OPERADORES DE COMPOSICIÓN EN ALGUNOS ESPACIOS DE HILBERT DE FUNCIONES ANALÍTICAS

Por

Fabrizzio Miguel Vergara Díaz

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICA (PURA)

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

2017

Aprobada por:

Hector Salas Olaguer, Ph.D Miembro, Comite Graduado	Fecha
Krzysztof Rozga, Ph.D Miembro, Comite Graduado	Fecha
Juan Romero, Ph.D Presidente, Comite Graduado	Fecha
Rocío I. Zapata Medina, MA Representante de Estudios Graduados	Fecha
Olgamary Rivera, Ph.D Director del Departmento	Fecha

Abstract

The operators of composition were studied by Carl Cowen, Barbara Maccluer [2] 1995 and Joel Shapiro [3] 1993. The operators of composition C_φ have the virtue that their properties are intimately related with the behavior of φ. this allows the use classic results of the theory of analytic functions as well us contemporary results. In the work done, basic notions of the operator of composition are studied the main Hilbert space study is de Hardy space. It is seen how the composition operators act in this space. the conditions of compacity, like the condition of Hilbert Schmidt, the theory of weak convergence, the theory of univalent compacity, the relationship between the compacity, the univalence and the geometry of the automorphism of the disk D in which the theory of Julia Caratheodory and the theorem of Denjoy-Wolff are studied. Finally, additional observations are made like the relationship between the Dirichlet spaces, the Hardy spaces and the Bergman spaces.

Resumen

Los operadores de composición han sido estudiados, entre otros, por Carl Cowen y Barbara Maccluer [2] 1995 y Joel Shapiro [3] 1993. Los operadores de composición C_φ tienen la virtud que sus propiedades están intimamente relacionadas con el comportamiento de φ. Ello permite utilizar resultados clásicos de la teoría de funciones analíticas como también resultados contemporáneos. En el estudio realizado se revisan nociones básicas de los operadores de composición. El principal espacio de Hilbert que se estudia es el espacio de Hardy. Se ve como los operadores de composición actúan en este espacio. Se estudian las condiciones de compacidad como la condición de Hilbert-Schmidt, el teorema de convergencia débil y el teorema de la compacidad univalente; la relación entre la univalencia de φ y la compacidad de C_φ, la geometría de los automorfismos del disco D. También se estudia el teorema de Julia-Caratheodory y el teorema de Denjoy-Wolff. Finalmente se realiza observaciones adicionales como la relación entre los espacios de Dirichlet, espacio de Hardy y de Bergman.

A mi amada madre Carmen Luz Diaz Vera, por sus amor y enseñanzas.

A mi padre Juan Cruz Tello por encaminarme en él camino de la matemática.

A mi asesor Hector Salas que creyó en mi en todo momento y me guía a lo largo de la maestria y de la tesis.

Índice general

pagina

Índice de figuras

Figura pagina

LISTA DE ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

D	El disco abierto unitario centrado en cero
$\overline{\mathbb{C}}$	Clausura de $\mathbb{C}$
∂D	Círculo unitario
H	Espacio de Hilbert
φ	Aplicación analítica del disco en el disco
C_φ	Operador composición de φ
T	Transformación lineal fraccionaria
LFT($\overline{C}$)	Grupo de las transformaciones lineales fraccionarias
$\chi(T)$	Traza de T
H^2	Espacio de Hardy con la norma 2
$H(D)$	Espacio de funciones analíticas sobre el disco D
A^2	Espacio de Bergman
D^2	Espacio de Dirichlet
T^*	Adjunto del operador T

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

Justificación

Los operadores lineales cerrados, y en particular acotados, en espacios de Hilbert fueron inicialmente estudiados por Von Neumann y Murray [1] inspirados por la mecánica cuántica en la tercera década del siglo XX. Pronto otros investigadores vieron la necesidad de estudiar operadores lineales continuos en espacios de Banach. Entre estos operadores están operadores de multiplicación, operadores compactos, operadores de traslación y también los de composición.

Publicaciones previas

Un operador de composición en un espacio X de funciones analíticas en el disco unidad $D = \{z : |z| < 1\}$ actúa como:

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi$$

donde: $f \in X$ y $\varphi : D \to D$ es una función analítica. En general es un problema determinar cuando $C_\varphi(X) \subset X$ y si X es un espacio de Banach ver si C_φ es acotado.

Los operadores de composición han sido estudiados intensamente desde hace más de 40 años. Uno de los artículos pioneros fue por Eric Nordgren [1](1964). Cuando los espacios donde actúan los operadores de composición son espacios de Banach de funciones analíticas hay un rico entrelazamiento entre las propiedades de ambos. Otros investigadores que han hecho trabajo fundamental son Carl Cowen [2] (1995) y Joel Shapiro [3](1993) que juntos con sus colaboradores han conseguido resultados estructurales muy ricos. Los operadores de composición tienen la virtud que sus propiedades están íntimamente relacionadas con el comportamiento del símbolo φ cerca del borde del disco unidad, o sea el círculo unitario, lo que permite utilizar resultados clásicos de la teoría de funciones analíticas como también resultados contemporáneos.

Los espacios de Hilbert de $l^2(\mathbb{N})$ un espacio de funciones de valor complejo sobre el conjunto de los enteros no negativos $\mathbb{N}$, y para φ definido sobre $\mathbb{N}$ por $\varphi(n) = n+1$ el operador composición C_φ sobre $l^2(\mathbb{N})$ es:

$$(f(0), f(1), ...) \to (f(1), f(2), ...)$$

El cual será llamado operador traslación.

Lo mejor de los autores al estudiar la composición de operadores fue tratar de resolver las preguntas de acotación, compacidad y bajo qué condiciones se pueden dar tales propiedades.

Objetivos

OBJETIVO GENERAL

Identificar y estudiar los operadores de composición en el espacio de funciones analíticas en espacios de Hilbert, sus propiedades en los espacios de Hardy, espacios de Dirichlet y espacios de Bergman.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

• Analizar la características y la relación entre los espacios de Hardy, Dirichlet y Bergman.

• Las condiciones algebraícas y geométricas para analizar la compacidad de estos operadores.

• El estudio de resultados como el principio de subordinación de Litlewood, el teorema de compacidad univalente, el teorema de Julia Caratheodory para poder caracterizar los operadores en los espacios de Hardy.

Capítulo 2
MARCO TEÓRICO

2.1. DEFINICIONES PREVIAS

Definición 2.1. *Una función compleja se llama analítica en un punto z_0 de su dominio, si existe una serie de potencia centrada en z_0:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n(z-z_0)^n = \hat{f}_0 + \hat{f}_1(z-z_0) + \hat{f}_2(z-z_0)^2 + ...$$

Ésta converge en un entorno $D \subset \mathbb{C}$ de z_0 y que coincide con la función en dicho entorno:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)(z-z_0)^n$$

para cada $z \in D$.

Definición 2.2. *Sea H un espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$, un producto interior sobre H es una aplicación $\langle ., . \rangle$ de $H \times H$ en $\mathbb{C}$ tal que:*

- $\langle x, x \rangle \geq 0,$ *para todo* $x \in H$
- $\langle x, x \rangle = 0$*si y sólo si* $x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *para todo* $x, y \in H$
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle,$ *para todo* $x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Un espacio vectorial dotado de un producto interno es un espacio prehilbertiano.

Definición 2.3. *La norma de $x \in H$ es $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, se cumple:*

- $||x|| \geq 0, ||x|| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||;$
- $||\alpha x|| = |\alpha| |x||,$ *para* $x \in H, \alpha \in \mathbb{C}$

Definiendo $d(x, y) = ||x - y||$ *se obtiene una distancia en* H.

Definición 2.4. *Un espacio prehilbertiano que es completo para la distancia inducida por el producto interior es un espacio de Hilbert. Todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert, es un espacio de Hilbert.*

Definición 2.5. *El disco abierto unidad en* $\mathbb{C}$, *alrededor de* P *es el conjunto de puntos cuyas distancias a* P *son menores que* 1, *esto es:*

$$D(P) = \{Q \in \mathbb{C} : |P - Q| < 1\}$$

El disco cerrado unidad alrededor de P *es el conjunto de puntos cuyas distancias son menores o iguales que* 1, *esto es:*

$$\overline{D}(P) = \{Q \in \mathbb{C} : |P - Q| \leq 1\}$$

2.2. TEORÍA DE FUNCIONES GEOMÉTRICAS DEL DISCO

2.2.1. TRANSFORMACIONES LINEALES FRACCIONARIAS

Las transformaciones lineales fraccionarias son aplicaciones de la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde: $a, b, c, d, z \in \hat{\mathbb{C}}$,

sujeto a la condición $ad - bc \neq 0$ la cual es suficiente y necesaria para que T no sea constante.

El conjunto de las transformaciones fraccionarias se denota por LFT($\overline{\mathbb{C}}$). Este conjunto es un grupo bajo la composición de las transformaciones lineales fraccionarias. Las transformaciones lineales fraccionarias pueden ser representadas mediante una matriz compleja llamada matriz de representación:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$

Definición 2.6. *Si $ad - bc = 1$ entonces se dice que T está en su forma estándar.*

Se observa que una transformación lineal fraccionaria fija el punto ∞ sí y sólo sí $c = 0$, en tal caso ∞ es el único punto fijo sí y solo sí $a = d$ y $b \neq 0$, si además $b = 0$ se tiene que 0 también es punto fijo. Se calculan los puntos fijos de las transformaciones lineales fraccionarias resolviendo la ecuación $T(z) = z$ mediante la fórmula cuadrática:

$$\alpha = \frac{(a-d) + \sqrt{((a-d)^2 + 4bc)}}{2c}$$
$$\beta = \frac{(a-d) - \sqrt{((a-d)^2 + 4bc)}}{2c}$$

.

Se define la traza de una transformación lineal fraccionaria que está en forma estándar por:

$$\chi(T) = \pm(a+d)$$

.

donde $\chi(T)$ puede ser con signo mas o menos, esto por que la representación matricial de una transformación lineal fraccionaria. Recordar que la traza es la suma de las entradas de la diagonal y que es invariante bajo similaridad.

Desde ahora solo se trabajará con transformaciones lineales fraccionarias en su forma estándar. Note que se calcula la derivada de una transformación lineal fraccionaria del siguiente modo:

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

También se coloca la derivada en términos de la traza antes calculada:

$$T'(z) = \frac{1}{4}\left(\chi(T) \pm \sqrt{\chi(T)^2 - 4)}\right)^2$$

con lo cual para $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{C}}$ se tiene:

$$T'(\alpha) = \frac{1}{T'(\beta)}$$

y

$$T'(\alpha) + T'(\beta) = \chi(T)^2 - 2$$

PUNTOS FIJOS Y DERIVADAS

Teorema 2.7. *Sea $T \in LFT(\overline{\mathbb{C}})$. entonces los siguientes puntos enunciados son equivalentes.*

1) $|\chi(T)| = 2$.

2) $\chi' = 1$ en los puntos fijos de T.

3) χ tiene un punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$.

Si χ tiene 2 puntos fijos distintos, entonces estas derivadas en estos puntos son recíprocas, y su suma es $\chi(T) - 2$.

Se clasifican las transformaciones lineales fraccionarias de la siguiente manera:

•)Elíptico: en el cual se tiene 2 puntos fijos, uno está en el disco y el otro en el complemento del disco, por ejemplo $T(z) = iz$ cuyos puntos fijos son 0 y ∞.

