

**CONJUNTO DE PRODUCTIVIDAD PARA PROBLEMAS DE  
ANÁLISIS ENVOLVENTE DE DATOS**

Por

**Viviana Anllely Beltrán Ballesteros**

Tesis sometida en cumplimiento parcial  
de los requisitos para el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

en

**Matemática Aplicada**

**UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO  
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ  
2004**

Aprobado por:

---

Acuña, Edgar, Ph.D.  
**Miembro, Comité Graduado.**

---

Fecha

---

Saito, Tokuji, Ph.D.  
**Miembro, Comité Graduado.**

---

Fecha

---

Vásquez, Pedro, Ph.D.  
**Presidente, Comité Graduado.**

---

Fecha

---

Cedeño, José, Ph.D.  
**Representante de Estudios Graduados.**

---

Fecha

---

Vásquez, Pedro, Ph.D.  
**Director del Departamento.**

---

Fecha

## **ABSTRACT**

Data Envelopment Analysis (DEA) developed by A. Charnes, W Cooper and E. Rhodes, is a non-parametric method, based on linear programming. DEA is used to measure the productivity and the relative efficiency of units of organization such as schools, hospitals, banking branch offices, etc., that utilize multiple resources to produce multiple products. The main goal of DEA is to find a frontier of efficiency, formed by those combinations of resources that optimize the quantity of products manufactured minimizing the costs of production, and from this frontier, to evaluate the relative efficiency of the combinations of resources that do not belong to the same one.

The bounded set by the frontier of efficiency is called production set. This set is determined uniquely by a system of advanced postulates. Studying the production set that are obtained by solving the problem using DEA models, it is observed that the production regions are not bounded, therefore these sets contain a great number of combinations of resources, which are not always considered.

In this work, form to bound the production set of problems resolved using DEA and will be shown a method for measuring the efficiency of the Decision Unit Making (DMU) will be illustrated.

## **RESUMEN**

El análisis envolvente de datos (DEA por sus siglas en inglés), desarrollado por A. Charnes, W Cooper y E. Rhodes, es un método no paramétrico, basado en programación lineal, para medir la productividad y la eficiencia relativa de unidades de organización como escuelas, hospitales, sucursales bancarias, etc., que utilizan múltiples recursos para producir múltiples productos.

El objetivo fundamental de DEA es hallar una frontera de eficiencia, formada por aquellas combinaciones de recursos que optimizan la cantidad de productos fabricados minimizando los costos de producción, y a partir de esta frontera, evaluar la eficiencia relativa de las combinaciones de recursos que no pertenezcan a la misma.

El conjunto limitado por la frontera de eficiencia recibe el nombre de conjunto de posible producción. Este conjunto está determinado de forma única por un sistema de postulados. Cuando se estudian los conjuntos de posible producción, obtenidos al resolver un problema usando alguno de los modelos DEA, se observa que las regiones de producción que se obtienen son no acotadas, por tanto estos conjuntos contienen un gran número de combinaciones de recursos, las cuales no se considerarán en la realidad.

En este trabajo se mostrará una forma de acotar el conjunto de posible producción de problemas resueltos utilizando DEA y se ilustrará la forma de medir la eficiencia de unidades de toma de decisión (DMU por sus siglas en inglés).

## **CONSENTIMIENTO**

Autorizo a la Biblioteca de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario Mayagüez, a copiar de manera parcial o total los resultados obtenidos en este trabajo para propósitos de investigación únicamente.

## **CONSENT**

I do hereby authorize the library of University of Puerto Rico, Mayagüez Campus, to allow partial or complete copying of this document for research purposes only.

**© Copyright by**  
**Viviana Anllely Beltrán Ballesteros**  
2005

**“Antes que la Balanza fuera, el Rostro no miraba al Rostro.  
Y los primitivos Reyes murieron; y su alimento  
no volvió a encontrarse; y la tierra quedó desolada.  
Hasta que la Cabeza apetejada por el deseo universal,  
hubo preparado y comunicado vestiduras de honor.  
Esta Balanza se halla suspendida en un lugar inexistente.  
Con ella fueron pesados los reyes que ya no existían.  
La Balanza consiste en el cuerpo del Anciano de los Días;  
ella no se liga a nada, ella es invisible.  
A ella subieron y a ella suben aquello que no es,  
lo que es, y lo que será.”**

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi familia, por enseñarme a mantener viva la esperanza.

Al Dr. Pedro Vázquez Urbano, por su oportunas asesorías a lo largo del desarrollo de la presente investigación.

A los miembros del Comité Graduado, por sus sugerencias.

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario Mayagüez, por permitirme estudiar en tan prestigiosa universidad y por el apoyo incondicional de sus miembros en el transcurso de mis estudios.

# Tabla de Contenido

Tabla de Contenido.	VII
Lista de Símbolos	X
Lista de Tablas.	XII
Lista de Figuras.	XIV
Lista de Anejos.	XVI
Capítulo 1. Introducción.	1
1.1. El Problema en Estudio.	1
1.2. Objetivos.	2
1.3. Estructura de la Tesis.	2
1.4. Alcance del Estudio.	3
1.5. Limitaciones del Estudio.	3
Capítulo 2. Revisión de Literatura.	4
2.1. Marco Teórico.	4
2.2. Programación Lineal.	4
2.2.1. Fundamentos Teóricos de Programación Lineal.	5
2.2.2. El Problema Dual.	10
2.2.3. Optimización Convexa.	13
2.3. Eficiencia.	15
2.3.1. Consideraciones Generales.	15
2.3.2. La Eficiencia de Farrell.	17

Capítulo 3. Análisis Envolvente de Datos DEA.	23
3.1. Fundamentos Teóricos de DEA.	26
3.2. El Modelo DEA Básico.	28
3.3. Modificaciones del Modelo DEA Básico.	30
3.4. Clasificación de los Modelos DEA.	32
3.4.1. El Modelo DEA CCR.	32
3.4.2. El Modelo DEA BCC.	33
3.4.3. El Modelo DEA FG.	34
3.4.4. El Modelo DEA ST.	35
3.5. Ventajas de DEA.	36
3.6. Desventajas de DEA.	36
3.7. Postulados para Determinar el Posible Conjunto de Producción.	37
Capítulo 4. Presentación y Discusión de Resultados.	43
4.1. Radio de Eficiencia.	43
4.2. Solución del Problema DEA Usando el Polítopo $K_{PI^*}$ .	51
4.3. Medida de Eficiencia de una observación que no pertenece a $K_{PI^*}$ .	53
Capítulo 5. Un Problema Particular.	56
5.1. El Problema en Estudio.	57
5.2. Determinación de Variables.	58
5.3. Análisis de los Datos.	59
5.4. Solución del Problema.	61
5.5. Conclusiones.	90
5.6. Recomendaciones.	91



Capítulo 6. Conclusiones y Trabajos Futuros.	92
6.1. Conclusiones.	92
6.2. Trabajos Futuros.	92
Bibliografía.	93
Anejos.	96

## Lista de Símbolos

PPL	Problema de programación lineal.
DEA	Análisis envolvente de datos.
DMU	Unidad de toma de decisión.
DEA CCR	Modelo DEA propuesto por A. Charnes, W. Cooper y E. Rhodes.
DEA BCC	Modelo DEA propuesto por R. Banker, A. Charnes y W. Cooper.
DEA FG	Modelo DEA propuesto por R. Färe y S. Grosskopf.
DEA ST	Modelo DEA propuesto por L. Seiford y R. Thrall.
$P$	Conjunto de producción.
$PI$	Conjunto de observaciones iniciales.
$X_j$	Vector de recursos para la $j$ -ésima DMU.
$Y_j$	Vector de productos para la $j$ -ésima DMU.
$XI_j$	Vector inicial de recursos para la $j$ -ésima DMU.
$YI_j$	Vector inicial de productos para la $j$ -ésima DMU.
$OE$	Conjunto de observaciones esperadas.
$PI^*$	Unión de los conjuntos $PI$ y $OE$ .

$\hat{L}$	Nivel mínimo de productividad.
$K_{PI^*}$	Politopo convexo generado por $PI^*$ .
$\delta(K_{PI^*})$	Frontera de eficiencia del politopo $K_{PI^*}$ .
$(\hat{X}, \hat{Y})$	Centro de eficiencia del politopo $K_{PI^*}$ .
$R_E(K_{PI^*})$	Radio de eficiencia del politopo $K_{PI^*}$ .
$H(X)$	Proyección horizontal de la observación $(X, Y)$ .
$V(X)$	Proyección vertical de la observación $(X, Y)$ .
$E_E(X)$	Eficiencia de entrada de la observación $(X, Y)$ .
$E_S(X)$	Eficiencia de salida de la observación $(X, Y)$ .
$\bar{L}$	Recta que pasa a través de una observación y el centro de eficiencia.
$C_E(X, Y)$	Intersección de la recta $\bar{L}$ y la frontera de eficiencia.
$CE(X, Y)$	Proyección de la observación $(X, Y)$ al centro de eficiencia.
$F_{PI^*}$	Función de eficiencia.

## Lista de Tablas

Núm.	Título	Pág.
1	Solución óptima para las variables del problema ( <i>E4</i> )	7
2	Relación entre las variables y las restricciones de los problemas primal y dual.	11
3	Solución óptima para las variables del problema ( <i>E7</i> )	12
4	Ejemplo numérico de Appa e Yue (1999).	19
5	Eficiencia relativa para el ejemplo presentado en la tabla 4.	19
6	Ejemplo numérico de Appa e Yue (1999) para dos insumos y un producto.	19
7	Análisis de razones y eficiencia relativa. Ejemplo numérico de Appa e Yue (1999).	20
8	Número de estudiantes por cada sección que participaron en el estudio.	60
9	Porcentaje de estudiantes por número de estudiantes.	60
10	Centro y Radio de eficiencia para los grupos I y II.	62
11	Nota promedio de los grupos I y II.	63
12	Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos I y II, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.	64
13	Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos I y II, para los estudiantes que terminaron la sección analizada.	65
14	Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos I y II, para los estudiantes aprobó la sección analizada.	65
15	Tabla 13: Centro y Radio de eficiencia para los grupos III y IV.	66
16	Nota promedio de los grupos III y IV.	66
17	Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos III y IV, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.	67
18	Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos III y IV, para los estudiantes que terminaron la sección analizada.	67
19	Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos III y IV, para los estudiantes aprobó la sección analizada.	67
20	Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales y la nota numérica final.	68
21	Resultados de los programas DEA CCR para el politopo general, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.	69
22	Resultados de los programas DEA CCR para el politopo general, para los estudiantes que terminaron la sección analizada.	69
23	Resultados de los programas DEA CCR para el politopo general, para los estudiantes que aprobaron la sección analizada.	69
24	Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales, el examen final y la nota numérica final.	84
25	Resultados de los programas DEA CCR para el politopo solución, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.	85
26	Resultados de los programas DEA CCR para el politopo solución, para	

	los estudiantes que terminaron la sección analizadas.	85
27	Resultados de los programas DEA CCR para el politopo solución, para los estudiantes que aprobaron la sección analizada.	85
28	Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales y la nota numérica final.	86
29	Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales y la nota numérica final.	88

## Lista de Figuras

Núm.	Figura	Pág.
1	Gráfica de la isocuanta de un producto que usa dos recursos para elaborar un producto.	18
2	Eficiencia relativa. Ejemplo numérico de Appa e Yue (1999).	20
3	Métodos para obtener la frontera de eficiencia.	22
4	Posible conjunto de producción para el problema 2 según el modelo CCR.	38
5	Posible conjunto de producción para el problema 2 según el modelo BCC.	39
6	Posible conjunto de producción para el problema 2 según el modelo FG.	40
7	Posible conjunto de producción para el problema 2 según el modelo ST.	41
8	Posible conjunto de producción para el problema 2 según el modelo BCC modificado.	42
9	Politopo Convexo generado por PI.	46
10	Politopo $K_{PI}^*$ para el problema 2.	46
11	Proyección horizontal y vertical para la observación $(80, 80)$ .	49
12	Centro y radio de eficiencia, problema 2.	49
13	Politopo para la sección MATE 3031.071.	70
14	Politopo para la sección MATE 3031.073.	70
15	Politopo para la sección MATE 3031.091.	71
16	Politopo para la sección MATE 3031.094.	71
17	Politopo para la sección MATE 3031.09A.	72
18	Politopo para la sección MATE 3032.121	72
19	Politopo para la sección MATE 3032.125.	73
20	Politopo para la sección MATE 3032.12A.	73
21	Politopo para la sección MATE 3032.134.	74
22	Politopo para la sección MATE 3032.135.	74
23	Politopo para la sección MATE 3032.13A.	75
24	Politopo para la sección MATE 3032.151.	75
25	Politopo para la sección MATE 3032.161.	76
26	Politopo para la sección MATE 3031.071 Modificado.	76
27	Politopo para la sección MATE 3031.073 Modificado.	77
28	Politopo para la sección MATE 3031.091 Modificado.	77
29	Politopo para la sección MATE 3031.094 Modificado.	78
30	Politopo para la sección MATE 3031.09A Modificado.	78
31	Politopo para la sección MATE 3032.121 Modificado.	79
32	Politopo para la sección MATE 3032.125 Modificado.	79
33	Politopo para la sección MATE 3032.12A Modificado.	80
34	Politopo para la sección MATE 3032.134 Modificado.	80
35	Politopo para la sección MATE 3032.135 Modificado.	81
36	Politopo para la sección MATE 3032.13A Modificado.	81

37	Politopo para la sección MATE 3032.151 Modificado.	82
38	Politopo para la sección MATE 3032.161 Modificado.	82
39	Centro y radio de eficiencia. Problema general.	87
40	Centro y radio de eficiencia. Problema general.	87
41	Centro y radio de eficiencia. Problema general.	88
42	Centro y radio de eficiencia.	89
43	Centro y radio de eficiencia.	89
44	Centro y radio de eficiencia.	90

## Lista de Anejos

Núm.	Título	Pág.
1	Solución para el problema ( <i>E4</i> ) utilizando LINDO.	98
2	Solución para el problema ( <i>E7</i> ) utilizando LINDO.	99
3	Programa que encuentra el centro y el radio de eficiencia para las secciones de cálculo que toman las pruebas electrónicas computadorizadas utilizando MATLAB.	100
4	Programa que encuentra el centro y el radio de eficiencia para las secciones de cálculo que no toman las pruebas electrónicas computadorizadas utilizando MATLAB.	104
5	Programa que encuentra el centro y el radio de eficiencia de una DMU que utiliza un insumo y fabrica un producto utilizando MATLAB.	107
6	Programa DEA CCR, para la DMU MATE 3031.071 utilizando LINDO.	108



# **Capítulo 1. Introducción**

## **1.1. El Problema en Estudio.**

El análisis envolvente de datos (DEA por sus siglas en inglés), desarrollado por A. Charnes, W Cooper y E. Rhodes, es un método no paramétrico, basado en programación lineal, para medir la productividad y la eficiencia relativa de unidades de organización como escuelas, hospitales, sucursales bancarias, etc., que utilizan múltiples recursos para producir múltiples productos.

El objetivo fundamental de DEA es hallar una frontera de eficiencia, formada por aquellas combinaciones de recursos que optimizan la cantidad de productos fabricados, minimizando los costos de producción, y a partir de esta frontera, evaluar la eficiencia relativa de las combinaciones de recursos que no pertenecen a la misma.

DEA construye, con información recopilada de un conjunto inicial de observaciones, un conjunto de producción. Este conjunto está determinado de forma única por un sistema de postulados.

La creación de un conjunto de producción es algo significativo para los investigadores que estudian un problema particular. Cuando se estudian los conjuntos de producción, obtenidos al resolver un problema usando alguno de los modelos DEA, se observa que este conjunto contiene un gran número de combinaciones de recursos, los cuales no serán considerados en la realidad. Por lo tanto, es necesario realizar una investigación que mejore el conjunto de producción de problemas resueltos, utilizando

alguno de los modelos DEA, citados a lo largo de ésta investigación, para optimizar los métodos de solución para esta clase de modelos.

## **1.2. Objetivos.**

- Estudiar los postulados que determinan el conjunto de producción de problemas solucionados utilizando DEA para determinar si son necesarios o suficientes para describir un conjunto de producción óptimo.
- Obtener una función de producción que optimice el conjunto de producción.
- Aplicar los resultados obtenidos a lo largo de este estudio, a la nota de los estudiantes matriculados en diversas secciones de Cálculo I y Cálculo II, que toman ó no las pruebas electrónicas por computadora, para evaluar la eficiencia de los mismos.

## **1.3. Estructura de la Tesis.**

La presente investigación está dividida en seis capítulos, organizados de la siguiente manera:

- Capítulo 1. La parte introductoria.
- Capítulo 2. Se presenta una breve revisión literaria de los temas relacionados con el presente trabajo.
- Capítulo 3. Se establece el principio análisis envolvente de datos.
- Capítulo 4. Se discuten los resultados obtenidos, de acuerdo a la metodología seleccionada, de tal forma que los resultados sean relevantes.

- Capítulo 5. Se ilustran los resultados obtenidos midiendo la eficiencia de los cursos de Cálculo I y Cálculo II impartidos por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario Mayagüez.
- Capítulo 6. Se incluyen las conclusiones obtenidas después de realizado el estudio.
- Bibliografía. Se presenta el material bibliográfico usado en esta investigación.

#### **1.4. Alcance del Estudio.**

Se pretende mejorar el conjunto de producción de modelos resueltos usando DEA, para mejorar este método de planteamiento y solución de problemas.

#### **1.5. Limitaciones del Estudio.**

La mayor dificultad que presenta este estudio, es que se supone que las muestras de datos son homogéneas, en el sentido que provengan de técnicas de fabricación similar ó usen los mismos recursos para elaborar los mismos productos. Esta es una limitación significativa, ya que el análisis envolvente de datos es un método no paramétrico, así que usa información recopilada directamente de los datos, para obtener la función de producción.

## **Capítulo 2. Revisión de Literatura.**

### **2.1. Marco Teórico.**

La presente investigación se realizó teniendo como marco teórico la programación lineal, la optimización convexa, la geometría de politopos generados por hiperplanos en  $\mathcal{R}^n$  y la teoría necesaria para comprender las técnicas de planteamientos y solución de problemas que se pueden resolver utilizando alguno de los modelos de análisis envolvente de datos citados a lo largo de este trabajo.

### **2.2. Programación Lineal.**

Uno de los grandes problemas que han experimentado los científicos, desde que los hombres intentaron comprender su entorno, es el explicar los fenómenos físicos que suceden a cada instante en el universo, muchos de ellos constituyéndose en verdaderas cajas de Pandora para los intelectuales. Esta explicación de hechos físicos recibe el nombre de modelación.

La modelación matemática consiste en encontrar un conjunto de ecuaciones e inecuaciones que describan, de la mejor forma posible, el comportamiento de un sistema. Hay diversas técnicas de modelación, la gran mayoría depende de la situación estudiada en concreto, entre ellas podemos mencionar las relacionadas con programación lineal.

Los problemas de programación lineal son de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar :} & f(x) \\ \text{Sujeto a :} & x \in S \end{array}$$

Donde

$$S = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq r; g_i(x) \leq 0, r+1 \leq i \leq l; g_i(x) \geq 0, l+1 \leq i \leq m\}$$

y las funciones  $f$  y  $g_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ , son funciones lineales. En éste capítulo se presentarán los fundamentos teóricos básicos de programación lineal.

### 2.2.1. Fundamentos Teóricos de Programación Lineal.

La programación lineal, desarrollada en 1947 por G. Dantzig, consiste en encontrar el valor óptimo, máximo o mínimo, de una función lineal, de  $n$  variables, en un conjunto que puede expresarse como la intersección de un número finito de hiperplanos en  $\mathfrak{R}^n$ . Desde que se desarrolló este método de planteamiento y solución de problemas, ha sido muy utilizada por su capacidad para modelar y resolver problemas grandes y complejos en un tiempo razonable. La formulación estándar de un problema de programación lineal (PPL) es:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & C^T X \\ \text{Sujeto a :} & AX = B \\ & X \geq 0 \end{array} \quad (E1)$$

En este caso:

$X$  : Vector de variables de decisión,  $n$  dimensional.

$C$  : Vector de constantes,  $n$  dimensional, llamado vector de costos.

$A$  : Matrix  $m \times n$  de constantes llamada matrix de coeficientes tecnológicos

$b$  : Vector de constantes con componentes no negativas,  $m$  dimensional.

$m$  : Número de restricciones del problema.

La condición  $X \geq 0$  se conoce como la condición de no negatividad.

Cualquier PPL puede expresarse en forma estándar haciendo manipulaciones algebraicas al conjunto de restricciones. Para transformar una restricción de desigualdad en igualdad se introducen nuevas variables, llamadas variables de holgura si se tiene una desigualdad de tipo  $\leq$  y variables de exceso si se tiene una restricción de tipo  $\geq$ . Un problema de maximización equivale a minimizar el negativo de la función objetivo.

**Problema 1.** Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } & |x| + |y| + |z| \\ \text{Sujeto a : } & x + y \leq 1 \\ & 2x + z = 3 \end{aligned} \quad (E2)$$

Se transformará el problema (E2) en un problema lineal en forma estándar. Por definición, se tiene que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se definen las siguientes variables:

$$x_1 = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Las variables  $x_1$  y  $x_2$ , así definidas son no negativas, y satisfacen:

$$|x| = x_1 + x_2 \quad x = x_1 - x_2$$

Luego, (E2) se puede transformar en

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar : } & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \\
 \text{Sujeto a : } & x_1 - x_2 + y_1 - y_2 \leq 1 \\
 & 2x_1 - 2x_2 + z_1 - z_2 = 3 \\
 & x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{E3}$$

Para convertir en igualdad la primera restricción de (E3), introducimos una variable de holgura  $a \geq 0$ . La forma estándar de (E2) es:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar : } & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \\
 \text{Sujeto a : } & x_1 - x_2 + y_1 - y_2 + a = 1 \\
 & 2x_1 - 2x_2 + z_1 - z_2 = 3 \\
 & x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, a \geq 0
 \end{aligned} \tag{E4}$$

Consideremos el problema (E1). Se define:

- **Solución Factible:** Un vector  $X$  que satisfaga todas las restricciones simultáneamente de un PPL es llamado una solución factible; esto es, si  $X \in S$ . El conjunto de todas las soluciones factibles es llamado región factible.
- **Solución Básica Factible:** Un vector  $X$  con componentes no negativas que satisfaga todas las restricciones simultáneamente de un PPL es llamado una solución básica factible; esto es, si  $X \in S$  y  $X \geq 0$ . El conjunto de todas las soluciones básicas factibles es llamado región básica factible.
- **Solución Factible Óptima:** Un vector  $\bar{X}$  es llamado una solución factible óptima si es una solución factible tal que  $f(X) \geq f(\bar{X})$  para todo vector  $X$  que pertenece a la región factible.

- **Solución Básica Factible Óptima:** Un vector  $\bar{X}$  es llamado una solución básica factible óptima si es una solución básica factible tal que  $f(X) \geq f(\bar{X})$  para todo vector  $X$  que pertenece a la región básica factible.

La solución del problema (E4), hallada usando el software de optimización Linear Interactive Discrete Optimizer (LINDO), se presenta en la Tabla 1.

Variable	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$z_1$	$z_2$	a
Valor	1	0	0	0	1	0	0

**Tabla 1: Solución óptima para las variables del problema (E4).**

Esta es una solución básica factible óptima. Como los problemas (E2) y (E4) son equivalentes, se concluye que es una solución básica factible óptima para el problema original (E2). El valor óptimo de la función objetivo del problema original es 2, y se obtiene cuando  $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ .

**Teorema Fundamental de Programación Lineal:** Considere un problema lineal en su forma estándar (E1). Si  $A$  es una matrix  $m \times n$  de rango  $m$ ,

- Si hay una solución factible, hay una solución básica factible.
- Si hay una solución factible óptima, hay una solución básica factible óptima.

Ver D. Luenberger [14], pág. 19.

**Conjunto Convexo:** Un conjunto  $S \subseteq \mathcal{R}^n$  se dice que es convexo si y sólo si  $\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in S$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$  y para todo  $X_1, X_2 \in S$ .

**Punto Extremo:** Un punto  $X$  en un conjunto convexo  $S$  es llamado un punto extremo de  $S$  si no existen dos puntos diferentes  $X_1, X_2 \in S$  tal que  $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$  para algún  $\lambda \in [0, 1]$ .



**Combinación Lineal Convexa:** Se dice que un vector  $X$  es una combinación lineal convexa de los vectores de  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  si y sólo si  $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$ , para  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , y además  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

**Politopo:** Sea  $A = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ . El conjunto

$$S = \left\{ X \in \mathfrak{R}^n \mid X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k; \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

de todas las combinaciones lineales convexas de vectores de  $A$  se denomina politopo ó envoltura convexa generada por  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ . Si el conjunto de vectores  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  es linealmente independiente, entonces es el conjunto de los  $k$  puntos extremos de  $S$ .

**Teorema de Equivalencia Entre Puntos Extremos y Soluciones Básicas:** Sean  $b$  un vector  $m$  dimensional y  $A$  es una matrix  $m \times n$  de rango  $m$ .

Sea  $K = \{X \mid AX = b, X \geq 0\}$ . Entonces,  $X$  es un punto extremo de  $K$  si y sólo si  $X$  es una solución básica factible del problema

$$\begin{aligned} AX &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned} \tag{E5}$$

Ver D. Luenberger [14], pág. 21.

Del teorema anterior se concluye:

- Si el conjunto convexo  $K$ , determinado por (E5), es no vacío entonces tiene al menos un punto extremo.
- Si existe una solución óptima finita para un problema de programación lineal, la solución óptima le corresponde a un punto extremo del conjunto de restricciones.

- El conjunto de restricciones  $K$  correspondiente al problema (E5) tiene a lo más un número finito de puntos extremos.
- Si  $K$ , el politopo convexo correspondiente a (E5), es acotado entonces  $K$  es un polihedro convexo; es decir,  $K$  consiste de puntos que son combinaciones convexas de un número finito de puntos de  $K$ .

Ver D. Luenberger [14], pág. 22-23.

### **2.2.2. El Problema Dual.**

Asociado e íntimamente relacionado a cualquier PPL, llamado primal, existe otro PPL llamado el problema dual. Estos dos problemas se obtienen de la misma matrix de coeficientes tecnológicos  $A$ , el mismo vector de costos  $C$  y el mismo vector de recursos  $b$ , pero uno de estos problemas es de maximización y el otro de minimización. Si el valor óptimo de las funciones objetivos para estos dos problemas es finito, entonces estos valores son iguales.

Para toda restricción primal hay una variable dual, interpretada como el precio sombra asociada a cada una de las restricciones del problema primal, y para toda variable primal hay una restricción dual. Los coeficientes de las restricciones de una variable primal forman los coeficientes del primer miembro de la restricción dual correspondiente; y el coeficiente objetivo de la misma variable primal se convierte en el segundo miembro de la restricción dual. Las relaciones entre las restricciones y las variables en un PPL se presentan en la Tabla 2.

RESTRICCIONES PRIMAL / DUAL	VARIABLES PRIMAL / DUAL
MAXIMIZACIÓN	MINIMIZACIÓN
Restricciones de Tipo $\leq$	Variable $\geq 0$
Restricciones de Tipo $\geq$	Variable $\leq 0$
Restricciones de Tipo $=$	Variable no restringida

**Tabla 2: Relación entre las variables y las restricciones de los problemas primal y dual.**

El problema dual asociado a un problema de programación en forma estándar, es decir, de la forma (E1) es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar : } \lambda^T b \\
 & \text{Sujeto a : } \lambda^T A \leq C^T \\
 & \lambda \text{ no restringida}
 \end{aligned} \tag{E6}$$

**Lema:** El dual de un problema dual de programación lineal es el problema primal. Ver M. Bazaraa [4], pág. 246.

**Lema de Dualidad Débil:** Si  $\bar{X}$  y  $\bar{\lambda}$  son soluciones factibles para (E1) y (E6), respectivamente, entonces  $C^T \bar{X} \geq \bar{\lambda}^T b$ . Ver D. Luenberger [14], pág. 89.

