

**MÉTODO LDG PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN
FRACCIONARIA EN 1D**

Por

Michael Andrés Álvarez Navarro

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICAS (APLICADA)

**UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ**

2018

Aprobada por:

Lev Steinberg, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Krzysztof Rozga, Ph.D
Miembro, Comité Graduado

Fecha

Paul Castillo, Ph.D
Presidente, Comité Graduado

Fecha

Guillermo Araya, Ph.D
Representante de Estudios Graduados

Fecha

Olgamary Rivera , Ph.D
Director del Departamento

Fecha

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

MÉTODO LDG PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA EN 1D

Por

Michael Andrés Álvarez Navarro

Enero 2018

Consejero: Paul Castillo, Ph.D
Departamento: Ciencias Matemáticas

En esta tesis se describe una implementación del método *Local Discontinuous Galerkin* LDG, aplicado a un problema de difusión fraccionaria. Se discute la formulación discreta del sistema asociado, haciendo énfasis en la construcción del operador fraccionario. Se provee una estrategia para agregar un término de estabilidad en la variable primaria, a diferencia de otras implementaciones las cuales estabilizan el método penalizando en la variable auxiliar, de tal manera que se obtiene orden de convergencia $\mathcal{O}(h^{p+1})$ para polinomios de grado p . Adicionalmente, se muestran experimentos numéricos en los que se necesita poca regularidad, de parte de la solución exacta, para obtener convergencia óptima.

Abstract of Dissertation Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Sciences

**LOCAL DISCONTINUOUS GALERKIN (LDG) METHOD APPLIED
TO FRACTIONAL DIFFUSION EQUATIONS IN 1D.**

By

Michael Andrés Álvarez Navarro

January 2018

Chair: Paul Castillo, Ph.D
Major Department: Mathematical Sciences

This thesis describes an implementation of the *Local Discontinuous Galerkin* LDG method applied to a problem of fractional diffusion. The discrete formulation of the associated system is discussed, with emphasis on the construction of the fractional operator. A strategy is provided to add a term of stability in the primary variable, unlike other implementations that stabilize the method by penalizing in the auxiliary variable, in such a way that convergence order is obtained $\mathcal{O}(h^{p+1})$ for polynomials of degree p . Additionally, numerical experiments are shown in which little regularity is needed, on the part of the exact solution, to obtain optimum convergence.

Copyright © 2018

por

Michael Andrés Álvarez Navarro

A Dios, a mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Al Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico Recinto de Mayagüez por la oportunidad de realizar mis estudios de maestría.

Al Ph.D. Paul Castillo, mi asesor durante estos dos años y medio, por su acompañamiento en el trabajo y constante motivación, por sus enseñanzas en los diferentes cursos y por brindarme su amistad.

A mis amigos Sergio Manzanarez y Sergio Gómez, por sus comentarios y ayuda en la realización de este trabajo.

Al Profesor Jorge Villamizar, por su orientación para empezar estudios graduados, por tantos años de consejo, por su apoyo en momentos difíciles.

A mi padre y a mi madre, Carlos y Aide, por su compromiso con mi educación, su motivación en la distancia, por su entrega día tras día.

A Andrea Angarita, quien me acompañó en todo este tiempo de maestría, por estar en las buenas y en las malas.

A mis amigos de Colombia, a los de Puerto Rico, y a todos aquellos que pasaron por mi vida en esta instancia.