•)Hiperbólico: si sus puntos fijos están sobre el círculo unitario, por ejemplo

$$T(z) = \frac{z + 0{,}5}{1 + 0{,}5z}$$

con puntos fijos ± 1.

•)Parabólico: si hay un punto fijo sobre el círculo unitario, con multiplicidad 2, por ejemplo

$$T(z) = \frac{(1 + i)z - i}{iz + 1 - i}$$

que tiene punto fijo a 1.

•)Loxodrómico: si no entra en ninguna clasificación anterior.

CLASIFICACIÓN POR LA TRAZA

Teorema 2.8. *Sea una aplicación lineal fraccionaria que no es la identidad, entonces T es loxodrómica si y solo si $\chi(T)$ no es real. Si $\chi(T)$ es real, entonces T es:*

- *hiperbólica* $\Leftrightarrow |\chi(T)| > 2$.
- *parabólica* $\Leftrightarrow |\chi(T)| = 2$.
- *elíptica* $\Leftrightarrow |\chi(T)| < 2$.

2.2.2. EL ESPACIO DE HARDY

El Espacio de Hardy H^2 de funciones analíticas es:

$$H^2 = \{f \in H(D) : \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty\}$$

.

Donde: $H(D)$ es el espacio de funciones analíticas sobre el disco D, y $\hat{f}(n)$ son los coeficientes del desarrollo de la serie de Taylor de la función f centrado en 0.

Se asigna a este espacio de funciones analíticas una norma definida del siguiente modo:

$$||f|| = (\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2)^{1/2}$$

y producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

EL LIMITE RADIAL

Teorema 2.9. *Suponga* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$ *es una función en* H^2 *y* f^* *es la función en* $L^2(\partial D)$ *con serie de Fourier* $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta}$*, entonces:*

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$$

para casi todo $e^{i\theta} \in \partial D$*, y la norma de* H^2 *de* f *es la norma de* $L^2(\partial D)$ *de* f^**.*

El producto interno también se puede ver del siguiente modo:

$$\langle f, g\rangle = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta})\overline{g^*(e^{i\theta})}d\theta$$

Note que para una función de $H(D)$ y en particular si $f \in H^2$se tiene:

$$|f(z)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)z^n|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)||z^n|$$

$$\leq (\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2)^{1/2}(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n})^{1/2}$$

entonces:

$$|f(z)| \leq \frac{||f||}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

Corolario 2.1. *Toda sucesión en H^2 convergente en norma a una función f de H^2 converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D.*

Demostración. Sea f_n una sucesión en H^2 convergente en norma a una función, esto es:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N/n > N \Rightarrow ||f_n - f|| \leq \varepsilon$$

Sea $z \in K$, tal que K compacto y $K \subsetneq D$, suponga que existe z_n tal que $z_n \to z$ con $z \in \partial D$ luego z_n es de Cauchy y $z \notin D$, entonces K no sería compacto. Existe un $c_K < 1$ tal que $|z| \leq c_K$, para todo $z \in K$, luego se obtiene:

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)|$$

$$\leq \sup_{z\in K} \frac{||f_n - f||}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

$$\frac{||f_n - f||}{\sqrt{1-c_K^2}} \to 0$$

luego la convergencia es uniforme para todo $z \in K$. $\square$

Definición 2.10. *Sea f una función analítica se define la media integral por:*

$$M_p(f,r) = \big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta\big)^{1/p}$$

Donde $0 < p < \infty$, $0 < r < 1$.

$$M_\infty(r,f) = max_{-\pi\leq\theta<\pi}|f(re^{i\theta})|$$

Proposición 2.1. *Sea f analítica en D. Si $r \to 1$ entonces la media integral $M_2(f,r)$ crece a $||f||$*

$$||f||^2 = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

y por lo tanto $f \in H^2$, si y solo si $M_2(f,r)$ es acotada con $0 \leq r < 1$.

Demostración. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n$$

si $z = re^{i\theta}$ se calcula:

$$M_2^2(f,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

observe que:

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=o}^{\infty}\hat{f}(n)(re^{i\theta})^n$$

y

$$\overline{f(re^{i\theta})} = \sum_{m=o}^{\infty}\overline{\hat{f}(m)}(re^{-i\theta})^m$$

$$f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{f}(m)}r^{n+m}e^{i\theta(n-m)}$$

el producto de las series se puede reordenar pues ambas son absolutamente convergentes en un conjunto compacto del disco, además por la ortogonalidad de las funciones $e^{i\theta}$ y si n=m se tiene:

$$M_2^2(f,r) = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n}$$

si $r \to 1^-$

$$\lim_{r \to 1^-} M_2(f,r) = K$$

como $f \in H^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} \leq K^2$$

$$\Rightarrow ||f|| \leq K$$

□

PRINCIPIO DE SUB-ORDENACIÓN DE LITTLEWOOD [3]

Teorema 2.11. *Suponga que φ analítica y que mapea el disco D en el disco D, con $\varphi(0) = 0$. Entonces para cada $f \in H^2$:*

$$C_\varphi f \in H^2$$

y

$$||C_\varphi f|| \leq ||f||$$

Demostración. Suponga f es un polinomio. Sea B el operador traslación definido sobre H^2 por:

$$Bf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k+1) z^k$$

B es una contracción en H^2. Si $f \in H^2$ se puede escribir f de la siguiente forma:

$$f(z) = f(0) + zBf(z)$$

$$B^n(f(0)) = \hat{f}(n)$$

Suponga que f es un polinomio entonces $f \circ \varphi$ es acotada en y $f \circ \varphi \in H^2$ sustituyendo $\varphi(z)$ por z se tiene:

$$f(\varphi(z) = f(0) + \varphi(z)Bf(\varphi(z))$$

en notación de operadores, esto es:

$$C_\varphi(f) = f(0) + M_\varphi C_\varphi Bf$$

por lo tanto:

$$||C_\varphi(f)||^2 = |f(0)|^2 + ||M_\varphi C_\varphi Bf||^2$$

$$\leq |f(0)|^2 + ||C_\varphi Bf||^2$$

ya que M_φ es contractiva, ahora se sustituye sucesivamente Bf,B^2f,B^3f,...,B^nf, para obtener:

$$||C_\varphi Bf||^2 \leq |Bf(0)|^2 + ||C_\varphi B^2f||^2$$

$$||C_\varphi B^2f||^2 \leq |B^2f(0)|^2 + ||C_\varphi B^3f||^2$$

$$...$$

$$||C_\varphi B^nf||^2 \leq |B^nf(0)|^2 + ||C_\varphi B^{n+1}f||^2$$

Sumando se tiene:

$$||C_\varphi f||^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |B^kf(0)|^2 + ||C_\varphi B^{n+1}f||^2$$

como f es un polinomio y n es su grado entonces $B^{n+1}f = 0$

$$\Rightarrow ||C_\varphi f||^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |B^k f(0)|^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = ||f||^2$$

lo cual prueba que C_φ es una contracción en los polinomios. Suponga ahora que f no es un polinomio, sea f_n la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor. Si $f_n \to f$ en norma a H^2, f_n converge uniformemente sobre compactos, entonces:

$$f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$$

Está claro que:

$$||f_n|| \leq ||f||$$

$$||f_n \circ \varphi|| \leq ||f_n||$$

.

Sea $0 < r < 1$, entonces se tiene:

$$M_2(f \circ \varphi, r) = M_2(f_n \circ \varphi, r)$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} ||f_n \circ \varphi||$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} ||f_n \circ \varphi|| \leq ||f||$$

Haciendo que $r \to 1$ y recordando que: $||f||^2 = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$, se tiene que C_φ es una contracción.

$\square$

2.2.3. COMPOSICIÓN DE OPERADORES AUTOMORFISMOS DEL DISCO

Sea φ analítica, se define $\alpha_p(z)$ que intercambia 0 con p por:

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \overline{p}z}$$

La función analítica $\psi = \alpha_p \circ \varphi$ toma D en sí mismo y fija el origen, luego:

$$\psi = \alpha_p \circ \varphi$$

$$\varphi = \alpha_p \circ \psi$$

$$C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}$$

Lema 2.1. *Para cada $p \in D$ el operador C_{α_p} es acotado en H^2, además:*

$$||C_{\alpha_p}|| \leq \sqrt{\frac{1 + |p|}{1 - |p|}}$$

Demostración. Suponga f analítica en una vecindad del disco cerrado unitario $\overline{D}$, en RD con $R > 1$. entonces el límite de la media integral se convierte en:

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$\begin{aligned} ||f \circ \alpha_p||^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha_p(e^{i\theta}))|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 |\alpha_p'(e^{it})| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 \left| \frac{1 - |p|^2}{1 - \overline{p}e^{it}} \right|^2 dt \\ &\leq \frac{1 - |p|}{(1 - |p|)^2} ||f||^2 \end{aligned}$$

□

TEOREMA DE LITTLEWOOD [3]

Teorema 2.12. *Suponga que φ es analítica de D en si mismo, entonces C_φ es un operador acotado en H^2 tal que:*

$$||C_\varphi|| \leq \sqrt{\frac{1+\varphi(0)}{1-\varphi(0)}}$$

Demostración. Se tiene que $C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}$, $p = \varphi(0)$ y $\psi(0) = 0$, C_ψ y C_{α_p} son acotados por el principio de subordenación de Littlewood en H^2. luego C_φ es acotado en H^2, además por el lema anterior:

$$||C_\varphi|| \leq ||C_\psi||||C_{\alpha_p}|| \leq \sqrt{\frac{1+\varphi(0)}{1-\varphi(0)}}$$

con C_ψ contracción.

$\square$

Definición 2.13. *El espacio de Bergman es la colección de funciones de $H(D)$ denotado por A^2 con norma:*

$$||f||_B^2 = \int_D |f(z)|^2 dA(z) < \infty$$

donde: $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$ si $z = x + iy$

Definición 2.14. *El espacio de Dirichlet es la colección de funciones de $H(D)$ denotado por D^2 con norma :*

$$||f||_D^2 = |f(0)|^2 + \int_D |f'(z)|^2 dA(z) < \infty$$

donde: $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$ si $z = x + iy$

2.2.4. OPERADORES COMPACTOS

¿Qué composición de operadores es compacto?

Un operador lineal sobre un espacio de Hilbert H es compacto si aplica todo conjunto acotado en uno relativamente compacto (clausura en H compacta).

TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE RANGO FINITO [3]

Teorema 2.15. *Sea T es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H, entonces T es compacto si y solo si hay una sucesión F_n de operadores acotados de rango finito tal que $||T - F_n|| \to 0$*

Demostración. Suponga T compacto en H, y sea e_n una base ortonormal para H se considera la proyección ortogonal:

$$P_n f = \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$$

y $F_n = TP_n$, observe que P_n es una contracción en H. si B denota la bola unitaria, como T es compacto, entonces $T(B)$ es relativamente compacto. Recuerde que la convergencia puntual más la equicontinuidad implican convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos. Las proyecciones P_n converge puntualmente a la identidad I, esto es,

$$P_n \to I$$

ademas P_n son equicontinuas sobre conjuntos acotados, entonces aplicando lo mencionado antes entonces como la clausura de $T(B)$ es compacta entonces $P_n \to I$ uniformemente sobre $T(B)$, por lo tanto $P_n T \to T$ uniformemente en B por lo que esto implica que $||P_n T - T|| \to 0$, como $P_n T$ es de rango finito y acotado se obtiene lo deseado.