**Demostración:** Como  $\bar{X} \geq 0$ , por ser solución de (E1), tenemos que

$$\bar{\lambda}^T b = \bar{\lambda}^T (A\bar{X}) = (\bar{\lambda}^T A) \bar{X} \leq C^T \bar{X}$$

Del lema anterior se concluye

- Si el problema primal tiene solución no acotada entonces el problema dual no tiene solución factible. Si el problema dual tiene solución no acotada entonces el problema primal no tiene solución factible.
- Si  $\bar{X}$  y  $\bar{\lambda}$  son soluciones para (E1) y (E6), respectivamente, y si  $C^T \bar{X} = \bar{\lambda}^T b$ , entonces  $\bar{X}$  y  $\bar{\lambda}$  son soluciones óptimas para sus respectivos problemas.

Ver D. Luenberger [14], pág. 89.

**Teorema de Dualidad Fuerte para Programación Lineal:** Si el problema (E1), ó el problema (E6), tiene solución óptima finita, entonces ambos problemas tienen solución óptima finita y los valores óptimos de las funciones objetivos son iguales. Ver D. Luenberger [14], pág. 89.

**Teorema de las Holguras Complementarias:** Considérese los problemas (E1) y (E6). Si  $\bar{X}$  y  $\bar{\lambda}$  son soluciones óptimas para (E1) y (E6), respectivamente, entonces  $\bar{X}^T (C - A^T \bar{\lambda}) = 0$  y  $\bar{\lambda}^T (b - A\bar{X}) = 0$ . Si  $\bar{X}$  y  $\bar{\lambda}$  son soluciones factibles de (E1) y (E6), respectivamente y  $\bar{X}^T (C - A^T \bar{\lambda}) = 0$ , entonces  $\bar{X}$  y  $\bar{\lambda}$  son soluciones óptimas para sus respectivos problemas. Ver M. Bazaraa[4], pág. 253.

Considere el problema (E3). El problema dual asociado a (E3) es:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar :} & \quad w_1 + 3w_2 \\
 \text{Sujeto a :} & \quad w_1 + 2w_2 \leq 1 \\
 & \quad -w_1 - 2w_2 \leq 1 \\
 & \quad w_1 \leq 1 \\
 & \quad -w_1 \leq 1 \\
 & \quad w_2 \leq 1 \\
 & \quad -w_2 \leq 1 \\
 & \quad w_1 \leq 0 \\
 & \quad w_2 \text{ no restringida}
 \end{aligned} \tag{E7}$$

En el problema (E7), la variable  $w_2$  es no restringida; es decir, puede tomar cualquier valor real. Al resolver este problema, usando el software de optimización LINDO, observamos que el valor óptimo para este problema es 2. El valor que toman las variables en el problema (E7) se muestra en la Tabla 3.

Variable	Valor
$w_1$	-1
$w_2$	1

**Tabla 3: Solución óptima para las variables del problema (E7).**

Verifiquemos que se satisface el Teorema de Holgura Complementaria. Tenemos que:

$$\bar{x}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \bar{C}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{\lambda}^T = [-1 \ 1]$$

$$\bar{X}^T (C - A^T \bar{\lambda}) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] * \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Por tanto, se satisface el Teorema de Holguras complementarias.

### 2.2.3. Optimización Convexa.

Uno de los problemas clásicos de optimización, es encontrar el valor óptimo de una función convexa definida en un conjunto convexo. Estos modelos de optimización han sido muy estudiados y reciben el nombre de problemas convexos. Los resultados más importantes en estos estudios se darán a continuación.

**Función Convexa:** Una función  $f$ , definida en un conjunto convexo  $S$  es convexa si para todo  $X_1, X_2 \in S$  y para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , se tiene:

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

Si, para todo  $\lambda \in (0, 1)$  y  $X_1 \neq X_2$ , se tiene:

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2)$$

Entonces se dice que  $f$  es estrictamente convexa.

**Proposición Propiedades de las Funciones Convexas:** Sean  $f_1$  y  $f_2$  funciones convexas, definidas sobre el conjunto convexo  $S$ , sea  $a \geq 0$  y sea  $k \in \mathfrak{R}$ . Entonces:

- $f_1 + f_2$  es una función convexa sobre  $S$ .
- $a f_1$  es una función convexa sobre  $S$ .
- $S_k = \{X \mid X \in S, f_1(X) \leq k\}$  es un conjunto convexo.

Ver D. Luenberger [14], pág. 178.

**Proposición Caracterización de Convexidad:** Sea  $f \in C^1$ . Entonces,  $f$  es convexa sobre el conjunto convexo  $S$  si y sólo si  $f(X_2) \geq f(X_1) + \nabla f(X_1)(X_2 - X_1)$ , para todo  $X_1, X_2 \in S$ . Además,  $f \in C^2$  es convexa sobre el conjunto convexo  $S$  si y sólo si la matrix Hessiana de  $f$  es semidefinida positiva en  $S$ .

Ver D. Luenberger [14], pág. 178-180.

**Teorema:** Sea  $f$  una función convexa definida sobre un conjunto convexo  $S$ . Si  $f$  tiene un mínimo local en  $\bar{X} \in S$ , entonces  $f$  alcanza un mínimo global en  $\bar{X}$ .

Ver D. Luenberger, pág. 181.

**Teorema:** Sea  $f \in C^1$  una función convexa definida sobre un conjunto convexo  $S$ . Si existe un punto  $\bar{X} \in S$ , tal que para todo  $X \in S$ ,  $\nabla f(\bar{X})(X - \bar{X}) \geq 0$ , entonces  $\bar{X}$  es un mínimo global de  $f$  sobre  $S$ . Ver D. Luenberger [14], pág. 181.

## **2.3. Eficiencia.**

Etimológicamente, la palabra eficiencia proviene del latín *efficientia* cuyo significado es “virtud de producir”. La real academia de la lengua española la define como: “Capacidad de disponer de alguien o de algo para conseguir un efecto determinado”. En el ámbito económico, “La eficiencia es la relación entre un ingreso y un egreso; entre una entrada y una salida; entre un recurso y un producto”; o mejor, “es el criterio económico que revela la capacidad administrativa de producir el máximo resultado con un mínimo de recursos, energía y tiempo”. Así, un sistema de producción es eficiente si dada una disponibilidad de recursos, los cuales llamaremos entradas, es capaz de producir una cantidad máxima de productos, los cuales llamaremos salidas. En este capítulo se estudiará el concepto de eficiencia, la forma de medirla y algunas consideraciones generales.

### **2.3.1. Consideraciones Generales.**

La eficiencia es un concepto, utilizado en economía, para estimar el nivel de productividad de una empresa o una unidad de fabricación de recursos. Su fundamentación teórica está basada en la disponibilidad de recursos para la fabricación de un número determinado de productos. La aproximación inicial para el concepto de eficiencia es debido a M. Farrell. En sus estudios iniciales, M. Farrell [12] define:

- **Eficiencia Productiva:** Cuando se maximiza la producción a un costo mínimo.
- **Eficiencia de Intercambio:** Cuando se sustituyen los insumos utilizados en la elaboración de los productos para minimizar los costos de producción.

- **Eficiencia Total:** Cuando se asumen presentes las dos eficiencias anteriores; es decir, cuando se maximiza la producción, sustituyendo los recursos utilizados por aquellos que presenten costos mínimos.

Cabe anotar que existe un tipo especial de eficiencia llamada “eficiencia  $X$ ”. La eficiencia  $X$  clasifica un método de producción en ineficiente si utiliza cantidades excesivas de recursos para la elaboración de los productos, sin tener en cuenta el método de producción utilizado. Actualmente para evaluar la eficiencia de unidades de fabricación de productos, se utiliza el concepto de eficiencia de Pareto, el cual se define:

**La Eficiencia de Pareto:** Sea  $N$  el número de insumos que utiliza la  $j$ -ésima unidad de toma de decisión para elaborar  $M$  productos. Sean  $Y_{rj}$  la cantidad del  $r$ -ésimo producto elaborado y  $X_{ij}$  la disponibilidad del  $i$ -ésimo recurso utilizado por la  $j$ -ésima DMU, para  $r=1, 2, \dots, M$  e  $i=1, 2, \dots, N$ . Se dice que:

- La  $j_0$ -ésima DMU es eficiente Pareto, orientada a la salida, si no existe otra  $j$ -ésima DMU,  $j_0 \neq j$ , tal que  $Y_{r'j} > Y_{r'j_0}$ , para algún  $r'$ , y  $Y_{rj} > Y_{rj_0}$  para todo  $r' \neq r$ . Siempre que  $X_{ij} \leq X_{ij_0}$  para toda  $i$ .
- La  $j_0$ -ésima DMU es eficiente Pareto, orientada a la entrada, si no existe otra  $j$ -ésima DMU,  $j_0 \neq j$ , tal que  $X_{i'j} < X_{i'j_0}$ , para algún  $i'$ , y  $X_{ij} \leq X_{ij_0}$  para toda  $i' \neq i$ . Siempre que  $Y_{rj} > Y_{rj_0}$  para todo  $r$ .

Ver E. Thonassoulis [22], pág. 32.

La eficiencia de Pareto se puede resumir como: “Una combinación de recursos es eficiente si y sólo si no existe otra que mejore los niveles de productividad”.



Cuando se obtiene la eficiencia de alguna unidad de fabricación de recursos debe ser comparada con una unidad estándar. La función que determina el número máximo de productos que se pueden fabricar utilizando diversas combinaciones de recursos recibe el nombre de función frontera. Después que se obtiene la función de frontera, se compara cada unidad del conjunto de producción con la frontera, bajo el supuesto que las desviaciones existentes son comportamientos ineficientes de producción.

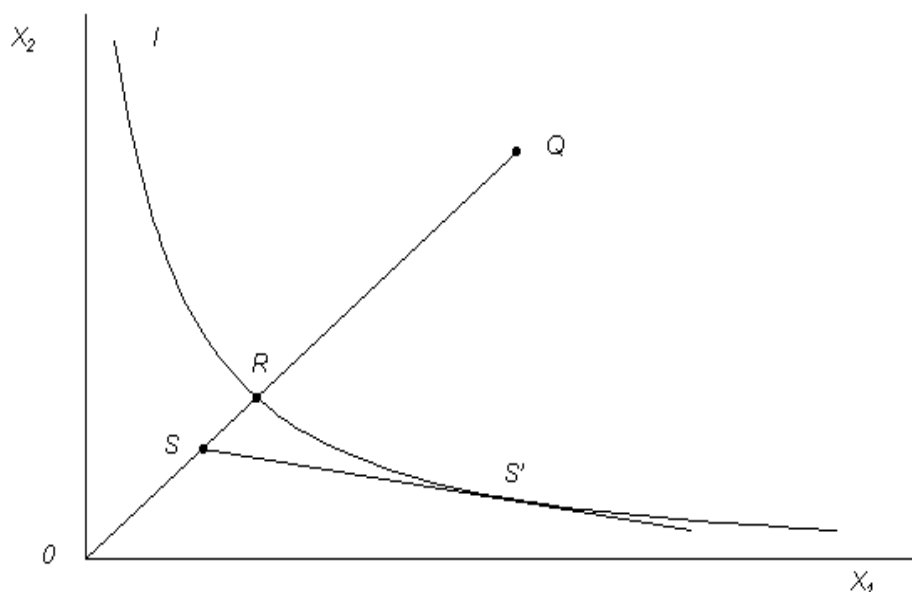
### **2.3.2. La Eficiencia de Farrell.**

Farrell define:

- **Eficiencia Técnica:** Minimiza la cantidad de recursos necesarios para elaborar un determinado nivel de producción.
- **Eficiencia de Precio:** Minimiza el costo de un nivel determinado de producción.

Asumiendo presente la eficiencia técnica.

Supóngase que una empresa utiliza dos recursos para producir un producto. Se supone que la escala de fabricación de productos es constante. La Figura 1 representa la función de producción para ésta empresa.



**Figura 1: Gráfica de la isocuanta de un producto que usa dos recursos para elaborar un producto.**

En esta grafica,  $I$  es la isocuanta<sup>1</sup> unitaria, la cual representa la combinación mínima de los recursos  $X_1$  y  $X_2$  para generar un nivel determinado de producción.  $R$  es una asignación eficiente, mientras que  $Q$  no lo es, por estar  $R$  más cercana al origen. La eficiencia técnica de  $Q$  se define como  $\frac{OR}{OQ}$ .

En el grafico, la curva  $B$  indica la relación existente entre los precios de los recursos. Si consideramos esto,  $S'$  sería la asignación eficiente, en lugar de  $R$ , ya que se obtiene con un costo mínimo. La eficiencia precio de  $R$  se define como  $\frac{OS}{OR}$

Además, Farrell define:

- **Eficiencia Global:** Minimiza el costo de producción observado, si la eficiencia técnica y la eficiencia de precio se asumen presentes.

---

<sup>1</sup> Una isocuanta es el lugar geométrico de los puntos del plano que implican un determinado nivel de producción.

En sus estudios, Farrell establece que la eficiencia global es igual al producto de la eficiencia técnica y la eficiencia de precio; por tanto, es igual a  $\frac{OR}{OQ} \cdot \frac{OS}{OR} = \frac{OS}{OQ}$ .

**Problema 2:** Se consideran nueve unidades para la toma de decisión. Se supone que cada DMU utiliza un insumo para elaborar un producto. La Tabla 4 muestra la cantidad de recursos que utiliza cada DMU para la fabricación del producto y la Tabla 5 muestra su eficiencia relativa. Ver E. Thonassoulis [22], pág. 138.

DMU	Insumo	Producto
DMU1	10	10
DMU2	15	10
DMU3	35	20
DMU4	30	20
DMU5	15	10
DMU6	60	30
DMU7	10	7
DMU8	18	15
DMU9	30	20

Tabla 4: Ejemplo numérico de Appa e Yue (1999).

DMU	Producto por Insumo	Eficiencia Relativa
DMU1	1.00	100%
DMU2	0.67	67%
DMU3	0.57	57%
DMU4	0.67	67%
DMU5	0.67	67%
DMU6	0.50	50%
DMU7	0.70	70%
DMU8	0.83	83%
DMU9	0.67	67%

Tabla 5: Eficiencia relativa para el ejemplo presentado en la Tabla 4.

Supóngase ahora que cada DMU utiliza dos insumos para elaborar un producto. La cantidad de insumos que utiliza cada DMU se presenta en la Tabla 6.

DMU	Insumo 1	Insumo 2	Producto
DMU1	10	15	10
DMU2	15	10	10
DMU3	35	20	20
DMU4	30	25	20
DMU5	15	15	10
DMU6	60	60	30
DMU7	10	10	7
DMU8	18	18	15
DMU9	30	27	20

Tabla 6: Ejemplo numérico de Appa e Yue (1999) para dos insumos y un producto.

El análisis de razones, para éste problema presenta en la Tabla 7 y en la Figura 2. Los primeros tres DMUs son eficientes. Los DMUs no eficientes quedan debajo de la frontera de eficiencia. Ver E. Thonassoulis [22], pág. 138.

DMU	Producto por Insumo 1	Producto por Insumo 2
DMU1	100%	67%
DMU2	67%	100%
DMU3	57%	100%
DMU4	67%	80%
DMU5	67%	67%
DMU6	50%	50%
DMU7	70%	70%
DMU8	83%	83%
DMU9	67%	73%

Tabla 7: Análisis de razones y eficiencia relativa. Ejemplo numérico de Appa e Yue.

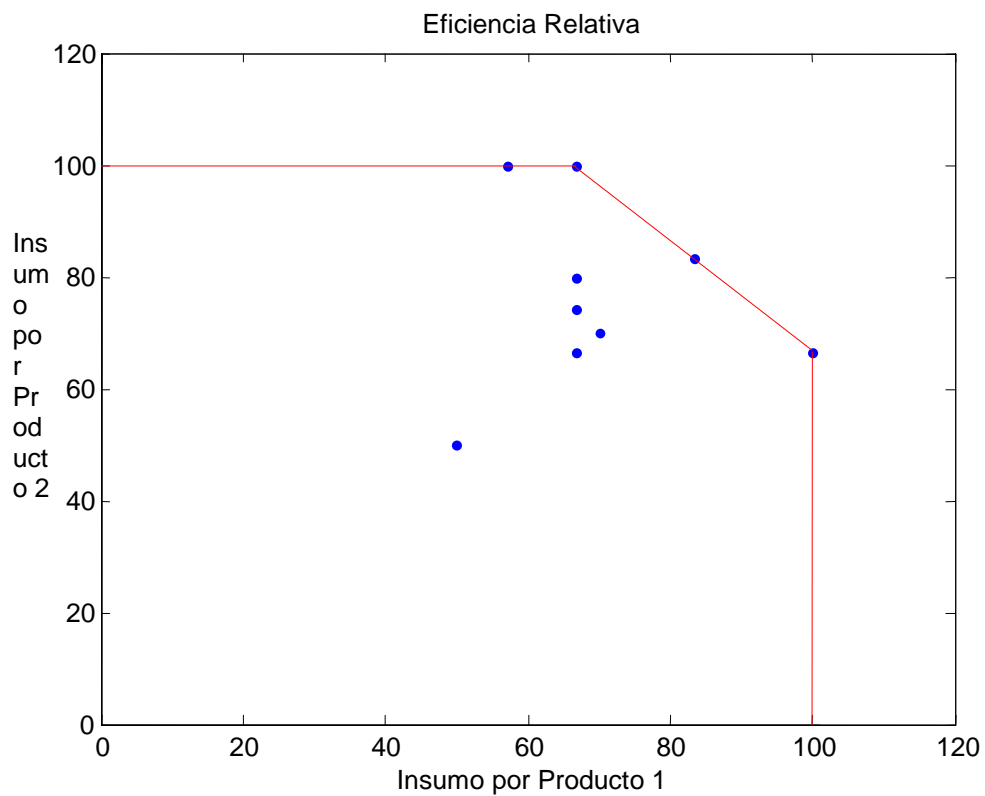


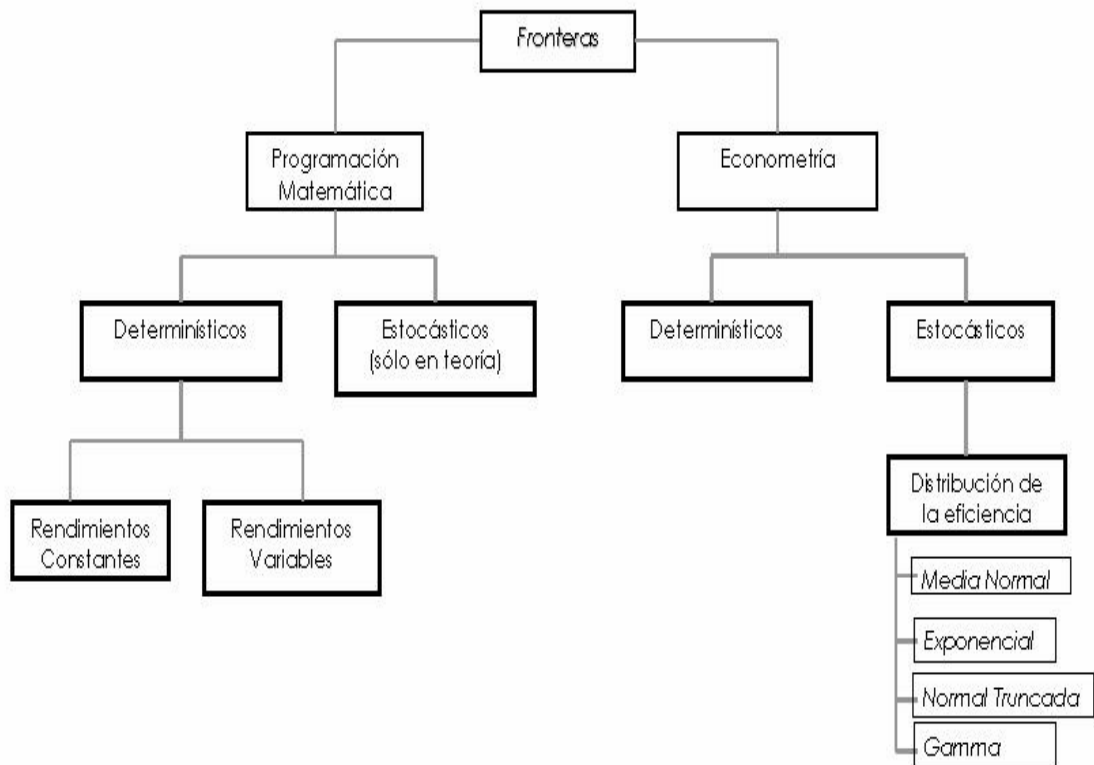
Figura 2: Eficiencia relativa. Ejemplo numérico de Appa e Yue.

En general, la frontera de eficiencia es de tipo:

- **Función de Producción:** Maximiza la cantidad de productos en función de los recursos utilizados.
- **Función de Costos:** Minimiza los costos de producción, en función del precio de los recursos utilizados y los productos obtenidos.

La frontera de eficiencia se puede estimar usando métodos paramétricos y métodos no paramétricos. Los primeros se basan en técnicas econométricas. Su mayor desventaja es que necesita una especificación funcional entre las entradas y las salidas; si la especificación funcional está correctamente definida, la probabilidad de que la frontera obtenida sea la eficiente es bastante elevada. La fortaleza de los segundos es que no requiere alguna relación funcional entre las entradas y las salidas para hallar la función de frontera; esta se obtiene de información extraída directamente de los datos. El mayor inconveniente en esta técnica es que requiere que los datos sean homogéneos.

Tanto los modelos paramétricos como los no paramétricos, pueden ser determinísticos o estocásticos. Los determinísticos asumen que la distancia de cada observación analizada a la frontera es producto de su ineficiencia. Los estocásticos asumen que esa distancia es una perturbación aleatoria. DEA es un método no paramétrico determinístico, basado en programación lineal, para estimar la eficiencia relativa de una DMU, a partir de un conjunto inicial de observaciones.



**Figura 3: Métodos para obtener la frontera de eficiencia.**

### Capítulo 3. Análisis Envolvente de Datos.

Si se supone que una DMU necesita un recurso para obtener un producto, la eficiencia de la DMU esta dada por  $\frac{\textit{salida}}{\textit{entrada}}$ .

En general, una DMU utiliza más de un recurso para producir más de un producto. De manera natural, se puede definir  $\frac{\textit{suma de salidas}}{\textit{suma de entradas}}$ .

El principal problema en esta medida de eficiencia, es la falta de homogeneidad en las dimensiones de las entradas y las salidas de la DMU. Este problema se resuelve introduciendo un sistema de pesos adecuados que normalice tanto el numerador como el denominador. Así, se obtiene la siguiente definición para la eficiencia de la DMU:

$$\textit{eficiencia de la DMU} = \frac{\textit{suma ponderada de salidas}}{\textit{suma ponderada de entradas}}$$

Si la  $j$ -ésima DMU utiliza  $N$  entradas para producir  $M$  salidas, se define su eficiencia relativa como:

$$\theta_j = \frac{\nu \bullet Y_j}{\rho \bullet X_j} \quad (E8)$$

Donde:

$\theta_j$  : Eficiencia relativa de la  $j$ -ésima DMU.

$Y_j$ : Vector  $M$  dimensional. Las componentes de este vector, indica la cantidad elaborada de los diversos productos fabricados.

$X_j$ : Vector  $N$  dimensional. Las componentes de este vector, indica la cantidad utilizada, de los diferentes insumos que se usan en la fabricación de los productos.

$\nu$  : Ponderaciones asociadas a los productos que son fabricados.

$\rho$  : Ponderaciones asociadas a los insumos utilizados.

Este cociente ponderado, de los insumos y los productos que utiliza la  $j$ -ésima DMU, se puede expresar de forma explícita como:

$$\theta = \frac{\sum_{r=1}^M \nu_r Y_r}{\sum_{i=1}^N \rho_i X_i} \quad (E9)$$

Donde:

$\theta$  : Eficiencia observada.

$\nu_r$  : Peso asociado al  $r$ -ésimo producto elaborado.

$\rho_i$  : Peso asociado al  $i$ -ésimo insumo utilizado en la fabricación de los productos.



$Y_r$  : Cantidad del  $r$ -ésimo producto fabricado.

$X_i$  : Cantidad del  $i$ -ésimo insumo utilizado en la elaboración de los productos.

El problema asociado a la definición (E8) es encontrar un conjunto adecuado de pesos,  $\nu$  y  $\rho$ . En general, estos pesos son diferentes en cada DMU analizada. El análisis envolvente de datos, desarrollado por E. Rhodes [19] en su tesis doctoral, dirigida por W. Cooper, proporciona un método para encontrar este conjunto de pesos, bajo el supuesto que los datos observados son homogéneos. La formulación propuesta por él es:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar :} & \quad \frac{\sum_{r=1}^M \nu_r Y_r}{\sum_{i=1}^N \rho_i X_i} \\
 \text{Sujeto a :} & \quad \frac{\sum_{r=1}^M \nu_r Y_r}{\sum_{i=1}^N \rho_i X_i} \leq 1 \\
 & \quad \nu_r \geq 0 \quad r=1, 2, \dots, M \\
 & \quad \rho_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{E10}$$

Las variables utilizadas en el modelo (E10) se definen como en el modelo (E9).

Aunque este modelo DEA inicial es fraccional, A. Charnes y W. Cooper [9] habían presentado un método para linealizar esta clase de modelos. Más tarde, autores como A. Charnes, W Cooper, y E. Rhodes [6], R. Banker, A. Charnes y W Cooper [3], L. Seiford y R. Thrall [20], R. Färe y S. Grosskopf [11] realizan modificaciones al modelo DEA inicial (E10). La ventaja de los modelos DEA es que construye, de forma paramétrica, una región de productividad, la cual está limitada por la frontera de

eficiencia. Las observaciones que conforman el conjunto de producción satisfacen un sistema de postulado. El sistema de postulado que determina la región de productividad está especificado en Q. Wei e Y. Hong [23]. La gran desventaja que presenta los conjuntos de productividad, asociados a los modelos DEA, es que se generan regiones de eficiencia no acotadas, excepto a una modificación del modelo BCC propuesto por W. Cooper y L. Seiford [10]. A lo largo de este trabajo, se mostrará un método para acotar el conjunto de producción posible y se hallará una función que permita medir la eficiencia de un conjunto de observaciones.

### **3.1. Fundamentos Teóricos de DEA.**

El análisis envolvente de datos es un método usado para estimar la medida de la eficiencia relativa, de una DMU, a partir de la obtención de una frontera de eficiencia, hallada con información recopilada de un conjunto inicial de observaciones, cuando se desconocen relaciones funcionales entre las entradas y las salidas que intervienen en un problema. El objetivo fundamental de DEA es optimizar la eficiencia relativa de cada DMU, para establecer una frontera de eficiencia, usando el criterio de eficiencia de Pareto. DEA considera que la  $j$ -ésima DMU es eficiente si elabora más unidades de alguno de los productos fabricados, manteniendo la producción de los otros, usando las mismas entradas, ó si puede generar las mismas salidas, utilizando una menor cantidad de, al menos, una entrada. La frontera eficiente esta conformada por aquellos DMU eficientes. Se sigue de la definición de DMU eficiente que DEA es no paramétrico.

Después de obtenida esta frontera, se evalúa la eficiencia de cada DMU que no pertenezca a esta, asumiendo que no existen perturbaciones aleatorias.

La idea es comparar cada DMU no eficiente con aquella que lo sea y, además, tenga una técnica de producción similar. En general, la unidad con la que se comparan la DMUS ineficiente es una combinación lineal de las DMUS eficientes. Estas unidades ficticias reciben el nombre de Grupo de Referencia.

Se puede medir la eficiencia de una DMU:

- **Orientada a la Entrada:** Cuando se minimiza la cantidad de recursos usados para obtener el mejor nivel de producción.
- **Orientada a la Salida:** Cuando se maximiza la cantidad de productos elaborados usando un nivel fijo de insumo.