TABLA DE CONTENIDO

	<u>página</u>
RESUMEN EN ESPAÑOL	ii
ABSTRACT ENGLISH	iii
AGRADECIMIENTOS	vi
LISTA DE TABLAS	ix
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE ABREVIATURAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
1 INTRODUCCIÓN	1
2 CÁLCULO FRACCIONARIO	5
2.1 Ecuación de Difusión Fraccionaria	10
3 EL MÉTODO “LOCAL DISCONTINUOUS GALERKIN”	12
3.1 Formulación con estabilidad	13
3.1.1 Método I: estabilidad en p_h	15
3.1.2 Método II: estabilidad en u_h	16
4 SISTEMA LINEAL EN SU FORMA MIXTA	17
4.1 Operador de Difusión	18
4.2 Operador Gradiente	19
4.3 Operador de Estabilidad	21
4.4 Matriz del operador Fraccionario	21
5 ESTABILIDAD Y ESTIMADO DE ERROR	26
5.1 Estabilidad en la norma L^2	26
5.2 Orden de convergencia	29
6 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	35
6.1 Experimentos con u suficientemente regular	35
6.2 Experimentos con u poco regular	40
6.3 Experimentos con malla no uniforme	47

7	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	53
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla</u>	<u>página</u>
6.1 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 0$. $\alpha = 5$.	36
6.2 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$. $\alpha = 5$	37
6.3 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. $\alpha = 5$	38
6.4 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. $\alpha = 5$	39
6.5 Error y orden de convergencia del Método I para polinomios de grado $p = 1$. $\alpha = 2.5$	41
6.6 Error y orden de convergencia del Método II para polinomios de grado $p = 1$. $\alpha = 2.5$	42
6.7 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. $\alpha = 2.5$	43
6.8 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. $\alpha = 2.5$	44
6.9 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$, Método II - Con Estabilidad. $\alpha = 2.5$	45
6.10 Error y orden de convergencia del Método II para polinomios de grado $p = 1$, con $\alpha = 1.5$	46
6.11 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$, Método II - Con Estabilidad. $\alpha = 1.5$	46
6.12 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$, Método II - Con Estabilidad. $\alpha = 1.5$	47
6.13 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$ en mallas NO uniformes, Método II. $\alpha = 5$	48
6.14 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$ en mallas NO uniformes, Método II. $\alpha = 5$	49
6.15 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$ en mallas NO uniformes, Método II. $\alpha = 5$	49
6.16 Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 2.8$	50

6.17	Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 2.8$	50
6.18	Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 2.8$	51
6.19	Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 1.7$	51
6.20	Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 1.7$	52
6.21	Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 1.7$	52

<u>Figura</u>	LISTA DE FIGURAS	<u>página</u>
6.1	Ejemplo refinamiento para malla no uniforme	48

LISTA DE ABREVIATURAS

DG	Discontinuous Galerkin.
LDG	Local Discontinuous Galerkin.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{T}_h$	Partición del dominio por celdas.
$L^2(\Omega)$	Espacio de funciones continuas Lebesgue integrables con la norma 2.
$\mathbb{P}_{p_T}(T)$	Conjunto de polinomio de grado menor o igual a p_T en la celda T .
$\mathcal{J}_i$	Jacobiano de la celda T_i .
h_i	Diámetro de la celda i .
φ_i^k	Elemento i de la base local de la celda T_k
$[FI]_i$	Operador interior a la celda i .
$[FE]_i$	Operador exterior a la cara i .

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Esta tesis tiene como principal objetivo el estudio de un problema transitorio de difusión fraccionaria en espacio; donde se estaría realizando un primer acercamiento a Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias. El interés es desde el punto de vista del método numérico que se utiliza para resolver el sistema y las condiciones (o restricciones) que garantizan la convergencia. Se desea presentar un estimado de error y corroborar con experimentos numéricos las tasas de convergencia de la aproximación. El problema modelo a estudiar es:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial x^\beta} + f(x, t), \forall (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \quad (1.1)$$

sujeto a las condiciones de frontera adecuadas, donde $\beta \in [1, 2]$ es el índice de la derivada fraccionaria; los valores extremos $\beta = 1$ y $\beta = 2$ son los casos clásicos de transporte y difusión, respectivamente, los cuales han sido estudiados previamente. El caso $\beta \in (1, 2)$ es puramente fraccionario y es el estudiado en esta tesis. El operador $\frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial x^\beta}$ se entiende como la derivada de Riemann-Liouville orden β . Además se define $d \in \mathbb{R}^+$ (constante) como el coeficiente generalizado de difusión; llegando a ser de velocidad en el caso $\beta = 1$ o de difusión pura cuando $\beta = 2$. Las demás cantidades son definidas como es usual: $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ la primera derivada temporal y $f(x, t)$ es el término fuente.