Sea $\{F_n\}$ una sucesión de operadores de rango finito que converge en norma a T, se debe mostrar que $T(B)$ es relativamente compacto con B la bola unitaria. Recuerde que si C es un subconjunto de X que es un espacio métrico es relativamente compacto si y sólo si para todo ϵ hay un conjunto finito de punto $N_\epsilon \subset X$ tal que para cada punto de C esta a lo mas a una distancia de ϵ de cada punto de N_ϵ. El conjunto N_ϵ se llama una $\epsilon - red$ para C, todo conjunto con una $\epsilon - red$ es llamado totalmente acotado y si un conjunto es totalmente acotado es relativamente compacto. Si C es relativamente compacto se tiene un cubrimiento de C por bolas abiertas con centro en los puntos de N_ϵ y radio ϵ, gracias a que es relativamente compacto se puede escoger un sub recubrimiento finito. sea ϵ y $n \in \mathbb{N}$ fijo entonces como se tiene $||F_n - T|| < \epsilon/2$, se toma N como una $\epsilon/2 - red$ para $T(B)$ por lo tanto es relativamente compacto.

Definición 2.16. *Sea T un operador lineal acotado se define la norma infinito por:*

$$||T||_\infty = sup\{||Tx|| : ||x|| \leq 1\}$$

El espacio de operadores lineales acotados con la norma $||||_\infty$ se denota por H^∞

$\square$

PRIMER TEOREMA DE COMPACIDAD [3]

Teorema 2.17. *Si* $||\varphi||_\infty < 1$ *entonces* C_φ *es un operador compacto en* H^2

Demostración. Para cada entero positivo n se define el operador

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k)\varphi^k$$

con $f \in H^2$ por lo tanto

$$T_n : H^2 \to span\{\varphi^k : 1 \leq k \leq n\}$$

donde

$$span\{f_1, ..., f_k\} = \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j : \lambda_j \in \mathbb{C} \; para \; j = 1, ..., n\}$$

el *span* es el generador del espacio de llegada de T_n, es de dimensión finita. Se tiene que $H^\infty \subset H^2$ entonces T_n es un operador de rango finito sobre H^2. Como $f \in H^2$ entonces f es acotada y T_n es acotado, se necesita que $||C_\varphi - T_n|| \to 0$, entonces se calcula:

$$\begin{aligned}
||(C_\varphi - T_n)f|| &= ||\sum_{k=n+1}^{\infty} \hat{f}(k)\varphi^k|| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|||\varphi^k|| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|||\varphi||_\infty^k \\
&\leq (\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2)^{1/2}(\sum_{k=n+1}^{\infty} ||\varphi||_\infty^{2k})^{1/2} \\
&\leq ||f||\frac{||\varphi||_\infty^{n+1}}{\sqrt{1 - ||\varphi||_\infty^2}}
\end{aligned}$$

como $||\varphi||_\infty < 1$ y $n \to \infty$, entonces:

$$\frac{||\varphi||_{\infty}^{n+1}}{\sqrt{1-||\varphi||_{\infty}^{2}}} \to 0$$

entonces C_φ es el límite de operadores de rango finito y por lo tanto compacto, además la convergencia sobre compactos es uniforme. □

TEOREMA DE HILBERT-SCHMIDT [3]

Teorema 2.18. *Si*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2} < \infty$$

entonces C_φ es compacto.

Por otro lado observe que:

$$||(C_\varphi - T_n)f|| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|||\varphi^k||$$

Donde T_n es el operador definido en el teorema inmediato superior.

$$\leq (\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2)^{1/2} (\sum_{k=n+1}^{\infty} ||\varphi^k||^2)^{1/2}$$

$$||C_\varphi - T_n|| \leq (\sum_{k=n+1}^{\infty} ||\varphi^k||^2)^{1/2}$$

además se sabe que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||\varphi^n||^2 < \infty$$

entonces

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta$$

luego C_φ es compacta en H^2.

APLICACIÓN LENTE [3]

Definición 2.19. *Para $0 < \alpha < 1$ se define φ_α analítica del disco en el disco*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{\sigma(z)^\alpha - 1}{\sigma(z)^\alpha + 1}$$

donde:

$$\sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

mapea el disco D en la región de la mitad del plano con angulo $\alpha\pi/2$, luego via σ^{-1} se vuelve a la región L_α. Por lo que φ_α toma el disco unitario en la región lente.

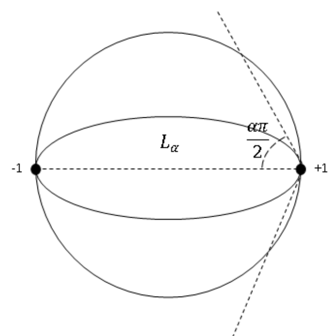

Figura 2–1: Aplicación lente

Lema 2.2. *Cada aplicación lente φ_α con $(0 < \alpha < 1)$ satisface la condición de Hilbert-Schmidt*

Demostración. Una vez fijo α se denota $\varphi = \varphi_\alpha$. Suponga que φ fija $+1$ sin pérdida de generalidad y φ envía todo punto de ∂D en D, note que:

$$1 - \varphi(z) = \frac{2}{\sigma(z)^\alpha + 1}$$

Además $\sigma(e^{i\theta}) = icot(\theta/2)$, luego para $|\theta| < \pi/2$

$$|\sigma(e^{i\theta})| = |cot(\theta/2)| \leq \frac{2}{\theta}$$

entonces,

$$\frac{2}{|\sigma(e^{i\theta})|^{\alpha}+1} \leq |1-\varphi(e^{i\theta})|$$

como $0<\alpha<1$ la función $|1-\varphi(ei\theta)|^{-1}$ es integrable en $[-\pi/2, \pi/2]$.

□

TEOREMA DE COMPACIDAD POLIGONAL [3]

Teorema 2.20. *Si φ aplica el disco en un polígono inscrito en el círculo, entonces C_{φ} es compacto en H^2.*

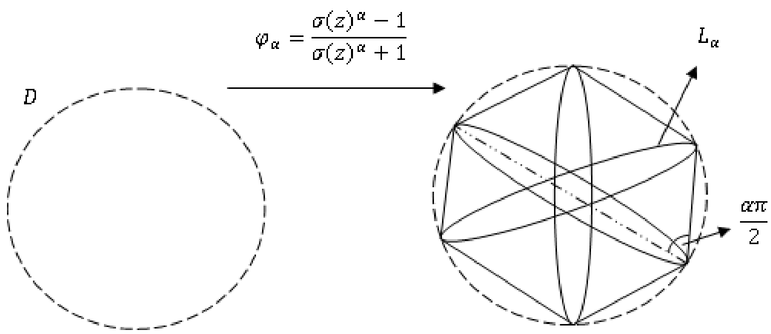

Figura 2–2: Compacidad Poligonal

Demostración. Se tiene que para φ holomorfa del disco D

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2} = \sum_{n=0}^{\infty}||C_{\varphi}(z^n)||^2$$

suponga que φ aplica el disco en uno de los lentes L_{α}, entonces $\psi = \varphi_{\alpha}^{-1}\circ\varphi$ es analitíca del disco en el disco y $\varphi = \varphi_{\alpha}\circ\psi$ por lo cual $C_{\varphi} = C_{\psi}C_{\varphi_{\alpha}}$, entonces:

$$||C_{\varphi}(z^n)|| \leq ||C_{\psi}||||C_{\varphi_{\alpha}}(z^n)||$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-|\varphi(e^{i\theta})|}d\theta$$

$$\leq ||C_\psi||^2 \sum_{n=0}^{\infty} ||C_{\varphi_\alpha}(z^n)||^2$$

Luego se observa que una aplicación lente induce un operador Hilbert-Schmidt por lo que C_φ es compacto.

La aplicación φ puede ser extendida a un homeomorfismo del disco cerrado en el polígono cerrado. Suponga que uno de los vértices del polígono es el punto $+1$ el cual sería punto fijo de φ. La aplicación:

$$\chi(z) = (1 + \varphi(z))/2$$

con $\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$

Ademas

$$1 - |\chi(e^{i\theta})| \approx |1 - \chi(e^{i\theta})| = \left|\frac{1 - \varphi(e^{i\theta})}{2}\right| \approx \frac{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2}{2}$$

Por lo tanto el recíproco de la función de la derecha es integrable sobre intervalos simétricos alrededor de $\theta = 0$. la función $(1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2)^{-1}$ es por lo tanto sobre el intervalo centrado en la preimagen de cada vértice del polígono, por lo que es integrable sobre todo el círculo unitario, luego por el teorema de Hilbert-Schmidt se concluye que C_φ es compacto en H^2. $\square$

TEOREMA DE CONVERGENCIA DÉBIL [3]

Teorema 2.21. *Para φ analítica de D en D, son equivalentes:*

(a) C_φ es un operador compacto en H^2.

(b) Si $\{f_n\}$ es una sucesión que es acotada en H^2 y converge a cero uniformemente sobre subconjuntos compactos de D, entonces $||C_\varphi f_n|| \to 0$.

Demostración. Sea B bola unitaria cerrada en H^2.

$(a) \Rightarrow (b)$

Suponga que C_φ es un operador compacto, esto es, $C_\varphi(B)$ es un subconjunto relativamente compacto de H^2. Se tiene que la sucesión f_n es acotada y que converge a 0 uniformemente sobre subconjuntos compactos de D. Sea $K \subset D$ un compacto entonces $C_\varphi f_{n_k} \to 0$ con f_{n_k} una sub-sucesión de $\{f_n\}$. Luego $C_\varphi f_{n_k} \to g$ esto implica que $||C_\varphi f_{n_k} - g|| \to 0$. Entonces para $0 < z < 1$, la desigualdad dice

$$|(C_\varphi f_{n_k} - g)(z)| \leq \frac{||C_\varphi f_{n_k} - g||}{\sqrt{1-|z|^2}} \to 0$$

Se escribe

$$0 \leq |g(z)| = |g(z) + C_\varphi f_{n_k} + C_\varphi f_n|$$

$$\leq |(g - C_\varphi f_{n_k})(z)| + |(C_\varphi f_{n_k}(z)|$$

$$\leq \frac{||C_\varphi f_{n_k} - g||}{\sqrt{1-|z|^2}} + |C_\varphi f_{n_k}(z)|$$

pero

$$||C_\varphi f_{n_k}|| \to 0$$

por hipótesis. Por lo tanto $g = 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Sea f_n una sucesión de funciones en B. Probemos que la imagen de $\{C_\varphi f_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Se sabe que es acotada en cada compacto K, entonces existe $\{f_{n_{j,k}}\}$ convergente, por lo que $\{f_{n_j}\}$ converge sobre subconjuntos compactos y entonces $\{f_n\}$ converge en todo compacto. Esto por el teorema de Montel sobre familias normales, entonces:

$$f_n \to f$$

$$f_n - f \to 0$$

Por hipótesis se tiene que,

$$||C_\varphi(f_n - f)|| \to 0$$

$$C_\varphi f_n \to C_\varphi f$$

Note que $f \in H^2$ para $0 < r < 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$\leq \sup_n ||f_n||^2 \leq 1$$

Luego $||f|| \leq 1$ entonces $f \in H^2$. Por lo tanto la imagen de $C_\varphi f_n$ es relativamente compacto. $\square$

Recordemos el hecho que: Dados S y T operadores en un espacio de Banach con S acotado y T compacto, entonces TS y ST son compactos. por lo tanto los operadores acotados preservan acotación y compacidad relativa de subconjuntos de H.

