puede concluir que  $\langle F(u, v, u', v') \rangle_{\phi} = \langle F \rangle_{\phi}(u, v)$ , donde  $\langle \rangle$  denota promedio sobre  $\phi$ .

$D_\phi(u, v)$  representa la función de estructura bidimensional definida por:

$$D(u, v) = \langle F \rangle(u, v).$$

La función de estructura de la fase que resulta del modelo de Kolmogorov es [2]:

$$D(u, v) = 6.88 \left( \frac{|(u, v)|}{r_0} \right)^{5/3}$$

donde  $r_0$  es el parámetro de Fried [1]. El parámetro de Fried [1] es de gran utilidad pues permite describir el estado de la atmósfera y su influencia en la calidad de las imágenes a través de un único parámetro.

#### 1.1.4 TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea  $f$  una función en  $L^1$  es decir  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| du < \infty$ . Se dice que  $F$  es la

transformada de Fourier de  $f$  si  $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(-i2\pi ku) du$

y que  $f$  es la transformada inversa de  $F$  si  $f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(i2\pi ku) dk$ .

Se puede extender la definición de transformada de Fourier para  $f$  en  $L^2$

Las cuales satisfacen que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du < \infty$ , es decir tienen energía finita.

Consideremos  $\phi = 1$ . Esta función no es  $L^2$ , tiene energía infinita, pero la energía

promedia  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1^2 du$  es finita. Se puede extender la transformada de la

siguiente manera:

$$F_T(k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-i2\pi uk) du.$$

Si  $k = 0$  entonces

$$F_T(k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} du = T.$$

Si  $k \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned} F_T(k) &= \int_{-i\pi kT}^{i\pi kT} \exp(-x) \frac{dx}{i2\pi k} = -\frac{1}{i2\pi k} \exp(-x) \Big|_{-i\pi kT}^{i\pi kT} \\ &= \frac{1}{\pi k} \left( \frac{\exp(i\pi kT) - \exp(-i\pi kT)}{2i} \right) = \frac{1}{\pi k} \text{sen}(\pi kT). \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que:

$$F_T(k) = \begin{cases} T & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{\pi k} \text{sen}(\pi k T) & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Se puede definir una noción de energía promedia en el dominio de frecuencias de la siguiente manera:

$$F(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_T(k)}{T}.$$

Si  $k = 0$  entonces  $F(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} 1 = 1.$

Si  $k \neq 0$  entonces  $F(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\pi k} \text{sen}(\pi k T)}{T} = 0.$

De lo anterior se tiene que:

$$F(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Es decir  $F(k)$  es la medida impulso.

Este ejemplo sugiere que la transformada de Fourier de 1 es  $\delta$  y que la transformada de Fourier se puede extender a distribuciones.

Las distribuciones generalizan el concepto de función. Las distribuciones actúan sobre un espacio de funciones (con ciertas condiciones de regularidad o "suavidad") asignando a cada una de ellas un número. Digamos que lo que define a una distribución es su manera de interactuar sobre las funciones.

Además, las funciones (de cierto tipo) pueden identificarse con distribuciones, de forma que cada una de estas funciones sería una distribución, aunque muchas distribuciones no son funciones.

La transformada de Fourier para distribuciones es definida por la

formula  $\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle$  [8].

### 1.1.5 TRANSFORMADA DE FOURIER BIDIMENSIONAL

La transformada de Fourier se puede extender fácilmente para una función  $f(x, y)$  de dos variables así:

$$F(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \exp(-i2\pi(uv + kl)) dudv .$$

$$f(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k, l) \exp(i2\pi(uv + kl)) dk dl .$$

### 1.1.6 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER UNIDIMENSIONAL (DFT)

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} f(u) \exp\left(-i2\pi \frac{uk}{N}\right) \text{ para } u = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$f(u) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(i2\pi \frac{uk}{N}\right) \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

La evaluación directa de este proceso requiere  $O(N^2)$  operaciones aritméticas.

### 1.1.7 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER BIDIMENSIONAL (DFT2)

$$F(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} f(u, v) \exp\left(-i2\pi \left(\frac{uk}{M} + \frac{vl}{N}\right)\right)$$

para  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  y  $v=0, 1, 2, \dots, N-1$ .



$$f(u, v) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k, l) \exp\left(i2\pi\left(\frac{uk}{M} + \frac{vl}{N}\right)\right)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$  e  $l = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

La evaluación directa de este proceso requiere  $O(M^2N^2)$  operaciones aritméticas.

### 1.1.8 TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER UNIDIMENSIONAL (FFT)

Es un eficiente algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta DFT y su inversa. La FFT es de gran importancia en una amplia variedad de aplicaciones, desde el tratamiento de señales digitales a la resolución de ecuaciones diferenciales parciales o los algoritmos de multiplicación rápida de grandes enteros.

La evaluación directa de DFT requiere  $O(N^2)$  operaciones aritméticas. Mediante un algoritmo FFT se puede obtener el mismo resultado con sólo  $O(N \log N)$  operaciones.

La idea que permite esta optimización es la descomposición de la transformada a tratar en otras más simples y éstas a su vez hasta llegar a transformadas de 2 elementos. Una vez resueltas las transformadas más simples hay que

agruparlas en otras de nivel superior que deben resolverse de nuevo y así sucesivamente hasta llegar al nivel más alto. Al final de este proceso, los resultados obtenidos deben reordenarse.

Dado que la transformada discreta de Fourier inversa es análoga a la transformada discreta de Fourier, con distinto signo en el exponente y un factor  $\frac{1}{N}$ , cualquier algoritmo FFT puede ser fácilmente adaptado para el cálculo de la transformada inversa.

#### 1.1.9 TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER BIDIMENSIONAL (FFT2)

Es un eficiente algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta bidimensional DFT2 y su inversa.

La evaluación directa de DFT2 requiere  $O(M^2 N^2)$  operaciones aritméticas.

Mediante un algoritmo FFT se puede obtener el mismo resultado con sólo  $O(N^2 \log N)$  operaciones.

La FFT2 puede escribirse en términos de la FFT. Supongamos que se puede escribir la FFT de una matriz de la siguiente manera:

$$FFT \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1N} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{M1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{NN} \end{bmatrix} \right) = \left[ FFT \left( \begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N1} \end{bmatrix} \right) \dots FFT \left( \begin{bmatrix} a_{1N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{NN} \end{bmatrix} \right) \right]$$

,

entonces la FFT2 se puede escribir así:

$$FFT2 = \left( FFT \left( \left( FFT(a) \right)^T \right) \right)^T$$

donde  $a$  es una matriz y  $T$  es el operador transpuesto.

### 1.1.10 ESPECTRO DE POTENCIAS

Las variaciones de temperatura en la atmósfera producen variaciones de la densidad del aire y por consiguiente, del índice de refracción. Es conveniente describir sus propiedades estadísticas usando la función de estructura o el espectro de potencias [2]:

$$E(k,l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle (\phi(u+u',v+v') - \phi(u',v'))^2 \right\rangle \exp(-i2\pi(uk+vl)) dudv$$

y de aquí se deduce que [2]:

$$E(k, l) = 0.023r_0^{\frac{-5}{3}} |(k, l)|^{\frac{-11}{3}}.$$

### 1.1.11 MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO

Este es un método utilizado para simular numéricamente el movimiento browniano.

## 1.2 MÉTODOS PROPUESTOS POR R. G. LANE Y C. M. HARDING

### 1.2.1 CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DEL ESPECTRO DE POTENCIAS

El espectro de las fluctuaciones de la fase

$$P(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u, v) \exp(-i2\pi(uk + vl)) dudv$$

es la raíz cuadrada del espectro de potencias, en valor absoluto.

Entonces se puede hallar el espectro de potencias a partir del espectro de las fluctuaciones de la fase y después obtener la transformada de Fourier inversa y obtener la capa de fase

$$\phi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(k, l) \exp(i2\pi(uk + vl)) dk dl.$$

### 1.2.2 CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE SU MATRIZ DE COVARIANZA

Esto consiste en calcular la covarianza de  $\phi_s(u, v)$  definida por la fórmula

$$\phi_s(u, v) = \phi(u, v) - \int W_A(u', v') \phi(u', v') du' dv',$$

donde  $A$  es la abertura en una rejilla cuadrada de dimensión finita que representa una abertura en la atmósfera.

Inicialmente se usará la descomposición en autovalores para encontrar una base de autovectores y así generar una fase como combinación lineal de estos autovectores con coeficientes aleatorios. Después se da una justificación heurística para interpolar la fase con el método desplazamiento del punto medio aleatorio.

## CAPITULO 2

### MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO

El método del desplazamiento del punto medio aleatorio consiste en simular numéricamente el movimiento browniano [9] el cual tiene características en común con la teoría de turbulencia de Kolmogorov. Este método proporciona una alta resolución en la capa de fase generada y además es computacionalmente eficiente y algorítmicamente fácil de entender [9].

El valor medio del cuadrado de la longitud del desplazamiento experimentado por una partícula sometida a movimiento browniano es proporcional al tiempo que se invierte en dicho desplazamiento. Es decir, si  $x(t)$  expresa la posición en el instante  $t$  de la partícula en el espacio y si  $E$  denota la esperanza de la variable aleatoria, se tiene que

$$E\left[|x(t_2) - x(t_1)|^2\right] \text{ es proporcional a } |t_2 - t_1|$$

El incremento de  $x$  es estadísticamente autosimilar [9] en el sentido que

$$x(t_0 + t) - x(t_0) \quad y \quad \frac{1}{\sqrt{r}}(x(t_0 + rt) - x(t_0))$$

tienen la misma distribución para cualquier  $t_0$  y  $r > 0$ . Si nosotros tomamos por conveniencia  $t_0 = 0$  y  $x(t_0) = 0$  entonces las dos funciones aleatorias

$$x(t) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{r}} x(rt)$$

son estadísticamente indistinguibles [9] y la segunda es una versión reescalada de la primera con respecto a la variable  $t$ .