Escoger la orientación para medir la eficiencia de las DMU depende de las características del problema analizado.

### 3.2. El Modelo DEA Básico.

La idea inicial, planteada por E. Rhodes, fue maximizar la función de eficiencia relativa de la DMU, sujeto a que el radio de eficiencia no supere la unidad. Su formulación inicial fue:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar :} & \quad \frac{\sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij}} \\
 \text{Sujeto a :} & \quad \frac{\sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij}} \leq 1 \quad j=1,2,\dots,S \\
 & \quad \nu_r \geq 0 \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \quad \rho_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,N
 \end{aligned} \tag{E11}$$

Donde:

$\nu_r$  : Peso asociado a la  $r$ -ésima salida.

$\rho_i$  : Peso asociado a la  $i$ -ésima entrada.

$Y_{rj}$  : Cantidad de la  $r$ -ésima salida en la  $j$ -ésima DMU.

$X_{ij}$  : Cantidad de la  $i$ -ésima entrada en la  $j$ -ésima DMU.

Éste modelo, propuesto por E. Rhodes, es fraccional y tiene infinitas soluciones. En este modelo se considera la eficiencia de una DMU como la razón entre la producción

ponderada total y el consumo ponderado total. El valor de estas ponderaciones las proporciona el modelo sin necesidad de conocer los precios de las entradas o las salidas.

La formulación lineal para este problema es:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar :} & \quad \sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj} \\
 \text{Sujeto a :} & \quad \sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij} = 1 \\
 & \quad \sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,S \quad (E12) \\
 & \quad \nu_r \geq 0 \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \quad \rho_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,N
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar :} & \quad \sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij} \\
 \text{Sujeto a :} & \quad \sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj} = 1 \\
 & \quad \sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,S \quad (E13) \\
 & \quad \nu_r \geq 0 \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \quad \rho_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,N
 \end{aligned}$$

Las variables en las formulaciones (E12) y (E13) se definen de igual manera que en (E11). La mayor desventaja que tiene este modelo, es que puede asignar una ponderación nula a un factor que, desde el punto de vista teórico, tenga gran importancia en la eficiencia de la DMU. Para evitar este hecho, muchas veces, se introducen al modelo información adicional acerca del comportamiento que se requiere satisfaga la DMU.

### 3.3. Modificaciones del Modelo DEA Básico.

La primera modificación del modelo (E12) la hace A. Charnes. Este considera las ponderaciones estrictamente positivas. Su formulación fue:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar :} & \quad \sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj} \\
 \text{Sujeto a :} & \quad \sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij} = 1 \\
 & \quad \sum_{r=1}^M \nu_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,S \\
 & \quad \nu_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \quad \rho_i \geq \varepsilon \quad i=1,2,\dots,N \\
 & \quad \varepsilon > 0
 \end{aligned} \tag{E14}$$

Las variables en el modelo (E14) se definen como en (E11),  $\varepsilon$  es una constante (En muchos modelos se asume  $\varepsilon = 10^{-6}$ ). Este modelo en la práctica no es muy usado para calcular eficiencia, sino que se emplea su dual. El problema dual asociado a (E14) es:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar :} & \quad \psi_j = \theta_j + \left( \sum_{i=1}^N \phi_i + \sum_{r=1}^M \varphi_r \right) \\
 \text{Sujeto a :} & \quad \sum_{j=1}^S \lambda_j X_{ij} + \phi_i = X_{ij} \quad i=1,2,\dots,N \\
 & \quad \sum_{j=1}^S \lambda_j Y_{rj} - \varphi_r = \theta_j Y_{rj} \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \quad \lambda_j \geq \theta_j \\
 & \quad \varphi_r \geq 0 \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \quad \phi_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,N
 \end{aligned} \tag{E15}$$

Donde:

$\theta_j$ : Es la eficiencia observada de la  $j$ -ésima DMU.

$\lambda_j$ : Son las ponderaciones obtenidas para la  $j$ -ésima DMU, del programa lineal original.

$\phi_i$  y  $\varphi_r$ : variables de holguras y artificiales, introducidas para transformar las desigualdades en igualdades.

Las demás variables en el modelo (E15) se definen como en (E14).

En este caso, la  $j$ -ésima DMU es eficiente si  $\theta_j = 1$ . Esto es obvio, ya que el programa busca aquella DMU que, bajo un nivel fijo de recursos, tenga el mejor nivel de producción ó dado un nivel de producción, utilice la menor cantidad de recursos. Si al realizar la búsqueda, no encuentra una mejor DMU, le asignara el valor uno a la  $j$ -ésima DMU, y al resto de las ponderaciones le asigna el valor cero.

Si  $\theta_j > 1$  la  $j$ -ésima DMU es ineficiente, porque es posible hallar otra DMU que genere mejores niveles de productividad.

Es imposible que  $\theta_j < 1$ , porque siempre se puede asignar el valor de  $\theta_j = 1$  y al resto de ponderaciones el valor de cero.

### **3.4. Clasificación de los Modelos DEA.**

Los modelos DEA básicos se clasifican, principalmente, en cuatro clases: Los CCR (Siglas de A. Charnes, W. Cooper y E. Rhodes), los BCC (Siglas de R. Banker, A. Charnes y W. Cooper), los FG (Siglas de R. Färe y S. Grosskopf) y los ST (Siglas de L. Seiford y R. Thrall).

#### **3.4.1. El Modelo DEA CCR.**

Este modelo fue inicialmente propuesto por E. Rhodes [19] en su tesis doctoral dirigida por W. Cooper. Allí define la eficiencia como una razón constante entre los recursos utilizados por una DMU y los productos que obtiene, después de aplicada una misma técnica de elaboración de productos. El problema de su modelo es que, al no colocarle ninguna restricción a las ponderaciones que requería hallar para normalizar la dimensión entre los productos y los recursos que utiliza la DMU para medir la eficiencia, algunas ponderaciones tomaban el valor de cero. A. Charnes [8] modifica este modelo suponiendo que cada una de las ponderaciones es mayor que una cierta cantidad positiva. Además evita que el denominador de la razón que mide la eficiencia tome el valor cero.



### 3.4.2. El Modelo DEA BCC.

El modelo BCC es una modificación del modelo CCR. En este modelo, R. Banker [3] supone que la escala de rendimiento no es constante. Banker soluciona este problema añadiendo la condición de que las ponderaciones obtenidas como solución del programa lineal son linealmente convexas. La formulación del modelo BCC es:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar : } \quad & \psi_j = \theta_j + \xi \left( \sum_{i=1}^N \phi_i + \sum_{r=1}^M \varphi_r \right) \\
 \text{Sujeto a : } \quad & \sum_{j=1}^S \lambda_j X_{ij} + \phi_i = X_{ij} \quad i=1,2,\dots,N \\
 & \sum_{j=1}^S \lambda_j Y_{rj} - \varphi_r = \theta_j Y_{rj} \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \sum_{j=1}^S \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq \theta_j \\
 & \varphi_r \geq 0 \quad r=1,2,\dots,M \\
 & \phi_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,N
 \end{aligned} \tag{E16}$$

Las variables en el modelo BCC modelo se definen como en el modelo (E15).

### 3.4.3. El Modelo DEA FG.

El modelo FG es una modificación del modelo CCR. Fue introducido por R. Färe y S. Grosskopf [11] en 1985. La formulación del modelo FG es:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } & X_{j_0} \\ \text{Sujeto a : } & \sum_{j=1}^S \lambda_j X_{ij} \leq X_{j_0} \quad i=1,2,\dots,N \\ & \sum_{j=1}^S \lambda_j Y_{rj} \leq \varepsilon Y_{j_0} \quad r=1,2,\dots,M \\ & \sum_{j=1}^S \lambda_j \leq 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,S \quad \varepsilon \geq 0 \end{aligned} \quad (E17)$$

Donde:

$j_0$  : Indica el índice asociado a la DMU que se va a analizar.

$\lambda_j$  : Eficiencia relativa de la  $j$ -ésima DMU.

$Y_{j_0}$  : Cantidad de productos elaborados en la  $j_0$ -ésima DMU.

$X_{j_0}$  : Cantidad de recursos usados en la  $j_0$ -ésima DMU.

$Y_{rj}$  : Cantidad del  $r$ -ésimo producto en la  $j$ -ésima DMU.

$X_{ij}$  : Cantidad del  $i$ -ésimo recurso en la  $j$ -ésima DMU.

### 3.4.4. El Modelo DEA ST.

El modelo ST es una modificación del modelo ST. Éste modelo fue propuesto por L. Seiford y R. Thrall [20] en 1990. La formulación del modelo ST es:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } & X_{j_0} \\ \text{Sujeto a : } & \sum_{j=1}^S \lambda_j X_{ij} \leq X_{j_0} \quad i=1,2,\dots,N \\ & \sum_{j=1}^S \lambda_j Y_{rj} \leq \varepsilon Y_{j_0} \quad r=1,2,\dots,M \\ & \sum_{j=1}^S \lambda_j \geq 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,S \quad \varepsilon \geq 0 \end{aligned} \tag{E18}$$

Las variables en el modelo DEA ST se definen como en el modelo (E17). Estos son los modelos básicos de DEA, salvo algún tipo de modificaciones.

### **3.5. Ventajas de DEA.**

Dentro de las ventajas cabe destacar:

- Se puede utilizar en DMU que utiliza múltiples entradas para generar múltiples salidas.
- Se adapta a modelos donde se desconocen los precios de los recursos y productos.
- No se requiere ninguna especificación funcional entre las entradas y las salidas.

### **3.6. Desventajas de DEA.**

DEA presenta las siguientes desventajas:

- Exige que las unidades analizadas sean homogéneas, para evitar que la ineficiencia de una DMU se deba a la no uniformidad en la escala de producción, ó en el uso de las entradas y las salidas que caracterizan a la DMU.
- Es muy flexible a la hora de escoger las ponderaciones y, por tanto, es posible que una ponderación cuya variable sea trascendental para la DMU no sea considerada, al tener una ponderación nula o muy pequeña.
- Cualquier alejamiento de la frontera de eficiencia de alguna asignación de recursos y productos se supone que es por la ineficiencia de la DMU, y no por perturbaciones aleatorias.
- Se debe tener cuidado al seleccionar las variables que se introduzcan en el modelo.
- La confiabilidad del modelo depende del número de entradas, de salidas, y de las DMUS a utilizar.

### 3.7. Postulados para Determinar el Conjunto de Producción Posible.

Se considera un problema DEA con  $S$  DMU. Si cada DMU utiliza  $N$  recursos para fabricar  $M$  productos. Para la  $j$ -ésima DMU, se denotará por  $X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{Nj})$  el vector de recursos y por  $Y_j = (Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{Mj})$  el vector de productos. Se supone que el vector de recursos  $X \geq 0$ , produce la salida  $Y \geq 0$ . El conjunto de producción es la región del plano  $\mathfrak{R}^N \times \mathfrak{R}^M$  acotada por la frontera de eficiencia, y se define como:

$$P = \left\{ (X, Y) \in \mathfrak{R}^N \times \mathfrak{R}^M \mid X \geq 0 \text{ produce la salida } Y \geq 0 \right\}$$

Éste conjunto  $P$  está determinado por los postulados:

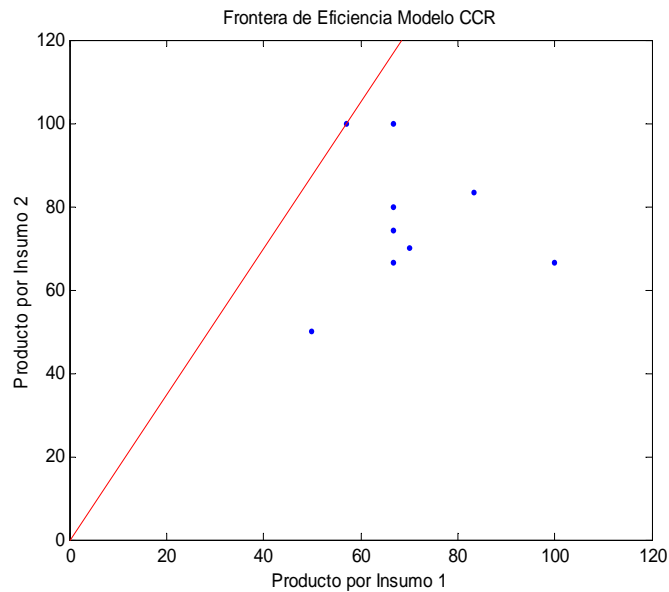
- **Postulado de Ordinalidad:** La observación  $(X_j, Y_j) \in P$ , para toda  $j = 1, 2, \dots, S$ .
- **Postulado de Convexidad:** Si  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in P$ , entonces, para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2, \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2) \in P$ .
- **Postulado de Entrada Ineficiente:** Si  $(X, Y) \in P$  y  $X_1 \geq X$ , entonces  $(X_1, Y) \in P$ .
- **Postulado de Salida Ineficiente:** Si  $(X, Y) \in P$  y  $Y \leq Y_1$ , entonces  $(X, Y_1) \in P$ .
- **Postulado de Frontera de Rayo:** Si  $(X, Y) \in P$ , entonces  $(\alpha X, \alpha Y) \in P$ , para todo  $\alpha \geq 0$ .
- **Postulado de Contracción:** Si  $(X, Y) \in P$ , entonces  $(\alpha X, \alpha Y) \in P$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .
- **Postulado de Expansión:** Si  $(X, Y) \in P$ , entonces  $(\alpha X, \alpha Y) \in P$ , para todo  $\alpha \geq 1$ .
- **Postulado de Extrapolación Mínima:**  $P$  es la intersección de todos los  $P^*$  que satisfacen los postulados de ordinalidad, convexidad, alguno de los postulados de

entrada ó salida ineficiente, y alguno de los postulados de contracción, expansión ó frontera de rayo.

Éste sistema de postulados, genera el conjunto de producción para cada uno de los modelos DEA estudiados en la sección 3.4.4. Los postulados de entrada y salida ineficiente caracterizan las observaciones que conforman el conjunto de producción. Mientras que los postulados de frontera de rayo, contracción y expansión dan una caracterización para el tipo de frontera de eficiencia que se utilizará. Para el modelo DEA CCR, el conjunto de producción es:

$$P_{CCR} = \left\{ (X, Y) \in P \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^S \lambda_j X_{ij} + \phi_i = X_{ij}; \sum_{j=1}^S \lambda_j Y_{rj} - \varphi_r = \theta_j Y_{rj} \\ \lambda_j \geq \theta_j; \varphi_r, \phi_i \geq 0 \text{ para } r=1,2,\dots,M, i=1,2,\dots,N \end{array} \right. \right\}$$

Este conjunto satisface los postulados de convexidad, ordinalidad, entrada ineficiente, salida ineficiente, frontera de rayo y extrapolación mínima Ver Q. Wei e Y. Hong [23], pág. 642-643. El conjunto de producción, para el problema 2, se presenta en la Figura 4.

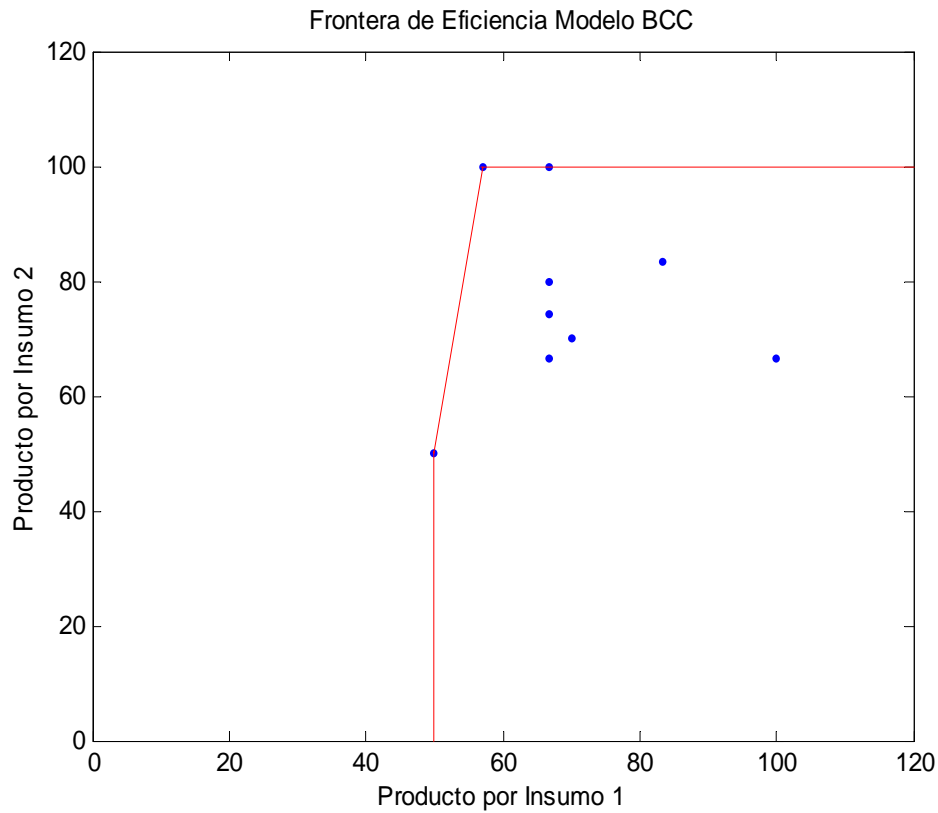


**Figura 4: Conjunto de producción para el problema 2 según el modelo CCR.**

EL conjunto de producción para el modelo DEA BCC es:

$$P_{BCC} = \left\{ (X, Y) \in P \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^S \lambda_j X_{ij} + \phi_i = X_{ij}; \sum_{j=1}^S \lambda_j Y_{rj} - \varphi_r = \theta_j Y_{rj}; \sum_{j=1}^S \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq \theta_j; \varphi_r, \phi_i \geq 0 \text{ para } r=1, 2, \dots, M, i=1, 2, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

Este conjunto satisface los postulados de convexidad, ordinalidad, entrada ineficiente, salida ineficiente y extrapolación mínima. Ver Q. Wei e Y. Hong [23], pág. 646. El conjunto de producción, para el problema 2, se presenta en la Figura 5.

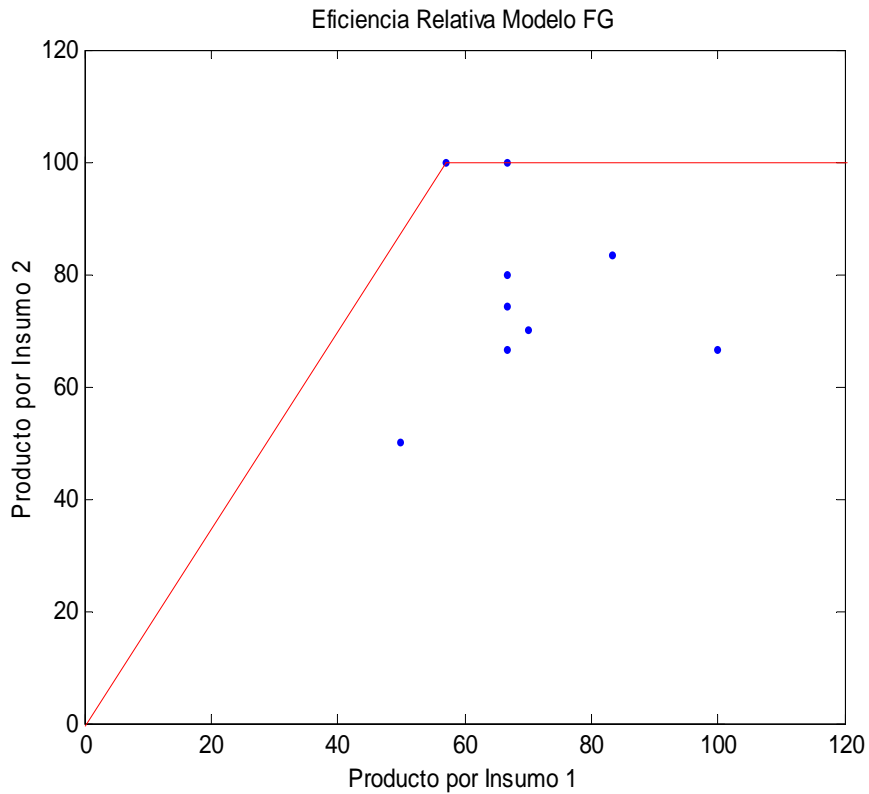


**Figura 5: Conjunto de producción para el problema 2 según el modelo BCC.**

EL conjunto de producción para el modelo DEA FG es:

$$P_{FG} = \left\{ (X, Y) \in P \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^S \lambda_j X_{ij} \leq X_{j_0}; \text{ para } i=1, 2, \dots, N; \lambda_j \geq 0; \varepsilon > 0 \\ \sum_{j=1}^S \lambda_j Y_{rj} \leq \varepsilon Y_{j_0} \text{ para } r=1, 2, \dots, M; \sum_{j=1}^S \lambda_j \leq 1; \end{array} \right. \right\}$$

Este conjunto satisface los postulados de convexidad, ordinalidad, entrada ineficiente, salida ineficiente, contracción y extrapolación mínima. Ver Q. Wei e Y. Hong [23], pág. 645. El conjunto de producción, para el problema 2, se presenta en la Figura 6.



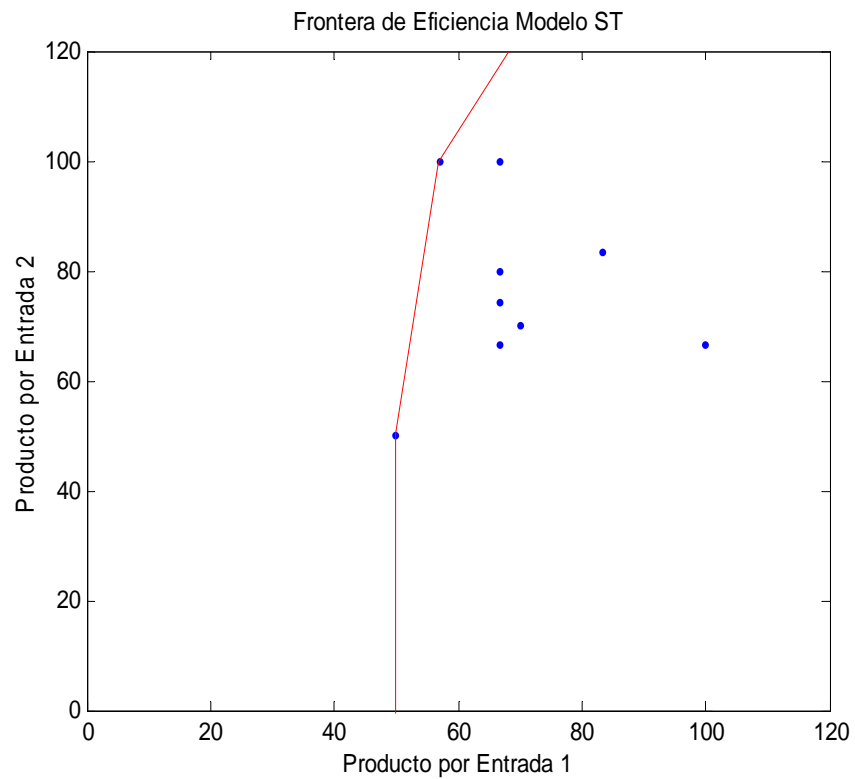
**Figura 6: Conjunto de producción para el problema 2 según el modelo FG.**



EL conjunto de producción para el modelo DEA ST es:

$$P_{ST} = \left\{ (X, Y) \in P \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^s \lambda_j X_{ij} \leq X_{j_0}; \text{ para } i=1, 2, \dots, N; \lambda_j \geq 0; \varepsilon > 0 \\ \sum_{j=1}^s \lambda_j Y_{rj} \leq \varepsilon Y_{j_0} \text{ para } r=1, 2, \dots, M; \sum_{j=1}^s \lambda_j \geq 1; \end{array} \right. \right\}$$

Este conjunto satisface los postulados de convexidad, ordinalidad, entrada y salida ineficiente, expansión y extrapolación mínima. Ver Q. Wei e Y. Hong [23], pág. 646. El conjunto de producción, para el problema 2, se presenta en la Figura 7.

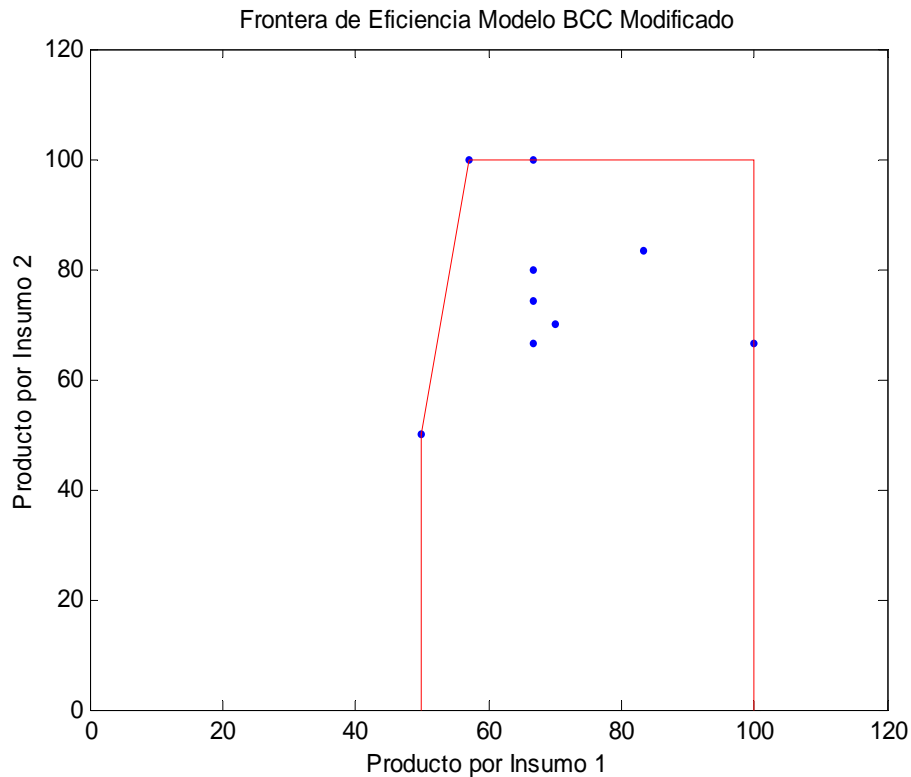


**Figura 7: Conjunto de producción para el problema 2 según el modelo ST.**

Estos conjuntos de producción satisfacen:

- $P_{BCC} \subset P_{ST} \subset P_{CCR}$
- $P_{BCC} \subset P_{FG} \subset P_{CCR}$
- $P_{BCC} = P_{ST} \cap P_{FG}$

Ver Q. Wei e Y. Hong [23], pág. 648. En un trabajo posterior, W. Cooper y L. Seiford [10], asumen que el posible conjunto de producción sólo satisface los postulados de convexidad, ordinalidad, entrada ineficiente, salida ineficiente y extrapolación mínima. Ver Wei e Yan [23], pág. 646. La caracterización de este conjunto, así definido, para el problema 2 se muestra en la Figura 8.



**Figura 8: Conjunto de producción para el problema 2 según el modelo BCC modificado.**

## Capítulo 4. Presentación y Discusión de Resultados.

### 4.1. Radio de Eficiencia.

Se considera un problema de análisis envolvente de datos DEA con  $S$  unidades para la toma de decisión con técnicas similares de elaboración de productos. Supóngase que cada DMU utiliza  $N$  recursos para elaborar  $M$  productos. Sean  $XI_j = (XI_{1j}, XI_{2j}, \dots, XI_{Nj})$  y  $YI_j = (YI_{1j}, YI_{2j}, \dots, YI_{Mj})$  los vectores iniciales de recursos y productos para la  $j$ -ésima DMU. Se define el conjunto de observaciones iniciales,  $PI$ , como:

$$PI = \left\{ (XI_j, YI_j) \in \mathfrak{R}^N \times \mathfrak{R}^M \mid XI_j \geq 0 \text{ produce } YI_j \geq 0 \text{ para } j=1, 2, \dots, S \right\}$$

**Lema 1:** El conjunto de producción es no vacío.

**Demostración:** Por el postulado de ordinalidad, se tiene que el conjunto de observaciones iniciales  $PI$  está contenido en  $P$ ; esto es  $PI \subseteq P$ . Como  $PI \neq \emptyset$ , entonces  $P \neq \emptyset$ .