PRINCIPIO DE COMPARACIÓN PARA COMPACIDAD [3]

Teorema 2.22. *Suponga φ y ψ analíticas del disco D en si mismo con φ univalente y $\psi(D) \subset \varphi(D)$. Si C_φ es compacto en H^2, entonces C_ψ es compacto.*

Demostración. Sea $\chi = \varphi^{-1} \circ \psi$ ya que $\psi(D) \subset \varphi(D)$, observe que χ va del disco sobre el disco, entonces por la univalencia de φ se tiene que: $\psi = \varphi \circ \chi$ la cual escrita en notación de operadores es: $C_\psi = C_\chi \circ C_\varphi$.

$\square$

Corolario 2.2. *Sea φ univalente del disco en el disco D, y que $\varphi(D)$ contiene un disco U que es tangente al círculo unitario, entonces C_φ no es compacto.*

Demostración. Suponga sin pérdida de generalidad que el disco es tangente al círculo unitario en el punto $+1$, entonces si λ es el radio de δ, se tiene $0 < \lambda < 1$ y $\delta =$

$\lambda D+(1-\lambda)$. Por lo tanto δ es la imagen de U bajo la aplicación $\psi(z)=\lambda z+(1-\lambda)$, por el teorema de comparación C_φ no es compacto. $\square$

Un ejemplo tomando $f_n(z)=z^n \to 0$ por el teorema 2.20 y con ψ del corolario 2.2 se tiene:

$$\psi(f_n(z)) = \lambda z^n + 1 - \lambda$$

Haciendo $z = re^{i\theta}$ y calculando la integral se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\lambda e^{in\theta} + 1 - \lambda|^2 d\theta$$

Pero

$$\lambda(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) + 1 - \lambda \geq |\lambda \operatorname{sen}^2(n\theta)|$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lambda^2 \operatorname{sen}^2(n\theta) d\theta = \frac{\lambda^2}{2}$$

2.2.5. COMPACIDAD Y UNIVALENCIA

ÁREA INTEGRAL

Proposición 2.2. *Sea $f \in H(D)$*

$$\frac{1}{2}||f - f(0)||^2 \leq \int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) \leq ||f - f(0)||^2$$

Donde: $dA(z) = \frac{dxdy}{\pi}$, cuando $z = x + iy$

Demostración.

$$\int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)(1-r^2)rdr$$

Se calcula

$$|f'(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(m)} nmr^{n+m-2}e^{i\theta(n-m)}$$

se sustituye en la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{f}(m)}nmr^{n+m-2}e^{i\theta(n-m)}(1-r^2)rdrd\theta$$

Note que si $n \neq m$ la integral es cero, entonces se considera el caso de que $n = m$, entonces se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(n-m)}d\theta = \begin{cases} 2\pi, \text{ si } n = m \\ \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Luego se tiene:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}|(\hat{f})(n)|^2 n^2\int_0^1 r^{2n-1}(1-r^2)rdr = \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\frac{n}{n+1}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}||f-f(0)||^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\frac{n}{n+1} \leq ||f-f(0)||^2$$

□

Ahora que se tiene esta herramienta tan poderosa que es la representación del área estimada de la norma de H^2 se puede dar una prueba mas general al teorema de subordinación de Littlewood.

SUBORDINACIÓN DE LITTLEWOOD REVISADO [3]

Teorema 2.23. *Sea φ analı́tica del disco D en el disco D, con $\varphi(0) = 0$. Entonces para cada $f \in H^2$*

$$C_\varphi f \in H^2 \text{ y } ||C_\varphi f|| \leq ||f||$$

Demostración. Note que si se reemplaza $f \circ \varphi$ por f en la formula del area integral entonces se tiene:

$$\frac{1}{2}||f \circ \varphi - f(0)||^2 \leq \int_D |(f \circ \varphi)'(z)|^2(1 - |z|^2)dA(z)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$= \int_D |f'(\varphi(z))|^2(1 - |z|^2)|\varphi'(z)|^2 dA(z)$$

Aplicando el lema de Schwarz que nos dice que $|\varphi(z)| \leq |z|$

$$\leq \int_D |f'(\varphi(z))|^2(1 - |\varphi(z)|^2)|\varphi'(z)|^2 dA(z)$$

Haciendo $w = \varphi(z)$

$$= \int_{\varphi(D)} |f'(w)|^2(1 - |w|^2)dA(w)$$

$$\leq ||f - f(0)||^2$$

Note que por la definición de la norma de H^2 se tiene:

$$||f - f(0)||^2 \leq ||f||^2 = ||f - f(0)||^2 + ||f(0)||^2$$

Además, $|f(0)| \leq ||f||$

Por lo tanto:

$$||C_\varphi f - f(0)||^2 \leq ||C_\varphi f - f(0)||^2 + ||f(0)||^2 \leq 2(||f||^2 - ||f(0)||^2) + ||f(0)||^2$$

$$= 2||f||^2 - ||f(0)||^2$$

Por consiguiente:

$$||C_\varphi f||^2 \leq 2||f||^2$$

Por lo que C_φ es acotado en H^2. $\square$

OPERADOR ADJUNTO

Sea H un espacio de Hilbert, recuerde que la norma de un elemento $Y \in H$ puede ser expresado en términos del producto interno por:

$$||y|| = sup_{x\in B}|\langle x, y\rangle|$$

donde B es la bola unitaria en H, y el supremo es alcanzado en el vector unitario $x = y/||y||$ $(y \neq 0)$. En particular la funcional inducida en H por y:

$$x \mapsto \langle x, y\rangle$$

donde $x \in H$ es una funcional lineal acotada de H de norma $||y||$. El teorema de representación de Riesz [4] nos dice que para cada funcional lineal acotado en H existe un único $y \in H$. Si T es un operador lineal acotado en H y $y \in H$ que lo representa en el sentido de $\langle x, y\rangle$ entonces la funcional lineal:

$$x \mapsto \langle Tx, y\rangle$$

donde $x, y \in H$ es acotado, entonces existe un vector en H, el cual es denotado por T^*y el cual es llamado el operador adjunto de T. En resumen el adjunto se define del siguiente modo:

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

con $x, y \in H$ claramente T^* es una transformación lineal en H tal que $||T^*|| = ||T||$ con las propiedades:

$$(T_1 + T_2)^* = (T_1)^* + (T_2)^*$$

y

$$(cT)^* = \overline{c}T^*$$

.

Note que $L(H)$ denota el espacio de operadores lineales acotados en H.

Lema 2.3. *La aplicación $T \to T^*$ es una isometría lineal conjudada en $L(H)$*

Lema 2.4. *El operador adjunto de un operador de rango uno tiene rango uno.*

Corolario 2.3. *El operador adjunto de un operador de rango finito tiene rango finito.*

Proposición 2.3. *El adjunto de un operador compacto es compacto*

Demostración. Sea T un operador compacto en H. Por el teorema de aproximación de rango finito existe una sucesión $\{F_n\}$ de operadores acotados de rango finito tal que $||T - f_n|| \to 0$ ya que la operación de adjunto es aditiva y isométrica respecto a la norma se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} ||T^* - F_n^*|| = \lim_{n\to\infty} ||(T - F_n)^*|| = 0$$

dado que los operadores F_n^* son de rango finito y acotados, se tiene que gracias al teorema de aproximación muestra que T^* es compacto. □

Para demostrar la necesidad del teorema de compacidad univalente es necesario definir los nucleós reproductores del siguiente modo:

$$k_p(z) = \frac{1}{1 - \overline{p}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}^n z^n$$

Su nombre se debe a la siguiente propiedad:

$$\langle f, K_p\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) p^n = f(p)$$

Lema 2.5. *$C_\varphi^* k_p = k_{\varphi(p)}$ para cada $p \in D$*

Demostración.

$$\langle f, C_\varphi^* k_p\rangle = \langle C_\varphi f, k_p\rangle = C_\varphi f(p) = f(\varphi(p)) = \langle f, k_{\varphi(p)}\rangle$$

por lo tanto se tiene la igualdad establecida. □

TEOREMA DE COMPACIDAD UNIVALENTE [3]

Teorema 2.24. *Sea φ analítica y univalente de D en D, entonces C_φ es compacto en H^2 si y solo si*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty$$

Demostración. ($\Rightarrow$)

Para cada $p \in D$ sea $f_p(z)$ una sucesión que cuando $p \to 1^-$ entonces $f_p(z) \to 0$ la cual está definida del siguiente modo:

$$f_p(z) = \frac{k_p}{||k_p||} = \frac{\sqrt{1-|p|^2}}{1-\overline{p}z}$$

Note que gracias al lema 2.5 se tiene:

$$||C_\varphi^* f_p|| = (1-|p|^2)||k_{\varphi(p)}||^2 = \frac{1-|p|^2}{1-|\varphi(p)|^2}$$

Recordar que la colección de imágenes del kernel reproductor C_φ^* es relativamente compacto, entonces toda sucesión de estas imágenes tiene una subsucesión convergente, Sea $|p_n| \to 1^-$ y $C_\varphi^* f_{p_n} \to g$. Suponga que f es un polinomio:

$$\langle g, f\rangle = \lim_n \langle C_\varphi^* f_{p_n}, f\rangle$$

$$= \lim_n \sqrt{1-|p_n|^2}\langle C_\varphi^* k_{p_n}, f\rangle$$

$$= \lim_n \sqrt{1-|p_n|^2}\langle k_{\varphi(p_n)}, f\rangle$$

Donde $\langle k_{\varphi(p_n)}, f\rangle = f(\varphi(p_n)) \leq \max\{|f(z)| : z \in D\}$

$$= \lim_n \sqrt{1-|p_n|^2}\ \overline{f(\varphi(p_n))} = 0$$

Por lo tanto ya que f es un polinomio arbitrario resulta ser que $g = 0$, con lo que concluimos la prueba de necesidad.

($\Leftarrow$) Sea φ univalente y cumple el límite:

$$\lim_{|z|\to 1^{-1}} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty$$

se usa el teorema 2.20 de la convergencia débil. Sea una sucesión de funciones $\{f_n\}$ Sea $\epsilon > 0$ por la condición del limite se garantiza la existencia de $0 < r < 1$ tal que

$$1-|z|^2 \leq \epsilon(1-|\varphi(z)|^2)$$

para $r < |z| < 1$ utilizando la norma integral dada se tiene:

$$\frac{1}{2}||C_\varphi f_n - f_n(\varphi(0))|| \leq \int_D |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z)$$

$$= \int_{\overline{rD}} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) + \int_{D\setminus rD} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z)$$

como en la bola unitara de H^2 la convergencia a cero es uniforme sobre compactos del disco D, esto es: $f_n(\varphi(z)) \to 0$, entonces también: $(f_n(\varphi(z)))' \to 0$, ya que la fórmula integral de Cauchy para las derivadas la primera integral es cero y por el lema de Schwarz, se tiene:

$$\leq \frac{1}{M}\int_{D\setminus rD} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1-|\varphi(z)|^2)dA(z)$$

$$\leq \frac{1}{M}\int_{D} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2(1-|\varphi(z)|^2)dA(z)$$

$$\leq \frac{1}{M}||f_n - \hat{f}_n(0)|| \leq \frac{1}{M}||f_n|| \to 0$$

. □

Observe que la univalencia solo es usada en la demostración ($\Leftarrow$).