Este es un método utilizado para producir de forma sencilla el movimiento browniano.

El objetivo es determinar los valores  $x(t)$  para  $t$  entre 0 y 1, se hace  $x(0) = 0$ .

Luego se selecciona  $x(1)$  como una muestra de una variable aleatoria  $N(0, \sigma^2)$ .

y  $\text{var}(x(1) - x(0)) = \sigma^2$ , por lo que

$$\text{var}(x(t_2) - x(t_1)) = |t_2 - t_1| \sigma^2 \quad (1)$$

para  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ . Si se selecciona  $x\left(\frac{1}{2}\right)$  como el promedio de  $x(0)$  y  $x(1)$

más una desviación gaussiana  $D_1$  con media 0 y varianza  $\Delta_1^2$ . Entonces

$$x\left(\frac{1}{2}\right) - x(0) = \frac{1}{2}(x(1) - x(0)) + D_1$$

Así  $x\left(\frac{1}{2}\right) - x(0)$  tiene media 0 y lo mismo sucede para  $x(1) - x\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Se deduce entonces que

$$\text{var}\left(x\left(\frac{1}{2}\right) - x(0)\right) = \frac{1}{4}\text{var}(x(1) - x(0)) + \Delta_1^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

y por lo tanto,

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{4}\sigma^2$$

En la etapa siguiente, se procede de forma análoga:

$$x\left(\frac{1}{4}\right) - x(0) = \frac{1}{2}\left(x\left(\frac{1}{2}\right) + x(0)\right) + D_2$$

De nuevo los incrementos  $x\left(\frac{1}{2}\right) - x\left(\frac{1}{4}\right)$  y  $x\left(\frac{1}{4}\right) - x(0)$  son gaussianos y de media 0.

Se debe elegir la varianza de  $D_2$  de forma que



$$\text{var}\left(x\left(\frac{1}{4}\right) - x(0)\right) = \frac{1}{4} \text{var}\left(x\left(\frac{1}{2}\right) - x(0)\right) + \Delta_2^2 = \frac{1}{4} \sigma^2$$

de donde

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{8} \sigma^2$$

Se aplica la misma técnica para determinar  $x\left(\frac{3}{4}\right)$ .

Continuando con estos refinamientos sucesivos, la varianza correspondiente al desplazamiento  $D_n$  resulta ser:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}} \sigma^2$$

## 2.1 ADICIÓN ALEATORIA SUCESIVA

Se dice que los incrementos de  $x$  son estadísticamente autosimilares con parámetro  $H$  si

$$x(t_0 + t) - x(t_0) \quad y \quad \frac{1}{r^H} (x(t_0 + rt) - x(t_0))$$

tienen la misma distribución para cualquier  $t_0$  y  $r > 0$ . Si otra vez hacemos  $t_0 = 0$  y  $x(t_0) = 0$  entonces las dos funciones aleatorias

$$x(t) \quad \text{y} \quad \frac{1}{r^H} x(rt)$$

son estadísticamente indistinguibles. El método de adición aleatoria sucesiva es una extensión del método del desplazamiento del punto medio aleatorio para el cual  $H$  no necesariamente es  $\frac{1}{2}$ . El equivalente de (1) es

$$\text{var}(x(t_2) - x(t_1)) = |t_2 - t_1|^{2H} \sigma^2$$

Utilizando una técnica análoga a la desarrollada para el desplazamiento del punto medio aleatorio, se deducen desplazamientos para los puntos medios que tienen varianzas

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{(2^n)^{2H}} (1 - 2^{2H-2}).$$

$$\text{Cuando } H \neq \frac{1}{2} \quad \text{var}\left(x\left(\frac{1}{2}\right) - x(0)\right) = \text{var}\left(x(1) - x\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \sigma^2,$$

aunque no se cumple que

$$\text{var}\left(x\left(\frac{3}{4}\right) - x\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \sigma^2.$$

Los incrementos no son independientes, salvo en el caso en que  $H = \frac{1}{2}$ , aunque

continúan siendo estacionarios.

## CAPITULO 3

### CÓMO GENERAR UNA CAPA DE FASE KOLMOGOROV

#### 3.1 CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DEL ESPECTRO DE POTENCIAS

##### 3.1.1 REPRESENTACIÓN DE LA MUESTRA

El espectro de potencias bidimensional de Kolmogorov está representado por:

$$E(i, j) = 0.023 \left( \frac{2D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} (i^2 + j^2)^{\frac{-11}{3}}$$

Donde  $i$  y  $j$  son los índices de las muestras. Se puede observar que la variación de la amplitud de las muestras solamente depende de  $\frac{D}{r_0}$ .

##### 3.1.2 NATURALEZA FRACTAL DE LA CAPA DE FASE

Una de las características más importante de las capas de fase es que parecen similares sin importar la escala en la que son vistas. Esta característica se

conoce como autosimilaridad, es una consecuencia directa del espectro de potencia de las fluctuaciones de la fase y de la función de la estructura.

Al cambiar el tamaño de la abertura, es decir agrandando o reduciendo la abertura por el factor  $\alpha$ , no se obtiene ningún efecto en la forma de la función de estructura [2], es decir

$$D_{\phi}(\alpha|r|) = \alpha^{\frac{5}{3}} D_{\phi}(|r|)$$

### 3.1.3 ESPECTRO DE LAS FLUCTUACIONES DE LA FASE

El espectro de las fluctuaciones de la fase es

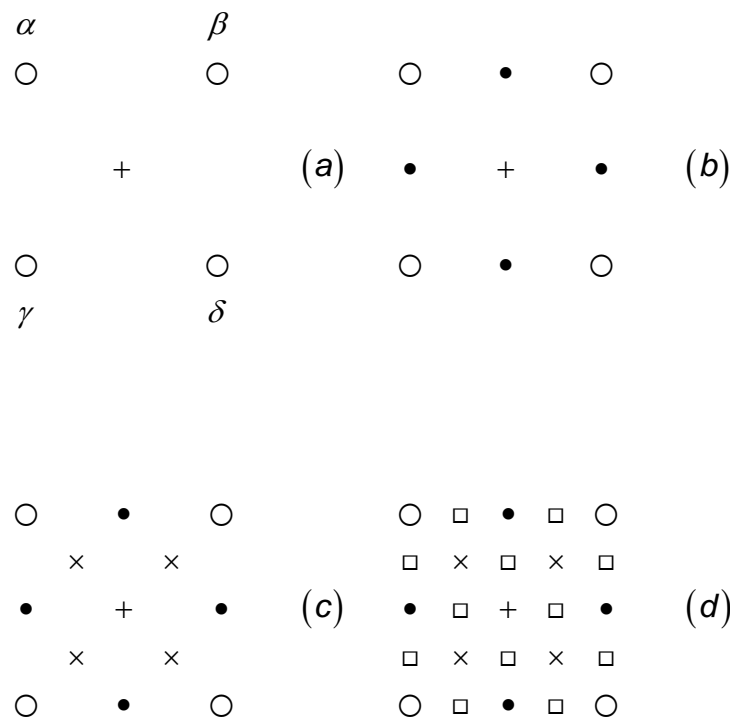
$$P(k,l) = \sqrt{0.023} \left( \frac{2D}{r_0} \right)^{\frac{5}{6}} |(k,l)|^{-\frac{11}{6}} \exp(i\phi(k,l)) \quad (2)$$

Donde  $D$  es una distancia,  $|(k,l)|$  es la norma de la frecuencia  $(k,l)$  y  $\exp(i\phi(k,l))$  representa un número complejo cuya partes real e imaginaria siguen una distribución normal. La capa de fase puede entonces obtenerse utilizando transformadas de Fourier. Analizando (2) se puede concluir que

$P(k,l) \rightarrow \infty$  cuando  $|(k,l)| \rightarrow 0$ . A pesar de esto, la ecuación(2) muestra las fluctuaciones de la fase en cualquier punto.

### 3.1.4 DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO BIDIMENSIONAL

Para simular la turbulencia de Kolmogorov en dos dimensiones el siguiente procedimiento fue implementado por R. G. Lane et al. [5].



**Figura 3. 1** Interpolación de cuatro puntos

Las figuras (a), (b), (c) y (d) muestran una secuencia del método de desplazamiento del punto medio aleatorio. En la figura (a) las cuatro muestras iniciales representadas por círculos vacíos se utilizan para generar el punto central representado por el signo +. En la figura (b) la quinta muestra se usa para generar las muestras representadas por círculos rellenos. En la etapa (c) y (d) se siguen haciendo interpolaciones hasta generar una rejilla de dimensión  $5 \times 5$ .

Los valores de los puntos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  están dados por

$$\alpha = A + 0.5E$$

$$\beta = B + 0.5F$$

$$\gamma = C - 0.5F$$

$$\delta = D - 0.5E$$

donde A, B, C, D denotan variables gaussianas aleatorias con varianza  $\sigma_1^2$  y E, F denotan variables gaussianas aleatorias con varianza  $\sigma_2^2$ . Es claro que si éstas cuatro muestras son realmente muestras de una turbulencia de Kolmogorov de dos dimensiones, entonces ellas deberían tener una relación dada por el espectro de potencias.

Ahora bien,

$$\alpha - \beta = A - B + 0.5E - 0.5F,$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\langle (\alpha - \beta)^2 \rangle &= \sigma_1^2 + \sigma_1^2 + 0.25\sigma_2^2 + .25\sigma_2^2 \\ &= 2\sigma_1^2 + 0.5\sigma_2^2\end{aligned}$$

$$\text{y como } \langle (\alpha - \beta)^2 \rangle = 6.88 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \text{ entonces,}$$

$$2\sigma_c^2 + \frac{\sigma_d^2}{2} = 6.88 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

De forma similar,

$$\alpha - \delta = A - D + E,$$

por tanto

$$\begin{aligned}\langle (\alpha - \delta)^2 \rangle &= \sigma_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ &= 2\sigma_1^2 + \sigma_2^2\end{aligned}$$

$$\text{y como } \langle (\alpha - \delta)^2 \rangle = 6.88 \left( \frac{\sqrt{2}D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \text{ entonces}$$



$$2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 6.88 \left( \frac{\sqrt{2}D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

Es conveniente en esta etapa suponer que  $\frac{D}{r_0} = 1$  y después escalar la capa de

fase resultante por  $\left( \frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}$ . De esta manera los cuatro puntos originales de la

capa de fase son muestras de la turbulencia de Kolmogorov con  $\frac{D}{r_0} = 1$ .