En las últimas décadas, los métodos numéricos aplicados a problemas de reacción-difusión fraccionaria han venido apareciendo en la literatura, motivados por la variedad de situaciones físicas que se describen mejor con modelos de enfoque fraccionario, tales como: Ecuaciones fraccionarias de Maxwell[14], Ecuación fraccionaria de Fokker-Planck [3], Procesos biológicos, Transporte en medios porosos, Difusión de plasma, entre otros.

A continuación se hará un breve recuento de publicaciones relacionadas con el problema de difusión fraccionaria:

En 2010 Chen et. al [15], hacen una comparación entre la derivada fraccionaria y fractal. Intentando desarrollar un modelo fractal de difusión anómala y derivando la solución fundamental para el problema de difusión para contrastar con un nuevo modelo de derivada fraccionaria en términos de eficiencia computacional, velocidad de difusión y el comportamiento de decaimiento exponencial. Se presentan además algunos experimentos numéricos.

En 2013 Deng y Hesthaven [10], realizaron una implementación del Método Local Discontinuo Galerkin (LDG) para el problema transitorio de difusión fraccionaria en 1D ($\beta \in [1, 2]$), agregando penalidad (o estabilidad) en una variable auxiliar. Después de mostrar que un enfoque clásico no logra un orden óptimo de convergencia, presentan un análisis donde el método con estabilidad recupera el orden de convergencia óptimo $\mathcal{O}(h^{k+1})$ para funciones con suficiente regularidad en términos de derivadas.

Por otra parte, Xu y Hesthaven [16] en 2013, proponen un método discontinuo Galerkin para ecuaciones de convección-subdifusión con un operador fraccionario de orden $\beta \in (1, 2)$ definido a través del Laplaciano fraccionario. Obteniendo una prueba de la estabilidad y orden óptimo de convergencia $\mathcal{O}(h^{k+1})$ para la subdifusión y $\mathcal{O}(h^{k+1/2})$ para el problema general de difusión-convección fraccionaria. El análisis se confirma mediante ejemplos numéricos.

En 2015 Jin et. al [2], trabajan con el operador fraccionario de orden $\alpha \in (1, 2)$ en el estado estacionario, desarrollando derivadas en el sentido de Riemann-Liouville y en de Caputo, presentando experimentos numéricos para ilustrar los estimados de error.

La tesis se enfocará principalmente en el método LDG, el cual fue presentado en un inicio por B. Cockburn y C.W Shu en [9] para problemas transitorios no lineales de convección difusión. Esta implementación se diferencia de la versión propuesta por [10] con respecto al tipo de estabilidad aplicada.

El método LDG es uno de los métodos discontinuos que en los últimos años ha sido utilizado en la solución numérica de una gran variedad de problemas debido a sus buenas propiedades conocidas, tales como: ser localmente conservativo, no requerir continuidad entre los elementos, el grado de aproximación del polinomio puede variar de una celda a otra y hace posible la adaptividad, entre otras.

La preferencia del uso del LDG sobre otros métodos discontinuos está basada en la comparación numérica y teórica realizada en [5] para un problema modelo elíptico, en el cual se analizó el orden de convergencia, la estabilidad, el almacenamiento de memoria requerido, el rendimiento al resolver el sistema lineal y el comportamiento del condicionamiento espectral de la matriz de rigidez. Además se probó teóricamente que LDG es más estable y numéricamente los experimentos mostraron una mejor precisión para este método.