El lema 1 genera un conjunto inicial de observaciones que deben pertenecer al conjunto de producción que se desea hallar. Nuestro siguiente objetivo será caracterizar otras posibles observaciones que, de manera natural, pertenezcan a dicho conjunto.

**Definición:** Sea  $PI$  el conjunto inicial de observaciones para un problema de análisis de envolvente de datos. Se define:

- $X_{\min} = \min \{ X_j \mid (X_j, Y_j) \in PI \}$  como la combinación de recursos con menor costo que pertenece al conjunto inicial de observaciones.
- $X_{\max} = \max \{ X_j \mid (X_j, Y_j) \in PI \}$  como la combinación de recursos con mayor costo que hace parte del conjunto inicial de observaciones.
- $Y_{\min} = \min \{ Y_j \mid (X_j, Y_j) \in PI \}$  como el menor nivel de producción que se logra alcanzar en el conjunto inicial de observaciones
- $Y_{\max} = \max \{ Y_j \mid (X_j, Y_j) \in PI \}$  como el mayor nivel de producción que se logra alcanzar en el conjunto inicial de observaciones.

Es de suponer que la combinación de recursos con menor costo sea capaz de generar el menor nivel de producción observado y la combinación de recursos con mayor costo sea capaz de generar el mayor nivel de producción alcanzado. Si esto no ocurre, nuestro conjunto de producción posible es ineficiente. Se define:

**Definición:** Sea  $PI$  el conjunto inicial de observaciones para un problema de análisis de envolvente de datos. Se define el conjunto de observaciones esperadas para un problema DEA como el conjunto  $OE = \{ (X_{\min}, Y_{\min}), (X_{\max}, Y_{\max}) \}$ .

**Lema 2:** El conjunto de observaciones esperada está contenido en el conjunto de producción posible; Esto es,  $OE \subseteq P$ .

**Definición:** Para un problema de análisis de envolvente de datos, sea  $PI$  el conjunto inicial de observaciones y  $OE$  el conjunto de observaciones esperadas. Se define  $PI^* = PI \cup OE$ .

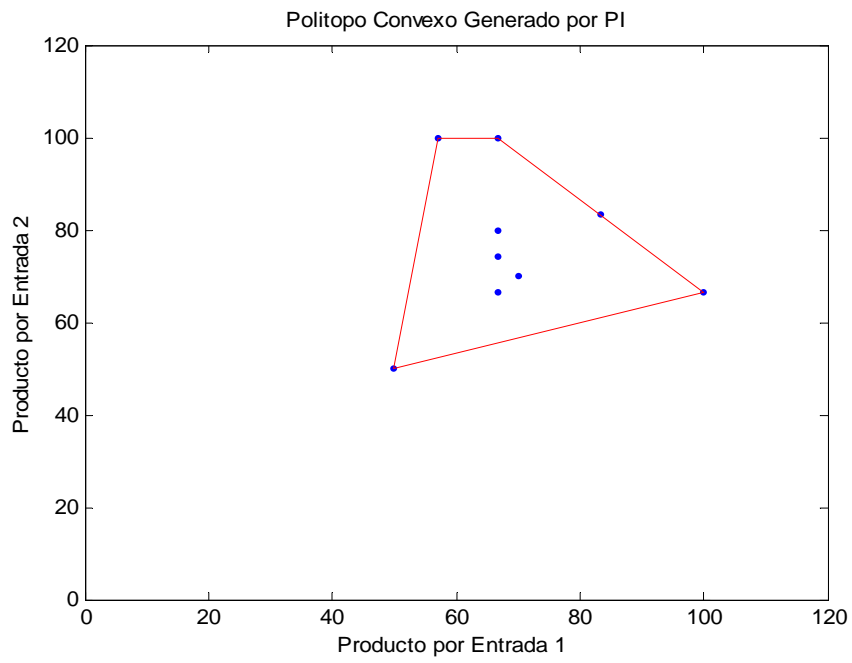
Se ha encontrado un conjunto inicial de observaciones  $PI^*$  que pertenece al conjunto de producción que se desea generar. Como el conjunto de producción posible es convexo se sigue:

**Lema 3:** El politopo convexo generado por  $PI^*$  está contenido en el conjunto de producción posible; esto es  $K_{PI^*} \subseteq P$ .

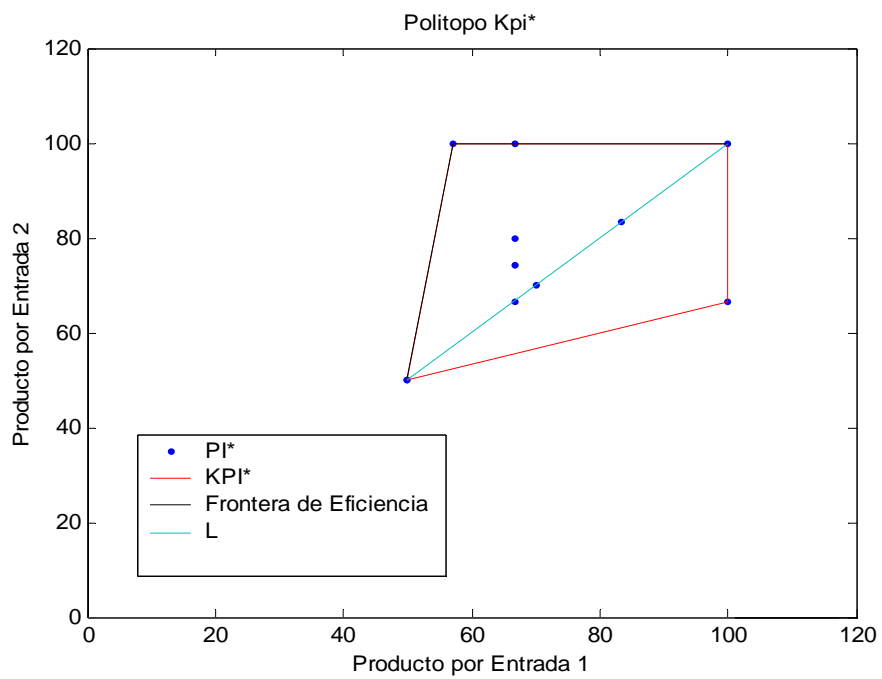
**Demostración:** Por el postulado de ordinalidad, se tiene que el conjunto de observaciones iniciales  $PI$  está contenido en  $P$  y por el lema 2, el conjunto de observaciones esperada está contenido en  $P$ . Como  $PI \subseteq P$  y  $OE \subseteq P$ , entonces  $PI^* = PI \cup OE \subseteq P$ . Luego, por el postulado de convexidad se tiene que el politopo generado por  $PI^*$ ,  $K_{PI^*}$ , está contenido en el conjunto de producción posible  $P$ . Por lo tanto,  $K_{PI^*} \subseteq P$ .

**Frontera de eficiencia:** Sea  $\hat{L}$  el segmento de recta que une las observaciones esperadas  $(X_{\min}, Y_{\min})$  y  $(X_{\max}, Y_{\max})$ . Se define la frontera de eficiencia del politopo  $K_{PI^*}$ , y se denota por  $\delta(K_{PI^*})$ , al conjunto de observaciones que pertenecen a la frontera del politopo  $K_{PI^*}$  y están en ó por encima del segmento de recta  $\hat{L}$ .

Para el problema 2, la Figura 9 presenta el politopo convexo generado por  $PI$ . El conjunto de observaciones esperada es  $OE = \{(50,50), (100,100)\}$ . La Figura 10 muestra el conjunto  $K_{PI^*}$  y la frontera de eficiencia  $\delta(K_{PI^*})$  para éste problema.



**Figura 9: Politopo Convexo Generado por PI.**



**Figura 10: Politopo  $K_{PI^*}$  para el problema 2.**

Se ha hallado una región inicial de observaciones que pertenecen al conjunto de producción que se quiere generar. Nuestra meta ahora es dotar al conjunto  $K_{PI^*}$  de una medida de eficiencia.

Considere el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} \underset{\hat{X}, \hat{Y}}{\text{Minimizar}} : & \sum_{j=1}^S \left( \|\hat{X} - X_j\|^2 + \|\hat{Y} - Y_j\|^2 \right) \\ \text{Sujeto a:} & (X_j, Y_j) \in K_{PI^*} \end{aligned} \quad (E19)$$

El problema (E19) encuentra el punto dentro del politopo  $K_{PI^*}$  que minimiza la suma de la distancia a cada uno de los puntos de él. Este problema es un problema de optimización convexa; por lo tanto, cualquier mínimo local, para el problema (E19), es un mínimo global para el mismo. El problema anterior es equivalente al problema (E20).

$$\begin{aligned} \underset{\hat{X}, \hat{Y}}{\text{Minimizar}} : & \sum_{j=1}^S \left( \|\hat{X} - X_j\|^2 + \|\hat{Y} - Y_j\|^2 \right) \\ \text{Sujeto a:} & (X_j, Y_j) \text{ es un vértice de } K_{PI^*} \end{aligned} \quad (E20)$$

Como el politopo  $K_{PI^*}$  es acotado, el problema (E20) tiene solución finita en  $K_{PI^*}$ . Si se denota por  $(\hat{X}, \hat{Y})$  el vector solución para el problema (E20), se tiene que el vector  $(\hat{X}, \hat{Y})$  es el punto del politopo  $K_{PI^*}$  que minimiza la suma de las distancia a la frontera de  $K_{PI^*}$ . Se define:

**Centro de Eficiencia:** El vector  $(\hat{X}, \hat{Y})$  que soluciona el problema de optimización (E20) recibe el nombre de Centro de Eficiencia de  $K_{PI^*}$ .

**Radio de Eficiencia:** Se define el radio de eficiencia de  $K_{PI^*}$  como

$$R_E(K_{PI^*}) = \max \left\{ \text{dis} \left\{ (\hat{X}, \hat{Y}), (X, Y) \right\} \mid (X, Y) \text{ es un vértice de } K_{PI^*} \right\}$$

**Proyecciones a la frontera de eficiencia:** Sea  $(X, Y) \in K_{PI^*}$ . Se define:

- $H(X)$  como la proyección horizontal de la observación  $(X, Y) \in K_{PI^*}$  a la frontera de eficiencia.
- $V(X)$  como la proyección vertical de la observación  $(X, Y) \in K_{PI^*}$  a la frontera de eficiencia.

La proyección horizontal a la frontera de eficiencia se hará siempre hacia la izquierda, ya que las observaciones que presentan entrada ineficiente siempre están a la derecha de la frontera de eficiencia. De igual modo, la proyección vertical se hará hacia arriba, ya que las observaciones que presentan ineficiencia de salida están ubicadas por debajo de la frontera de eficiencia. Para el problema 2, la proyección horizontal y vertical para la observación  $(80, 80)$  se presenta en la Figura 11. La Figura 12 muestra el radio y el centro de eficiencia para este problema.



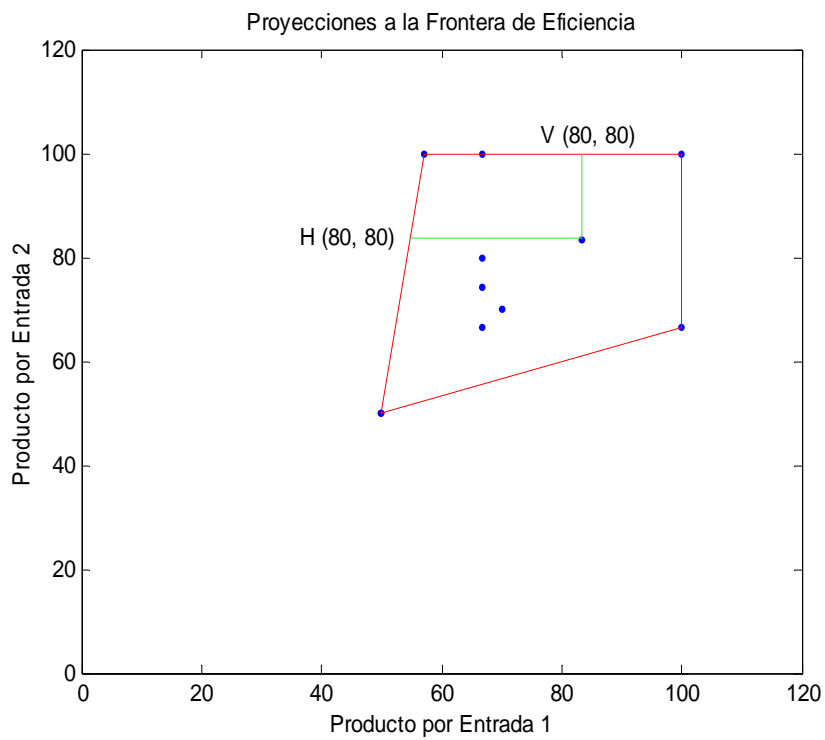


Figura 11: Proyección horizontal y vertical para la observación (80, 80).

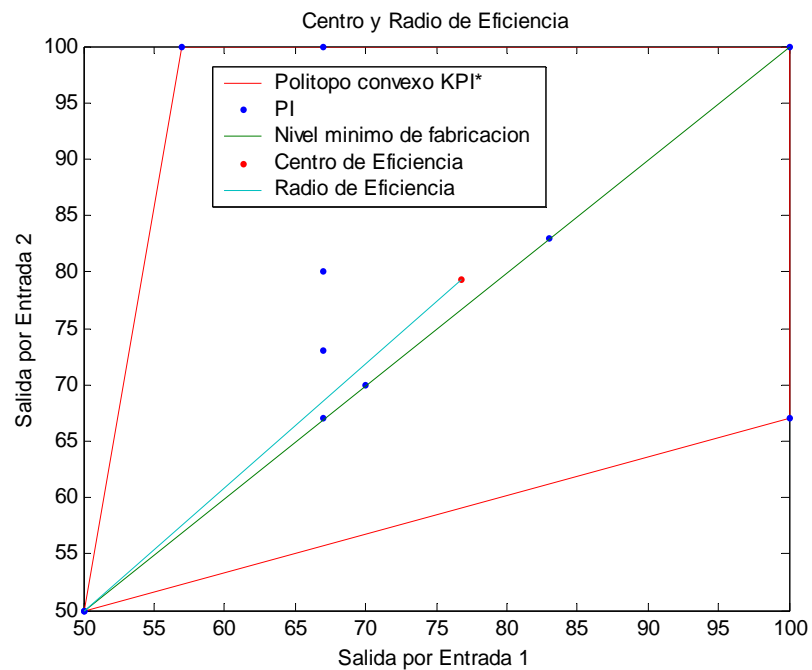


Figura 12: Centro y radio de eficiencia, problema 2.

Se define:

**Eficiencia de Entrada:** Sea  $(X, Y) \in K_{PI^*}$ . Se define la eficiencia de entrada de la observación  $(X, Y)$  como  $E_E(X, Y) = \frac{dis \{H(X), (X, Y)\}}{2R_E(K_{PI^*})}$

**Eficiencia de Salida:** Sea  $(X, Y) \in K_{PI^*}$ . Se define la eficiencia de salida de la observación  $(X, Y)$  como  $E_S(X, Y) = \frac{dis \{V(Y), (X, Y)\}}{2R_E(K_{PI^*})}$

Por definición se tiene:

- La observación  $(X, Y) \in K_{PI^*}$  tiene entrada eficiente si  $E_E(X, Y) = 0$ .
- La observación  $(X, Y) \in K_{PI^*}$  tiene entrada ineficiente si  $E_E(X, Y) > 0$ .
- La observación  $(X, Y) \in K_{PI^*}$  tiene salida eficiente si  $E_S(X, Y) = 0$ .
- La observación  $(X, Y) \in K_{PI^*}$  tiene salida ineficiente si  $E_S(X, Y) > 0$ .
- La eficiencia de entrada y de salida de la observación  $(X, Y) \in K_{PI^*}$  varia entre 0 y 1; esto es,  $0 \leq E_E(X, Y) < 1$  y  $0 \leq E_S(X, Y) < 1$ .
- Mientras más cerca a cero esté la eficiencia de una observación mayor será su eficiencia.
- Mientras mas cerca a uno esté la eficiencia de una observación más ineficiente será la misma.

Ahora, se probará que el politopo  $K_{PI^*}$  que hemos generado resuelve el problema DEA.

## 4.2. Solución del Problema DEA Usando el Politopo $K_{PI^*}$ .

Resolveremos el problema DEA CCR usando el politopo  $K_{PI^*}$ . Se considera el modelo CCR definido en (E13). El conjunto de producción posible para éste modelo es

$$P_{CCR} = \left\{ (X, Y) \in P \left| \begin{array}{l} \sum_{r=1}^M v_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^N \rho_i X_{ij} \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, S; \sum_{r=1}^M v_r Y_{rj} = 1 \\ v_r, \rho_i \geq 0 \quad \text{para } r=1, 2, \dots, M, i=1, 2, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

Este conjunto de producción minimiza el número de recursos utilizados en la fabricación de los productos. Si partimos de nuestro conjunto inicial de datos,  $PI$ , tenemos que la observación que minimiza, al menos alguno de los recursos utilizados en la elaboración de los productos, cuando se fijan los niveles de producción, formará nuestra función de frontera.

Las observaciones ineficientes estarán ubicadas por debajo de la misma; esta observación es evidente, porque si hay una observación por encima de la frontera de eficiencia, esa observación será más eficiente que aquellas que pertenezcan a dicha frontera, y por lo tanto, la frontera no sería eficiente.

Lo anterior implica que la parte superior del politopo generado por  $PI$  conformará nuestra frontera de eficiencia. Se supone que la menor combinación de recursos observados fabrique, al menos, la menor combinación de productos observados; y que la mayor combinación de recursos observados pueda ser capaz de fabricar la mayor cantidad de productos observados. Por tanto, se introduce en nuestro conjunto inicial de observaciones el conjunto de observaciones esperada  $OE$ , formando el conjunto  $PI^*$ .

El politopo convexo generado por  $PI^*$ , al cuál hemos llamado  $K_{PI^*}$ , contiene el politopo generado por  $PI$ , por tanto, en  $K_{PI^*}$ , estarán los posibles valores que solucionen, de manera óptima el problema DEA CCR.

Las mejores combinaciones de recursos-productos, estarán ubicados en los vértices superiores del politopo generado  $K_{PI^*}$ , para el modelo DEA CCR. Las observaciones esperadas  $\{(X_{\min}, Y_{\min}), (X_{\max}, Y_{\max})\}$  nos proporcionan una medida de los niveles de fabricación mínimos que se pueden permitir para mejorar la eficiencia del modelo. Esto se da porque como estas dos observaciones hacen parte de la frontera de eficiencia, su combinación lineal convexa, es decir, el segmento de recta que los une, es eficiente.

Para el problema 2, el centro de eficiencia es  $(\hat{X}, \hat{Y}) = (76.75, 79.25)$  y el radio de eficiencia mide  $R_E(K_{PI^*}) = 39.64$ . La Figura 12 muestra la ubicación centro, el radio y el nivel de producción mínimo óptimo esperado en el politopo  $K_{PI^*}$ .

Además, el politopo  $K_{PI^*}$  está contenido en cada uno de los conjuntos de producción para cada uno de los problemas DEA estudiados inicialmente, por lo tanto soluciona cada modelo DEA citado anteriormente. Así que definimos nuestro conjunto de producción como el conjunto  $K_{PI^*}$ , el segmento de recta que une las observaciones esperadas como el nivel mínimo de producción y el conjunto de producción óptimo como el conjunto de puntos que pertenecen al conjunto de producción que esten por encima del nivel mínimo de producción.

### 4.3. Medida de Eficiencia para observaciones que no pertenecen a $K_{PI^*}$ .

En el apartado anterior, se encontró un conjunto de producción acotado, se determinó el conjunto de producción óptimo y se estableció el nivel mínimo de productividad para un problema de análisis envolvente de datos. Además, a dichos conjuntos se le dotó de una medida de eficiencia. Ahora, de manera natural surge el siguiente problema:

“Dada una observación que no pertenezca al conjunto de producción  $K_{PI^*}$ , ¿Es posible saber si dicha observación es eficiente? Y en caso de ser no eficiente, ¿Será posible estimar su eficiencia?”

En ésta sección se resolverá la pregunta planteada anteriormente.

Se considera un problema de análisis envolvente de datos con  $S$  unidades para la toma de decisión. Sean  $PI$  el conjunto inicial de observaciones,  $OE$  el conjunto de observaciones esperadas y  $PI^*=PI\cup OE$ . Sean  $(\hat{X}, \hat{Y})$  y  $R_E(K_{PI^*})$  el centro y el radio de eficiencia, respectivamente, del politopo  $K_{PI^*}$  generado por  $PI^*$ . Además, se denotará por  $\delta(K_{PI^*})$  a la frontera de eficiencia del politopo  $K_{PI^*}$ .

Para una observación  $(X, Y) \notin K_{PI^*}$ , considérese la recta  $\bar{L}$  que pasa a través de la observación  $(X, Y)$  y el centro de eficiencia  $(\hat{X}, \hat{Y})$  del politopo  $K_{PI^*}$ . Sea:

$$C_E(X, Y) = \{(x, y) \in \bar{L} \mid (x, y) \in \delta(K_{PI^*})\} = \bar{L} \cap \delta(K_{PI^*})$$

Se define:

**Proyección al Centro de Eficiencia:** Considere la recta  $\bar{L}$  que pasa a través de las observaciones  $(X, Y)$  y el centro de eficiencia  $(\hat{X}, \hat{Y})$  del politopo  $K_{PI^*}$ . Sea

$$C_E(X, Y) = \{(x, y) \in \bar{L} \mid (x, y) \in \mathcal{D}(K_{PI^*})\}$$

el conjunto de observaciones que pertenecen a la intersección de la recta  $\bar{L}$  y la frontera de eficiencia del politopo  $K_{PI^*}$ . Se define la proyección de la observación  $(X, Y)$  al centro de eficiencia, y se denota por  $CE(X, Y)$ , a la observación  $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in C_E$  cuya distancia a la observación  $(X, Y)$  es mínima. Si la recta  $\bar{L}$  no interseca a la frontera de eficiencia, se define  $CE(X, Y) = (\hat{X}, \hat{Y})$ .

**Función de Eficiencia:** Se define la función de eficiencia para observaciones  $(X, Y)$  que no pertenecen al conjunto de producción posible  $K_{PI^*}$  como

$$F_{K_{PI^*}}(X, Y) = \frac{\text{dis} \left\{ (X, Y), (\tilde{X}, \tilde{Y}) \right\}}{\text{dis} \left\{ (X, Y), (\hat{X}, \hat{Y}) \right\}}$$

Se ha definido una función de eficiencia para observaciones que no pertenecen a  $K_{PI^*}$ . Ahora, se caracterizarán a dichas observaciones como eficientes o ineficiente.

A partir de la definición de función de eficiencia, se tiene:

- Si  $F_{K_{PI^*}}(X, Y) < 1$  la observación  $(X, Y)$  es eficiente. Esta afirmación es evidente, ya que si esto ocurre la observación está ubicada por encima de la frontera de eficiencia; por lo tanto, mejora los niveles de productividad.
- Si  $F_{K_{PI^*}}(X, Y) > 1$  la observación  $(X, Y)$  no es eficiente. En efecto, si esto ocurre la observación  $(X, Y)$  tiene un nivel de productividad menor que el nivel de fabricación mínima que se puede permitir en el modelo.

Además, para cualquiera observación  $(X, Y)$ , se tiene que:

- Si  $F_{K_{PI^*}}(X, Y) = 0$  la observación  $(X, Y)$  pertenece a la frontera de eficiencia.
- Si  $F_{K_{PI^*}}(X, Y) < 1$  la observación  $(X, Y)$  es eficiente.
- Si  $F_{K_{PI^*}}(X, Y) > 1$  la observación  $(X, Y)$  no es eficiente.
- Si  $F_{K_{PI^*}}(X, Y) = 1$  la proyección de la observación  $(X, Y)$  al centro de eficiencia es el centro de eficiencia del politopo  $K_{PI^*}$ .
- Si  $F_{K_{PI^*}}(X, Y)$  no está definida, entonces la observación  $(X, Y)$  es el centro de eficiencia del politopo  $K_{PI^*}$ .

## **Capítulo 5. Un Problema Particular.**

El Departamento de Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario Mayagüez (RUM), ha manifestado su preocupación por la cantidad de fracasos<sup>2</sup> obtenidos por los alumnos matriculados en los cursos Matemática Remediadora, Precálculo I, Precálculo II, Cálculo I y Cálculo II.

Muchos han sido los esfuerzos realizados por administradores y profesores para facilitar el aprendizaje de las matemáticas en este Recinto. En este sentido, cabe destacar la creación del Centro de Apoyo para la Enseñanza de Precalculo y Calculo (CAPEC), la creación del Laboratorio de Pruebas Computadorizadas en Matemáticas (LAPCOM), el Laboratorio de Consultaría Estadística y los Laboratorios de Cómputos.

Resaltamos los convenios realizados entre el Departamento de Educación de Puerto Rico y el Departamento de Matemáticas del RUM, cuyo principal objetivo se ha encaminado a “fortalecer la preparación académica de maestros y estudiantes, de escuelas elementales, intermedias y superiores de Puerto Rico, y la coordinación de las actividades del equipo Olímpico de Matemática en Puerto Rico”.

Estas energías se encaminan a facilitar la formación matemática del estudiantado, en aras de fortalecer la investigación y el pensamiento lógico, pretendiendo mejorar el capital humano, pero no han sido aprovechados al máximo por los alumnos. Se observa que a medida que el tiempo transcurre, la tasa de fracasos, en estos cursos, no ha



mejorado en la medida de lo esperado. Por tanto, es necesario hacer un estudio que permita aislar los factores que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes, para tratar de homogenizar los métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, impartida en este Recinto para así mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en esta área. La mayor dificultad que presenta este estudio, es la falta de homogeneidad de los conocimientos que adquieren los estudiantes antes de ingresar a alguno de estos cursos. En efecto, en la mayoría de países latinoamericanos la educación en el área de matemáticas está establecida como obligatoria en todos los cursos de educación media y superior. En Puerto Rico el alumno tiene la libertad de escoger los cursos de matemáticas que desea matricular. Aunque esto es un gran incentivo para el estudiante, la falta de espíritu matemático es el mayor obstáculo que debe afrontar un joven que desee seguir una educación integral en matemáticas.

### **5.1. EL Problema en Estudio.**

Se analizará la eficiencia de los estudiantes matriculados en 5 secciones de Cálculo I y 8 secciones de Cálculo II, ofrecidos por el Departamento de Matemáticas del RUM en el primer semestre académico del año electivo 2004-2005.

---

<sup>2</sup> Se considera que un estudiante fracasó en un curso si se da de baja del curso ó si obtiene una nota inferior a C.

## **5.2. Determinación de las Variables.**

En el sendero del conocimiento, el alumno se enfrenta a tres grandes problemas:

- Los conocimientos previos que se supone debe haber adquirido un estudiante antes de ingresar a un nuevo curso.
- La falta de homogeneidad al recibir la información que el profesor quiere que el estudiante capte.
- Los conocimientos que obtiene el estudiante fuera de la institución.

En general, no se puede medir la forma como un estudiante adquiere un determinado conocimiento, pero se puede medir los métodos de evaluación y la pedagogía utilizada por los docentes para evaluar dichos cursos, para tratar de mejorar la tasa de mortalidad de los alumnos, en aras de aumentar la productividad del departamento de matemática del RUM. Lo primero que se considerará es la definición de las variables que se utilizarán para definir la función de producción que se utilizará a lo largo de este estudio.