De lo anterior queda el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} = 6.88 \\ 2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 6.88 \times 2^{\frac{5}{3}} \\ \quad = 12.2588 \end{array} \right.$$

de donde  $\sigma_1^2 = 0.7506$  y  $\sigma_2^2 = 10.7575$ .

Como en el caso del algoritmo de una dimensión, se forma un nuevo punto  $m$  por una interpolación lineal y la suma de un desplazamiento aleatorio  $\varepsilon$ , aunque la interpolación ahora es entre cuatro puntos. Entonces

$$m = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} + \varepsilon$$

y

$$\begin{aligned}\alpha - m &= \alpha - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} - \varepsilon \\ &= A + 0.5E - \frac{A + B + C + D}{4} - \varepsilon, \\ &= \frac{3}{4}A + \frac{1}{2}E - \frac{1}{4}B - \frac{1}{4}C - \frac{1}{4}D - \varepsilon\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\langle (\alpha - m)^2 \rangle &= \frac{9}{16}\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 + \frac{1}{16}\sigma_1^2 + \frac{1}{16}\sigma_1^2 + \frac{1}{16}\sigma_1^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \frac{3}{4}\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \frac{3}{4}(0.7506) + \frac{1}{4}(10.7575) + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= 3.2523 + \sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}\langle (\alpha - m)^2 \rangle &= 6.88 \left( \frac{D}{\sqrt{2}r_0} \right)^{\frac{5}{6}} \\ &= 6.88 \times 2^{\frac{5}{6}} \\ &= 3.8613,\end{aligned}$$

entonces  $3.2523 + \sigma_\varepsilon^2 = 3.8613$  de donde  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.6089$

De esta forma, mientras la rejilla se refina, la varianza del desplazamiento aleatorio también se reduce.

La interpolación de las muestras que se encuentran en los bordes requiere un algoritmo similar al algoritmo unidimensional. Por lo tanto

$$m_{borde} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \eta, \text{ donde } \eta \text{ es un desplazamiento aleatorio.}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \alpha - m_{borde} &= \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} - \eta \\ &= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta - \eta \\ &= \frac{1}{2}(A + 0.5E) - \frac{1}{2}(B + 0.5F) - \eta \\ &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}E - \frac{1}{2}B - \frac{1}{4}F - \eta, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \langle (\alpha - m_{borde})^2 \rangle &= \frac{1}{4}\sigma_1^2 + \frac{1}{16}\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_1^2 + \frac{1}{16}\sigma_2^2 + \sigma_\eta^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{8}\sigma_2^2 + \sigma_\eta^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.7506) + \frac{1}{8}(10.7575) + \sigma_\eta^2 \\ &= 1.72 + \sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha - m_{borde})^2 \rangle &= 6.88 \left( \frac{D}{2r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \\
&= 6.88 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \\
&= 2.1671,
\end{aligned}$$

entonces  $1.72 + \sigma_{\eta}^2 = 2.1671$ , de donde  $\sigma_{\eta}^2 = 0.4471$ .

### 3.2 CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE SU MATRIZ DE COVARIANZA

R. G. Lane et al. [2] usan la estructura de la fase para calcular su covarianza en una región finita.

#### 3.2.1 FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

Si  $\phi(u, v)$  representa la capa de fase bidimensional en la abertura de un telescopio, donde  $(u, v)$  son las coordenadas en esta abertura, entonces la función de estructura está dada por:

$$\begin{aligned}
D_\phi(u_1, v_1, u_2, v_2) &= D_\phi(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \\
&= \left\langle [\phi(u_1, v_1) - \phi(u_2, v_2)]^2 \right\rangle \\
&= 6.88 \left[ \frac{|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)|}{r_0} \right]^{5/3}
\end{aligned}$$

### 3.2.2 OPERADOR DE REORDENAMIENTO

Este operador se utiliza para transformar una matriz cuadrada en un vector columna de tal forma que las filas de la matriz de la primera hasta la última quedan una detrás de la otra en el vector.

Por ejemplo, sea  $M$  una matriz  $3 \times 3$ ,  $R$  el operador de reordenamiento y  $V$  un vector tal que  $R(M) = V$ . Entonces

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{bmatrix}$$

El operador de reordenamiento tiene inversa, por tanto podemos hacer la operación contraria y transformar un vector columna en una matriz, por ejemplo

$M = R^{-1}(V)$ . La importancia de esta función radica en que en el proceso de hallar la capa de fase con el método de la covarianza hay que redimensionar algunas matrices.

### 3.2.3 COVARIANZA DE LA CAPA DE FASE

Es imposible definir directamente una función de covarianza para puntos en una capa de fase de Kolmogorov [2]. Sin embargo se puede definir la covarianza sobre una región finita donde se reste el promedio de la fase. La región donde la fase va a ser simulada está definida por la función de abertura siguiente:

$$W_A(u, v) = \begin{cases} c & \text{sobre la región de simulación} \\ 0 & \text{fuera de la región de simulación} \end{cases}$$

donde la constante  $c$  es escogida de tal modo que:

$$\int W_A(u, v) du dv = 1.$$

Ahora, se puede generar una nueva capa de fase haciendo:

$$\phi_s(u, v) = \phi(u, v) - \int W_A(u', v') \phi(u', v') du' dv'.$$

La covarianza de esta nueva capa de fase  $\phi_s(u, v)$  está dada por:

$$C(u_1, v_1, u_2, v_2) = \langle \phi_s(u_1, v_1) \phi_s(u_2, v_2) \rangle$$

De lo anterior se deduce que:

$$\begin{aligned} C &= \left\langle \int [\phi(u_1, v_1) - \phi(u'_1, v'_1)] \times W_A(u'_1, v'_1) du'_1 dv'_1 \int [\phi(u_2, v_2) - \phi(u'_2, v'_2)] \times W_A(u'_2, v'_2) du'_2 dv'_2 \right\rangle \\ &= \iint \langle [\phi(u_1, v_1) - \phi(u'_1, v'_1)] [\phi(u_2, v_2) - \phi(u'_2, v'_2)] \rangle W_A(u'_1, v'_1) \times W_A(u'_2, v'_2) du'_1 dv'_1 du'_2 dv'_2 \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} D_\phi(u_1, v_1, u_2, v_2) &= \langle [\phi(u_1, v_1) - \phi(u_2, v_2)]^2 \rangle \\ &= \langle \phi(u_1, v_1)^2 - 2\phi(u_1, v_1) \times \phi(u_2, v_2) + \phi(u_2, v_2)^2 \rangle \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} C(u_1, v_1, u_2, v_2) &= -\frac{1}{2} D_\phi(u_1, v_1, u_2, v_2) + \frac{1}{2} \int D_\phi(u'_1, v'_1, u_2, v_2) W_A(u'_1, v'_1) du'_1 dv'_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int D_\phi(u_1, v_1, u'_2, v'_2) W_A(u'_2, v'_2) du'_2 dv'_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int D_\phi(u'_1, v'_1, u'_2, v'_2) W_A(u'_1, v'_1) W_A(u'_2, v'_2) du'_1 dv'_1 du'_2 dv'_2 \end{aligned}$$

La fórmula anterior nos da los valores de la covarianza en cualquier punto de la abertura. Para simular una capa de fase necesitamos generar sus valores en

una rejilla. Si la dimensión de la rejilla inicial es  $N \times N$  arreglamos los puntos de la muestra en un vector  $\Phi$  de dimensión  $N^2$  de tal manera que  $R(\phi_s) = \Phi$ , así  $C_s = \langle \Phi \Phi^T \rangle$  donde la dimensión de  $C_s$  es  $N^2 \times N^2$ .

Después diagonalizamos  $C_s$  de donde nos queda  $C_s = UDU^T$ , siendo  $D$  una matriz diagonal con autovalores positivos.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & d_{N^2} \end{bmatrix}$$

y  $U = (U_1, U_2, \dots, U_{N^2})$ , donde  $U_i$  son los autovectores de  $C_s$ .

Por tanto esta covarianza es definida positiva.

Ahora se puede generar un vector aleatorio  $\vec{x}$  donde cada elemento es independiente y éstos tienen su varianza dada por los correspondientes elementos de la diagonal principal de  $D$ .

Esto satisface el segundo momento de Kolmogorov [2], lo cual es suficiente para completar lo descrito en un proceso Gaussiano. Entonces la capa de fase se define así:

$$\Phi = U \vec{x}$$



$\Phi$  es el vector que representa la capa de fase, pero lo que se requiere es la matriz  $\phi_s$ , la cual se calcula haciendo  $\phi_s = R^{-1}(\Phi)$ .

Con este método  $N$  no puede ser demasiado grande puesto que las dimensiones de la matriz de covarianza son  $N^2 \times N^2$  y esto generaría una matriz de covarianza muy grande.

### 3.2.4 DERIVACIÓN DEL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO

Una técnica más general derivada del método del desplazamiento del punto medio es representar la fase sobre una región finita como un conjunto de funciones base.

Para mostrar de una forma clara en qué consiste esta técnica, suponga que se tiene una capa de fase de dimensión  $N \times N$  donde sus componentes se representan por  $X$ 's

X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X

**Figura 3.2** Capa de fase inicial

Esta capa de fase se denomina de baja resolución y se denota por  $\Phi_l$ .