En [1] se desarrolló un marco teórico bajo el cual se presentó un análisis de convergencia y de estabilidad de los métodos más importantes hasta el 2002. El primer estimado de error *a priori* para LDG, fue analizada por P. Castillo, B Cockburn, I. Perugia y D. Schötzau para problemas elípticos en [6] en el cual se demuestra y comprueba que los órdenes de convergencia con parámetros de estabilización η_e de orden h^{-1} son óptimos.

En vista de que diferentes situaciones físicas se describen mejor con modelos fraccionarios, surge la necesidad de estudiar problemas con derivadas de este tipo, independientemente de si el problema es transitorio o estacionario, de esta manera se estaría contribuyendo al desarrollo de métodos numéricos que aproximen soluciones fraccionarias. Los resultados que se encuentran en la literatura no contemplan todas las posibles formas de implementar el método LDG, de igual manera no se ha trabajado el método para funciones con poca regularidad. En este momento, eso es una motivación para el desarrollo de esta tesis.

La tesis tiene como objetivos principales:

1. Desarrollar e implementar una versión del método LDG para del problema (1.1), donde LDG se aplica a la discretización en espacio.
2. Estudiar las propiedades del operador fraccionario en su forma discreta; en particular la construcción de la matriz asociada.
3. Presentar un estimado de error para la aproximación de la solución dada por la versión propuesta del método LDG.
4. Estudiar el comportamiento para problemas donde la solución es de poca regularidad.
5. Validar los resultados de estimado de error y el método propuesto mediante experimentos numéricos.

La tesis tiene la siguiente estructura: en el [Capítulo 2](#) se presenta los principales resultados de cálculo fraccionario; las definiciones de derivación e integración fraccionaria, en el [Capítulo 3](#) se describe la implementación del método LDG aplicado al problema (1.1), en el [Capítulo 4](#) se detalla la construcción de la versión discreta del sistema generado por el método LDG, en el [Capítulo 5](#) se realiza un estudio de error: estabilidad en la norma L^2 y convergencia óptima $\mathcal{O}(h^{k+1})$, en el [Capítulo 6](#) se valida con experimentos numéricos el comportamiendo del error y finalmente se presentan en el [Capítulo 7](#) las conclusiones y el trabajo futuro.

CAPÍTULO 2

CÁLCULO FRACCIONARIO

Con el objetivo de construir la definición de derivada fraccionaria, se procede expresando recursivamente la derivada n -ésima de una función u como:

$$D^n u(x) = D[D^{n-1}u](x) , \quad n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (2.1)$$

$$D^0 u(x) = u(x) , \quad n = 0. \quad (2.2)$$

De manera similar se obtiene la n -ésima integral de u definida como:

$$I^n u(x) = \int_a^x I^{n-1}u(\zeta) \, d\zeta , \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.3)$$

$$I^0 u(x) = u(x) , \quad n = 0. \quad (2.4)$$

La expresión (2.3) puede reescribirse obteniendo una fórmula explícita para la n -ésima integral de u .

$$I^n u(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\zeta)^{n-1} u(\zeta) \, d\zeta \quad (2.5)$$

Es conveniente utilizar la función *gamma* de Euler para el factorial, ya que $\Gamma(n) = (n-1)!$, permitiendo hacer una extensión de la integral n -ésima a valores no enteros, lo que se conoce como Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville.

Definicion 2.0.1: Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville

La integral fraccionaria de Riemann-Liouville, izquierda $({}_a I_x^\beta)$, derecha $({}_x I_b^\beta)$, de orden $\beta \in \mathbb{R}^+$ se define de la siguiente manera:

$${}_a I_x^\beta u(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x - \zeta)^{\beta-1} u(\zeta) d\zeta, \quad x \in (a, b], \quad (2.6)$$

$${}_x I_b^\beta u(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^b (\zeta - x)^{\beta-1} u(\zeta) d\zeta, \quad x \in [a, b). \quad (2.7)$$