Para definir esta función es necesario establecer el producto que se desea hallar, para que nos sirvan de parámetro de eficiencia. La principal dificultad en tratar de hallar éste parámetro es la falta de información sobre las variables que miden la eficiencia del sector educativo. En este capítulo se estudiará la relación que existe entre los recursos con los que cuentan los alumnos matriculados en los cursos de cálculo I y cálculo II ofrecido por el RUM y el producto que se desea alcancen los estudiantes matriculados allí.

Las variables de insumos que se consideraron en este estudio fueron:

- Promedio de los dos primeros exámenes parciales de cálculo.
- Promedio del tercer y cuarto examen parcial de cálculo.

- Examen final de cálculo.
- Promedio de las pruebas electrónicas.

La variable de producto que se consideró en este estudio fue:

- Nota final del estudiante.

### **5.3. Análisis de los Datos.**

En este estudio se consideró cada sección analizada como una DMU. Las notas obtenidas por cada estudiante, inscrito en cada una de las secciones analizadas conforma el conjunto de observaciones iniciales para cada DMU. También, se consideró el estudio para el número de estudiantes matriculados inicialmente en el curso, el número de estudiantes que terminaron el curso y el número de estudiantes que aprobaron el curso. En general, las secciones estudiadas se organizaron en 4 grupos:

- Grupo I: Las secciones de Cálculo I que tomaron pruebas computadorizas.
- Grupo II: Las secciones de Cálculo II que tomaron pruebas computadorizas.
- Grupo III: Las secciones de Cálculo I que no tomaron pruebas computadorizas
- Grupo IV: Las secciones de Cálculo II que no tomaron pruebas computadorizas

Las secciones que conforman cada uno de los grupos, y el número de estudiantes que participaron en el mismo, se presentan en la Tabla 8.

La Tabla 9 presenta el porcentaje de estudiantes que terminó el curso, el porcentaje que estudiantes que aprobó el curso, y el porcentaje de los estudiantes aprobados que terminaron el curso.

Grupos	Sección	Matriculados	Terminaron	Aprobaron
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	50	29	19
	MATE 3031.073	33	18	8
	MATE 3031.091	35	24	15
	MATE 3031.09A	34	28	15
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	33	19	13
	MATE 3032.12A	34	29	16
	MATE 3032.134	33	23	19
	MATE 3032.135	33	24	16
	MATE 3032.13A	32	21	9
	MATE 3032.151	35	32	24
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	34	15	7
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	34	22	15
	MATE 3032.161	33	16	8

**Tabla 8: Número de estudiantes por cada sección que participaron en el estudio.**

Grupos	Sección	Porcentaje de Estudiantes que		Porcentaje de Estudiantes que Terminan y Aprueban el Curso
		Terminaron el Curso	Aprobaron el Curso	
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	58	38	66
	MATE 3031.073	55	24	44
	MATE 3031.091	69	43	62
	MATE 3031.09A	82	44	54
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	58	39	67
	MATE 3032.12A	85	47	55
	MATE 3032.134	70	58	83
	MATE 3032.135	73	48	66
	MATE 3032.13A	66	28	42
	MATE 3032.151	91	69	76
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	44	21	48
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	65	44	68
	MATE 3032.161	48	24	50

**Tabla 9: Porcientos de estudiantes por Número de estudiantes.**

En la Tabla 9 se observa que en promedio:

- El 66% de los alumnos que se matricularon en alguno de estos cursos lo terminaron.
- El 40% de los estudiantes que se matriculó en alguno de estos cursos lo aprobó.
- El porcentaje de los estudiantes que terminan y aprueban el curso en que se matriculó es relativamente mayor en las secciones que toman las pruebas electrónicas.
- El 60% de los estudiantes que terminan un curso lo aprueba.

## 5.4. Solución del Problema.

Este estudio inicial se realizó:

- Con todos los estudiantes matriculados en cada sección analizada.
- Con los estudiantes que terminaron el curso en cada una de las secciones analizadas.
- Con los estudiantes que ganaron el curso en cada una de las secciones analizadas.

Se resolvió el problema de encontrar el centro y el radio de eficiencia para cada DMU analizada.

Las variables de insumo que se utilizaron para los grupos I y II fueron:

- $X_1$ : Promedio de las notas de los exámenes parciales I y II.
- $X_2$ : Promedio de las notas de los exámenes parciales III y IV.
- $X_3$ : Nota del examen final.
- $X_4$ : Nota promedio de las pruebas electrónicas.

La variable de producto que se consideró en este estudio fue:

- $Y$ : Nota numérica final del estudiante.

El centro y el radio de eficiencia para cada una de las secciones analizadas de los grupos I y II se presenta en la tabla 10. La Tabla 11 muestra la nota promedio de los exámenes I y II, de los exámenes III y IV, del examen final, de las pruebas computadorizadas y la nota numérica final, obtenida por los estudiantes de las secciones analizadas en los grupo I y II.

<b>Grupos</b>	<b>Sección</b>	<b>Centro</b>	<b>Matriculados</b>	<b>Terminaron</b>	<b>Aprobaron</b>
Grupo I	MATE 3031.071	<b>X(1)</b>	59.7850	71.1584	77.6831
		<b>X(2)</b>	44.5737	71.4953	80.3083
		<b>X(3)</b>	33.7077	55.0353	68.3679
		<b>X(4)</b>	61.0631	81.0886	86.5941
		<b>Y</b>	48.5387	68.3277	77.1746
		<b>Radio</b>	38.2037	26.6816	17.5475
	MATE 3031.073	<b>X(1)</b>	54.5672	70.4080	81.1716
		<b>X(2)</b>	38.2365	65.2217	80.7633
		<b>X(3)</b>	29.6909	56.5386	72.0592
		<b>X(4)</b>	24.7272	48.1773	57.1420
		<b>Y</b>	39.8399	62.8357	76.1196
		<b>Radio</b>	36.2377	26.9960	11.5774
	MATE 3031.091	<b>X(1)</b>	55.7167	68.2613	73.1863
		<b>X(2)</b>	46.6391	68.1523	86.7712
		<b>X(3)</b>	32.7526	48.2824	65.9216
		<b>X(4)</b>	59.5390	74.7640	88.9041
<b>Y</b>		47.4913	63.9470	77.4463	
<b>Radio</b>		34.7664	39.7744	18.2340	
MATE 3031.09A	<b>X(1)</b>	68.0535	71.4562	77.8829	
	<b>X(2)</b>	53.8572	62.4093	78.7818	
	<b>X(3)</b>	42.3439	49.9116	61.3192	
	<b>X(4)</b>	65.0956	66.8780	82.5722	
	<b>Y</b>	56.7579	62.6715	74.5454	
	<b>Radio</b>	35.9376	36.0391	13.4528	
Grupo II	MATE 3032.125	<b>X(1)</b>	53.8087	71.5223	80.0295
		<b>X(2)</b>	38.2739	65.1926	76.6917
		<b>X(3)</b>	36.5769	64.5917	78.6637
		<b>X(4)</b>	49.7599	68.1633	79.0531
		<b>Y</b>	44.0842	67.3947	78.5126
		<b>Radio</b>	36.2157	39.4171	24.9219
	MATE 3032.12A	<b>X(1)</b>	71.1249	76.7054	83.0404
		<b>X(2)</b>	58.2526	67.1906	82.2522
		<b>X(3)</b>	58.7481	69.1749	83.7979
		<b>X(4)</b>	56.7243	60.4386	72.9965
		<b>Y</b>	62.3275	69.9887	81.8727
		<b>Radio</b>	38.0284	34.8079	17.3473
	MATE 3032.134	<b>X(1)</b>	64.9109	73.3382	77.1149
		<b>X(2)</b>	55.9819	77.8952	82.3312
		<b>X(3)</b>	50.4526	72.3679	82.0385
		<b>X(4)</b>	69.5198	84.4191	90.4416
		<b>Y</b>	58.9460	75.7728	81.4809
		<b>Radio</b>	39.8140	40.7021	24.9084
	MATE 3032.135	<b>X(1)</b>	67.6264	74.7408	81.0307
		<b>X(2)</b>	45.4241	61.5987	75.7536
		<b>X(3)</b>	43.7559	62.2145	78.4879
		<b>X(4)</b>	45.7713	60.1868	78.1131
		<b>Y</b>	52.1500	65.8028	78.3854
		<b>Radio</b>	39.3634	38.2603	18.9837
MATE 3032.13A	<b>X(1)</b>	60.1046	70.0864	79.0306	
	<b>X(2)</b>	44.7741	69.4620	77.3013	
	<b>X(3)</b>	38.1733	63.2472	80.0873	
	<b>X(4)</b>	25.6012	41.9774	47.2751	
	<b>Y</b>	45.9206	65.0848	75.2483	
	<b>Radio</b>	33.8107	27.2635	12.2509	
MATE 3032.151	<b>X(1)</b>	71.6306	76.5569	77.5348	
	<b>X(2)</b>	63.1592	74.1786	79.6410	
	<b>X(3)</b>	61.0329	71.9666	75.0183	
	<b>X(4)</b>	64.1417	75.6477	79.2247	
	<b>Y</b>	65.4465	74.5483	77.7656	
	<b>Radio</b>	39.6147	26.1600	15.5380	

**Tabla 10: Centro y Radio de eficiencia para los grupos I y II.**

Grupos	Sección	Promedio	Matriculados	Terminaron	Aprobaron
Grupo I	<b>MATE 3031.071</b>	PROM 1,2	59.2451	72.4138	78.0789
		PROM 3,4	43.0980	72.3965	80.4737
		PROM EF	32.2745	56.7931	69.6316
		Quiz	59.4510	82.8276	86.6316
		N. F.	47.3580	69.6487	77.6742
	<b>MATE 3031.073</b>	PROM 1,2	54.3100	70.8389	81.3750
		PROM 3,4	40.1470	68.2500	80.3750
		PROM EF	31.3820	59.2778	71.0000
		Quiz	25.8820	48.8889	56.7500
		N. F.	40.9656	64.7217	75.7525
	<b>MATE 3031.091</b>	PROM 1,2	54.7210	69.5000	74.2333
		PROM 3,4	41.1175	72.4166	84.8666
		PROM EF	22.8240	52.0000	67.6667
		Quiz	63.8530	79.3750	90.2667
		N. F.	40.1979	67.0246	78.3767
	<b>MATE 3031.09A</b>	PROM 1,2	67.9705	71.8750	78.6000
PROM 3,4		54.7205	65.1607	79.0998	
PROM EF		42.4710	51.6428	62.0000	
Quiz		65.3240	69.9286	83.7333	
N. F.		57.0644	64.4543	75.1747	
Grupo II	<b>MATE 3032.125</b>	PROM 1,2	53.3676	73.9474	80.4615
		PROM 3,4	39.5000	68.6316	77.1538
		PROM EF	38.8235	69.5263	79.2308
		Quiz	50.1180	73.3684	83.1538
		N. F.	44.9360	71.0774	79.3915
	<b>MATE 3032.12A</b>	PROM 1,2	71.7059	76.6724	84.1875
		PROM 3,4	59.3382	68.3103	82.5625
		PROM EF	59.2941	69.5517	84.0625
		Quiz	56.5000	62.1379	73.6875
		N. F.	62.9730	70.6176	82.4812
	<b>MATE 3032.134</b>	PROM 1,2	65.2059	73.1304	78.1315
		PROM 3,4	56.0441	78.1956	83.1052
		PROM EF	50.4706	74.6522	82.9474
		Quiz	69.2350	84.6522	90.6316
		N. F.	59.0340	76.3991	82.3021
	<b>MATE 3032.135</b>	PROM 1,2	66.6764	75.3541	81.9062
		PROM 3,4	45.9117	62.5208	77.0937
		PROM EF	44.5000	63.1250	79.5625
		Quiz	45.5880	61.5833	78.5000
		N. F.	52.1680	66.6754	79.4056
	<b>MATE 3032.13A</b>	PROM 1,2	60.9531	69.8571	78.8333
PROM 3,4		47.1563	69.1190	77.0555	
PROM EF		42.0938	64.1429	80.3333	
Quiz		27.4690	41.8571	47.0000	
N. F.		48.1400	65.1124	75.1378	
<b>MATE 3032.151</b>	PROM 1,2	73.1286	75.7812	78.7768	
	PROM 3,4	67.0286	73.0624	80.5625	
	PROM EF	64.0286	70.6562	76.5417	
	Quiz	41.0570	74.5937	79.9167	
	N. F.	65.3740	73.4544	78.9129	

Tabla 11: Nota promedio para los grupos I y II.

Al comparar la nota promedio de los estudiantes matriculados, en cada una de las secciones analizadas, con el centro de eficiencia de cada sección, se observa una desviación, con respecto a la media, de mas o menos un punto en cada uno de los promedios analizados.

El programa DEA CCR para la DMU MATE 3031.071 es:

$$\text{Maxmizar : } 48.5387Y_1$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a : } & 59.7850 X_1 + 44.7337 X_2 + 33.7077 X_3 + 61.0631 X_4 = 1 \\ & 48.5387Y_1 - 59.7850 X_1 - 44.7337 X_2 - 33.7077 X_3 - 61.0631 X_4 \leq 0 \\ & 39.8399Y_1 - 54.5672 X_1 - 38.2365 X_2 - 29.6909 X_3 - 24.7272 X_4 \leq 0 \\ & 47.4913Y_1 - 55.7167 X_1 - 46.6391 X_2 - 32.7526 X_3 - 59.5390 X_4 \leq 0 \\ & 56.7579Y_1 - 68.0535 X_1 - 53.8572 X_2 - 42.3439 X_3 - 65.0956 X_4 \leq 0 \\ & 44.0842Y_1 - 53.8087 X_1 - 38.2739 X_2 - 36.5769 X_3 - 49.7599 X_4 \leq 0 \\ & 62.3275Y_1 - 71.1249 X_1 - 58.2526 X_2 - 58.7481 X_3 - 56.7243 X_4 \leq 0 \\ & 58.9460Y_1 - 64.9109 X_1 - 55.9819 X_2 - 50.4526 X_3 - 69.5198 X_4 \leq 0 \\ & 52.1500Y_1 - 67.6264 X_1 - 45.4241 X_2 - 43.7559 X_3 - 45.7713 X_4 \leq 0 \\ & 45.9206Y_1 - 60.1046 X_1 - 44.7741 X_2 - 38.1733 X_3 - 25.6012 X_4 \leq 0 \\ & 65.4465Y_1 - 71.6306 X_1 - 63.1592 X_2 - 61.0329 X_3 - 64.1417 X_4 \leq 0 \\ & Y_1, X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Los resultados de los programas DEA CCR, para cada DMU analizada, que pertenece a los grupos I y II, se presenta en las Tablas 12-14.

Grupos	Sección	FO	Y <sub>1</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	1.000000	0.020602	0.006399	0.006774	0.005317	0.002214
	MATE 3031.073	1.000000	0.025100	0.007796	0.008253	0.006478	0.002698
	MATE 3031.091	1.000000	0.021056	0.006540	0.006923	0.006923	0.002263
	MATE 3031.09A	1.000000	0.005638	0.005638	0.005638	0.004405	0.001938
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	1.000000	0.022684	0.008058	0.010285	0.004723	0.000000
	MATE 3032.12A	1.000000	0.016044	0.006335	0.009008	0.000000	0.000435
	MATE 3032.134	1.000000	0.016965	0.006698	0.009525	0.000000	0.000460
	MATE 3032.135	1.000000	0.019175	0.005370	0.012240	0.000000	0.001767
	MATE 3032.13A	1.000000	0.021777	0.005826	0.012134	0.000000	0.004162
	MATE 3032.151	1.000000	0.015280	0.007894	0.002746	0.000000	0.004070

**Tabla 12: Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos I y II, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.**



Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	1.000000	0.014635	0.004683	0.004686	0.003660	0.001608
	MATE 3031.073	1.000000	0.015915	0.005092	0.005091	0.003980	0.001751
	MATE 3031.091	1.000000	0.015638	0.005004	0.005002	0.003911	0.001721
	MATE 3031.09A	1.000000	0.015956	0.005106	0.005105	0.003991	0.001756
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	1.000000	0.014838	0.004746	0.004758	0.003708	0.001627
	MATE 3032.12A	1.000000	0.014288	0.004571	0.004573	0.003572	0.001572
	MATE 3032.134	1.000000	0.013197	0.004222	0.004224	0.003299	0.001452
	MATE 3032.135	1.000000	0.015197	0.004862	0.004864	0.003799	0.001672
	MATE 3032.13A	1.000000	0.015365	0.004916	0.004918	0.003841	0.001691
	MATE 3032.151	0.9999885	0.013414	0.004292	0.004300	0.003348	0.001474

**Tabla 13: Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos I y II, para los estudiantes que terminaron la sección analizada.**

Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	0.9627613	0.012475	0.003992	0.003992	0.003119	0.001372
	MATE 3031.073	1.000000	0.013137	0.004204	0.004204	0.003284	0.001445
	MATE 3031.091	1.000000	1.000000	0.004132	0.004132	0.003228	0.001420
	MATE 3031.09A	1.000000	0.013415	0.004293	0.004293	0.003354	0.001475
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	1.000001	0.012737	0.004076	0.004076	0.003184	0.001401
	MATE 3032.12A	0.9999999	0.012214	0.003909	0.003909	0.003053	0.001344
	MATE 3032.134	1.000000	0.012273	0.003927	0.003927	0.003068	0.001350
	MATE 3032.135	1.000000	0.012757	0.004083	0.004082	0.003189	0.001403
	MATE 3032.13A	1.000000	0.013289	0.004253	0.004253	0.003322	0.001462
	MATE 3032.151	1.000000	0.012859	0.004115	0.004115	0.003215	0.001414

**Tabla 14: Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos I y II, para los estudiantes que aprobaron la sección analizada.**

Las variables de insumo que se utilizaron para los grupos III y IV fueron:

- $X_1$ : Promedio de las notas de los exámenes parciales I y II.
- $X_2$ : Promedio de las notas de los exámenes parciales III y IV.
- $X_3$ : Nota del examen final.

La variable de producto que se consideró en este estudio fue:

- $Y$ : Nota numérica final del estudiante.

El centro y el radio de eficiencia para cada una de las secciones analizadas de los grupos III y IV se presenta en la Tabla 15. La Tabla 16 muestra la nota promedio de los

exámenes I y II, de los exámenes III y IV, el examen final y la nota numérica final del curso, obtenida por los estudiantes de las secciones analizadas en los grupo III y IV

<b>Grupos</b>	<b>Sección</b>	<b>Centro</b>	<b>Matriculados</b>	<b>Terminaron</b>	<b>Aprobaron</b>
Grupo III	MATE 3031.094	<b>X( 1 )</b>	55.8849	63.4314	78.2931
		<b>X( 2 )</b>	36.3453	56.0829	88.2356
		<b>X( 3 )</b>	28.7289	48.0114	80.7241
		<b>Y</b>	40.8992	56.2334	82.5023
		<b>Radio</b>	45.7564	35.8168	15.3563
Grupo IV	MATE 3032.121	<b>X( 1 )</b>	55.9969	68.3017	76.9372
		<b>X( 2 )</b>	47.0554	67.6108	78.6419
		<b>X( 3 )</b>	38.8357	56.0962	72.9860
		<b>Y</b>	47.7190	64.3983	76.3485
		<b>Radio</b>	35.4212	34.0898	15.0569
	MATE 3032.161	<b>X( 1 )</b>	49.5570	62.0535	77.5824
		<b>X( 2 )</b>	28.5025	54.0535	71.5275
		<b>X( 3 )</b>	26.2506	53.6150	76.4505
		<b>Y</b>	35.1960	56.7219	75.1236
		<b>Radio</b>	39.7780	33.3326	13.7125

**Tabla 15: Centro y Radio de eficiencia para los grupos III y IV.**

La Tabla 16 muestra la nota promedio, en cada uno de los exámenes que se les realizó, obtenida por los estudiantes de las secciones analizadas en los grupo III y IV.

<b>Grupos</b>	<b>Sección</b>	<b>Promedio</b>	<b>Matriculados</b>	<b>Terminaron</b>	<b>Aprobaron</b>
Grupo III	MATE 3031.094	PROM 1,2	54.7210	63.4333	80.1428
		PROM 3,4	31.1175	61.2000	89.5714
		PROM EF	22.8240	51.9333	81.5714
		N. F.	40.1979	60.4033	83.8964
Grupo IV	MATE 3032.121	PROM 1,2	56.8235	69.1136	76.9333
		PROM 3,4	45.9853	68.8409	78.2000
		PROM EF	37.7059	58.3636	72.4000
		N. F.	47.1130	65.7932	76.0167
	MATE 3032.161	PROM 1,2	48.1212	62.9687	77.1875
		PROM 3,4	30.9242	55.8125	72.1250
		PROM EF	29.9394	57.0625	76.5000
		N. F.	36.2730	58.69219	75.2094

**Tabla 16: Nota promedio para los grupos III y IV.**

Al comparar la nota promedio de los estudiantes matriculados, en cada una de las secciones analizadas, con el centro de eficiencia de cada sección, se observa una

desviación, con respecto a la media, de mas o menos dos puntos en cada uno de los promedios analizados. Los resultados de los programas DEA CCR, para cada DMU analizada, que pertenece a los grupos III y IV, se presenta en las Tablas 17-19.

Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
Grupo III	MATE 3031.094	1.000000	0.024450	0.009466	0.000000	0.016394
Grupo IV	MATE 3032.121	1.000000	0.020956	0.008114	0.000000	0.014051
	MATE 3032.161	1.000000	0.028412	0.009944	0.009944	0.008524

**Tabla 17: Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos III y IV, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.**

Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
Grupo III	MATE 3031.094	1.000000	0.017783	0.003992	0.000000	0.015555
Grupo IV	MATE 3032.121	1.000000	0.015528	0.003486	0.000000	0.013582
	MATE 3032.161	1.000000	0.017630	0.012396	0.004269	0.000000

**Tabla 18: Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos III y IV, para los estudiantes que terminaron la sección analizada.**

Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
Grupo III	MATE 3031.094	1.000000	0.012121	0.007079	0.005052	0.000000
Grupo IV	MATE 3032.121	1.000000	0.013098	0.004584	0.004584	0.003929
	MATE 3032.161	1.000000	0.013311	0.004659	0.004659	0.003993

**Tabla 19: Resultados de los programas DEA CCR para de los grupos III y IV, para los estudiantes aprobó la sección analizada.**

Además, se solucionó el problema de hallar el centro y el radio de eficiencia cuando las variables de insumo son:

- $X_1$ : Promedio de las notas de los exámenes parciales I y II.
- $X_2$ : Promedio de las notas de los exámenes parciales III y IV.

La variable de producto que se consideró en este estudio fue:

- $Y$ : Nota numérica final del estudiante.

Los resultados para cada una de las secciones se presentan en la tabla en la Tabla 20.

La solución de los programas DEA CCR, para cada DMU analizada, del problema anterior se presenta en las Tablas 21-23.

<b>Grupos</b>	<b>Sección</b>	<b>Centro</b>	<b>Matriculados</b>	<b>Terminaron</b>	<b>Aprobaron</b>
Grupo I	MATE 3031.071	X (1)	57.8193	71.5779	77.6610
		X (2)	37.7530	72.0325	79.5254
		Y	42.3624	69.5355	76.8269
		Radio	40.5756	22.7394	15.9682
	MATE 3031.073	X (1)	55.0841	70.0455	81.2429
		X (2)	39.8097	65.0260	80.9143
		Y	41.4466	62.5470	76.3543
		Radio	35.3284	25.8345	12.9406
	MATE 3031.091	X (1)	53.3105	66.7462	71.1604
		X (2)	41.6053	64.2077	85.1415
		Y	43.5668	61.3225	75.8968
		Radio	35.9899	30.8029	13.9953
	MATE 3031.09A	X (1)	66.8193	70.6818	77.6509
		X (2)	54.3795	58.0195	78.9528
		Y	56.7924	59.9253	74.7534
		Radio	38.2010	32.4259	13.4905
Grupo II	MATE 3032.125	X (1)	56.9326	70.9085	78.2547
		X (2)	42.0843	64.8310	75.5566
		Y	47.2874	66.7175	77.0309
		Radio	35.0364	34.1924	16.1858
	MATE 3032.12A	X (1)	68.2922	75.0385	82.4634
		X (2)	54.2468	64.6231	82.4512
		Y	58.5352	67.6211	81.6263
		Radio	36.1192	29.4206	16.6878
	MATE 3032.134	X (1)	63.0130	70.8692	76.8475
		X (2)	56.6623	74.2538	81.6102
		X (3)	58.8255	73.1120	81.4420
		Radio	40.9630	36.0909	27.3365
	MATE 3032.135	X (1)	64.5876	70.9895	80.6864
		X (2)	42.0985	56.5684	77.0424
		Y	48.6582	60.7200	78.7412
		Radio	38.7693	32.6989	17.8514
MATE 3032.13A	X (1)	56.2079	69.6408	78.8415	
	X (2)	39.2327	69.1479	77.5976	
	Y	41.0658	64.2134	75.0105	
	Radio	37.1277	20.2356	13.5005	
MATE 3032.151	X (1)	69.7991	75.0730	78.2711	
	X (2)	59.8645	72.2303	81.3795	
	X (3)	62.5346	72.7664	78.9825	
	Radio	35.1851	26.3253	17.1865	
Grupo III	MATE 3031.094	X (1)	59.4382	65.1102	79.0732
		X (2)	40.7416	58.4322	88.9512
		Y	44.8584	58.2144	83.4232
		Radio	39.9341	38.7000	16.6322
Grupo IV	MATE 3032.121	X (1)	56.1402	66.9091	76.6972
		X (2)	45.3598	66.6688	78.7113
		Y	47.1577	63.2601	76.1155
		Radio	36.7065	31.0683	16.2276
	MATE 3032.161	X (1)	47.9518	57.4362	75.1897
		X (2)	31.1325	50.7979	68.4655
		Y	36.4482	51.8032	73.0069
		Radio	37.6863	29.1728	13.3124

**Tabla 20: Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales y la nota numérica final.**

Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	0.9602451	0.022667	0.005697	0.017762
	MATE 3031.073	0.9202096	0.022202	0.005581	0.017398
	MATE 3031.091	0.9534584	0.021885	0.007769	0.014081
	MATE 3031.09A	0.9673730	0.017033	0.006046	0.010960
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	1.000000	0.021147	0.007507	0.013606
	MATE 3032.12A	0.9896843	0.016908	0.006002	0.010879
	MATE 3032.134	1.000000	0.016999	0.006034	0.010938
	MATE 3032.135	0.9885337	0.020316	0.005106	0.015920
	MATE 3032.13A	0.9152026	0.022286	0.005602	0.017464
	MATE 3032.151	0.9879903	0.015799	0.005608	0.010165
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	0.9571828	0.021338	0.005363	0.016720
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	0.9601756	0.020361	0.007228	0.013101
	MATE 3032.161	1.000000	0.027436	0.006896	0.021499

**Tabla 21: Resultados de los programas DEA CCR para el politopo general, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.**