Al aplicarle el método del desplazamiento del punto medio aleatorio queda:

X	*	X	*	X	*	X
*	•	•	•	•	•	*
X	•	X	•	X	•	X
*	•	•	•	•	•	*
X	•	X	•	X	•	X
*	•	•	•	•	•	*
X	*	X	*	X	*	X

**Figura 3.3** Capa de fase interpolada

Esta capa de fase se denomina de alta resolución y se denota por  $\Phi_h$ . En la Figura 3.3 los círculos y los asteriscos son los puntos interpolados.

Esta capa de fase de alta resolución  $\Phi_h$  puede expresarse en términos de una base de funciones de la siguiente forma:

$$\Phi_h = \sum_{k=1}^{M^2} a_k U_k(u, v)$$

donde  $M = 2N - 1$ ,  $a_k$  son los coeficientes de las funciones de la base y  $U_k(u, v)$  son los autovectores de la matriz de covarianza de alta resolución  $C_s$ .

Ahora se hace  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{M^2} \end{bmatrix}$ ,  $U = [U_0(u, v) \ U_1(u, v) \ U_2(u, v) \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ U_{M^2}(u, v)]$  y

$\Phi_h$  y  $U$  se convierten en vectores con el operador de reordenamiento.

De lo anterior se obtiene

$$\Phi_h = UA \quad (3)$$

Se puede entonces obtener un subconjunto de ecuaciones seleccionando las filas de  $U$  y  $\Phi_h$  correspondientes a los puntos de baja resolución cuyos valores son conocidos. Este conjunto reducido de ecuaciones está dado por

$$\Phi_l = \Theta A \quad (4)$$

donde  $\Theta$  es una submatriz de  $U$  de dimensión  $N^2 \times (M^2 + 1)$ . Si se pudiera despejar  $A$  de (4) entonces se podría sustituir  $A$  en (3) y encontrar  $\Phi_h$ .

El problema de resolver (4) es que la matriz  $\Phi_l$  tiene  $N^2$  puntos y el sistema (4) tiene  $(2N-1)^2 + 1$  coeficientes por estimar. Una forma de resolver (4) es incorporar ecuaciones extras y estimar el valor de  $A$  de la siguiente manera:

$$\hat{A} = (\Theta^T D^{-1} \Theta)^{-1} \Theta^T D^{-1} \Phi_l$$

Ahora se puede concluir que los puntos de alta resolución pueden generarse a partir de los puntos de baja resolución. La alta resolución estimada  $\hat{\Phi}_h$  se genera a partir de  $\hat{A}$  como se describe en (3).

Este proceso describe como podemos interpolar los puntos de alta resolución a través de la región acotada por los puntos de baja resolución.

El proceso descrito hasta ahora es el primer paso para incrementar la resolución de la capa de fase interpolando las muestras de baja resolución. Ahora es

necesario aplicar el método del desplazamiento al punto medio aleatorio para asegurar que los resultados concuerden con la función de estructura.

El proceso de aplicar el método del desplazamiento del punto medio aleatorio se hace considerando la covarianza residual entre la verdadera capa de fase  $\phi$  y su valor estimado  $\hat{\phi}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Covarianza residual} &= E\left\{\left(\phi - \hat{\phi}\right)\left(\phi - \hat{\phi}\right)^T\right\} \\
 &= E\left\{\left(\phi - \hat{\phi}\right)\left(\phi^T - \hat{\phi}^T\right)\right\} \\
 &= E\left\{\phi\phi^T - \phi\hat{\phi}^T - \hat{\phi}\phi^T + \hat{\phi}\hat{\phi}^T\right\} \\
 &= E\left\{\phi\phi^T\right\} - E\left\{\phi\hat{\phi}^T\right\} - E\left\{\hat{\phi}\phi^T\right\} + E\left\{\hat{\phi}\hat{\phi}^T\right\} \\
 &= E\left\{\phi\phi^T\right\} - 2E\left\{\phi\hat{\phi}^T\right\} + E\left\{\hat{\phi}\hat{\phi}^T\right\} \\
 &= UDU^T - 2UD\Theta^T\Delta^TU^T + U\Delta\Theta D\Theta^T\Delta^TU^T
 \end{aligned}$$

donde  $\Delta = D\Theta^T\left[\Theta D\Theta^T\right]^{-1}$ .

También se necesita que los desplazamientos aleatorios agregados no tengan correlación entre sí. Aunque los valores residuales pueden corresponder a cualquier punto interpolado en la rejilla, en general es necesario solamente el punto central.

La variación requerida del desplazamiento aleatorio para un punto interpolado se encuentra en la diagonal de la covarianza residual. Esto se utiliza para generar un desplazamiento aleatorio en la manera discutida en el capítulo 2.

## CAPITULO 4

### IMPLANTACIÓN

#### 4.1 CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DEL ESPECTRO DE POTENCIAS

La transformada de Fourier de la capa de fase es la raíz cuadrada del espectro de potencias en valor absoluto. Entonces se puede crear el espectro de potencias y después hacer la transformada inversa de Fourier para generar la capa de fase.

Para entender esto supongamos que tenemos una rejilla de dimensiones  $3 \times 3$  donde cada punto está representado por una coordenada y la rejilla tiene su centro en el origen.

$$\begin{array}{ccc} (-1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (-1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (-1,-1) & (0,-1) & (-1,-1) \end{array}$$

**Figura 4. 1** Rejilla de dimensiones 3x3

Ahora el espectro de potencias en esta rejilla se halla utilizando la siguiente fórmula:

$$E(i, j) = 0.023(i^2 + j^2)^{\frac{-11}{3}}$$

y nos queda

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.0787 & 1 & 0.0787 \\ 1 & \text{Inf} & 1 \\ 0.0787 & 1 & 0.0787 \end{bmatrix}$$

Sea  $P(i, j) = \sqrt{E(i, j)}$ . El problema ahora es que  $P$  tiene una singularidad en  $k = 0$ . Se pueden acomodar las cosas haciendo la componente central de  $P$  igual a cero, es decir

$$P = \begin{bmatrix} 0.2806 & 1 & 0.2806 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0.2806 & 1 & 0.2806 \end{bmatrix}$$

De la sección 1.2.1 sabemos que

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(r) \exp(i2\pi(k \cdot r)) dk$$

donde  $\phi(k)$  es la capa de fase.

Para hallar  $\phi(k)$  generamos una matriz  $3 \times 3$  de números complejos cuyas partes real e imaginaria son aleatorias y siguen una distribución gaussiana. Por ejemplo, hágase

$$M = \begin{bmatrix} 1.0373 + 0.6617i & 1.0772 + 0.7415i & -0.4139 - 1.5016i \\ -0.0595 + 1.3670i & 0.9375 - 0.4098i & 0.1623 - 0.2012i \\ -0.9645 - 1.1854i & 0.1872 - 0.3436i & -2.6364 - 0.1018i \end{bmatrix}.$$

Esta matriz representa los valores que toma la función exponencial que aparece en la integral. Ahora se hace  $T(i, j) = P(i, j)M(i, j)$  de donde

$$T = \begin{bmatrix} 0.2911 + 0.1857i & 1.0772 + 0.7415i & -0.1161 - 0.4214i \\ -0.0595 + 1.3670i & 0 & 0.1623 - 0.2012i \\ -0.2706 - 0.3326i & 0.1872 - 0.3436i & -0.7398 - 0.0286i \end{bmatrix}.$$

Por último se calcula la parte real de la transformada discreta bidimensional de Fourier de  $T$  y se halla  $\phi(k)$ .

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} 0.5317 & -0.5943 & -2.0183 \\ -2.0722 & -0.1911 & -0.5973 \\ -0.9291 & -1.2805 & 0.4929 \end{bmatrix}$$

Esta capa de fase es muy pequeña para hacer una simulación acertada, se calcula así para mostrar de forma clara como es el procedimiento, pero para una



capa de fase de dimensiones más grandes como  $200 \times 200$ , los resultados son bastante precisos, es decir se obtiene una capa de fase lo suficientemente fina [5].

#### 4.2 CÓMO GENERAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE LA MATRIZ DE COVARIANZA

Para hallar la covarianza analizamos las propiedades de la siguiente ecuación:

$$C(u, v) = \langle \phi(u + u', v + v') \phi(u', v') \rangle_{\phi}.$$

La distancia del punto  $(u + u', v + v')$  al punto  $(u', v')$  solo depende de  $(u, v)$  puesto que  $(u, v) = (u + u', v + v') - (u', v')$  y la distancia entre ellos siempre será el módulo de  $(u, v)$ . Por tanto podemos escribir la covarianza así:

$$C(u, v) = C(|(u, v)|).$$

De lo anterior podemos ver que la correlación con respecto a los puntos  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$  es:

$$C(u_1, v_1, u_2, v_2) = C(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = C(|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)|).$$

#### 4.2.1 PROPIEDADES DE C

Se demostrara que la matriz de covarianza es simétrica con respecto a la diagonal principal y la diagonal secundaria.

Sea el centro de C el punto donde se interceptan la diagonal principal con la diagonal secundaria. Si C es de dimensiones  $n \times n$  donde n es impar entonces el

centro estará en  $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ . Si n es par el centro será un punto que no

pertenece a la matriz que equidista de los puntos  $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right)$ ,  $\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}\right)$  y

$\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+1\right)$ , que casualmente también es  $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ .

Supongamos que C es una matriz 3x3 de la siguiente forma:

1 2 3  
4 5 6  
7 8 9.

Algunos puntos simétricos con respecto al centro son: 1 y 9, 2 y 8, 3 y 7. En

general  $i$  y  $9 - i - 1$ .

Ahora supongamos que es una matriz 4x4:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16.

Algunos puntos simétricos respecto al centro son: 1 y 16, 2 y 15, 3 y 14.

En general  $i$  y  $16 - i - 1$ .

Podemos generalizar para una matriz  $n \times n$  y se tendrá que  $i$  y  $n^2 - i - 1$  son simétricos respecto al centro.