Note que ${}_a I_x^\beta[u]$ y ${}_x I_b^\beta[u]$ están definidas casi por doquier en (a, b) para $u \in L_1((a, b); \mathbb{R})$.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se obtiene realizando una integral fraccionaria y luego derivando un orden entero.

$${}^R D^\beta u(x) = D^n I^{n-\beta} u(x), \quad n-1 \leq \beta < n$$

De manera más explícita,

Definicion 2.0.2: Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, izquierda $({}_a^R D_x^\beta)$, derecha $({}_x^R D_b^\beta)$, de orden $\beta \in \mathbb{R}^+$ se define de la siguiente manera:

$${}_a^R D_x^\beta u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - \zeta)^{n-\beta-1} u(\zeta) d\zeta, \quad x \in (a, b], \quad (2.8)$$

$${}_x^R D_b^\beta u(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (\zeta - x)^{n-\beta-1} u(\zeta) d\zeta, \quad x \in [a, b), \quad (2.9)$$

donde: $n-1 \leq \beta < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Mientras que la derivada fraccionaria de Caputo invierte el orden de los operadores derivando primero e integrando después,

$${}^C D^\beta u(x) = I^{n-\beta} D^n u(x)$$

Definicion 2.0.3: Derivada Fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Caputo, izquierda $({}_a^C D_x^\beta)$, derecha $({}_x^C D_b^\beta)$, de orden $\beta \in \mathbb{R}^+$ se define de la siguiente manera:

$${}_a^C D_x^\beta u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^x (x-\zeta)^{n-\beta-1} \frac{d^n}{d\zeta^n} u(\zeta) d\zeta, \quad x \in (a, b], \quad (2.10)$$

$${}_x^C D_b^\beta u(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (\zeta-x)^{n-\beta-1} u(\zeta) d\zeta, \quad x \in [a, b), \quad (2.11)$$

donde: $n-1 \leq \beta < n$, $n \in \mathbb{N}$.

A partir de las definiciones de integral y derivada fraccionaria pueden obtenerse las siguientes propiedades [16]:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} {}_a I_x^\beta u(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} {}_a^R D_x^\beta u(x) = u(x) \quad (2.12)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow (n-1)^+} {}_a I_x^\beta u(x) = {}_a I_x^{n-1} u(x), \quad \lim_{\beta \rightarrow n^-} {}_a I_x^\beta u(x) = {}_a I_x^n u(x) \quad (2.13)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow (n-1)^+} {}_a^R D_x^\beta u(x) = \frac{d^{n-1} u(x)}{dx^{n-1}}, \quad \lim_{\beta \rightarrow n^-} {}_a^R D_x^\beta u(x) = \frac{d^n u(x)}{dx^n} \quad (2.14)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow (n-1)^+} {}_a^C D_x^\beta u(x) = \frac{d^{n-1} u(x)}{dx^{n-1}} - \frac{d^{n-1} u(x)}{dx^{n-1}} \Big|_{x=a}, \quad \lim_{\beta \rightarrow n^-} {}_a^C D_x^\beta u(x) = \frac{d^n u(x)}{dx^n} \quad (2.15)$$

Además se tiene la siguiente relación entre las derivadas de Riemann-Liouville y Caputo:

$${}_a^C D_x^\beta u(x) = {}_a^R D_x^\beta u(x) \iff u^{(k)}(a) = 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.16)$$

La demostración general de esta propiedad, así como las equivalentes para las definiciones por la derecha pueden consultarse en Li y Deng [13] y sus referencias. El problema de interés desarrollado en esta tesis es para la difusión fraccionaria, es decir con $\beta \in (1, 2)$, los casos $\beta = 1$ y $\beta = 2$ son clásicos y han sido discutidos ampliamente en el pasado.