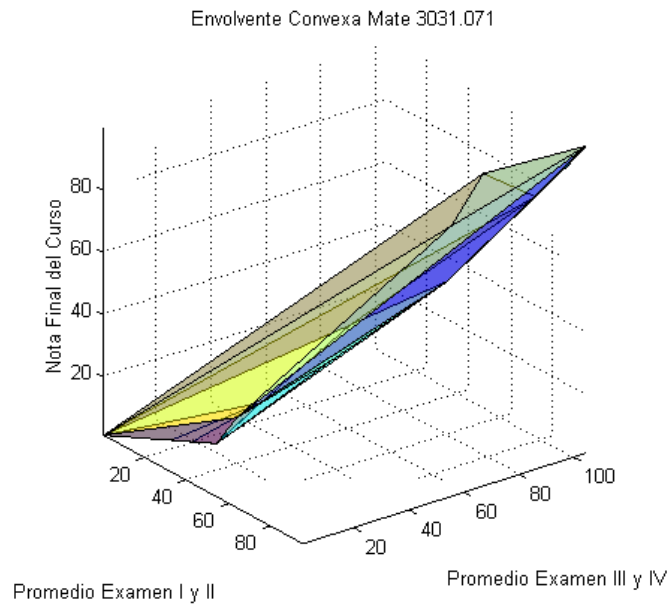
Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	0.9541477	0.013722	0.009470	0.004473
	MATE 3031.073	0.8994936	0.014381	0.009925	0.004687
	MATE 3031.091	0.9153691	0.014927	0.010302	0.004865
	MATE 3031.09A	0.8852746	0.014773	0.010195	0.004815
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	0.9521846	0.014272	0.009850	0.004652
	MATE 3032.12A	0.9282197	0.013727	0.009473	0.004474
	MATE 3032.134	1.000000	0.013678	0.009439	0.004458
	MATE 3032.135	0.9004818	0.014830	0.010235	0.004834
	MATE 3032.13A	0.9095383	0.014164	0.009775	0.004617
	MATE 3032.151	0.9656653	0.013271	0.009159	0.004326
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	1.000000	0.017178	0.011855	0.005599
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	0.9315737	0.014726	0.010163	0.004800
	MATE 3032.161	0.9218293	0.017795	0.012281	0.005800

**Tabla 22: Resultados de los programas DEA CCR para el politopo general, para los estudiantes que terminaron la sección analizada.**

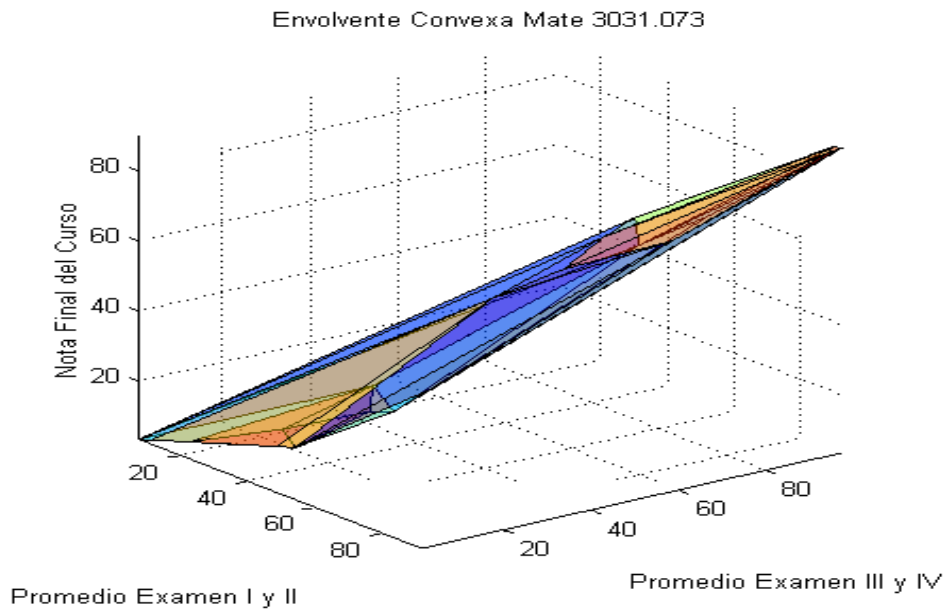
Grupos	Sección	FO	$Y_1$	$X_1$	$X_2$
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	0.9373177	0.012200	0.003576	0.009082
	MATE 3031.073	0.9084557	0.011898	0.003487	0.008857
	MATE 3031.091	0.9817895	0.012936	0.014053	0.000000
	MATE 3031.09A	0.9168214	0.012265	0.003595	0.009130
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	1.000000	0.012982	0.003805	0.009664
	MATE 3032.12A	0.9541319	0.011689	0.003426	0.008702
	MATE 3032.134	0.9779512	0.012008	0.003520	0.008939
	MATE 3032.135	0.9720780	0.012345	0.003619	0.009190
	MATE 3032.13A	0.9274808	0.012365	0.003624	0.009205
	MATE 3032.151	0.9456296	0.011973	0.003509	0.008913
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	0.9711602	0.011641	0.012647	0.000000
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	0.9388157	0.012334	0.003615	0.009182
	MATE 3032.161	1.000000	0.013697	0.004015	0.010197

**Tabla 23: Resultados de los programas DEA CCR para el politopo general, para los estudiantes que aprobaron la sección analizada.**

Los polítopos que se generan para cada grupo, de este último problema, para cada sección analizada, utilizando los estudiantes que se matricularon en cada sección se presenta en las Figuras 13-25, y el polítopo solución, para cada sección analizada, utilizando los estudiantes que terminaron la clase, se presentan en las Figuras 26-38.

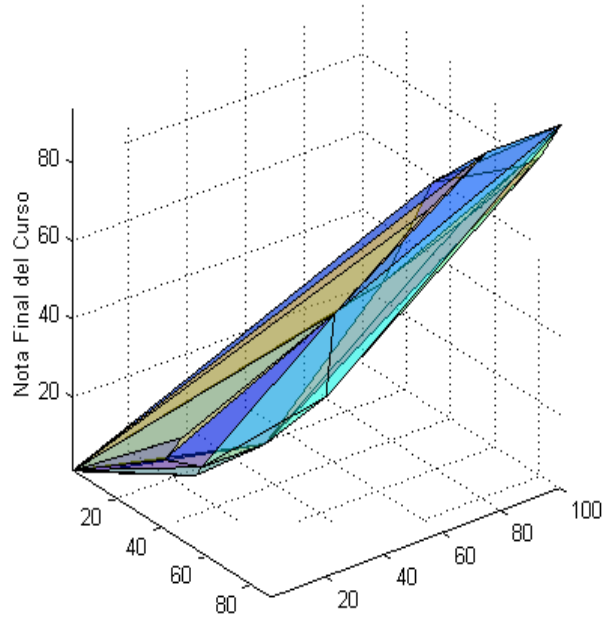


**Figura 13: Polítopo para el la sección MATE 3031.071.**



**Figura 14: Polítopo para el la sección MATE 3031.073.**

Envolvente Convexa Mate 3031.091

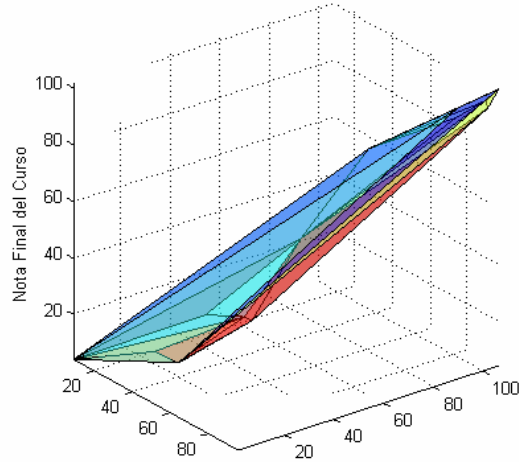


Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 15: Politopo para el la sección MATE 3031.091.**

Envolvente Convexa Mate 3031.094

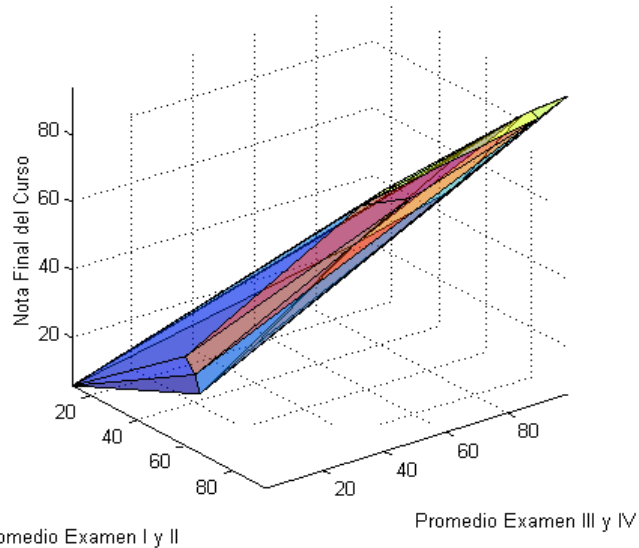


Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 16: Politopo para el la sección MATE 3031.094.**

Envolvente Convexa Mate 3031.09A

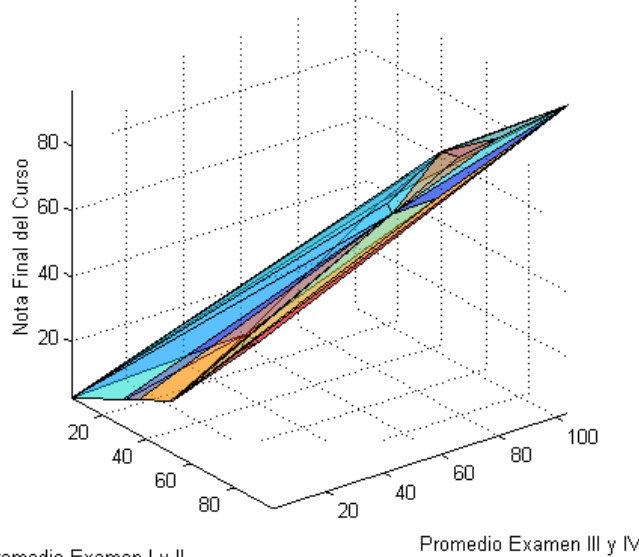


Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 17: Politopo para el la sección MATE 3031.09A.**

Envolvente Convexa Mate 3032.121



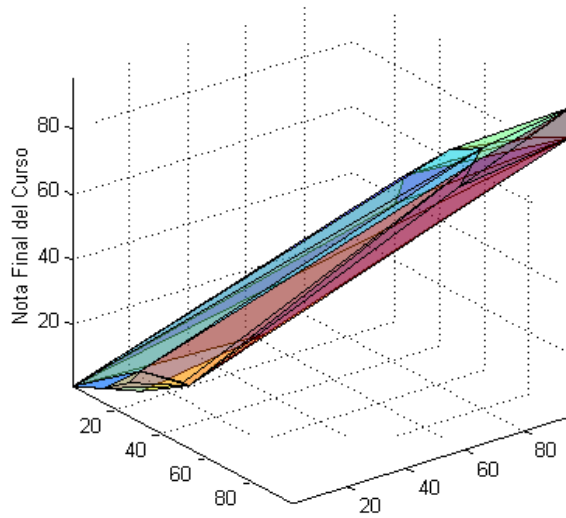
Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 18: Politopo para el la sección MATE 3032.121.**



Envolvente Convexa Mate 3032.125

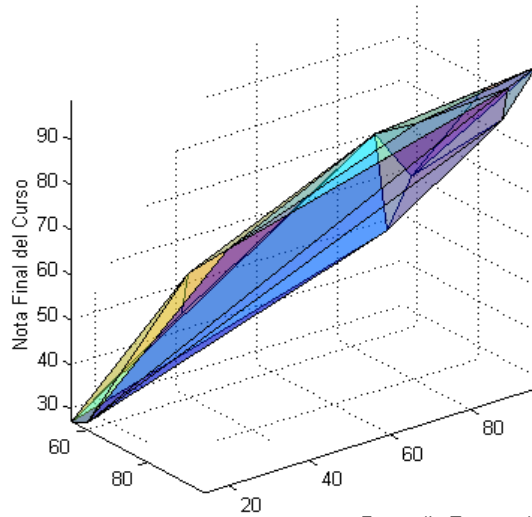


Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 19: Politopo para el la sección MATE 3032.125.**

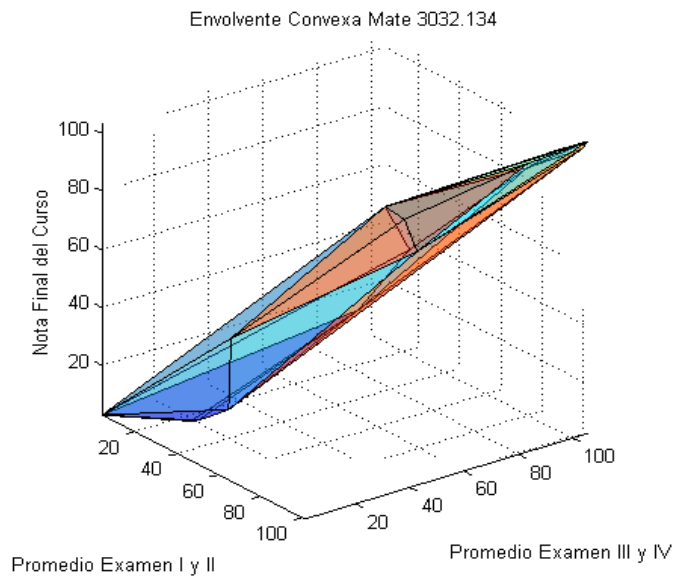
Envolvente Convexa Mate 3032.12A Modificado



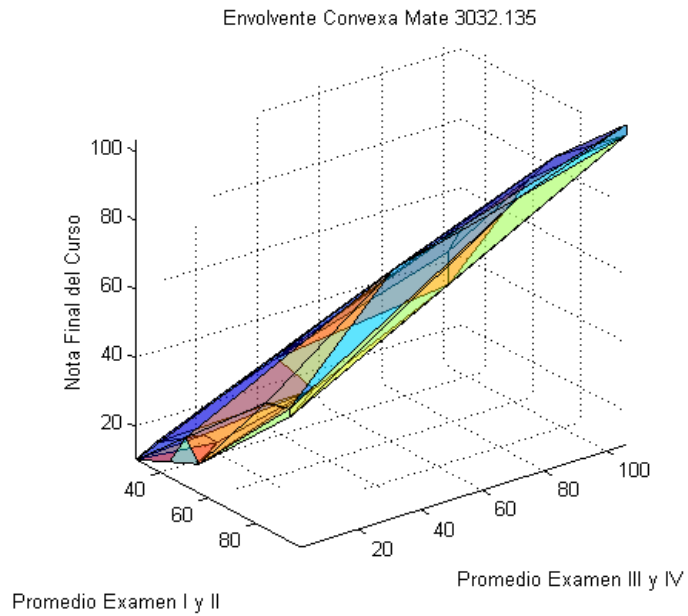
Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 20: Politopo para el la sección MATE 3032.12A.**

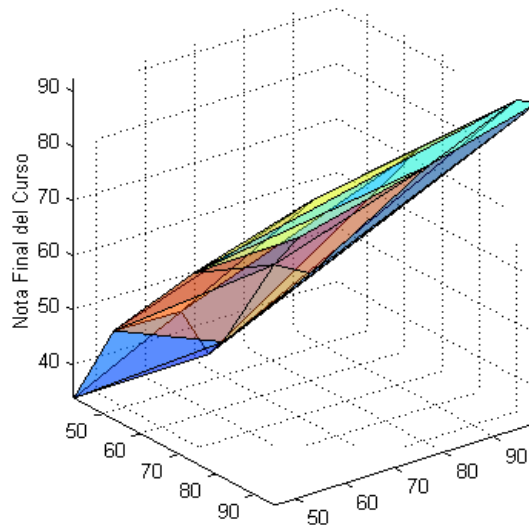


**Figura 21: Politopo para el la sección MATE 3032.134.**



**Figura 22: Politopo para el la sección MATE 3032.135o.**

Envolvente Convexa Mate 3032.13A Modificado

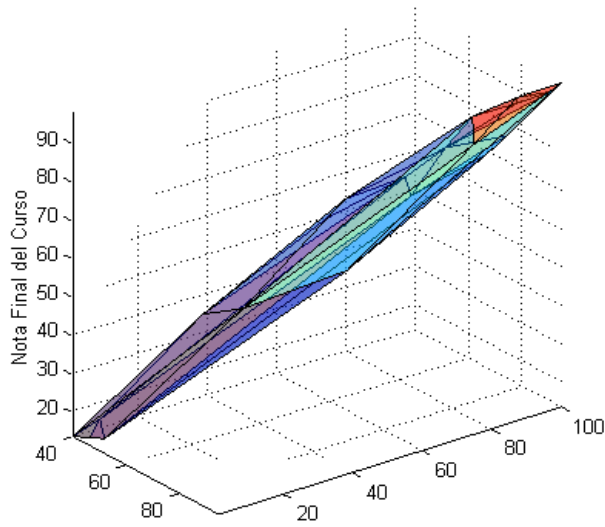


Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 23: Polítopo para el la sección MATE 3032.13A.**

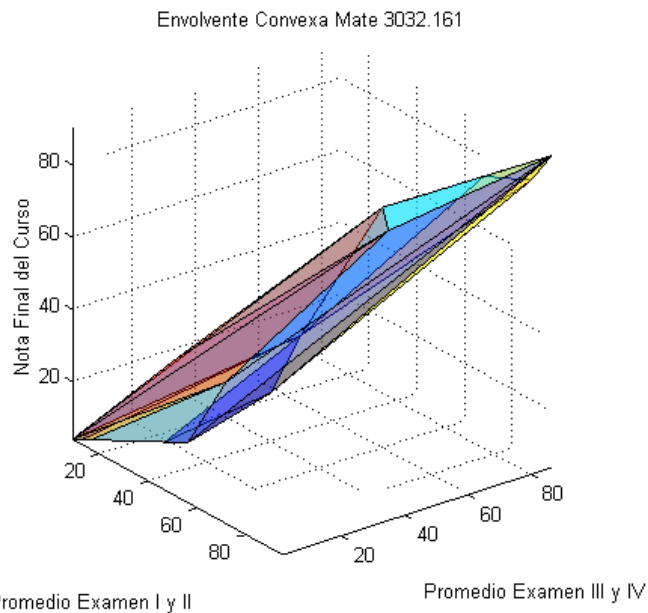
Envolvente Convexa Mate 3032.151



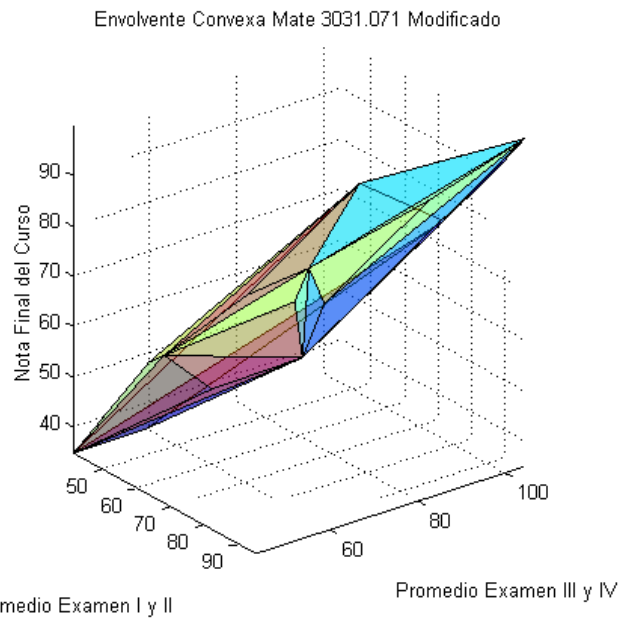
Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

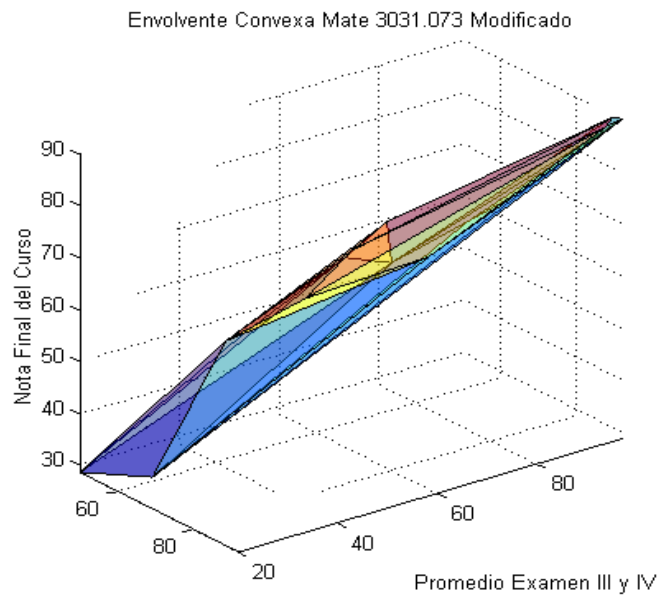
**Figura 24: Polítopo para el la sección MATE 3032.151.**



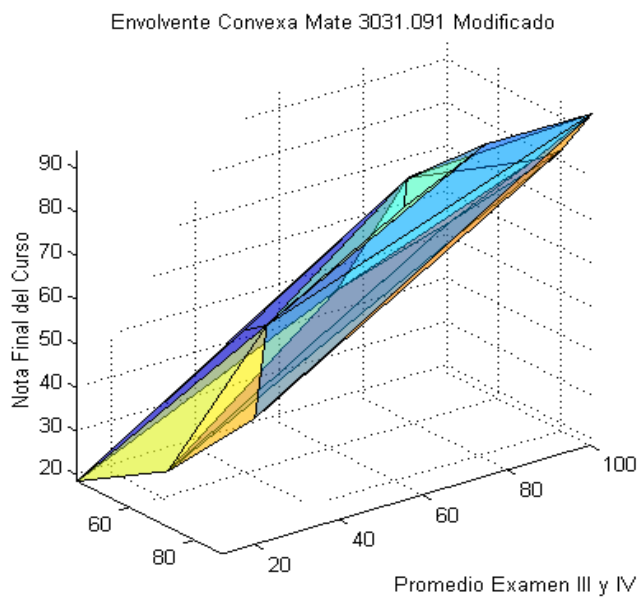
**Figura 25: Politopo para el la sección MATE 3032.161.**



**Figura 26: Politopo para el la sección MATE 3031.071 Modificado.**

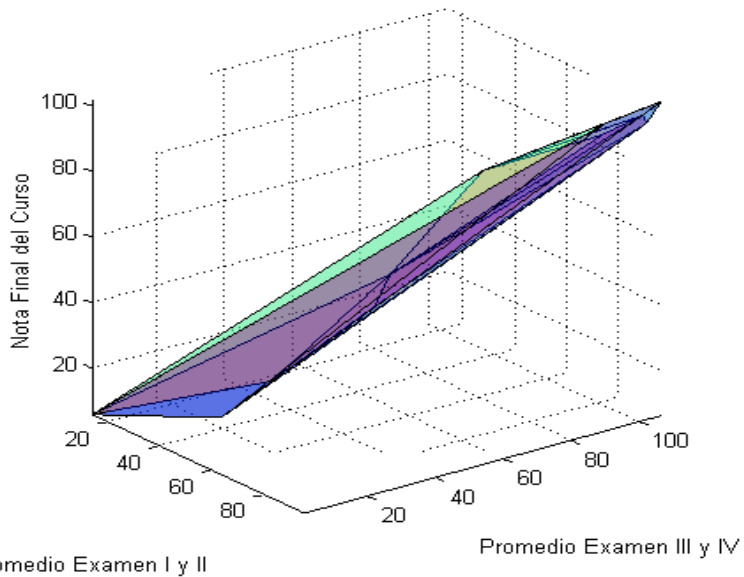


**Figura 27: Politopo para el la sección MATE 3032.073 Modificado.**



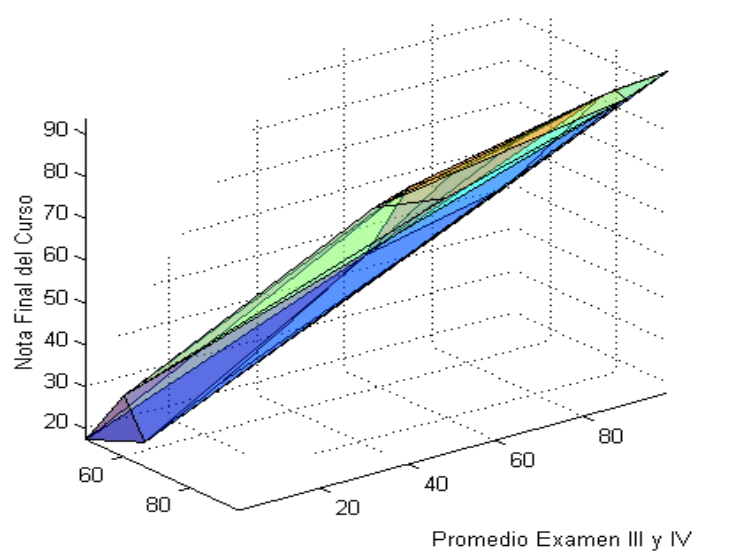
**Figura 28: Politopo para el la sección MATE 3031.091 Modificado.**

Envolvente Convexa Mate 3031.094 Modificado



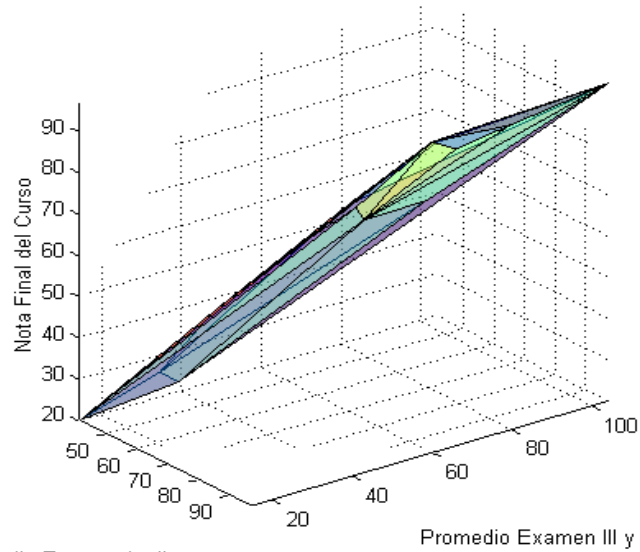
**Figura 29: Politopo para el la sección MATE 3031.094 Modificado.**

Envolvente Convexa Mate 3031.09A Modificado



**Figura 30: Politopo para el la sección MATE 3031.09A Modificado**

Envolvente Convexa Mate 3032.121 Modificado

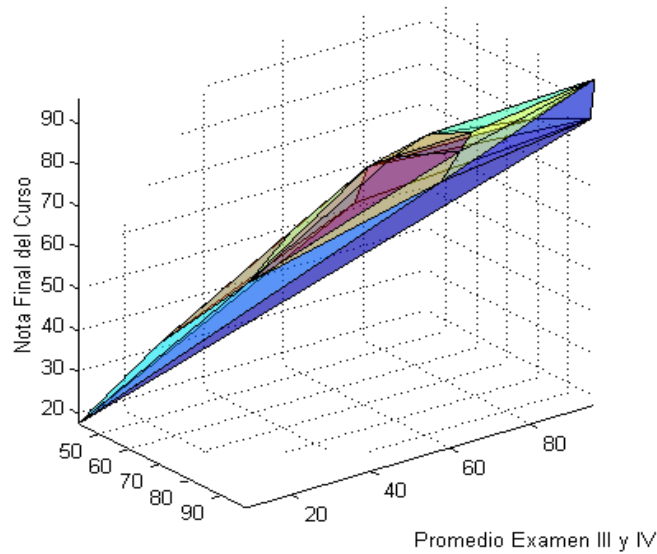


Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

**Figura 31: Politopo para el la sección MATE 3032.121 Modificado.**

Envolvente Convexa Mate 3032.125 Modificado

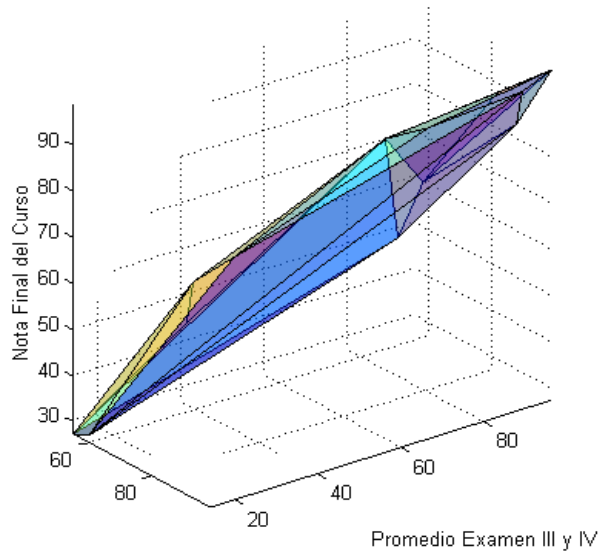


Promedio Examen I y II

Promedio Examen III y IV

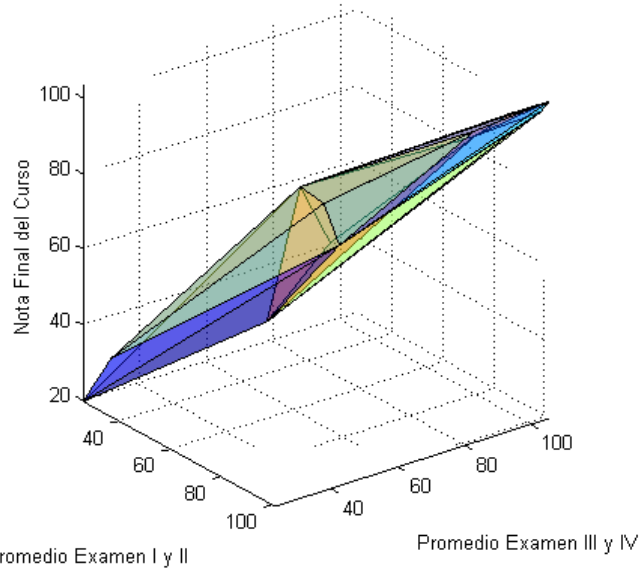
**Figura 32: Politopo para el la sección MATE 3032.125 Modificado**