Si se tiene una rejilla de dimensiones  $n \times n$  de la siguiente forma:

1	2	.	.	.	$n$
$n+1$	$n+2$	.	.	.	$2n$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	.	.	.	$n^2$

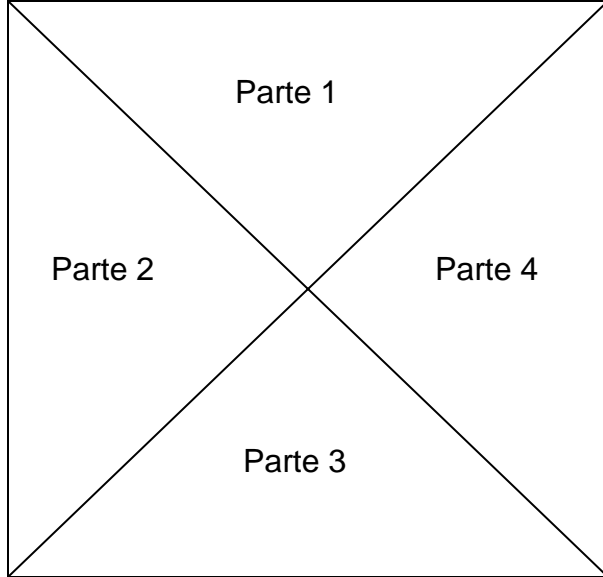
Su respectiva matriz de covarianza será:

$$\begin{array}{cccccc}
C_{11} & C_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1n^2} \\
C_{21} & C_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{2n^2} \\
\cdot & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & \cdot \\
C_{n^2 1} & C_{n^2 2} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{n^2 n^2}
\end{array}$$

La distancia de  $i$  a  $j$  es la misma que de  $j$  a  $i$  por tanto  $C_{ij} = C_{ji}$ , es decir  $C$  es simétrica con respecto a la diagonal principal.

Para una posición  $(i, j)$  su posición simétrica respecto a la diagonal secundaria es  $(n^2 - j + 1, n^2 - i + 1)$ .  $i$  y  $n^2 - i + 1$  son simétricos con respecto al centro de la rejilla y  $j$  y  $n^2 - j + 1$  también, por tanto la distancia de  $i$  a  $j$  es la misma de  $n^2 - i + 1$  a  $n^2 - j + 1$ , es decir  $C_{ij} = C_{n^2 - j + 1, n^2 - i + 1}$  y por ende  $C$  es simétrica con respecto a la diagonal secundaria.

Suponga que la figura 4.2 es la matriz  $C_s$  partida en cuatro partes iguales



**Figura 4. 2** Partición de la matriz de covarianza

La matriz  $C_s$  es simétrica con respecto a la diagonal principal y a la diagonal secundaria por tanto las componentes que están en la parte 1 también están en la parte 2, 3 y 4.

Suponga que  $N$  es par. Entonces la cantidad de componentes que hay que hallar es

$$\begin{aligned}
 N^2 + (N^2 - 2) + (N^2 - 4) + \dots + 2 &= 2 \left( \frac{N^2}{2} + \left( \frac{N^2}{2} - 1 \right) + \left( \frac{N^2}{2} - 2 \right) + \dots + 1 \right) \\
 &= 2 \left( \frac{\frac{N^2}{2} \left( \frac{N^2}{2} + 1 \right)}{2} \right) \\
 &= \frac{N^4}{4} + \frac{N^2}{2}
 \end{aligned}$$

La razón de los puntos hallados con respecto al total es

$$\frac{\frac{N^4}{4} + \frac{N^2}{2}}{N^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2N^2}$$

Ahora suponga que  $N$  es impar. Entonces La cantidad de componentes que hay que hallar es  $N^2 + (N^2 - 2) + (N^2 - 4) + \dots + 1$ .

Como  $N^2$  es impar se hace  $N^2 = 2q - 1$  donde  $q \in \mathbb{Z}^+$ . Entonces

$$\begin{aligned} N^2 + (N^2 - 2) + (N^2 - 4) + \dots + 1 &= (2q - 1) + (2q - 3) + (2q - 5) \dots + 1 \\ &= q^2 \\ &= \left( \frac{N^2 + 1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{N^4}{4} + \frac{N^2}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La razón de los puntos hallados con respecto al total es

$$\frac{\frac{N^4}{4} + \frac{N^2}{2} + \frac{1}{4}}{N^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{4N^4}$$

De lo anterior se puede concluir que sólo se necesita un poco más de un cuarto del tiempo para hallar la matriz de covarianza con respecto al total.

#### 4.2.2 CÓMO HALLAR LA INTEGRAL DOBLE DE LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

Para hallar la integral doble de la función de estructura utilizamos el método de Simpson y la cuadratura Gaussiana los cuales fueron implantados en C.

#### 4.2.3 CÓMO HALLAR LA INTEGRAL CUÁDRUPLE DE LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

Para hallar la integral cuádruple de la función de estructura se utiliza la Regla del Punto Medio. Esta regla no es tan eficiente como el método de Simpson o la cuadratura Gaussiana, la ventaja es que esta integral cuádruple se halla solo una vez.

#### 4.2.4 CÓMO HALLAR LA COVARIANZA DE LA CAPA DE FASE

Hallar la covarianza de la capa de fase ahora es fácil puesto que se sabe como hallar las integrales que se relacionan con ésta. La fórmula (5) da los valores de la covarianza en cualquier punto de la abertura, por lo que se puede hallar todas las componentes de la matriz de covarianza.

#### 4.2.5 CÓMO HALLAR LA CAPA DE FASE

Para hallar la capa de fase  $\phi$  a partir de la matriz de covarianza  $C_s$  primero se diagonaliza  $C_s$ , es decir, se halla  $U$  y  $D$  tal que  $C_s = UDU^T$ . Después se hace  $\Phi = U\vec{x}$  donde  $R(\phi) = \Phi$ ,  $R$  es el operador “stacking” y  $\vec{x}$  es un vector aleatorio en el cual cada elemento tiene su varianza dada por los correspondientes elementos de la diagonal principal de  $D$ . Por último se halla  $\phi$  haciendo  $\phi = R^{-1}(\Phi)$ .

#### 4.3 INTERPOLACIÓN DE LA CAPA DE FASE

Para hacer una simulación numérica de la distorsión atmosférica en un frente de onda con la ayuda del computador se necesita una matriz que represente este fenómeno (capa de fase). La calidad de la simulación depende de esta matriz, mientras mayor sea la matriz, mejor será la simulación (en la práctica se considera buena una capa de fase generada con el método de la covarianza si la matriz es de dimensión por lo menos 32x32 [2]), pero también hay que tener en cuenta que si la matriz es muy grande el proceso de generarla será muy lento. Para generar una capa de fase alta resolución a partir de otra de baja resolución y obtener los efectos de las frecuencias bajas se aumenta la resolución utilizando interpolaciones.



Para aplicar el método del desplazamiento del punto medio aleatorio para refinar la capa de fase seguimos tres pasos y después de esto si la matriz original es  $N \times N$ , el resultado será una matriz  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ .

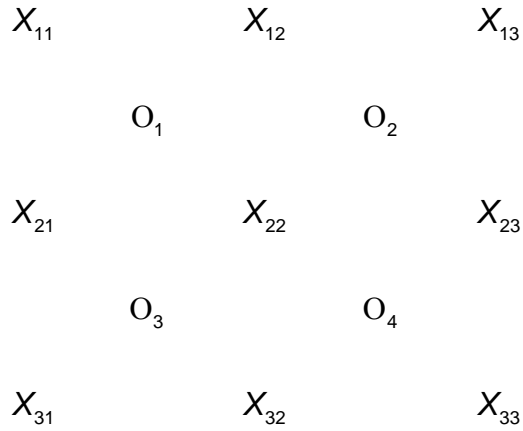
Supongamos que tenemos una matriz 3x3.

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{array}$$

**Figura 4. 1** Matriz inicial.

Esta matriz es generada a partir de una rejilla cuadrada que representa una porción de atmósfera y cada  $X_{ij}$  está relacionado con un punto  $(u_i, u_j) \in \mathbb{R}^2$  de la rejilla.

### 4.3.1 PASO 1



**Figura 4.2** Primera interpolación

$$O_1 = \frac{1}{4}(X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}) + \varepsilon_1$$

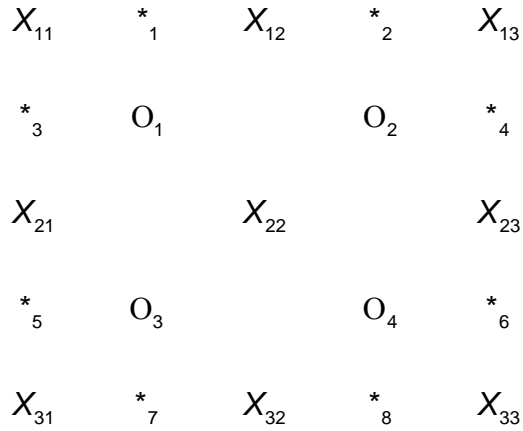
$$O_2 = \frac{1}{4}(X_{12} + X_{13} + X_{22} + X_{23}) + \varepsilon_2$$

$$O_3 = \frac{1}{4}(X_{21} + X_{22} + X_{31} + X_{32}) + \varepsilon_3$$

$$O_4 = \frac{1}{4}(X_{22} + X_{23} + X_{32} + X_{33}) + \varepsilon_4$$

donde cada  $\varepsilon_i \in N\left(0, 0.6089r^{\frac{5}{3}}\right)$  y  $r$  es el espaciado entre los puntos de la rejilla.