COMPACIDAD Y CONTACTO

Sea $\gamma : [0, \pi] \to [0, 1]$ ser una función continua con $\gamma(0) = 0$, pero $\gamma(\theta) > 0$ si $\theta > 0$. Se usa γ para poder definir una curva de Jordan Γ en D por la ecuación polar:

$$1 - r = \gamma(|\theta|)$$

Observe que Γ es simétrico con respecto al eje x, y toca D en un punto del círculo unitario, en este caso $+1$. Para un número positivo α se define Γ como una α-curva en $+1$ si $\theta^{-\alpha}\gamma(\theta)$ el límite no es igual a 0 y es finito.

Note que Γ es una α curva si y solo si para cada uno de estos puntos la distancia al borde es comparable a la α potencia de la distancia a 1.

Lema 2.6. *Suponga $\alpha \neq 1$. Entonces Γ es una α-curva si y solo si*

$$\lim_{z \to 1} \frac{1 - |z|}{|1 - z|^{\alpha}}$$

existe y no es cero.

Demostración. Sea $z = re^{i\theta}$ luego se tiene:

$$|1 - z|^2 = |1 - re^{i\theta}|^2$$

$$= |1 - r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)|^2$$

$$= (1 - r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2$$

$$= 1 - 2r\cos(\theta) + r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)$$

$$= 1 - 2r\cos(\theta) + r^2$$

$$= 1 - 2r + r^2 + 2r - 2r\cos(\theta)$$

$$= (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos(\theta))$$

$$= (1 - r)^2 + r(2\sin(\theta/2))^2$$

si $|\theta| \to 0$ se tiene:

$$\left(\frac{|1-z|^\alpha}{1-|z|}\right)^{2/\alpha} = \gamma(|\theta|)^{2(1-1/\alpha)} + \left(\frac{|\theta|}{\gamma(|\theta|)^{1/\alpha}}\right)^2$$

donde la primera parte es 1 si $\alpha = 1$ y si $\alpha > 1$ entonces esta converge a 0 cuando $|\theta| \to 0$. $\square$

Lema 2.7. *Sea $\overline{\gamma}$ ser la imagen de γ bajo la aplicación $\tau(z) = \frac{1+z}{1-z}$, entonces Γ es una α-curva si y solo si*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{Re(\omega)}{|w|^{2-\alpha}}$$

existe y no es cero.

Demostración. Usando el lema anterior y haciendo el cambio de variable $z = \frac{w-1}{w+1}$ se tiene:

$$1 - z = \frac{2}{w+1}$$

dado que $z \to 1$ es lo mismo que ω

$$\frac{1-|z|}{|1-z|^\alpha} = \frac{1}{1+|z|}\frac{1-|z|^2}{|1-z|^\alpha}$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{2}{w+1}\right|^{2-\alpha} Re(w)$$

$$= 2^{1-\alpha}\frac{Re(w)}{|w|^{2-\alpha}}$$

por lo cual queda demostrado lo enunciado. $\square$

2.2.6. AUTOMORFISMOS DEL DISCO

Las funciones que son aplicaciónes analíticas uno a uno del disco sobre el disco son transformaciones lineales fraccionarias:

$$\varphi(z) = \lambda \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

donde: $|\lambda| = 1$ y $|a| < 1$.

Además $\lambda = \frac{-\varphi'(0)}{|\varphi'(0)|}$ y $a = \varphi^{-1}(0)$. Cuando $\lambda = 1$, este automorfismo es una involución, esto es: $\varphi^{-1} = \varphi$, este automorfismo intercambia 0 y a. Un automorfismo φ de el disco cumple con la siguiente igualdad

$$1 - |\varphi(z)|^2 = 1 - \frac{|a - z|^2}{|1 - \overline{a}z|^2}$$

$$= \frac{(1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z}) - (|a|^2 - a\overline{z} - z\overline{a} + |z|^2)}{|1 - \overline{a}z|^2}$$

por lo tanto

$$1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \overline{a}z|^2}$$

donde $a = \varphi^{-1}(0)$ y $|z| \leq 1$.

El grupo de automorfismos será denotado por $\mathrm{AUT}(D)$, todo automorfismo del disco es un automorfismo de la esfera de Riemann y tiene 2 puntos fijos sobre la esfera, contando multiplicidades. Los automorfismos se clasifican del mismo modo que las transformaciones lineales fraccionarias antes ya mencionadas.

•) Automorfismos elípticos son rotaciones alrededor del punto fijo.

•) Automorfismos hiperbólicos son flujos del punto fijo en el otro punto fijo. Un automorfismo hiperbólico es equivalente a una traslación (paralela a los lados) en la mitad del plano.

•) Automorfismo parabólico son flujos alrededor del punto fijo volviendo a este.

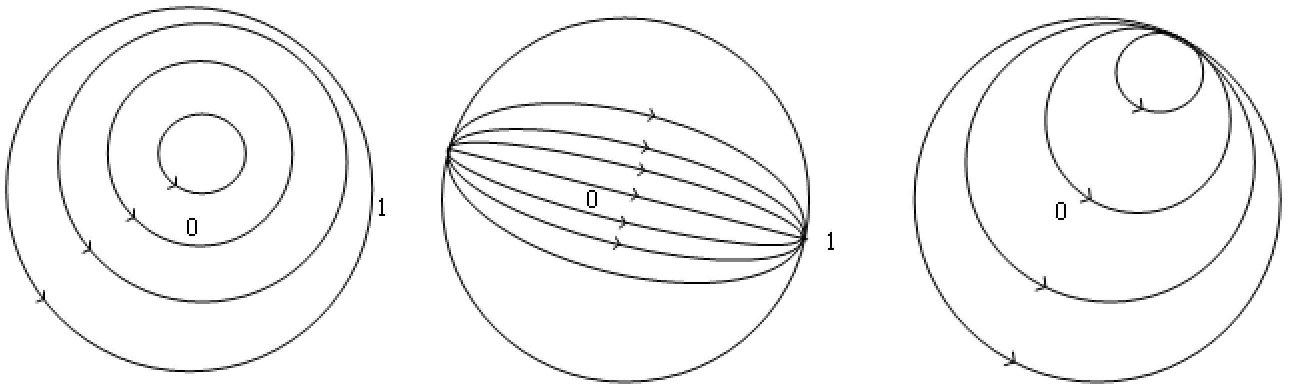

Figura 2–3: Elíptico, hiperbólico y parabólico

Desde el punto de vista de las funciones analíticas, la métrica usual euclidiana sobre el disco es inapropiada. Los automorfismos del disco son isometrías con respecto a la métrica de Poincare en la cual la longitud de una curva γ es:

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

con respecto a la métrica pseudohiperbólica en la cual la distancia entre 2 puntos ζ_1, ζ_2 es:

$$\left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{1 - \overline{\zeta}_1 \zeta_2} \right|$$

Estas métricas son más utiles que la métrica euclidiana para nuestros propósitos.

TEOREMA DE SCHWARZ-PICK [5]

Teorema 2.25. *Si φ es una función analítica del disco en el disco, entonces:*

$$\left| \frac{\varphi(w) - \varphi(z)}{1 - \overline{\varphi(w)}\varphi(z)} \right| \leq \left| \frac{w-z}{1-\overline{w}z} \right|$$

y si la desigualdad se cumple para cualquier $z \neq w$, entonces φ es un automorfismo del disco.

Demostración. Sea $u = \varphi(w)$. Dado que φ aplica el disco en si mismo entonces:

$$\frac{u - \varphi(z)}{1 - \overline{u}\varphi(z)}$$

dado que $\frac{w-z}{1-\overline{w}z}$ es cero cuando $w=z$ y tiene módulo 1 en el círculo unitario, si definimos ψ por:

$$\frac{u-\varphi(z)}{1-\overline{u}\varphi(z)}=\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\psi(z)$$

note que ψ es analítica en el disco y por el teorema del modulo máximo tenemos que $|\psi(z)|\leq 1$, $\forall z$ en D con $z\neq w$, entonces $\psi(z)=1$ luego ψ es constante, esto es:

$$\left|\frac{u-\varphi(z)}{1-\overline{u}\varphi(z)}\right|=\lambda\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|$$

□

Geométricamente, el teorema de Schwarz-Pick dice que la imagen del disco pseudohiperbólico $D(w,r)$ bajo φ esta contenido en $D(\varphi(w),r)$. Una aplicación del disco en si mismo es una contracción en el sentido de la metrica pseudohiperbólica, ahora se construye una cota superior del módulo de $\varphi(z)$.

Corolario 2.4. *Si φ es una aplicación analítica del disco en si mismo, entonces:*

$$|\varphi(z)|\leq\frac{|z|+\varphi(0)}{1+|z||\varphi(0)|}$$

Note que para cualquier función analítica φ del disco en si mismo se cumple:

$$\frac{1-|\varphi(0)|}{1+\varphi(0)}\leq\frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|}$$

una observación relevante para el lema de Julia.

Lema de Julia [5]

Lema 2.8. *Suponga ζ esta en el círculo unitario y*

$$d(\zeta)=\liminf_{z\to\zeta}\frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|}$$

es finito donde el límite inferior se toma cuando z se aproxima a ζ sin restricción en D. Suponga (a_n) una sucesión a lo largo de la que se alcanza este límite inferior y para el cual $\varphi(a_n)$ converge η. Entonces $|\eta| = 1$ y para todo z en D.

$$\frac{|\eta - \varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq d(\zeta)\frac{|\zeta - z|^2}{1 - |z|^2}$$

Además, si la igualdad se da para algún $z \in D$, entonces φ es un automorfismo de el disco.

Demostración. Sea: $(a_n) \to \zeta$ y $\varphi(a_n) \to \eta$ con:

$$d(\zeta) = \lim_{z \to \zeta} \frac{1 - |\varphi(a_n)|}{1 - |a_n|} < \infty$$

Claramente $|\eta| = 1$. El teorema de Schwarz-Pick, para todo $z \in D$, se tiene:

$$1 - \left|\frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z}\right|^2 \leq 1 - \left|\frac{\varphi(z) - \varphi(a_n)}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(a_n)}}\right|^2$$

la cual por la identidad fundamental para automorfismos:

$$\frac{(1 - |z|^2)(1 - |a_n|^2)}{|1 - \overline{a_n}z|^2} \leq \frac{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |\varphi(a_n)|^2)}{|1 - \varphi(z)\overline{\varphi(a_n)}z|^2}$$

Donde en la ultima expresión el termino de la derecha es mayor o igual a 1 por el corolario anterior se tiene:

$$\frac{|1 - \varphi(z)\overline{\varphi(a_n)}|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq \frac{(1 - |\varphi(a_n)|^2)|1 - \overline{a_n}z|^2}{(1 - |a_n|^2)(1 - |z|^2)}$$

si $n \to \infty$ se tiene:

$$\frac{|\eta - \varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} = \frac{|1 - \overline{\eta}\varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2}$$
$$\leq d(\zeta)\frac{|1 - \overline{\zeta}z|^2}{1 - |z|^2} = d(\zeta)\frac{|\zeta - z|^2}{1 - |z|^2}$$

. $\square$

La expresión $d(\zeta)$ juega un papel importante en el estudio de la geometría de auto-aplicaciones del disco. Podría $d(\zeta)$ ser $+\infty$, como consecuencia del lema de Julia (o por el estimado de la cota) es estrictamente mayor que 0. La interpretación geométrica del lema de Julia es particularmente interesante en el caso $\zeta = \eta$; el punto ζ sería punto fijo. Como no se asume que φ es continua en el borde, necesitamos extender nuestra noción de punto fijo para incluir el caso de un punto fijo sobre el círculo unitario.