Envolvente Convexa Mate 3032.12A Modificado



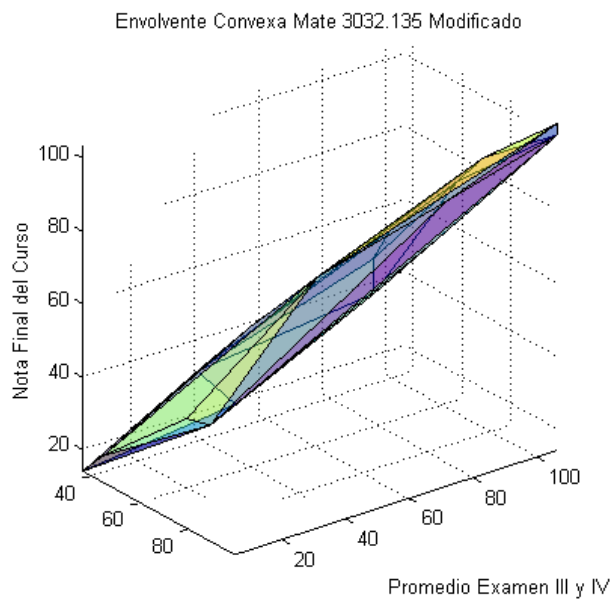
**Figura 33: Politopo para el la sección MATE 3032.12A Modificado**

Envolvente Convexa Mate 3032.134 Modificado

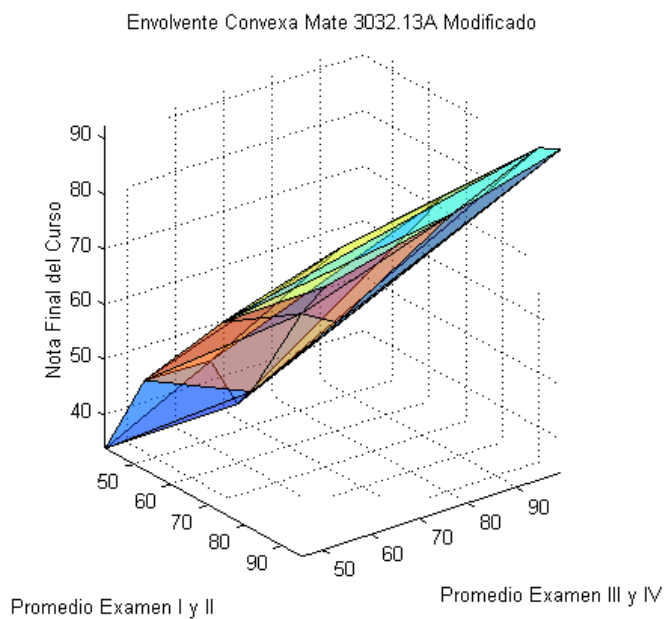


**Figura 34: Politopo para el la sección MATE 3032.134 Modificado.**

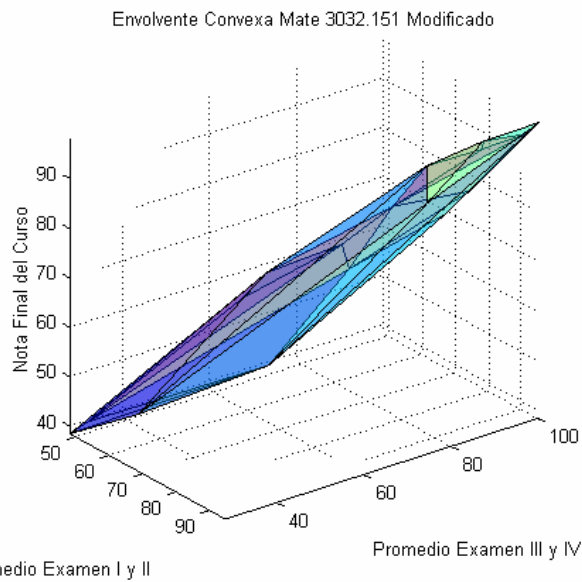




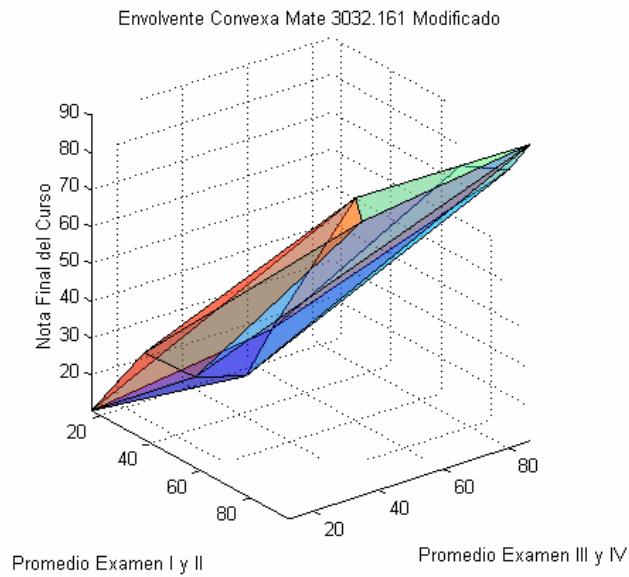
**Figura 35: Politopo para el la sección MATE 3032.135 Modificado.**



**Figura 36: Politopo para el la sección MATE 3032.13A Modificado.**



**Figura 37: Politopo para el la sección MATE 3032.151 Modificado.**



**Figura 38: Politopo para el la sección MATE 3032.161 Modificada**

También, se solucionó el problema de hallar el centro y el radio de eficiencia cuando las variables de insumo son:

- $X_1$ : Promedio de las notas de los exámenes parciales I, II, III y IV.
- $X_2$ : Nota del examen final.

La variable de producto que se consideró en este estudio fue:

- $Y$ : Nota numérica final del estudiante.

Los resultados para cada una de las secciones se presentan en la tabla en la Tabla 24.

La solución de los programas DEA CCR, para cada DMU analizada, del problema anterior se presenta en las Tablas 25-27.

<b>Grupos</b>	<b>Sección</b>	<b>Centro</b>	<b>Matriculados</b>	<b>Terminaron</b>	<b>Aprobaron</b>	
Grupo I	MATE 3031.071	<b>X( 1 )</b>	57.2958	70.0664	80.1615	
		<b>X( 2 )</b>	39.8931	54.5221	71.1538	
		<b>Y</b>	53.4869	67.3071	78.6974	
		<b>Radio</b>	36.9774	27.2053	20.6914	
MATE 3031.073	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	50.1955	70.2161	82.5000	
		<b>Y</b>	33.8317	57.5254	73.6571	
		<b>Radio</b>	43.6783	64.8066	77.6226	
		<b>Radio</b>	35.7133	29.1246	13.3681	
MATE 3031.091	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	57.4486	70.5534	80.5805	
		<b>Y</b>	41.0467	52.3708	66.0678	
		<b>Radio</b>	54.3299	66.8466	77.7983	
		<b>Radio</b>	36.7100	34.4533	19.2170	
MATE 3031.09A	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	57.0253	63.7727	79.2713	
		<b>Y</b>	37.4944	45.5195	63.1064	
		<b>Radio</b>	52.3981	58.9187	75.6964	
		<b>Radio</b>	32.6213	30.1086	13.6388	
Grupo II	MATE 3032.125	<b>X( 1 )</b>	50.9551	68.3345	79.0372	
		<b>X( 2 )</b>	40.8652	63.6901	79.6809	
		<b>Y</b>	48.7564	67.0359	79.3696	
		<b>Radio</b>	34.5735	38.1746	15.7507	
	MATE 3032.12A	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	61.4605	73.2923	82.5106
			<b>Y</b>	53.1579	70.4648	83.6479
			<b>Radio</b>	58.3813	71.2085	81.8107
<b>Radio</b>			36.6407	32.6865	17.6955	
MATE 3032.134	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	59.1632	74.7273	79.0528	
		<b>Y</b>	45.2632	70.2208	82.1549	
		<b>Radio</b>	56.7459	74.5364	81.1596	
		<b>Radio</b>	37.5741	42.7085	24.0298	
MATE 3032.135	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	54.5000	66.4449	77.7406	
		<b>Y</b>	42.0842	60.9322	78.3208	
		<b>Radio</b>	50.1785	64.1266	77.7087	
		<b>Radio</b>	39.3599	37.9310	18.0781	
MATE 3032.13A	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	49.1348	70.4043	78.2500	
		<b>X( 3 )</b>	34.0225	63.3830	79.6286	
		<b>Radio</b>	42.5437	65.5526	75.2043	
		<b>Radio</b>	38.9680	29.3566	13.2813	
MATE 3032.151	<b>X( 1 )</b>	<b>X( 2 )</b>	60.0361	72.5962	81.1829	
		<b>Y</b>	49.9759	69.2154	77.6585	
		<b>Radio</b>	56.8001	71.7717	80.3863	
		<b>Radio</b>	31.9359	23.8231	18.8029	
Grupo III	MATE 3031.094	<b>X( 1 )</b>	48.7190	62.6234	83.3786	
		<b>X( 2 )</b>	29.5044	52.4156	81.4000	
		<b>X( 3 )</b>	42.9546	59.5610	82.7850	
		<b>Radio</b>	45.2576	38.5183	15.6504	
Grupo IV	MATE 3032.121	<b>X( 1 )</b>	53.7857	69.2692	76.7338	
		<b>X( 2 )</b>	39.8655	57.7385	71.6494	
		<b>Y</b>	49.6097	65.8100	75.2084	
		<b>Radio</b>	34.2364	35.2267	15.2665	
	MATE 3032.161	<b>X( 1 )</b>	42.0444	56.7654	77.1357	
		<b>X( 2 )</b>	31.4206	51.0308	77.5714	
		<b>Y</b>	38.8572	55.0450	77.2664	
		<b>Radio</b>	38.0865	33.1644	14.5823	

**Tabla 24: Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales, el examen final y la nota numérica final.**

Grupos	Sección	FO	Y <sub>1</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	0.9961575	0.018624	0.011342	0.008777
	MATE 3031.073	0.9390628	0.021500	0.013093	0.010132
	MATE 3031.091	1.000000	0.018406	0.011210	0.008674
	MATE 3031.09A	1.000000	0.019085	0.011623	0.008994
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	0.9976108	0.020461	0.019625	0.000000
	MATE 3032.12A	0.9903641	0.016964	0.016271	0.000000
	MATE 3032.134	1.000000	0.017622	0.016902	0.000000
	MATE 3032.135	0.9599273	0.019130	0.018349	0.000000
	MATE 3032.13A	0.9257368	0.021760	0.013252	0.010254
	MATE 3032.151	0.9864017	0.017366	0.016657	0.000000
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	1.000000	0.023280	0.010427	0.016676
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	0.9680469	0.019513	0.014751	0.005182
	MATE 3032.161	0.9683197	0.024920	0.018838	0.006618

**Tabla 25: Resultados de los programas DEA CCR para el politopo solución, para los estudiantes matriculados en cada una de las secciones analizadas.**

Grupos	Sección	FO	Y <sub>1</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	0.9973294	0.012673	0.009337	0.003535
	MATE 3031.073	0.9544232	0.012296	0.009059	0.003429
	MATE 3031.091	1.000000	0.012854	0.009471	0.003585
	MATE 3031.09A	1.000000	0.013211	0.007947	0.005863
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	0.9724965	0.011887	0.008758	0.003316
	MATE 3032.12A	1.000000	0.012321	0.009078	0.003437
	MATE 3032.134	1.025735	0.012638	0.009312	0.003525
	MATE 3032.135	0.9821204	0.012638	0.009312	0.003525
	MATE 3032.13A	0.9416606	0.012521	0.009226	0.003492
	MATE 3032.151	0.9866384	0.012274	0.009043	0.003423
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	0.9839396	0.011885	0.008757	0.003315
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	0.9828483	0.013068	0.009629	0.003645
	MATE 3032.161	0.9846781	0.012744	0.009390	0.003554

**Tabla 26: Resultados de los programas DEA CCR para el politopo solución, para los estudiantes que terminaron la sección analizada.**

Grupos	Sección	FO	Y <sub>1</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
<b>Grupo I</b>	MATE 3031.071	0.9973294	0.012673	0.009337	0.003535
	MATE 3031.073	0.9544232	0.012296	0.009059	0.003429
	MATE 3031.091	1.000000	0.012854	0.009471	0.003585
	MATE 3031.09A	1.000000	0.013211	0.007947	0.005863
<b>Grupo II</b>	MATE 3032.125	0.9864715	0.012429	0.009157	0.003467
	MATE 3032.12A	0.9725048	0.011887	0.008758	0.003316
	MATE 3032.134	1.000000	0.012321	0.009078	0.003437
	MATE 3032.135	0.9821204	0.012638	0.009312	0.003525
	MATE 3032.13A	0.9416606	0.012521	0.009226	0.003492
	MATE 3032.151	0.9866384	0.012274	0.009043	0.003423
<b>Grupo III</b>	MATE 3031.094	0.9839396	0.011885	0.008757	0.003315
<b>Grupo IV</b>	MATE 3032.121	0.9828483	0.013068	0.009629	0.003645
	MATE 3032.161	0.9846781	0.012744	0.009390	0.003554

**Tabla 27: Resultados de los programas DEA CCR para el politopo solución, para los estudiantes que aprobaron la sección analizada.**

Se solucionó el problema de hallar el centro y el radio de eficiencia cuando las variables de insumo son:

- $X_1$ : Coordenada del de centro de eficiencia del promedio las notas de los exámenes parciales I y II.
- $X_2$ : Coordenada del de centro de eficiencia del promedio de las notas de los exámenes parciales III y IV.

La variable de producto que se consideró en este estudio fue:

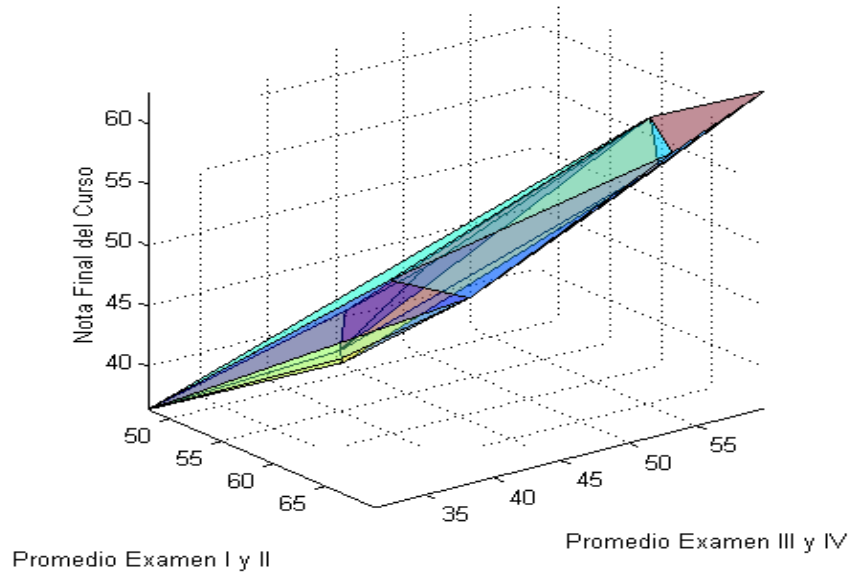
- $Y$ : Nota numérica final del estudiante.

Los resultados para cada una de las secciones se presentan en la tabla en la Tabla 28 y en la Figura 39-41.

<b>Centro</b>	<b>Matriculados</b>	<b>Terminaron</b>	<b>Aprobaron</b>
<b>X(1)</b>	59.5765	68.7616	77.6388
<b>X(2)</b>	45.2861	65.3139	79.7139
<b>Y</b>	48.8347	62.6760	77.7099
<b>Radio</b>	8.69170	7.16670	5.81220

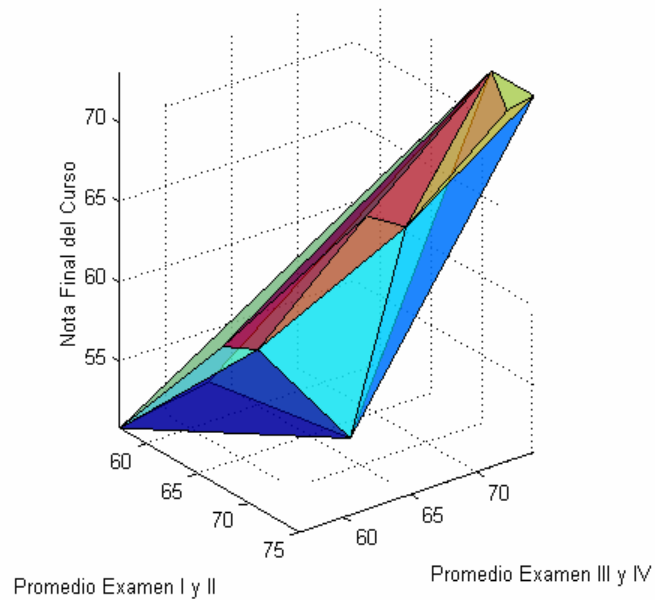
**Tabla 28: Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales y la nota numérica final.**

Centro y Radio de Eficiencia para los Estudiantes Matriculados



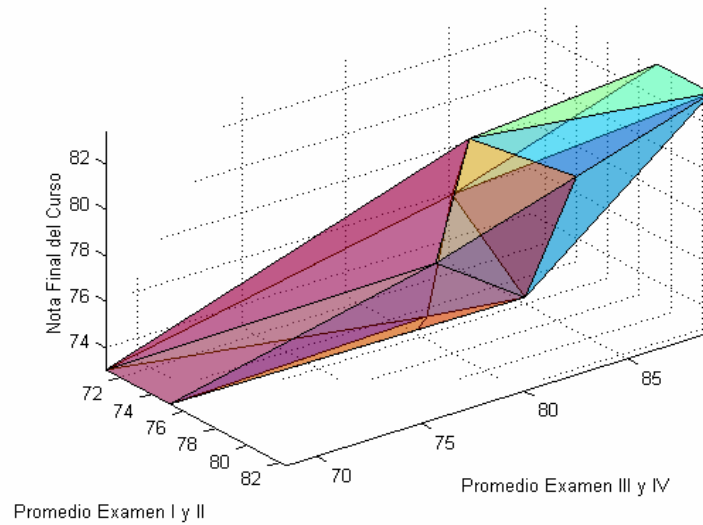
**Figura 39: Centro y radio de eficiencia. Problema general.**

Centro y Radio de Eficiencia para los Estudiantes que Terminaron



**Figura 40: Centro y radio de eficiencia. Problema general.**

Centro y Radio de Eficiencia para los Estudiantes que Aprobaron



**Figura 41: Centro y radio de eficiencia. Problema general.**

El centro y el radio de eficiencia cuando las variables de insumo son:

- $X_1$ : Coordenada del de centro de eficiencia del promedio las notas de los exámenes parciales.
- $X_2$ : Coordenada del de centro de eficiencia del examen final.

La variable de producto que se consideró en este estudio fue:

- $Y$ : Nota numérica final del estudiante.

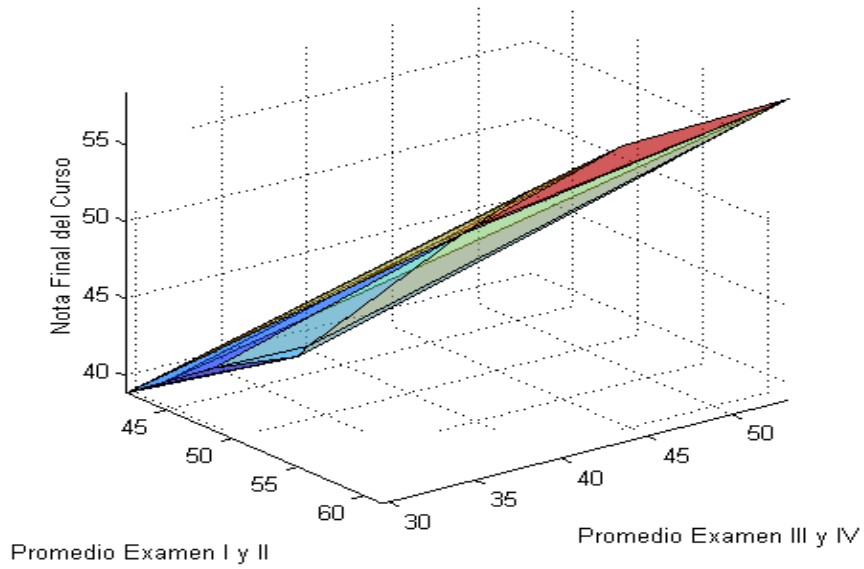
Los resultados para cada una de las secciones se presentan en la tabla en la Tabla 29 y en la figura 42-44.

Centro	Matriculados	Terminaron	Aprobaron
$X(1)$	52.4788	67.9345	79.8093
$X(2)$	8.8345	58.7239	75.0880
$Y$	48.5101	65.3861	78.2056
Radio	7.76250	7.73920	6.00320

**Tabla 29 Centro y radio de eficiencia cuando se consideran los exámenes parciales y la nota numérica final.**

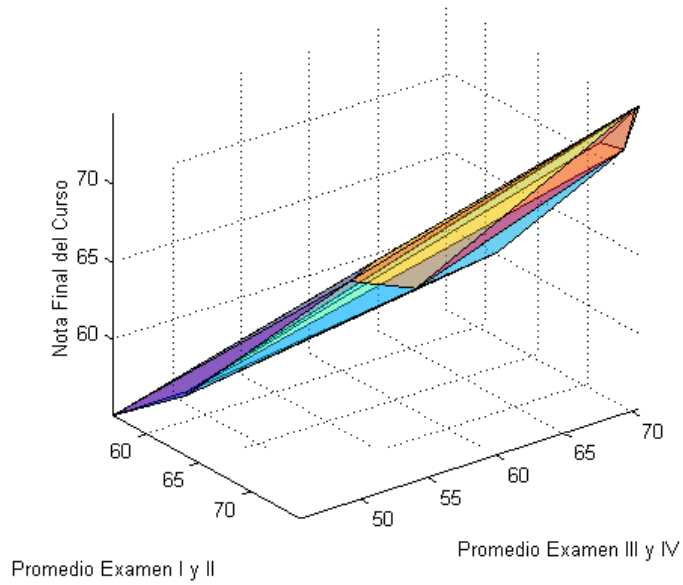


Centro y Radio de Eficiencia para los Estudiantes Matriculados

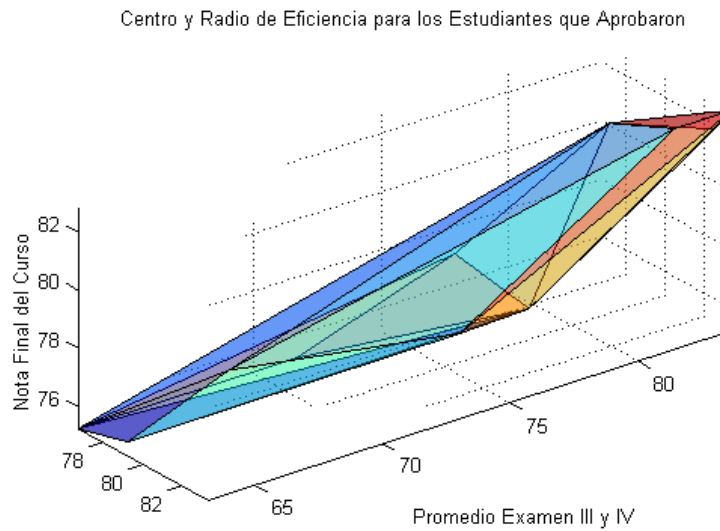


**Figura 42: Centro y radio de eficiencia.**

Centro y Radio de Eficiencia para los Estudiantes que Terminaron



**Figura 43: Centro y radio de eficiencia.**



**Figura 44: Centro y radio de eficiencia.**

### 5.5. Conclusiones.

- Luego de comparar los centros de eficiencia de los cursos analizados, cuando se tienen en cuenta todos los estudiantes matriculados inicialmente en el mismo y los estudiantes que culminaron el curso, se observa una notable mejoría. Este pasa de “F” a “C”. Por lo tanto, se puede pensar las secciones analizadas del Departamento de Matemáticas, de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universidad Mayagüez, son eficientes.
- El centro de eficiencia para las secciones que toman las pruebas computarizadas en matemáticas está por encima del centro de eficiencia de las secciones que no toman dichas pruebas. Además, el radio de eficiencia de las secciones que toman las pruebas electrónicas en matemáticas es menor que el radio de las secciones que no toman

estas pruebas. Por lo tanto, la dispersión de las notas es más pequeña en aquellas secciones que toman las pruebas electrónicas en matemáticas.

- El modelo obtenido, a lo largo de este estudio, se puede aplicar a problemas que se pueden resolver utilizando análisis envolvente de datos.
- Los resultados que se obtienen del estudio realizado utilizando el método propuesto en esta investigación, son eficiente para el modelo DEA CCR.

## **5.2. Recomendaciones.**

- Se recomienda desarrollar e implementar un proyecto permanente que estudie la eficiencia de los primeros cursos que imparte el Departamento de Matemáticas, de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario Mayagüez, para poder mejorar los índices de eficiencia del mismo.

## **Capítulo 6. Conclusiones y Trabajos Futuros**

### **6.1. Conclusiones.**

- El método desarrollado a lo largo de esta investigación permite encontrar un conjunto de producción acotado y los niveles mínimos de productividad de un problema que se puede resolver utilizando análisis envolvente de datos.
- Los postulados de ordinalidad y de convexidad, son necesarios y suficientes para hallar un conjunto de producción óptimo que resuelva un problema de análisis envolvente de datos.
- La función de eficiencia de entrada y de salida permite medir la eficiencia de una observación que pertenece al conjunto de producción.
- La función de eficiencia mide la eficiencia de una observación que no pertenece al conjunto de producción.

### **6.2. Trabajos Futuros.**

- Se recomienda hacer un programa que modele la función de eficiencia, obtenida a lo largo de este estudio, para poder comparar los resultados de la misma, con los obtenidos mediante los modelos tradicionales de análisis envolvente de datos.
- Se recomienda extender los resultados de este estudio a otros modelos DEA para verificar la confiabilidad del modelo obtenido.