### 4.3.2 PASO 2



**Figura 4.3** Segunda interpolación

$$*_1 = \frac{1}{2}(X_{11} + X_{12}) + \gamma_1$$

$$*_2 = \frac{1}{2}(X_{12} + X_{13}) + \gamma_2$$

$$*_3 = \frac{1}{2}(X_{11} + X_{21}) + \gamma_3$$

$$*_4 = \frac{1}{2}(X_{13} + X_{23}) + \gamma_4$$

$$*_5 = \frac{1}{2}(X_{21} + X_{31}) + \gamma_5$$

$$*_6 = \frac{1}{2}(X_{23} + X_{33}) + \gamma_6$$

$$*_7 = \frac{1}{2}(X_{31} + X_{32}) + \gamma_7$$

$$*_8 = \frac{1}{2}(X_{32} + X_{33}) + \gamma_8$$

donde cada  $\gamma_i \in N\left(0, 0.4471r^{\frac{5}{3}}\right)$ .

### 4.3.3 PASO 3

El paso 3 es similar al paso 1 excepto que el  $r$  usado se reduce a un factor de  $\sqrt{2}$ .

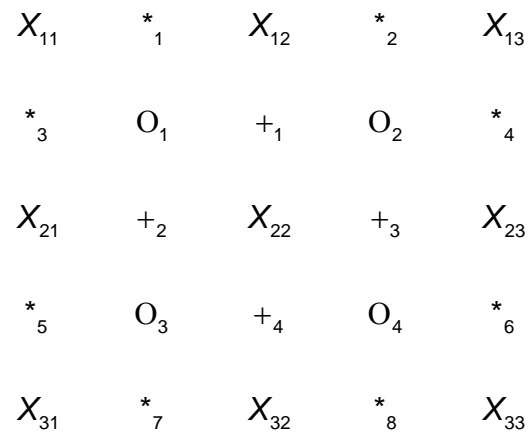


Figura 4. 4 Tercera interpolación

$$+_1 = \frac{1}{4}(X_{12} + O_1 + X_{22} + O_2) + \beta_1$$

$$+_2 = \frac{1}{4}(X_{21} + O_1 + X_{22} + O_3) + \beta_2$$

$$+_3 = \frac{1}{4}(X_{22} + O_2 + X_{23} + O_4) + \beta_3$$

$$+_4 = \frac{1}{4}(X_{22} + O_3 + X_{32} + O_4) + \beta_4$$

$$\text{Donde cada } \beta_i \in N\left(0, 0.6089\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{3}}\right).$$

#### 4.4 RESULTADOS

Los procedimientos que se siguieron en este trabajo se basaron en los métodos de R. G. Lane et al. [5] y C. M. Harding et al. [2]; pero éstos a su vez se fundamentaron en la teoría de turbulencia de Kolmogorov. La capa de fase encontrada por la transformada de Fourier del espectro de potencia de la teoría de turbulencia de Kolmogorov es inadecuada porque la transformada de Fourier produce una capa de fase que se desvía en todo el modelo analítico, excepto por la pequeña región central. Por tal razón haremos énfasis en comparar el

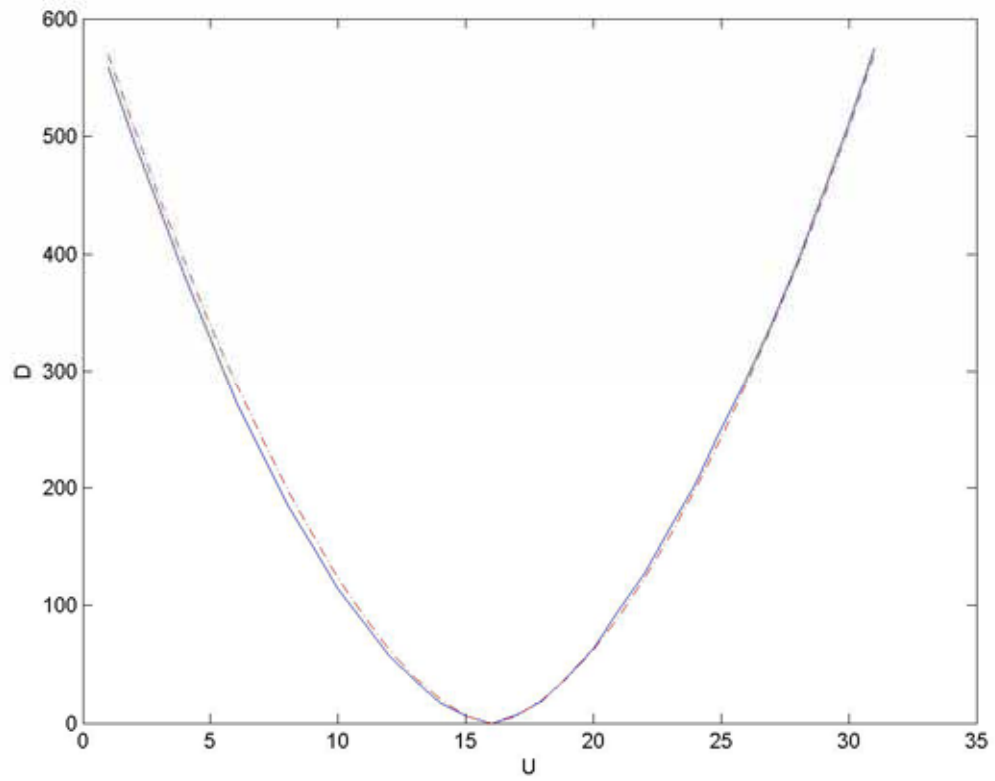
método propuesto por C. M. Harding et al. y la teoría de distorsión atmosférica de Kolmogorov.

#### 4.4.1 FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

La función de estructura teórica de la capa de fase puede analizarse desde un punto de vista bidimensional puesto que se puede expresar de la siguiente manera:

$$D(u) = 6.88 \left[ \frac{|u|}{r_0} \right]^{\frac{5}{3}} \quad \text{donde } u \in \mathbb{R}.$$

Ahora se comparará la función de estructura teórica con la obtenida experimentalmente.