Proposición 2.0.1: Relación entre ${}^R D_x^\beta[\cdot]$ y ${}^C D_x^\beta[\cdot]$

Sea $u \in C^2[a, b]$ y $\beta \in [1, 2]$, entonces se cumple que:

$${}^R D_x^\beta u(x) = {}^C D_x^\beta u(x) + \frac{(x-a)^{1-\beta} u^{(1)}(a) + (1-\beta)(x-a)^{-\beta} u(a)}{\Gamma(2-\beta)} \quad (2.17)$$

Demostración. Para $\beta \in [1, 2]$, siguiendo la definición (2.0.2) :

$$\begin{aligned} {}^R D_x^\beta u(x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta) d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Aplicando la regla de integración de Leibniz e integración por partes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta) d\zeta &= \lim_{\zeta \rightarrow x} (x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta) d\zeta \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow x} (x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta) + \int_a^x (1-\beta)(x-\zeta)^{-\beta} u(\zeta) d\zeta \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow x} [(x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta) - (x-\zeta)^{1-\beta} u(\zeta)]_{\zeta=a}^{\zeta=x} + \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u^{(1)}(\zeta) d\zeta \\ &= (x-a)^{1-\beta} u(a) + \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u^{(1)}(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Al derivar nuevamente aplicando el procedimiento anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x-a)^{1-\beta} u(a) + \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u^{(1)}(\zeta) d\zeta \right\} \\ = (1-\beta)(x-a)^{-\beta} u(a) + (x-a)^{1-\beta} u^{(1)}(a) + \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u^{(2)}(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (2.19)$$

La derivada fraccionaria de Caputo dada en (2.0.3) correspondiente es:

$${}^C D_x^\beta u(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} u^{(2)}(\zeta) d\zeta \quad (2.20)$$

Por lo tanto al sustituir (2.18) y (2.20) en (2.19) se obtiene el resultado.

□

Nótese que la proposición (2.0.1) comprueba (2.16) para $\beta \in [1, 2]$, es decir:

$${}^C D_x^\beta u(x) = {}^R D_x^\beta u(x) \iff u^{(1)}(a) = u(a) = 0 .$$

Además de estas propiedades, se presenta el siguiente lema dado en [11]:

Lema 2.0.1: Relación entre ${}_a^R D_x^\beta[\cdot]$ y ${}_x^R D_b^\beta[\cdot]$

Las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville izquierda $({}_a^R D_x^\beta)$ y derecha $({}_x^R D_b^\beta)$ son adjuntas con respecto al producto interior $L^2(a, b)$, es decir, para todo $\beta > 0$,

$$\int_a^b {}_a^R D_x^\beta(u) v \, dx = \int_a^b {}_x^R D_b^\beta(v) u \, dx, \quad u, v \in L^2(a, b). \quad (2.21)$$

Se definen los espacios y normas fraccionarias usuales como:

Definición 2.0.4: Norma en $H^{-\beta}(\mathbb{R})$

Sea $\beta \in (0, 1)$. Se define la norma:

$$\|v\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R})} := \| |w|^{-\beta} \hat{v} \|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.22)$$

donde $\hat{v}$ es la transformada de Fourier de v y $H^{-\beta}(\mathbb{R})$ es la clausura de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R})}$.

Definición 2.0.5: Norma en $J_L^{-\beta}(\mathbb{R})$

Sea $\beta \in (0, 1)$. Se define la norma:

$$\|v\|_{J_L^{-\beta}(\mathbb{R})} := \|{}_a^R D_x^\beta v\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.23)$$

y $J_L^{-\beta}(\mathbb{R})$ es la clausura de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{J_L^{-\beta}(\mathbb{R})}$.

Definición 2.0.6: Norma en $H^{-\beta}(\mathbb{R})$

Sea $\beta \in (0, 1)$. Se define la norma:

$$\|v\|_{J_R^{-\beta}(\mathbb{R})} = \|{}_x^R D_b^\beta v\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.24)$$

y $J_R^{-\beta}(\mathbb{R})$ es la clausura de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{J_R^{-\beta}(\mathbb{R})}$.