Definición 2.26. *Si φ es una función analítica del disco en si mismo y b es un punto de el disco cerrado, llamaremos punto fijo b de φ si:*

$$\lim_{r\to 1} \varphi(rb) = b$$

Definición 2.27. *Se dice que φ tiene una derivada angular finita en ζ en el círculo unitario si existe η en el círculo unitario, tal que:*

$$\frac{\varphi(z) - \eta}{z - \zeta}$$

tiene límite no tangencial finito cuando $z \to \zeta$. Cuando este limite existe como un número finito complejo este límite se denota por $\varphi'(\zeta)$.

Se define la región de aproximación no tangencial

$$\Gamma(\zeta, \alpha) = \{z \in D : |z - \zeta| < \alpha(1 - |z|)\}$$

Donde el termino no tangencial significa que $\Gamma(\zeta, \alpha)$ esta en el sector $S \subset D$ que es la región entre 2 lineas que se intersectan en $\zeta \in \partial D$ simétricas respecto al radio de ζ. Tambien se puede definir del siguiente modo: Para ζ en el círculo unitario y $k > 0$ se define una región de aproximación no tangencial (oriciclo) en ζ por:

$$E(k, \zeta) = \{z \in D : |\zeta - z|^2 \leq k(1 - |z|^2)\}$$

Ambas son equivalentes y se utilizan según conveniencia. En el teorema de Julia-Caratheodory se relacionan la derivada angular $\varphi'(z)$, el limite de $\varphi'(z)$ en ζ, y la expresión $d(\zeta)$ del lema de Julia.

Lema 2.9. *Dado* $1 < \alpha < \beta$, *sea* $\delta = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\alpha\beta}$. *si* z *esta en* $\Gamma(\zeta,\alpha)$ *y* $|\lambda| \leq \delta|\zeta - z|$ *entonces* $z + \lambda$ *esta en* $\Gamma(\zeta, \beta)$.

Demostración.

$$|z + \lambda - \zeta| \leq |z - \zeta| + |\lambda|$$

$$\alpha(1 - |z|) + \delta|\zeta - z|$$

$$\leq \alpha(1 - |z|) + \delta\alpha(1 - |z|)$$

$$= (\alpha + \delta\alpha)(1 - |z|)$$

pero dado que $|\lambda| \leq \delta|\zeta - z|$ y $|\zeta - z| < \alpha(1 - |z|)$ entonces tenemos:

$$1 - |z + \lambda| \geq 1 - |z| - |\lambda| \geq (1 - |z|)(1 - \delta\alpha)$$

por lo tanto

$$|z + \lambda - \zeta| \leq (\alpha + \delta\alpha)(1 - |z|) \leq \frac{\alpha + \delta\alpha}{1 - \delta\alpha}(1 - |z + \lambda|)$$

dado $\beta = (\alpha + \delta\alpha)(1 - \delta\alpha)$ por lo que $z + \lambda$ esta en $\gamma(\zeta, \beta)$. □

TEOREMA DE JULIA-CARATHEODORY [5]

Teorema 2.28. *Sea* $\varphi : D \to D$ *analítica y* ζ *en* ∂D, *los siguientes son equivalentes:*

1) $d(\zeta) = \lim_{z\to\zeta} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} < \infty$, *donde el limite se toma cuando* z *se aproxima a* ζ *sin restricción en* D.

2) φ *tiene derivada angular finita* $\varphi'(z)$ *en* ζ.

3) ambos φ *y* φ' *tienen limites no tangenciales en* ζ, *con* $|\eta|=1$ *para* $\eta = \lim_{r\to 1} \varphi(r\eta)$.

Demostración. Se probará (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)

(1) ⇒ (2) recuerde que por el lema de Julia existe η en el círculo unitario tal que para todo z en D se cumple:

$$\frac{|\eta-\varphi(z)|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\leq d(\zeta)\frac{|\zeta-z|^2}{1-|z|^2}$$

considere primero el límite radial de $\varphi(z)-\eta/(z-\zeta)$ en ζ. Ahora

$$\frac{1-|\varphi(r\zeta)|}{1-r}\frac{1+r}{1+|\varphi(r\zeta)|}\leq\frac{|\eta-\varphi(r\zeta)|^2}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2}$$

$$\leq d(\zeta)\frac{|\zeta-r\zeta|^2}{1-r^2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2}=d(\zeta)$$

dado que $d(\zeta)$ es el límite inferior de $(1-|\varphi(z)|)/(1-|z|)$ en $z=\zeta$ entonces se tiene:

$$\lim_{r\to 1}\frac{1-|\varphi(r\zeta)|}{1-r}=d(\zeta)...(1)$$

y $\lim_{r\to 1}|\varphi(r\zeta)|=1$.

Por lo tanto dado que

$$\frac{(1-|\varphi(r\zeta))^2|}{(1-r)^2}\leq\frac{|\eta-\varphi(r\zeta)|^2}{(1-r)^2}\leq d(\zeta)\frac{1-|\varphi(r\zeta)^2|}{1-r^2}$$

se tiene

$$\lim_{r\to 1}\frac{|\eta-\varphi(r\zeta)|}{1-r}=d(\zeta)...(2)$$

dividiendo las ecuaciones (1) y (2)

$$\lim_{r\to 1}\frac{1-|\varphi(r\zeta)|}{|\eta-\varphi(r\zeta)|}=1$$

luego note que $arg(1-\overline{\eta}\varphi(r\zeta))$ tiende a cero cuando r va a 1. Usando la ecuación (2) se observa que

$$lim_{r\to 1}\frac{\eta-\varphi(r\zeta)}{\zeta-r\zeta}=d(\zeta)\overline{\zeta}\eta$$

finalmente se extiende esta convergencia radial a convergencia no tangencial. Para este fin, se fija un región de aproximación no tangencial $\Gamma(\zeta,\alpha)$. Para z en $\Gamma(\zeta,\alpha)$ se tiene:

$$|\zeta - z| < \alpha(1-|z|) \leq \alpha(1-|z|^2)$$

entonces por el lema de Julia:

$$\frac{|\eta-\varphi(z)^2|}{1-|\varphi(z)|^2} \leq d(\zeta)\frac{|\zeta-z|^2}{1-|z|^2} \leq \alpha|\zeta-z|d(\zeta)$$

esto implica:

$$\frac{|\eta-\varphi(z)|}{|\zeta-z|} \leq \alpha d(\zeta)(1+|\varphi(z)|)\frac{1-|\varphi(z)|}{|\zeta-\varphi(z)|} \leq 2\alpha d(\zeta)$$

por lo tanto: $\frac{\zeta-\varphi(z)}{\zeta-z}$ es acotado en $\Gamma(\zeta,\alpha)$. Este límite radial va a $d(\zeta)\eta\overline{\zeta}$ en ζ y el teorema de Lindelöf muestra que el límite es el mismo para α y β arbitrarios.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Suponga que φ tiene derivada angular en ζ y $\zeta = lim_{r\to 1}\varphi(r\zeta)$. Se fija la región de aproximación no tangencial $\Gamma(\zeta,\alpha)$ con ω fija en esta región. Si r es suficientemente pequeño tal que $\{\omega + re^{i\theta}\}$ esta en D, por la formula integral de Cauchy para $(\varphi-\eta)'(\omega)$ se tiene:

$$\varphi'(\omega) = (\varphi-\eta)'(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\omega+re^{i\theta})-\eta}{re^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\varphi(\omega+re^{i\theta})-\eta}{\omega+re^{i\theta}-\zeta}\right)\left(\frac{\omega+re^{i\theta}-\zeta}{re^{i\theta}}\right)d\theta$$

Se escoge $r = \delta|\omega-\zeta|$ donde $\delta = (1+2\alpha)^{-1}$ luego el lema inmediato anterior garantiza que el círculo $\omega + re^{i\theta}$ esta contenido en $\Gamma(\zeta,\beta)$ donde $\beta = 2\alpha$.

Por hipótesis se tiene que:

$$\frac{\varphi(\omega+re^{i\theta})-\eta}{\omega+re^{i\theta}-\eta}$$

es acotado, independiente de θ y ω en $\Gamma(\zeta,\alpha)$. Dado que :

$$|(\omega + re^{i\theta} - \zeta)/(re^{i\theta})| = |1 + (\omega - \zeta)/re^{i\theta}| \leq 1 + 1/\delta$$

se tiene que φ' es acotada en $\Gamma(\zeta,\alpha)$. Ademas tomando $\omega = t\zeta$ para $0 < t < 1$ y haciendo t tendiendo a 1, usando el teorema de la convergencia con el hecho que $(\varphi(z) - \eta)/(z - \zeta)$ se aproxima a $\varphi'(\zeta)$ no tangencialmente para concluir que : $lim_{t\to 1}\varphi'(t\zeta) = \varphi'(\zeta)$. la acotación de φ' en $\Gamma(\zeta,\alpha)$ y esta convergencia radial implica convergencia no tangencial en una cualquier región de aproximación pequeña con α arbitrario.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Sea $M < \infty$ tal que $|\varphi'(r\zeta)| \leq M$ para $r > 0$, entonces:

$$|\eta - \varphi(r\zeta)| = \left|\int_r^1 \varphi'(t\zeta)dt\right| \leq M(1 - r)$$

luego:

$$\frac{1 - |\varphi(r\zeta)|}{1 - |r\zeta|} \leq \frac{|\eta - \varphi(r\zeta)|}{1 - r} \leq M$$

y $d(\zeta)$ siendo el límite inferior finito. En la prueba de $1 \Rightarrow 2$ se ve que $\eta - \varphi(z)/\zeta - z$ converge a $d(\zeta)\overline{\zeta}\eta$ como $zeta$ tiende a ζ no tangencialmente. En particular, dado $d(\zeta)$ es positivo, $|1 - \overline{\eta}\varphi(z)|/|1 - \overline{\zeta}z|$ también converge $d(\zeta)$ y:

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{1 - \overline{\eta}\varphi(z)}{|1 - \overline{\eta}\varphi(z)|} / \frac{1 - \overline{\zeta}z}{|1 - \overline{\zeta}z|} = 1$$

Como una consecuencia, se observa que z se aproxima a ζ no tangencialmente, $\varphi(z)$ también se aproxima de manera no tangencial a η. La convergencia de z a ζ implica:

$$\left|Im\frac{1 - \overline{\zeta}z}{|1 - \overline{\zeta}z|}\right| \leq CRe\frac{1 - \overline{\zeta}z}{|1 - \overline{\zeta}|}$$

para alguna constante C, entonces:

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{Re(1-\overline{\eta}\varphi(z))}{|1-\overline{\eta}\varphi(z)|} \Big/ \frac{Re(1-\overline{\zeta}z)}{|1-\overline{\zeta}z|} = 1$$

o de otro modo:

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{Re(1-\overline{\eta}\varphi(z))}{Re(1-\overline{\zeta}z)} = \lim_{z\to\zeta} \frac{|(1-\overline{\eta}\varphi(z))|}{|1-\overline{\zeta}z|} = d(\zeta)$$

Finalmente la convergencia no tangencial implica:

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{Re(1-\overline{\zeta}z)}{1-|z|} = 1$$

y

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{Re(1-\overline{\eta}\varphi(z))}{1-|\varphi(z)|} = 1$$

entonces se tiene:

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \lim_{z\to\zeta} \frac{Re(1-\overline{\eta}\varphi(z))}{Re(1-\overline{\zeta}z)} = d(\zeta)$$

como la aproximación de z a ζ no es tangencial, el enunciado a sido probado.