**Figura 4.5** Función de estructura teórica (línea sólida), simulación (línea entrecortada)

#### 4.4.2 CONTORNOS DE LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

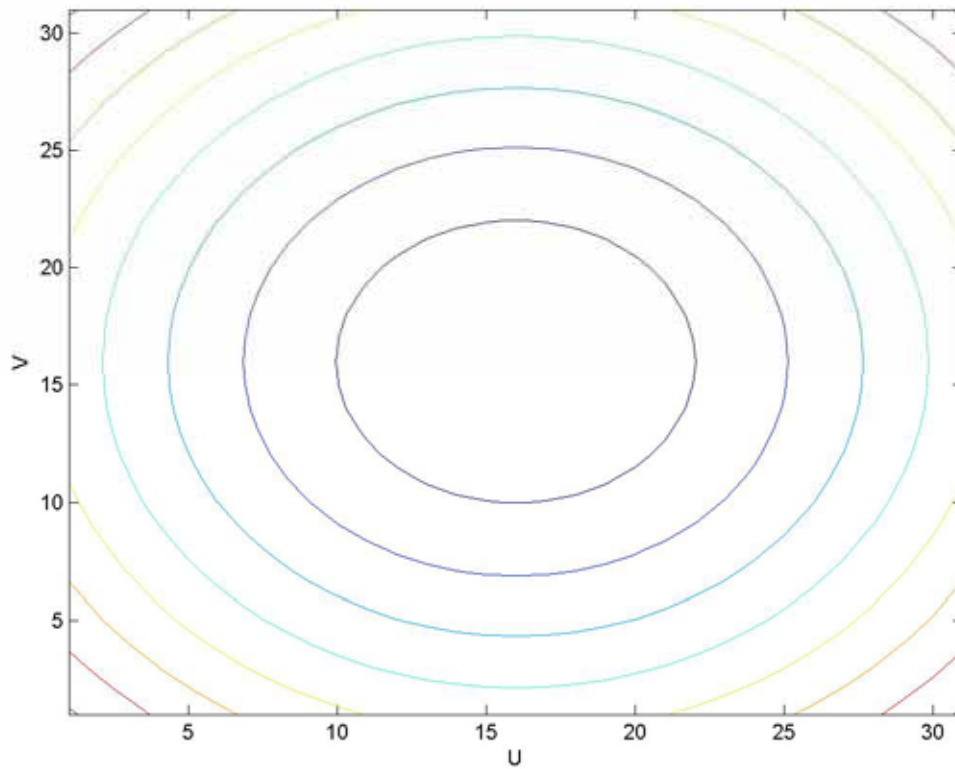


Figura 4.6 Contornos de la función de estructura teórica



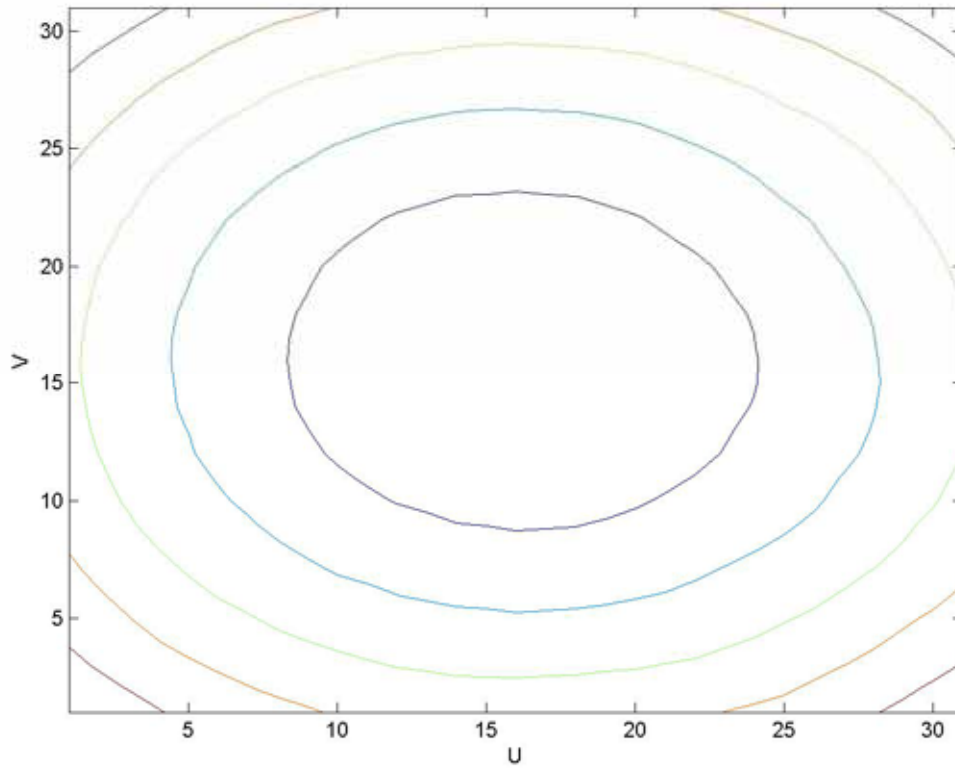


Figura 4.7 Contornos de la función de estructura simulada

#### 4.4.3 CAPA DE LA TURBULENCIA GENERADA CON EL ESPECTRO DE POTENCIAS

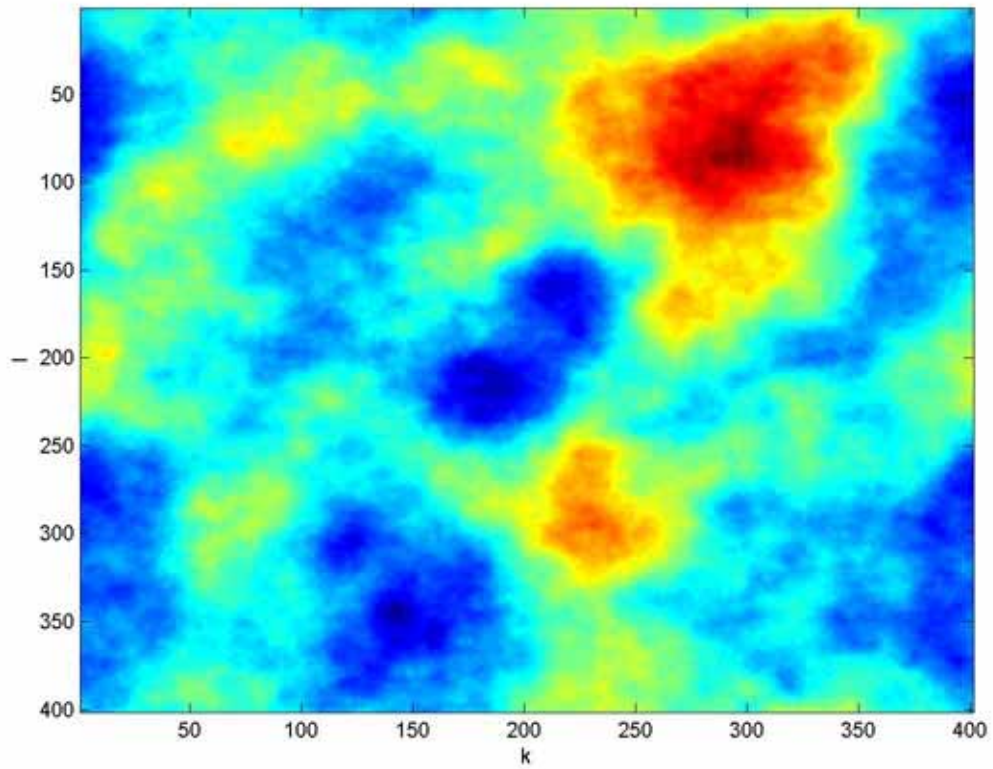


Figura 4.8 Capa de la Turbulencia Generada con el Espectro de Potencias.

#### 4.4.4 CAPA DE LA TURBULENCIA GENERADA CON LA MATRIZ DE COVARIANZA

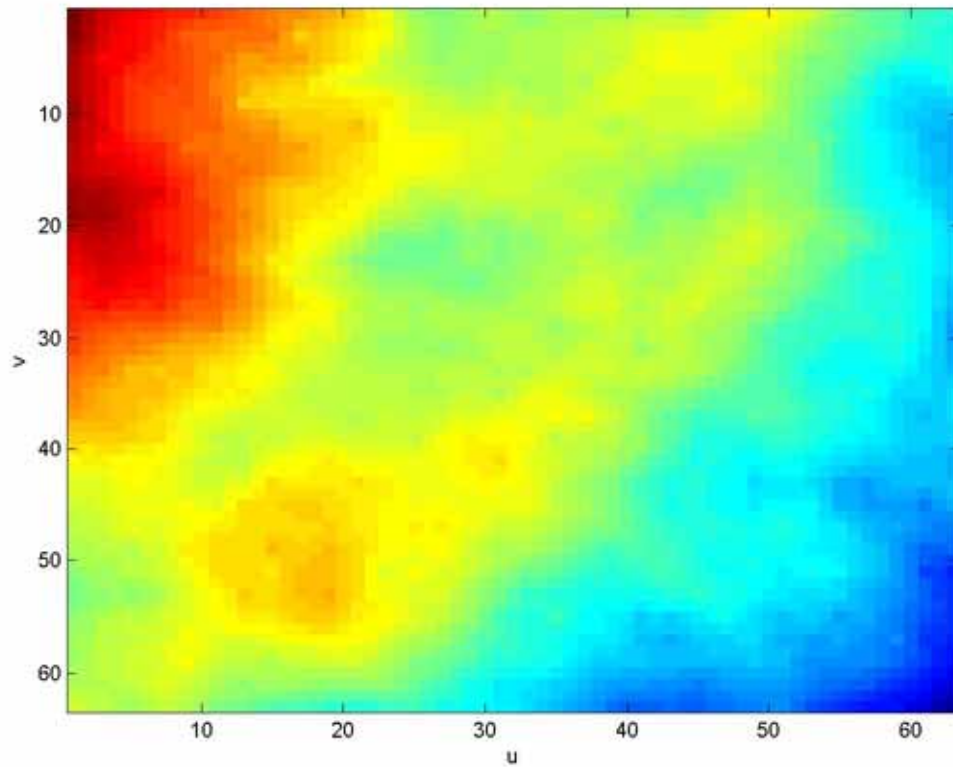


Figura 4.9 Capa de la Turbulencia Generada con la Matriz de Covarianza.

## CAPITULO 5

### DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS ALGORITMOS

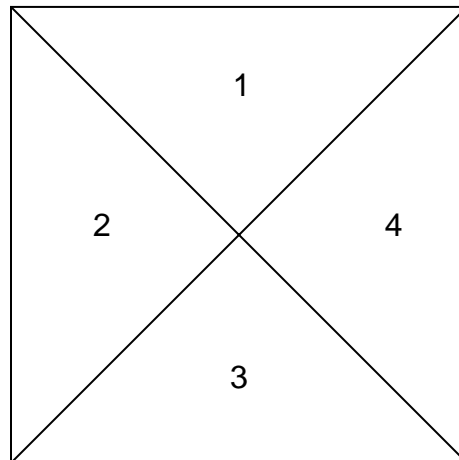
#### 5.1 ALGORITMO PARA HALLAR LA MATRIZ DE COVARIANZA

Se aproximará la matriz de covarianza C.

$$C(u_1, v_1, u_2, v_2) = -\frac{1}{2} D_\phi(u_1, v_1, u_2, v_2) + \frac{1}{2} \int D_\phi(u'_1, v'_1, u_2, v_2) W_A(u'_1, v'_1) du'_1 dv'_1 \\ + \frac{1}{2} \int D_\phi(u_1, v_1, u'_2, v'_2) W_A(u'_2, v'_2) du'_2 dv'_2 \\ - \frac{1}{2} \int D_\phi(u'_1, v'_1, u'_2, v'_2) W_A(u'_1, v'_1) W_A(u'_2, v'_2) du'_1 dv'_1 du'_2 dv'_2$$

Donde  $u_1, v_1, u_2, v_2$  pertenecen a la apertura fija.

Esta matriz es simétrica con respecto a la diagonal principal y la secundaria.



Por tanto se halla la parte 1 y se usan las simetrías para hallar las demás.

Entradas:

N: La cantidad de filas y columnas de la matriz de covarianza

Variables:

d: Espaciado en la rejilla

c4: La cuádruple integral de la función de estructura

K: El centro de la matriz

c2: La doble integral de la función de estructura

u1: Componente de una coordenada

v1: Componente de una coordenada

u2: Componente de una coordenada

v2: Componente de una coordenada

c1: Función de estructura

Salidas:

C: La matriz de covarianza

```

// Se halla el espaciado de la rejilla
1.  d = 2/(N-1)
// Se halla la integral Cuádruple con el Método del Punto Medio
2.  c4 =  $\int D_{\phi}(u'_1, v'_1, u'_2, v'_2) W_A(u'_1, v'_1) W_A(u'_2, v'_2) du'_1 dv'_1 du'_2 dv'_2$ 
// Se halla el centro de la matriz
3.  K = (N+1)/2
// Se hallan las integrales dobles correspondientes a los números en la parte 1
4.  for m=0,..., K-1
5.  { u1 = m*d
6.    for n = 0,..., m
7.      v1 = n*d
// Se halla la integral doble con el método de Simpson
8.      c2[m][n] =  $\int D_{\phi}(u_1, v_1, u'_2, v'_2) W_A(u'_2, v'_2) du'_2 dv'_2$ 
          }
// Se utilizan las simetrías de la matriz de covarianza para hallar las integrales
// dobles correspondientes a los números en las partes 2,3 y 4
9.  for m = 0,..., K-1
10.   for n = m+1,..., K-1
11.     c2[m][n] = c2[n][m]
12.   for m = 0,..., K-1
13.     for n = K,..., N-1
14.       c2[m][n] = c2[m][N-1-n]
15.   for m = K,..., N-1
16.     for n = 0,..., N-1
17.       c2[m][n] = c2[N-1-m][n]
// Se calcula la matriz de covarianza
18.  for m = 0,..., N-1
19.    u1 = m*d
20.    for n = 0,..., N-1
21.      v1 = n*d;
22.      for p = 0,..., N-1
23.        u2 = p*d
24.        for q = 0,..., N-1
25.          { v2 = q*d
26.            c1 =  $D_{\phi}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ 
27.            C  $\leftarrow$  0.5(-c1 + c2[m][n] + c2[p][q] - c4)
          }

```

Las líneas 1, 3, 5, 7, 11, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27 requieren tiempo constante.