Para estos tres espacios se presenta una propiedad en [10] que los relaciona íntimamente:

Teorema 2.0.1: Equivalencia espacios fraccionarios

Los tres espacios $H^{-\beta}$, $J_L^{-\beta}$ y $J_R^{-\beta}$ son iguales con normas equivalentes.

Al analizar las propiedades (2.12), (2.13) y (2.14), se puede apreciar que las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville conectan con las integrales y derivadas ordinarias, por tanto, se define el siguiente operador fraccionario generalizado:

$${}_a D_x^\beta u(x) = \begin{cases} {}_a I_x^{-\beta} u(x) & \text{si } \beta < 0 \\ u(x) & \text{si } \beta = 0 \\ {}^R_a D_x^\beta & \text{si } \beta > 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

En adelante se utilizará este operador, sin indicar explícitamente si es derivada o integral fraccionaria, ya que esto se indica en el superíndice β .

2.1 Ecuación de Difusión Fraccionaria

El operador diferencial Riemann-Liouville puede escribirse en diferentes formas, cambiando el esquema numérico y al mismo tiempo las condiciones iniciales necesarias para la implementación. Por la proposición (2.0.1) bajo las condiciones: $u(a) = 0$, $u^1(a) = 0$, la derivada en el sentido de Riemann-Liouville y de Caputo son iguales [4], una razón por la cual es deseado un esquema con esta propiedad.

Partiendo de la relación dada en (2.19) y asumiendo $u^{(1)}(a) = u(a) = 0$, se tienen las tres formas en que puede escribirse el operador de Riemann-Liouville:

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} := {}_a D_x^\beta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ {}_a D_x^{\beta-2} u \} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ {}_a D_x^{\beta-2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \right\} = {}_a D_x^{\beta-2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \quad (2.26)$$

Para cada una de las formas en que puede expresarse el problema modelo (1.1) son necesarias diferentes condiciones frontera para $t \in (0, T]$, se obtienen los siguientes

tres esquemas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ {}_a D_x^{\beta-2} u \} + f , \\
{}_a D_x^{\beta-2} u(a, t) &= g_{\beta,a}(t) , \\
{}_a D_x^{\beta-2} u(b, t) &= g_{\beta,b}(t) , \\
u(x, 0) &= u_0(x) .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= d \frac{\partial}{\partial x} \{ {}_a D_x^{\beta-2} \{ \frac{\partial u}{\partial x} \} \} + f , \\
u(a, t) &= u_a(t) , \\
u(b, t) &= u_b(t) , \\
u(x, 0) &= u_0(x) .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= d {}_a D_x^{\beta-2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + f , \\
\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) &= g_a(t) , \\
\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) &= g_b(t) , \\
u(x, 0) &= u_0(x) .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Para la formulación (2.27) es necesario conocer la derivada fraccionaria en $x = a$ y $x = b$ en todo tiempo, tal condición es posible de calcular de manera exacta conociendo la solución de antemano, en cuanto a experimentos difícilmente se puede obtener. Para la formulación (2.29) es necesaria la primera derivada de la solución en los bordes, obteniendo un problema de tipo Neumann, para este primer estudio de derivada fraccionaria no es de interés este tipo de condiciones.

En este trabajo de tesis se continuará con la formulación (2.28) que en las condiciones de frontera requiere el valor de la solución, es decir, un problema de Dirichlet, por lo que para el problema modelo (1.1) se utilizara esta implementación. Nótese que se ha impuesto la condición $u(a, t) = 0$ que es necesaria para reescribir la derivada de Riemann-Liouville en esta forma.