## Bibliografía

1. Araque, D. Lancheros, J. y Pérez, Y. La eficacia relativa en los colegios distritales de Bogotá: Una aplicación del análisis envolvente de datos. Cuadernos de administración 16, 36- 60. 2003.
2. Banker, R., Chang, H. y Cooper, W. A simulation and parametric frontier models in the presence of heteroscedasticity. European Journal of Operation Research 153, 624-640. 2004
3. Banker, R., Charnes, A. y Cooper, W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science 30, 1078-1092. 1984
4. Bazaraa, M., Jarvis, J. y Sherali, H. Linear programming and network flows. Ed Wiley, John & Sons. New York. 1990.
5. Bazaraa, M., Sherali, H. y Shetty, C. Non linear programming: Theory and algorithms. Ed. Wiley, John & Sons. New York. 1990.
6. Bertseka, D. Non linear programming. Ed. Atenea Cientifice. New York. 1993.
7. Charnes, A. y Cooper, W. y Rhodes, E. Expositions, interpretation, and extensions of Farrell efficiency measure. Management Science Research Group Report. Pittsburgh, Carnegie-Mellon University School of Urban and Public Affair. 1975.
8. Charnes, A., Cooper, W., y Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision making unit. European Journal of Operation Research 2, 429–444. 1978.
9. Charnes, A., y Cooper, W. An explicit general solution in linear fractional programming. Naval Research Logistics Quarterly 20. 1973.

10. Cooper, W. y Seiford, L. A unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion. *Socio-Economics Planning Science* 34, 1-26. 2000.
11. Färe, R. y Grosskopf, S. A non-parametric cost approach to scale efficiency. *Scandinavian Journal of Economics* 87, 35-50. 1985.
12. Farrell, M. The Measurement of productive efficiency. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A. III*, 253-290. 1957.
13. Giménez, V. y Thieme, C. Eficiencia y eficacia en educación. Una comparación internacional. Tesis Doctoral. Departamento de Economía de la Empresa. Universidad Autónoma de Barcelona. 2002.
14. Luenberger, D. *Linear and nonlinear programming*. Ed. Addison Wesley. 1989.
15. Mizala, A., Romaguera, P. y Farren D. Eficiencia técnica de los establecimientos educacionales en Chile. *Serie Economía* 38, 1- 45. 1998.
16. Nash, S. *Linear and non-linear programming*. Ed. McGraw Hill. 1996.
17. Núñez, R. y Modrego, A. Análisis de la eficiencia técnica de los centros tecnológicos españoles. Informe final proyecto PROFIT. Universidad Carlos III de Madrid. 2003.
18. Pascual, Ramón. Eficiencia de los centros públicos de educación secundaria de la provincia de Alicante. Tesis doctoral. Universidad de Alicante. 2000.
19. Rhodes, E. *Data envelopment analysis and related approaches for measuring the efficiency of decision-making unit with application to program follow through U. S. education*. Ph. D. thesis, Carnegie-Mellon University School of Urban and Public Affairs. Pittsburgh, 1978.
20. Seiford, L. y Thrall, R. Recent development in DEA, the mathematical programming approaches to frontier analysis. *Journal of Econometrics* 46, 7-38. 1990.

21. Shapiro, J. Mathematical programming: Structures and algorithms. Ed. Hardcover. New York. 1979.
22. Thanassoulis, E. Introduction to the theory and application of data envelopment analysis. Ed. KAP. 2001
23. Wei, Q. y Hong, Y. Congestion and Returns to scale in data envelopment analysis. European Journal of Operation Research 153, 641-660. 2004.

# **Anejos**



## Solución para el problema (E4) utilizando LINDO

```

MIN      x1 + x2 + y1 + y2 + z1 + z2

SUBJECT TO

      2)  x1 - x2 + y1 - y2          + a = 1
      3)  2x1 - 2x2          + z1 - z2 = 3
  
```

END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	1.000000	0.000000
X2	0.000000	2.000000
Y1	0.000000	2.000000
Y2	0.000000	0.000000
Z1	1.000000	0.000000
Z2	0.000000	2.000000
A	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.000000
3)	0.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	1.000000	1.000000	0.000000
X2	1.000000	INFINITY	2.000000
Y1	1.000000	INFINITY	2.000000
Y2	1.000000	INFINITY	0.000000
Z1	1.000000	0.000000	0.500000
Z2	1.000000	INFINITY	2.000000
A	0.000000	INFINITY	1.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	1.000000	0.500000	1.000000
3	3.000000	INFINITY	1.000000

## Solución para el problema (E7) utilizando LINDO

MAX        w1 + 3w2

SUBJECT TO

- 2)    - w1 - 2w2 <= 1
- 3)        w1 + 2w2 <= 1
- 4)        w1            <= 1
- 5)    -w1                <= 1
- 6)                w2 <= 1
- 7)                -w2 <= 1

END

w2 < 0            FREE w2

LP OPTIMUM FOUND AT STEP        1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)            2.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
W1	-1.000000	0.000000
W2	1.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	2.000000	0.000000
3)	0.000000	1.500000
4)	2.000000	0.000000
5)	0.000000	0.500000
6)	0.000000	0.000000
7)	2.000000	0.000000
8)	1.000000	0.000000

NO. ITERATIONS=            1

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
W1	1.000000	0.500000	INFINITY
W2	3.000000	INFINITY	1.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	1.000000	INFINITY	2.000000
3	1.000000	0.000000	2.000000
4	1.000000	INFINITY	2.000000
5	1.000000	0.000000	2.000000
6	1.000000	INFINITY	0.000000
7	1.000000	INFINITY	2.000000

## Programa que encuentra el centro y el radio de eficiencia para las secciones de cálculo que toman las pruebas electrónicas computarizadas utilizando MATLAB

```

clc
clear
%X1 = Nota del examen I.
%X2 = Nota del examen II.
%X3 = Nota del examen III.
%X4 = Nota del examen IV.
%X5 = Nota del examen Final.
%X6 = Nota promedio de las pruebas computarizadas.
variable = input ('Si quiere medir la efectividad de una seccion. Si = 1 no = 0 ');
while (variable == 1)
    S = input ('Digite el numero de estudiantes de la seccion a analizar ');
    for j = 1:S
        disp('Digite las notas del estudiante ')
        j
        X1(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del primer examen de calculo');
        X2(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del segundo examen de calculo ');
        X3(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del tercer examen de calculo ');
        X4(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del cuarto examen de calculo ');
        X5(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del examen final de calculo');
        X6(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante de las pruebas por computadoras ');
    end
    [m n] = size(X1);
    X1(m + 1,1) = min (X1);
    X2(m + 1,1) = min (X2);
    X3(m + 1,1) = min (X3);
    X4(m + 1,1) = min (X4);
    X5(m + 1,1) = min (X5);
    X6(m + 1,1) = min (X6);
    X1(m + 2,1) = max (X1);
    X2(m + 2,1) = max (X2);
    X3(m + 2,1) = max (X3);
    X4(m + 2,1) = max (X4);
    X5(m + 2,1) = max (X5);
    X6(m + 2,1) = max (X6);
    %SE GENERA LA NOTA FINAL DEL ESTUDIANTE.
    for i = 1:m + 2
        XF(i,1) = (X1(i,1) + X2(i,1) + X3(i,1) + X4(i,1))*0.16 + X5(i,1)*0.25 + X6(i,1)*0.11;
    end
    %XF = Nota numerica final del curso.
    %SE GENETRAN LOS PROMEDIOS QUE SE REQUIEREN.
    for i = 1:m + 2
        PROM1(i,1) = (X1(i,1) + X2(i,1))/2;
        PROM2(i,1) = (X3(i,1) + X4(i,1))/2;
        PROM3(i,1) = X5(i,1);
        PROM4(i,1) = X6(i,1);
        PROM5(i,1) = XF(i,1);
        PROM6(i,1) = (X1(i,1) + X2(i,1) + X3(i,1) + X4(i,1))/4;
    end
    %SE GENERA EL POLITOPO CONVEXO.
    disp ('Se generara el centro y el radio del politopo cuando las entradas son: ');
    disp ('X1 = Promedio de las notas de los exámenes parciales I y II');
    disp ('X2 = Promedio de las notas de los exámenes parciales III y IV');
    disp ('X3 = Nota del examen final');
    disp ('X4 = Promedio de las notas de las pruebas electronicas');
    disp ('Y la salida es:');
    disp ('Y = Nota numerica final');
    prom = [PROM1 PROM2 PROM3 PROM4 PROM5];
    %SE GENERAN LAS OBSERVACIONES ESPERADAS.
    Xmin = prom (m + 1,:);
    Xmax = prom (m + 2,:);
    %SE GENERA EL RADIO DE DISPERSION DE LOS DATOS.
    Distance = norm((Xmin - Xmax),5)

```

```

disp ('El radio de dispersion de los datos es'); Distance
C = convhulln(prom);
a1 = [prom(C,1) prom(C,2) prom(C,3) prom(C,4) prom(C,5)];
[w,n] = size (a1);
%SE GENERA EL CENTRO Y EL RADIO DE EFICIENCIA.
for i = 1:w - 1
    Q(i,1) = prom(C(i),1);
    Q(i,2) = prom(C(i),2);
    Q(i,3) = prom(C(i),3);
    Q(i,4) = prom(C(i),4);
    Q(i,5) = prom(C(i),5);
end
Qt = Q';
x0 = [1 1 1 1];
dat = zeros(1,w - 1); d1 = Qt(1,:);
[x1,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
d1 = Qt(2,:);
[x2,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
d1 = Qt(3,:);
[x3,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
d1 = Qt(4,:);
[x4,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
d1 = Qt(5,:);
[x5,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
a11 = a1';
centro = [x1(1,1) x2(1,1) x3(1,1) x4(1,1) x5(1,1)];
for i = 1:w-1
    N(:,i)= Qt(:,i) - centro;
    V(:,i) = norm(N(:,i),5);
end
[R,I] = max(V);
[r,w] = min(V);
disp ('El centro del politopo convexo es: '); centro
disp ('La distancia maxima del politopo al centro es: '); R
disp ('La distancia minima del politopo al centro es: '); r
disp ('El radio del politopo es: '); R - r
%SE GENERA EL POLITOPO CONVEXO CON LOS 4 EXAMENES PARCIALES Y LA NOTA NUMERICA FINAL.
disp ('Se generara el centro y el radio del politopo cuando las entradas son: ');
disp ('X1 = Promedio de las notas de los exámenes parciales I y II');
disp ('X2 = Promedio de las notas de los exámenes parciales III y IV');
disp ('Y la salida es:');
disp ('Y = Nota numerica final');
PROM = [PROM1 PROM2 PROM5];
K = convhulln(PROM);
A1 = [PROM1(K,1) PROM2(K,1) PROM5(K,1)];
[w1,n] = size (a1);
for i = 1:w1 - 1
    Q1(i,1) = PROM(C(i),1);
    Q1(i,2) = PROM(C(i),2);
    Q1(i,3) = PROM(C(i),3);
end
Q1t = Q1';
x0 = [1 1 1];
dat1 = zeros(1,w1-1);
d1 = Q1t(1,:);
[x10,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat1);
d1 = Q1t(2,:);
[x20,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat1);
d1 = Q1t(3,:);
[x30,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat1);
A11 = A1';
centro1 = [x10(1,1) x20(1,1) x30(1,1)];
for i = 1:w1 - 1
    N1(:,i)= Q1t(:,i) - centro1;
    V1(:,i) = norm(N1(:,i),3);
end
[R1,I1] = max(V1);
[r1,w1] = min(V1);

```

```

disp ('El centro del politopo convexo es: '); centro1
disp ('La distancia maxima del politopo al centro es: '); R1
disp ('La distancia minima del politopo al centro es: '); r1
disp ('El radio del politopo es: '); R1 - r1
figure, hold on
d = [1 2 3 1];
for i = 1:size(K,1)
    j= K(i,d);
    h(i)=patch(PROM(j,1),PROM(j,2),PROM(j,3),i,'FaceAlpha',.4);
end
hold off
view(3),
axis equal, axis on
grid on
title('Envolvente Convexa Mate 3031.09A')
xlabel('Promedio Examen I y II')
ylabel('Promedio Examen III y IV')
zlabel('Nota Final del Curso')
set(gca,'Color',[.9 1 .8])
camorbit(90,-5);
%SE GENERA EL POLITOPO CONVEXO CON EL EXAMEN FINAL, LAS PRUEBAS Y LA NOTA FINAL.
disp ('Se generara el centro y el radio del politopo cuando las entradas son: ');
disp ('X1 = Nota del examen final');
disp ('X2 = Promedio de las notas de las pruebas electronicas');
disp ('Y la salida es:');
disp ('Y = Nota numerica final');
prom1 = [PROM6 PROM4 PROM5];
k = convhulln(prom1);
A = [prom1(k,1) prom1(k,1) prom1(k,1)];
[w2,n] = size (A);
for i = 1:w2 - 1
    Q2(i,1) = prom1(C(i),1);
    Q2(i,2) = prom1(C(i),2);
    Q2(i,3) = prom1(C(i),3);
end
Q2t = Q2';
x0 = [1 1 1];
dat2 = zeros(1,w2 - 1);
d2 = Q2t(1,:);
[x11,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d2,dat2);
d2 = Q2t(2,:);
[x21,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d2,dat2);
d2 = Q2t(3,:);
[x31,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d2,dat2);
A11 = A1';
centro2 = [x11(1,1) x21(1,1) x31(1,1)];
for i = 1:w2-1
    N2(:,i)= Q2t(:,i) - centro2;
    V2(:,i) = norm(N2(:,i),3);
end
[R2,I2] = max(V2);
[r2,w2] = min(V2);
disp ('El centro del politopo convexo es: '); centro2
disp ('La distancia maxima del politopo al centro es: '); R2
disp ('La distancia minima del politopo al centro es: '); r2
disp ('El radio del politopo es: '); R2 - r2
figure, hold on
d = [1 2 3 1];
for i = 1:size(k,1)
    j= k(i,d);
    h(i)=patch(prom1(j,1),prom1(j,2),prom1(j,3),i,'FaceAlpha',.6);
end
hold off
view(3),
axis equal, axis on
grid on
title('Envolvente Convexa Mate 3031.09A')
xlabel('Promedio Examen Final')

```

```

ylabel('Promedio Pruebas Eletronicas')
xlabel('Nota Final del Curso')
set(gca,'Color',[.9 1 .8])
camorbit(90,-5);
%SE GENERA EL POLITOPO CONVEXO CON LOS 4 EXAMENES PARCIALES, EL FINAL Y LA NOTA FINAL.
disp ('Se generara el centro y el radio del politopo cuando las entradas son: ');
disp ('X1 = Promedio de las notas de los 4 exámenes parciales');
disp ('X2 = Nota del examen final');
disp ('Y la salida es:');
disp ('Y = Nota numerica final');
prom2 = [PROM6 PROM3 PROM5];
k3 = convhulln(prom2);
A2 = [prom2(k3,1) prom2(k3,2) prom2(k3,3)];
[w3,n] = size (A2);
for i = 1:w3 - 1
    Q3(i,1) = prom2(C(i),1);
    Q3(i,2) = prom2(C(i),2);
    Q3(i,3) = prom2(C(i),3);
end
Q3t = Q3';
x0 = [1 1 1];
dat3 = zeros(1,w3 - 1);
d3 = Q3t(1,:);
[x41,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d3,dat3);
d3 = Q3t(2,:);
[x42,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d3,dat3);
d3 = Q3t(3,:);
[x43,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d3,dat3);
A21 = A2';
centro3 = [x41(1,1) x42(1,1) x43(1,1)];
for i = 1:w3 - 1
    N3(:,i) = (Q3t(:,i) - centro3);
    V3(:,i) = norm(N2(:,i),3);
end
[R3,I3] = max(V3);
[r3,w3] = min(V3);
disp ('El centro del politopo convexo es: '); centro3
disp ('La distancia maxima del politopo al centro es: '); R3
disp ('La distancia minima del politopo al centro es: '); r3
disp ('El radio del politopo es: '); R3 - r3
figure, hold on
d = [1 2 3 1];
for i = 1:size(k3,1)
    j= k3(i,d);
    h(i)=patch(prom2(j,1),prom2(j,2),prom2(j,3),i,'FaceAlpha',.6);
end
hold off
view(3),
axis equal, axis on
grid on
title('Envolvente Convexa Mate 3031.09A')
xlabel('Promedio Exámenes Parciales')
ylabel('Examen Final')
xlabel('Nota Final del Curso')
set(gca,'Color',[.9 1 .8])
camorbit(90,-5);
clear
variable = input ('Si quiere medir la efectividad de una seccion. Si = 1 no = 0 ');
end

```

## Programa que encuentra el centro y el radio de eficiencia para las secciones de cálculo que no toman las pruebas electrónicas computadorizadas utilizando MATLAB

```

clc
clear
%X1 = Nota del examen I.
%X2 = Nota del examen II.
%X3 = Nota del examen III.
%X4 = Nota del examen IV.
%X5 = Nota del examen Final.
disp ('Programa que analiza la eficiencia de una seccion matriculada en un curso de Calculo que no toma las pruebas
computadorizadas.')
variable = input ('Si quiere medir la efectividad de una seccion. Si = 1 no = 0 ');
while (variable == 1)
    S = input ('Digite el numero de estudiantes de la seccion a analizar ');
    for j = 1:S
        disp('Digite las notas del estudiante ');
        j
        X1(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del primer examen de calculo ');
        X2(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del segundo examen de calculo ');
        X3(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del tercer examen de calculo ');
        X4(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del cuarto examen de calculo ');
        X5(j,1) = input ('Digite la nota del estudiante del examen final de calculo ');
    end
    [m n] = size(X1);
    X1(m+1,1) = min (X1);
    X2(m+1,1) = min (X2);
    X3(m+1,1) = min (X3);
    X4(m+1,1) = min (X4);
    X5(m+1,1) = min (X5);
    X1(m+2,1) = max (X1);
    X2(m+2,1) = max (X2);
    X3(m+2,1) = max (X3);
    X4(m+2,1) = max (X4);
    X5(m+2,1) = max (X5);
    %SE GENERA LA NOTA FINAL DEL ESTUDIANTE.
    for i = 1:m + 2
        XF(i,1) = (X1(i,1)+X2(i,1)+X3(i,1)+X4(i,1))*0.175+ X5(i,1)*0.3;
    end
    %SE GENETRAN LOS PROMEDIOS QUE SE REQUIEREN
    for i = 1:m + 2
        PROM1(i,1) = (X1(i,1) + X2(i,1))/2;
        PROM2(i,1) = (X3(i,1) + X4(i,1))/2;
        PROM3(i,1) = X5(i,1);
        PROM4(i,1) = XF(i,1);
    end
    %SE GENERA EL POLITOPO CONVEXO
    disp ('Se generara el centro y el radio del politopo cuando las entradas son: ');
    disp ('X1 = Promedio de los exámenes parciales I y II');
    disp ('X2 = Promedio de los exámenes parciales III y IV');
    disp ('X3 = Examen final');
    disp ('Y la salida es:');
    disp ('Y = Nota final');
    prom = [PROM1 PROM2 PROM3 PROM4];
    C = convhulln(prom);
    a1 = [prom(C,1) prom(C,2) prom(C,3) prom(C,4)];
    [w,n] = size (a1);
    %SE GENERA EL CENTRO Y EL RADIO DE EFICIENCIA
    for i = 1:w-1
        Q(i,1) = prom(C(i),1);
        Q(i,2) = prom(C(i),2);
        Q(i,3) = prom(C(i),3);
        Q(i,4) = prom(C(i),4);
    end
    end
    Qt = Q';

```

```

x0 = [1 1 1];
dat = zeros(1,w-1);
d1 = Qt(1,:);
[x1,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
d1 = Qt(2,:);
[x2,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
d1 = Qt(3,:);
[x3,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
d1 = Qt(4,:);
[x4,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat);
a11 = a1';
centro = [x1(1,1) x2(1,1) x3(1,1) x4(1,1)];
for i = 1:w-1
    N(:,i) = (Qt(:,i) - centro)/2;
    V(:,i) = norm(N(:,i),4);
end
[R,I] = max(V);
[r,w] = min(V);
disp('El centro del politopo convexo es: '); centro
disp('La distancia maxima del politopo al centro es: ')
R
%SE GENERA EL POLITOPO CONVEXO CON LOS 4 EXAMENES PARCIALES Y LA NOTA FINAL
disp('Se generara el centro y el radio del politopo cuando las entradas son: ');
disp('X1 = Promedio de los examenes parciales I y II');
disp('X2 = Promedio de los examenes parciales III y IV');
disp('Y la salida es:');
disp('Y = Nota final');
PROM = [PROM1 PROM2 PROM4];
K = convhulln(PROM);
A1 = [PROM(K,1) PROM(K,2) PROM(K,3)];
[w1,n] = size(a1);
for i = 1:w1-1
    Q1(i,1) = PROM(C(i),1);
    Q1(i,2) = PROM(C(i),2);
    Q1(i,3) = PROM(C(i),3);
end
Q1t = Q1';
x0 = [1 1 1];
dat1 = zeros(1,w1-1);
d1 = Q1t(1,:);
[x10,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat1);
d1 = Q1t(2,:);
[x20,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat1);
d1 = Q1t(3,:);
[x30,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel,x0,d1,dat1);
A11 = A1';
centro1 = [x10(1,1) x20(1,1) x30(1,1)];
for i = 1:w1-1
    N1(:,i) = (Q1t(:,i) - centro1)/2;
    V1(:,i) = norm(N1(:,i),3);
end
[R1,I1] = max(V1);
[r1,w1] = min(V1);
disp('El centro del politopo convexo es: '); centro1
disp('La distancia maxima del politopo al centro es: '); R1
figure, hold on
d = [1 2 3 1];
for i = 1:size(K,1)
    j = K(i,d);
    h(i) = patch(PROM(j,1),PROM(j,2),PROM(j,3),i,'FaceAlpha',.4);
end
hold off
view(3),
axis equal, axis on
grid on
title('Envolvente Convexa')
xlabel('Promedio Examen I y II')
ylabel('Promedio Examen III y IV')

```



```

xlabel('Nota Final del Curso')
set(gca,'Color',[.9 1 .8])
camorbit(90,-5);
disp ('Se generara el centro y el radio del politopo cuando las entradas son: ');
disp ('X1 = Examen final');
disp ('X2 = Promedio de los exámenes III y IV');
disp ('Y la salida es:');
disp ('Y = Nota final');
prom1 = [PROM2 PROM3 PROM4];
k = convhulln(prom1);
A = [prom1(k,1) prom1(k,2) prom1(k,3)];
[w2,n] = size (A);
for i = 1:w2-1
    Q2(i,1) = PROM(C(i),1);
    Q2(i,2) = PROM(C(i),2);
    Q2(i,3) = PROM(C(i),3);
end
Q2t = Q2';
x0 = [1 1 1];
dat2 = zeros(1,w2-1);
d2 = Q2t(1,:);
[x11,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d2,dat2);
d2 = Q2t(2,:);
[x21,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d2,dat2);
d2 = Q2t(3,:);
[x31,resnorm] = lsqcurvefit(@orifiel1,x0,d2,dat2);
A11 = A1';
centro2 = [x11(1,1) x21(1,1) x31(1,1)];
for i = 1:w2-1
    N2(:,i) = (Q2t(:,i) - centro2)/2;
    V2(:,i) = norm(N2(:,i),3);
end
[R2,I2] = max(V2);
[r2,w2] = min(V2);
disp ('El centro del politopo convexo es: '); centro2
disp ('La distancia maxima del politopo al centro es: '); R2
figure, hold on
d = [1 2 3 1];
for i = 1:size(k,1)
    j= k(i,d);
    h(i)=patch(prom1(j,1),prom1(j,2),prom1(j,3),i,'FaceAlpha',.6);
end
hold off
view(3),
axis equal, axis on
grid on
title('Envolvente Convexa')
xlabel('Promedio Examen Final')
ylabel('Promedio Pruebas Eletronicas')
xlabel('Nota Final del Curso')
set(gca,'Color',[.9 1 .8])
camorbit(90,-5);
clear
variable = input ('Si quiere medir la efectividad de una seccion. Si = 1 no = 0 ');
end

```

## Programa que encuentra el centro y el radio de eficiencia de una DMU que utiliza un insumo y fabrica un Producto utilizando MATLAB

```

clc
clear
X = input('Digite el conjunto de insumo observado');
Y = input('Digite el conjunto de producto observado');
a1 = max(X);
a2 = min(X);
b1 = max(Y);
b2 = min(Y);
a11 = [a1 a2]';
b11 = [b1 b2]';
[a11 b11];
[r s] = size(X);
X(r+1,1) = a1;
X(r+2,1) = a2;
Y(r+1,1) = b1;
Y(r+2,1) = b2;
XI = [X Y];
k = convhull(X,Y);
A1 = [X(k,1) Y(k,1)]
[w,n] = size(A1);
for i = 1:w-1
    Q(i,1) = XI(k(i),1);
    Q(i,2) = XI(k(i),2);
end
X = ones(1,w-1);
Y = ones(1,w-1);
xdat = Q(:,1);
xdata = xdat';
xdata1 = zeros(1,w-1);
ydat = Q(:,2);
ydata = ydat';
ydata1 = zeros(1,w-1);
[x,resnorm] = lsqcurvefit(@aie1,X,xdata,ydata1);
[y,resnorm] = lsqcurvefit(@aie11,X,xdata1,ydata);
disp('El centro del politopo convexo es: ');
C = [x(1) y(1)]'
M = [xdata;ydata];
for i = 1:w-1
    N(:,i) = M(:,i)-C;
    V(i) = norm(N(:,i));
end
[R,I] = max(V)
disp('El radio de eficiencia es: ')
R
figure
plot(XI(k,1),XI(k,2),'r',XI(:,1),XI(:,2),'b',a11,b11,'-',x(1),y(1),'-', [A1(1,1) x(1)]',[A1(1,2) y(1)]','-')

```

## Programa DEA CCR para la DMU MATE 3031.071 utilizando LINDO

```

MAX 48.5387Y1
SUBJECT TO
  1)          59.7850X1 + 44.7337X2 + 33.7077X3 + 61.0631X4 = 1
  2) 48.5387Y1 - 59.7850X1 - 44.7337X2 - 33.7077X3 - 61.0631X4 <= 0
  3) 39.8399Y1 - 54.5672X1 - 38.2365X2 - 29.6909X3 - 24.7272X4 <= 0
  4) 47.4913Y1 - 55.7167X1 - 46.6391X2 - 32.7526X3 - 59.5390X4 <= 0
  5) 56.7579Y1 - 68.0535X1 - 53.8572X2 - 42.3439X3 - 65.0956X4 <= 0
  6) 44.0842Y1 - 53.8087X1 - 38.2739X2 - 36.5769X3 - 49.7599X4 <= 0
  7) 62.3275Y1 - 71.1249X1 - 58.2526X2 - 58.7481X3 - 56.7243X4 <= 0
  8) 58.9460Y1 - 64.9109X1 - 55.9819X2 - 50.4526X3 - 69.5198X4 <= 0
  9) 52.1500Y1 - 67.6264X1 - 45.4241X2 - 43.7559X3 - 45.7713X4 <= 0
 10) 45.9206Y1 - 60.1046X1 - 44.7741X2 - 38.1733X3 - 25.6012X4 <= 0
 11) 65.4465Y1 - 71.6306X1 - 63.1592X2 - 61.0329X3 - 64.1417X4 <= 0
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      10
  
```

### OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y1	0.020602	0.000000
X1	0.006399	0.000000
X2	0.006774	0.000000
X3	0.005317	0.000000
X4	0.002214	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
1)	0.000000	1.000000
2)	0.000000	1.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	0.000000
5)	0.000223	0.000000
6)	0.000000	0.000000
7)	0.003585	0.000000
8)	0.002335	0.000000
9)	0.000016	0.000000
10)	0.001476	0.000000
11)	0.004372	0.000000

NO. ITERATIONS= 10