La integral de la línea 2 requiere tiempo  $O(N^4)$  [\*].

La integral en la línea 8 requiere tiempo  $O(N^2)$  [\*].

EL bucle de las líneas 4-8 requiere tiempo de

$$(1+2+3+ \dots +K-1)N^2 = \frac{(K-1)K}{2} N < N^4 = O(N^4).$$

EL bucle de las líneas 9-11 requiere tiempo de

$$(K-1)+(K-2)+ \dots +1 = \frac{(K-1)K}{2} < N^2 = O(N^2).$$

El bucle de las líneas 12-14 requiere tiempo de

$$(N-K)K < N^2 = O(N^2).$$

El bucle de las líneas 15-17 requieren tiempo de

$$K(N-K) < N^2 = O(N^2).$$

EL bucle de las líneas 18-27 requiere tiempo de

$$N*N*N*N = N^4 = O(N^4).$$

De lo anterior se concluye que el algoritmo requiere tiempo  $O(N^4)$ .

[\*] Numerical analysis. Burden, Richard L.

## 5.2 ALGORITMO PARA HALLAR LA CAPA DE FASE A PARTIR DE LA MATRIZ DE COVARIANZA

Entradas:

C: La matriz de covarianza

N: La cantidad de filas y columnas de la matriz C

Variables:

U: Matriz no singular

D: Matriz diagonal

a: Desviación estándar de x

b: Número aleatorio.

x: variable aleatoria.

F: Capa de fase como vector columna.

Salidas:

f: La capa de fase



```

// Se diagonaliza la matriz de covarianza
1.  C = U-1DU
2.  for j = 1,...,  $\sqrt{N}$ 
    {
// Se guardan en a las raíces cuadradas de los elementos de la
// diagonal de la matriz D
3.    a =  $\sqrt{D[j][j]}$ 
// Se guardan en b números aleatorios con media cero y varianza 1
4.    b = Número aleatorio con media 0 y varianza 1
// x es un vector aleatorio cuyas componentes tiene media cero y
// varianza determinada por los elementos de la diagonal de la matriz D
5.    x[j] = a*b
    }
// Se halla la capa de fase como vector columna
6.  for j = 1,..., N
7.    for k = 1,..., N
8.      F[j] = U[j][k]*x[k]
// Se redimensiona la capa de fase en una matriz NxN
9.  for j = 1,..., N
10.  for k = 1,..., N
11.    f[j][k] = F[N2(j-1)+k]

```

La diagonalización de la línea 1 requiere tiempo  $O(N^3)$  [\*\*].

La línea 4 requiere  $O(1)$  [\*\*].

El bucle de las líneas 2-5 requiere un tiempo de

$$\sqrt{N} = O\left(N^{\frac{1}{2}}\right).$$

Las líneas 3, 5, 8, y 11 requieren tiempo constante.

El bucle de las líneas 6-8 requiere  $O(N^2)$ .

El bucle de las líneas 9-11 requiere  $O(N^2)$ .

De lo anterior el algoritmo es de orden  $O(N^3)$ .

[\*\*] Numerical linear algebra for applications in statistics.

Gentle, James E.

### 5.3 MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO

Se interpolará la capa de fase siguiente:

$x \ x \ x$

$x \ x \ x$

$x \ x \ x$

Entradas:

f: Una matriz que representa la capa de fase

Salidas:

nf: Una matriz que representa la capa de fase interpolada

Paso 1. Los puntos “y” son el promedio de los cuatro puntos “x” adyacentes más un desplazamiento aleatorio.

```
x      x      x
  y      y
x      x      x
  y      y
x      x      x
```

Paso 2. Los puntos “z” son el promedio de los dos puntos “x” adyacentes más un desplazamiento aleatorio.

```
x z x z x
z y y z
x x x
z y y z
x z x z x
```

Paso 3. Los puntos w son el promedio de los dos puntos “x” y los dos puntos “y” adyacentes más un desplazamiento aleatorio

```
x z x z x
z y w y z
x w x w x
z y w y z
x z x z x
```

Para generar el desplazamiento aleatorio se requiere un tiempo  $O(N^2)$  [\*\*].

Para hacer las interpolaciones en los pasos 1, 2 y 3 se requiere un tiempo  $O(N^2)$ .

Por tanto el algoritmo requiere un tiempo  $O(N^2)$ .

[\*\*] Numerical linear algebra for applications in statistics.

Gentle, James E.

#### **5.4 MÉTODO DEL ESPECTRO DE POTENCIAS**

Entradas:

N: Con este valor se genera una rejilla de dimensiones  $(2N-1) \times (2N-1)$

variables:

m: Matriz que contiene las normas de las frecuencias.

E: Espectro de potencias.

a: Variable auxiliar.

c: Complejo aleatorio.

b: Frecuencias de a reorganizadas

d: Transformada rápida de Fourier bidimensional de b.

Salidas:

Capadefase: Matriz que representa la capa de fase.

// Se halla el espectro de potencias a partir de las frecuencias.

```

1. for i = -N,..., N
2. { for j = -N,..., N
3.   { m[i+N+1][j+N+1] = |(i, j)|
4.     If i = N+1 and j = N+1
// Se hace cero la componente central del espectro
5.     E[i][j] = 0
6.     Else
7.     E[i][j] = 0.023*m[i][j]-11/3
8.   }
9.   c[i][j] = Complejo de componentes aleatorias con media 0 y varianza 1
10.  a[i][j] = c[i][j]√E[i][j]
11. }
// Se organizan las frecuencias de tal manera que las bajas queden cerca del
// centro y altas cerca de los bordes
12. b = Frecuencias de a reorganizadas
13. d = Transformada rápida de Fourier bidimensional de b
// Se halla la capa de fase
14. capadefase = Parte real de d

```

Las líneas 3, 5, 7 y 9 requieren tiempo constante.

La línea 8 requiere un tiempo de  $O(1)$ .

El bucle de las líneas de 1-9 requiere un tiempo de

$(2N+1)(2N+1) = O(N^2)$ .

La línea 10 requiere un tiempo de  $O(N^2)$ .

La línea 11 requiere un tiempo de  $O(N^2 \log N)$  [\*\*\*\*].

La línea 12 requiere un tiempo de  $O(N^2)$ .

De lo anterior el algoritmo requiere un tiempo de  $O(N^2 \log N)$ .

[\*\*\*\*] MAtheatical Análisis and Numerical Methods for Science and

Technology Volume 2. Robert dautray.

## CAPITULO 6

### CONCLUSIONES

1. Los programas basados en la teoría estudiada se implantaron con Matlab y lenguaje C conjuntamente. Para generar la matriz de covarianza de la capa de fase se usó lenguaje C puesto que generarla en Matlab resultó ser muy lento. En C generar una matriz de covarianza de  $1024 \times 1024$  tardó cerca de un minuto mientras que en Matlab tardó casi 12 horas. Pero para calcular la capa de fase a partir de la matriz de covarianza y para calcular la capa de fase a partir del espectro de potencias se utilizó Matlab puesto que en estos procesos están implícitos una diagonalización y transformadas de Fourier.
2. El uso de las simetrías de la matriz de covarianza permitió ahorrar en su cálculo aproximadamente tres cuartas partes del tiempo.
3. Al comparar los resultados obtenidos en la práctica con el modelo teórico se encontró que los resultados son bastante cercanos lo cual indica que la simulación es adecuada. Por ejemplo si comparamos los contornos en la figuras 4.6 y 4.7 puede notarse que son muy parecidos.

4. El método del desplazamiento del punto medio aleatorio fue muy útil para hacer más fina la rejilla en la cual se hace la simulación y obtener los efectos de las frecuencias bajas.
5. En la sección 3.2.3 se estableció que  $R(\phi) = \Phi$  y  $C_s = \langle \Phi \Phi^T \rangle$  por tanto se halla la capa de fase (la cual se representada por una matriz)  $n$ -veces  $500 \leq n \leq 2000$  [2], después se halla el promedio de éstas y el resultado es la capa de fase deseada.
6. Es importante hacer simulaciones de la distorsión atmosférica para entender sus efectos y así poder corregir imágenes atmosféricamente distorsionadas.

## 7. REFERENCIAS

- [1] D. L. Fried, "Statistics of a geometric representation of wavefront distortion", J. Opt. Soc. Am. 55, 1427-1435 (1965).
- [2] C. M. Harding, R. A. Johnston, and R. G. Lane, "Fast Simulation of a Kolmogorov phase screen", Applied Optics 38 (11), 2161-2170 (1999).
- [3] S. Karlin and H. W. Taylor, "A First Course in Stochastic Processes", New York: Academia (1975).
- [4] A. N. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large Reynolds numbers", in Turbulence, classic paper on Statistical Theory (S.K. Friedlanders and L. Topper, eds.), pp. 151-155, New York: Wiley – Interscience, (1961).
- [5] R. G. Lane, A. Glindemann and J. C. Dainty, "Simulation of a Kolmogorov phase screen", Waves Random Media 2, 209-224 (1992).
- [6] N. Roddier, "Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials", Opt. Eng. 29, 1174-1180 (1990).



- [7] M. C. Roggemann, B. Welsh, D. Montera, and T. A. Rhoadarmer, "Method for simulating atmospheric turbulence phase effects for multiple time slices and anisopalnatic conditions", *Applied Optics* 34 (20), 4037-4051 (1995)
- [8] Schwartz, Laurent, "Théorie des Distributions".  
Hermann Paris (1966).
- [9] . I. Tatarskii, "The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation", New York: National Oceanic and Atmospheric Administration (1971).