$\square$

Proposición 2.4. *Si φ es una aplicación analítica del disco en si mismo, entonces:*

$$\inf_{\zeta\in\delta D}|\varphi'(z)| = \liminf_{|z|\to 1}\frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = |\varphi'(\zeta_0)|$$

para algún ζ_0 en el círculo unitario.

TEOREMA DE WOLFF [5]

Teorema 2.29. *Si φ es una aplicación analítica del disco en el disco que no tiene puntos fijos en D, suponga que φ tiene un único punto fijo α de φ sobre el círculo con $d(\alpha) \leq 1$. Suponga que φ no es la identidad. Si φ tiene un punto fijo en D, entonces $d(\zeta) > 1$ para todos los puntos fijos ζ de φ sobre el circulo unitario.*

Demostración. Suponga que φ no tiene punto fijo en D. se toma una sucesión r_n que tiende a 1 y consideremos la aplicación $f_n := r_n\varphi : D \to r_nD$. Dado que f_n es continua como una aplicación de $r_n\overline{D}$ en si mismo, el teorema del punto fijo de Brouwer garantiza que f_n tiene un punto fijo en D. Sea una sucesión α_n converge a α en $\overline{D}$. Si $|\alpha| < 1$, entonces la continuidad de φ en entornos de α muestra que $\varphi(\alpha_n)$ se aproxima a $\varphi(\alpha)$ y como r_n se aproxima a 1, esto significa que $r_n\varphi(\alpha_n)$ tiende a $\varphi(\alpha)$, pero $r_n\varphi(\alpha_n) = \alpha_n$ entonces se tiene que $\varphi(\alpha) = \alpha$, contradiciendo lo asumido que φ no tiene puntos fijos en D, por lo tanto $|\alpha| = 1$.

Se necesita que α un punto fijo de φ y que $d(\alpha) \leq 1$, esto continua de :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{liminf}_{z\to\alpha}\frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|}\\
&\leq \operatorname{liminf}_{n\to\infty}\frac{1-|\varphi(\alpha_n)|}{1-|\alpha_n|}\\
&= \operatorname{liminf}_{n\to\infty}\frac{1-\frac{|\alpha_n|}{r_n}}{1-|\alpha_n|} \leq 1
\end{aligned}$$

y por lo tanto $d(\alpha) \neq 1$. dado que $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$, el teorema de Schwarz-Pick muestra que un arbitrario ω en D.

$$1 - \left| \frac{\alpha_n - \omega}{1 - \overline{\alpha_n}\omega} \right|^2 \leq 1 - |\frac{\alpha_n - f_n(\omega)}{1 - \overline{\alpha_n} f_n(\omega)}|^2$$

luego se tiene:

$$\frac{|1 - \overline{\alpha_n} f_n(\omega)|^2}{1 - |f_n(\omega)|^2} \leq \frac{|1 - \overline{\alpha_n}(\omega)|^2}{1 - |\omega|^2}$$

recuerde que $f_n = r_n\varphi$ y haciendo que n tienda al ∞ se obtiene:

$$\frac{|\alpha - \varphi(\omega)|^2}{1 - |\varphi(\omega)|^2} \leq \frac{|\alpha - \omega|^2}{1 - |\omega|^2}$$

para todo ω en D, por lo tanto $\varphi(\alpha) = \alpha$ se verifica. La unicidad continua del lema de Julia, sean ζ_1 y ζ_2 ser puntos fijos de φ en el circulo unitario con $d(\zeta_1) \leq 1$ y $d(\zeta_2) \leq 1$ escogemos κ_1 y κ_2 entonces formamos los oriciclos $E(\kappa_1, \zeta_1)$ y $E(\kappa_2, \zeta_2)$ tangentes en cada ω en D, pero entonces $\varphi(\omega)$ esta en $\overline{E(\kappa_1, \zeta_1)} \cap \overline{E(\kappa_2, \zeta_2)} = \omega$ contradiciendo la hipótesis que φ es un punto libre en D.

De la misma forma suponga que φ tiene un punto fijo z_0 en D y ζ es un punto fijo sobre el círculo unitario con $d(\zeta) \leq 1$ □

Lema 2.10. *Sea φ analítica del disco en si mismo que no tiene puntos fijos en D y sea α ser el único punto fijo en el círculo con $d(\alpha) \leq 1$ entonces solo la función constante aparece como el límite de iteraciones de φ es $\varphi(z) \cong \alpha$.*

Demostración. Sea una subsucesión $\{\varphi_{n_j}\}$ que converge uniformemente a φ sobre subconjuntos compactos de D para $\omega \in \overline{D}$ con $\omega \neq \alpha$. Sea V una vecindad de $\omega \in D$ y ρ suficientemente pequeño, entonces $E(\rho, \alpha)$ y V son disjuntos, por el lema de Julia se tiene:

$$\varphi_n(E(\rho, \alpha)) \subset E(\rho, \alpha)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para $z \in E(\rho, \alpha)$, $\varphi_n \notin V$ luego φ_{n_j} no converge en ω. □

Lema 2.11. *Sea φ función analítica del disco en si mismo y suponga que la sucesión $\{\varphi_n\}$ tiene una subsucesión que converge a una función no constante. Entonces φ es un automorfismo del disco.*

Demostración. Sea $\{\varphi_{n_j}\}$ que converge sobre subconjuntos compactos del disco a g que no es constante. Se toma $m_j = n_{j+1} - n_j$ escogiendo una subsucesión $\{\varphi_{m_{j_k}}\}$ que converge a h función arbitraria distinta de g. Por otro lado se tiene que: $\varphi_{m_{j_k}} \circ \varphi_{n_{j_k}}$ converge a $h \circ g$ pero

$$\varphi_{m_j} \circ \varphi_{n_j} = \varphi_{n_{j+1}} \to g$$

Por lo que $h \circ g = g$, entonces $h = i$ en el rango de g, el cual tiene mas de un punto fijo entonces por el lema de Schwarz h es la identidad en todo D. Sea una subsucesión:

$$\varphi_{m_{j_k - 1}} \to f$$

entonces:

$$h \leftarrow \varphi_{m_{j_k}} = \varphi_{m_{j_k - 1}} \circ \varphi \to f \circ \varphi$$

$$f \circ \varphi \equiv h$$

que es la identidad, como $f(D) \subset D$ entonces

$$\varphi \circ \varphi_{m_{j_k - 1}} \to f \circ \varphi \to h$$

Por lo tanto φ es uno a uno y aplica el disco en si mismo.

□

TEOREMA DE DENJOY-WOLFF [5]

Teorema 2.30. *Si φ es una aplicación analítica del disco en si mismo que no es la identidad y no es un automorfismo elíptico de D, , entonces hay un punto α en $\overline{D}$ tal que las iteraciones φ_n de φ converge uniformemente a α sobre subconjuntos compactos de D.*

Demostración. Considere primero el caso donde φ no es un automorfismo de D por los dos lemas inmediatos anteriores con φ del disco sobre el disco, entonces sólo la función constante es el límite de cualquier sucesión de iteraciones de φ donde esta tiene un solo punto interior fijo o punto interior fijo α único unimodular con $d(\alpha) \leq 1$. Dado que φ_n es una familia normal, la sucesión entera de iteraciones converge uniformemente a la constante sobre subconjuntos compactos de D. Por otro lado si φ es hiperbólico o parabólico del disco se garantiza la existencia del único punto fijo α con $\varphi'(\alpha) \leq 1$. Si φ es hiperbólico o parabólico la existencia de α esta garantizada con $\varphi'(\alpha) \leq 1$, luego la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos en α, por ejemplo se caracteriza dos transformaciones de Möbius la hiperbólica dada por $T(z) = \frac{z+0{,}5}{1+0{,}5z}$ con puntos fijos ± 1, y la parabólica $T(z) = \frac{(1+i)z-i}{iz+1-i}$ que tiene punto fijo a 1 luego la sucesión de iteraciones φ_n fija los mismos puntos y converge uniformemente a α luego φ_n converge uniformente sobre compactos a α. $\square$

Definición 2.31. *El punto limite $\alpha \in \overline{D}$ mencionado en el teorema inmediato superior sera llamado el punto Denjoy-Wolff de φ.*

.

Capítulo 3
OBSERVACIONES ADICIONALES

OPERADOR DIAGONAL

Proposición 3.1. *[3]*

Para cada sucesión de números complejos $\Lambda = \lambda_n$ se define el operador diagonal D_Λ sobre el espacio de sucesiones l^2 por:

$$D_\Lambda x = \lambda_n \xi_n$$

con $x = \xi_n \in l^2$ mostrar que D_Λ es un operador acotado. D_Λ es compacto si y solo si $\lambda_n \to 0$. Donde l^2 es el espacio de sucesiones $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$$

.

Demostración. Note que:

$$||D|| = sup\{||Dx||; ||x|| \leq 1\}$$

$$= sup\{||\lambda_n \xi_n||; ||\xi_n|| \leq 1\}$$

Además

$$||\lambda_n \xi_n|| \leq ||\lambda_n||$$

pero $sup|\lambda_n|$ es acotada por lo que D es acotado.

□

Proposición 3.2. *[3]*

Sea la aplicación $\varphi(z) = \frac{1-z}{2}$ el operador C_φ no es compacto, pero C_φ^2 es compacto.

Demostración. Utilizando la condición de Hilbert Schmidt, por lo cual:

$$|\varphi(e^{i\theta})| = \frac{1 - cos(\theta)}{2}$$

$$1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2 = \frac{1 + cos(\theta)}{2}$$

pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{1 + cos(\theta)}$$

la integral no converge por lo tanto C_φ no es compacto. Por otro lado se tiene:

$$\varphi(\varphi(z)) = \frac{1 + z}{4}$$

$$||\varphi^2(z)||_\infty \leq 1/2$$

entonces:

$$|\varphi^2(e^{i\theta})| = \left|\frac{1 + cos(\theta) + isen(\theta)}{4}\right|$$

luego:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4}{\sqrt{1 + 2cos(\theta)}} < \infty$$

con lo cual C_φ^2 es compacto. □

El teorema de Schwarz-Pick [5] nos dice cual es el comportamiento de una función analítica φ cerca a un punto fijo interior. El lema de Julia [5] establece algo similar para un punto fijo del borde ζ cuando $d(\zeta)$ es finito, esto es: φ aplica discos tangentes internos en ζ en si mismos (o en otro) disco tangente interno en ζ. Para ζ en el círculo unitario y $k > 0$ se define una región de aproximación no tangencial (oriciclo) en ζ por:

$$E(k, \zeta) = \{z \in D : |\zeta - z|^2 \leq k(1 - |z|^2)\}$$

por supuesto el término no tangencial se refiere al hecho que la curva de borde de $E(k,\zeta)$ tiene una esquina en ζ, con ángulo menor que $\pi/2$. Una función tiene un límite no tangencial en ζ si $\lim_{z\to\zeta} f(z)$ existe para cada región no tangencial o oriciclo $E(k,\zeta)$.

Note ahora que los oriciclos juegan un papel importante para auto-aplicaciones arbitrarias del disco. para $K > 0$ y ζ en el circulo unitario, se verifica ahora que son círculos con centro en $(\overline{z}/2, \overline{\eta}/2)$ y radio $\sqrt{\frac{\overline{z}^2+\overline{\eta}^2}{4}}$

Si $k = 1$ desarrollando lo mencionado se obtiene: $|\eta|^2+|z|^2-\overline{\eta}z+\eta\overline{z} \leq k(1-|z|^2)$

$$2|\eta|^2 + 2|z|^2 - \overline{\eta}z + \eta\overline{z} \leq 0$$

$$|\eta|^2 + |z|^2 - (\overline{\eta}z)/2 + (\eta\overline{z})/2 \leq 0$$

completando cuadrados y considerando la igualdad se tiene:

$$(|\eta| - (\overline{z})/2)^2 + (|z| - \overline{\eta}/2)^2 = (\overline{z}^2 + \overline{\eta}^2)/4$$

con lo que se verifica lo deseado.

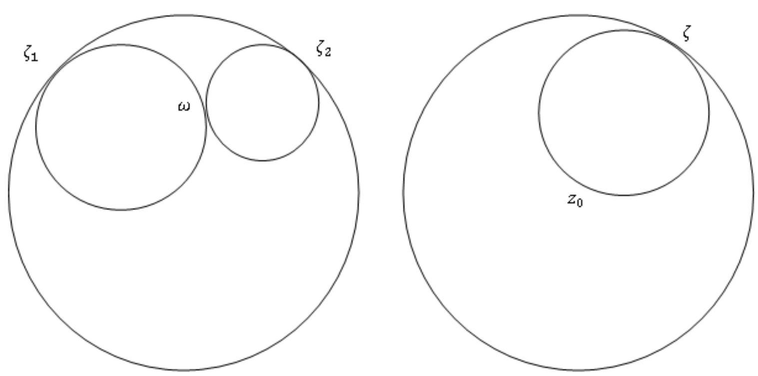

Figura 3–1: Oriciclos y puntos fijos contractivos

ESPACIOS DE BERGMAN [3]

Proposición 3.3. *El espacio de Hardy está contenido en el espacio de Bergman, esto es:* $H^2 \subset A^2$*, además para* $f \in H(D)$ *se tiene:*

$$||f||_B^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|^2}{n+1} < \infty$$

Demostración. Resolviendo la integral de la siguiente forma con cambio de coordenadas:

$$||f||_B^2 = \int_{\rho D} |f(z)|^2 dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\rho} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^2 r dr d\theta$$

$$|f(z)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(k)} r^{n+k+1} e^{ni\theta} e^{-ki\theta}$$

reemplazando en la integral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\rho} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(k)} r^{n+k+1} e^{i\theta(n-k)}$$

por la ortonormalidad de las funciones $e^{ni\theta}$ con $n = k$ se tiene que:

$$2 \int_0^{\rho} r^{2n+1} \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 dr$$

cuando $\rho \to 1$ se tiene:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n+1}$$

por lo tanto $f \in A^2$ y:

$$||f||_B^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n+1}$$

□

ESPACIOS DE DIRICHLET [3]

Proposición 3.4. *El espacio de Dirichlet está contenido en el espacio de Hardy esto es: $D \subset H^2$ ademas si $f \in H(U)$ está en el espacio de Dirichlet si y solo si:*

$$||f||_D^2 = |f(0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n|\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

Demostración. Note que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$$

calculando la derivada se tiene:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)nz^{n-1}$$

se sustituye $z = re^{i\theta}$

$$f'(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)nr^{n-1}e^{i\theta(n-1)}$$

y

$$\overline{f'(re^{i\theta})} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)}kr^{k-1}e^{i\theta(-k+1)}$$

luego:

$$|f'(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(k)}nkr^{n+k-2}e^{i\theta(n-1-k+1)}$$

$$\int_{\rho D} |f'(z)|^2 dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(k)}nkr^{n+k-1}e^{i\theta(n-k)}d\theta dr$$

si se considera $n = k$ y la ortonormalidad de las funciones, se tiene:

$$= 2\int_0^{\rho}\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 n^2 r^{2n-1} dr$$

tomando $\rho \to 1$ por lo tanto:

$$||f||_D^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|\hat{f}(z)|^2$$

$\square$

Un ejemplo de composición de operadores [5] no compactos se define:

$$\varphi(z) = \lambda z + (1-\lambda)$$

donde $0 < \lambda < 1$ note que C_φ no es compacto. para cada fijo $0 < r < 1$ se define:

$$f_r(z) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz}$$

aplicando el teorema de convergencia débil con $r \to 1^-$ entonces $f_r(z) \to 0$ se tiene

$$f_r(\varphi(z) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r(\lambda z + (1-\lambda))} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{(1-r+\lambda r)(1-\frac{\lambda r z}{1-r+\lambda r})}$$

calculando la norma de la composición de la definición original de norma en serie de potencia, esto es:

$$||f_r(\varphi(z))|| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{\lambda r}{1-r+\lambda r}|^{2n}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r+\lambda r}$$

$$= \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r+\lambda r}\left(\frac{1}{1-(\frac{\lambda r}{1-r+\lambda r})^2}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{\frac{1+r}{1-r+2\lambda r}}$$

observe que si $r \to 1^-$ entonces $||f_r(\varphi(z))|| \to \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \neq 0$ pues $0 < \lambda < 1$.

IDENTIDAD DE PALEY LITTLEWOOD [3], [5]

Proposición 3.5. *Si f es analítica en D, entonces:*

$$||f||^2 = |f(0)|^2 + \int_D |f'(z)|^2 log\frac{1}{|z|^2}\frac{dA(z)}{\pi}$$

donde $||\sum_{n=o}^{\infty} \hat{f}(n)z^n||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$

Demostración. Dado que $\int_0^1 |log(t)|dt$ es finito y $0 < r < 1$, ademas $f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$, se tiene

$$\int_{\rho U} |f'(z)|^2 log \frac{1}{|z|^2} \frac{dA}{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm \hat{f}(n) \overline{\hat{f}(m)} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r^{n-1} e^{n(m-1)\theta} r^{k-1} e^{-n(m-1)\theta} (\log r) r dr d\theta$$

$$= -4 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\hat{f}(n)|^2 \int_0^1 r^{2n-1} (\log r) dr$$

$$= -4 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\hat{f}(n)|^2 (-\frac{1}{4n^2})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

$\square$

Sea la aplicación $\varphi(z) = \frac{1+z}{2}$[3] esta induce composición de operadores no compactos, podemos mostrar a través del teorema de compacidad univalente lo siguiente:

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{1 - |\frac{1+z}{2}|}{1 - |z|}$$

este limite resulta ser $0/0$ por lo que aplicando L'Hopital se tiene que el límite es finito. Por lo que gracias al teorema se ve que la aplicación $\varphi(z)$ no induce operadores compactos. Por otro lado se mostró que la aplicación lente con $0 < \alpha < 1$ y

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{\sigma(z)^\alpha - 1}{\sigma(z)^\alpha + 1}$$

donde $\sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Note que la aplicación lente satisface la condición de Hilbert-Schmidt. Si $\alpha = 1/2$ y aplicando el teorema de compacidad univalente, entonces:

$$\varphi(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{2z}$$

luego:

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2z}}{1-|z|}$$

este límite es $\frac{1/2}{0}$ por lo que el límite va a ser ∞, por lo tanto la aplicación lente induce operadores compactos.

Compacidad y contacto [3] Un triangulo isóceles simétrico inscrito en el círculo con vértice en $+1$ es una 1-curva.

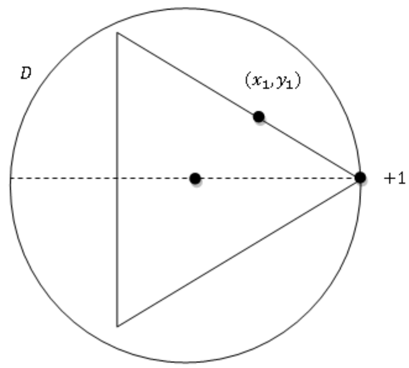

Figura 3–2: 1-Curva

Note que $lim_{\theta\to 0}\frac{\gamma(|\theta|)}{\theta}$ se sabe que $\gamma(|\theta|) = 1 - r$ y si $\theta \to 0$ entonces $(x_1, y_1) \to (1^-, 0)$, entonces utilizando L'Hopital se obtiene que el triangulo es 1-curva.

Capítulo 4
CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

4.1. CONCLUSIONES

(1) En la sección de espacios de Hardy se define el espacio de Bergman A^2 y el espacio de Dirichlet D^2, se muestra la relación entre éstos y cómo se aplica la prueba que da Shapiro[3] del principio de subordenación de Litlewood a estos espacios.

(2) En la sección de compacidad se ve la condición de Hilbert Schimdt para compacidad de operadores, este puede ser aplicado a los espacios de Bergman y Dirichlet, además se puede aplicar esta condición para mostrar que la aplicación Lente induce operadores compactos.

(3) En la sección de compacidad y univalencia se muestra la identidad de Paley Litlewood para $f \in H(D)$, además gracias al teorema de compacidad univalente se muestra que la aplicación lente definida antes induce operadores compactos.

4.2. TRABAJOS FUTUROS

La transformada de Cauchy de una medida μ Borel finita, compleja, con soporte en el círculo unitario ∂D está definida para $z \in D$ como

$$\hat{\mu}(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta).$$

Sea

$$\mathcal{K} = \{\hat{\mu} : \text{ transformadas de Cauchy}\}$$

Este es un espacio de funciones analíticas en D que es de Banach pero no es separable.

Proponemos estudiar los operadores de composición en algunos subespacios de $\mathcal{K}$ que sean separables; en particular $\mathcal{K}_a$, el espacio correspondiente a medidas absolutamente continuas a la medida de Lebesgue, es separable.

Una de las posibilidades concretas son:

i) tratar de identificar alguna clase de símbolos que correspondan a operadores compactos.

ii) Estudiar la existencia de operadores de composición que tengan vectores cuya órbita sea densa.

Bibliografía

[1] J.A. Cima; A.L. Matheson and W.T. Ross. The cauchy transform. *American Mathematical Society*, 2006.

[2] C. C. Cowen. Iteration and solution of functional equations for functions analytic in the unit disk. *Amer. Math. Soc*, 265:6995, 1981.

[3] J. H. Shapiro. *Composition operators and classical function theory*. Springer, New York, 1993.

[4] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[5] C. C. Cowen and B. D. MacCluer. *Composition operators on spaces of analytic functions*. CRC Press, 1995.

OPERADORES DE COMPOSICIÓN EN ALGUNOS ESPACIOS DE HILBERT DE FUNCIONES ANALÍTICAS

Fabrizzio Miguel Vergara Díaz
(787) XXX-XXXX
Departamento de Matemáticas
Consejero: Juan Romero
Grado: Maestría en Ciencias
Fecha de Graduación: 2017

Este es el resumen para la audiencia general.

En el archivo: `GeneralAudienceAbstract.tex`