CAPÍTULO 3

EL MÉTODO “LOCAL DISCONTINUOUS GALERKIN”

Siguiendo el procedimiento del método LDG [9], se introducen variables auxiliares $\mathbf{p}(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $\mathbf{q}(x, t) = d {}_aD_x^{\beta-2} \mathbf{p}(x, t)$ por lo que (2.28) puede escribirse como el siguiente sistema en $\Omega_T = (a, b) \times (0, T]$:

$$\mathbf{p}(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{q}(x, t) - d {}_aD_x^{\beta-2} \mathbf{p}(x, t) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{q}(x, t)}{\partial x} = f(x, t) \quad (3.3)$$

Nótese que para el caso de difusión clásico, $\beta = 2$, solo es requerido introducir una variable auxiliar, obteniendo que el sistema se reescribe como:

$$\mathbf{q}(x, t) - d \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{q}(x, t)}{\partial x} = f(x, t) \quad (3.5)$$

es necesario notar que el sistema (3.1), (3.2) y (3.3) converge a este esquema en el límite $\beta \rightarrow 2$. Esto es consecuencia de las propiedades (2.12)-(2.15) y en la [proposición 4.4](#) se demuestra que la versión discreta también converge al esquema (3.4) y (3.5) en su versión discreta.

Definicion 3.0.1: Espacios $L^2(\Omega, \mathcal{T})$, $H^1(\Omega, \mathcal{T})$

Sea $\mathcal{T} = \{T_k = (x_{k-1}, x_k), k = 1, \dots, N, a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$ y $h_k := |T_k| = x_k - x_{k-1}$, $h = \max_{k=1}^N h_k$. Asociado a la partici3n $\mathcal{T}$, se definen los espacios en $\Omega = (a, b)$:

$$L^2(\Omega, \mathcal{T}) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_{T_k} \in L^2(T_k), k = 1, \dots, N\}$$

y

$$H^1(\Omega, \mathcal{T}) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_{T_k} \in H^1(T_k), k = 1, \dots, N\}$$

Asumiendo que la soluci3n $\mathbf{w} = (u, p, q) \in H^1(\Omega, \mathcal{T}) \times L^2(\Omega, \mathcal{T}) \times H^1(\Omega, \mathcal{T})$ para todo $t \in (0, T)$. La formulaci3n d3bil del problema se obtiene multiplicando (3.1), (3.2) y (3.3) por funciones de prueba $(v, w, z) \in H^1(\Omega, \mathcal{T}) \times L^2(\Omega, \mathcal{T}) \times H^1(\Omega, \mathcal{T})$ e integrando por partes en cada elemento $T_k \in \mathcal{T}$.

3.1 Formulaci3n con estabilidad

Las funciones de prueba (v, w, z) se toman del espacio de dimensi3n finita $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega, \mathcal{T})$, que se escoge como el espacio discontinuo:

$$\mathcal{V}_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_{T_k} \in \mathcal{P}_{k_p}(T_k), k = 1, \dots, N\}$$

donde $\mathcal{P}_{k_p}(T_k)$ es el espacio de polinomios de grado no mayor que $k_p \geq 1$. N3tese que al no imponer continuidad entre celdas se permite tener celdas con aproximaciones de diferentes grados.

El m3todo LDG busca una aproximaci3n $(u_h, p_h, q_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ de la soluci3n $(u, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ tal que satisfacen:

$$\int_{T_k} p_h z + \int_{T_k} u_h \left[\frac{\partial z}{\partial x} - \widehat{u_h} z \right]_{x_{k-1}}^{x_k} = 0, \quad (3.6)$$

$$\int_{T_k} q_h w - \int_{T_k} d {}_a D_x^{\beta-2} p_h w + \mathcal{S}_p(p_h) w \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = 0, \quad (3.7)$$

$$\int_{T_k} \frac{\partial u_h}{\partial t} v + \int_{T_k} q_h \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \widehat{q_h} v \right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \mathcal{S}_u(u_h) v \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \int_{T_k} f v, \quad (3.8)$$

donde las cantidades $\widehat{u}_h$ y $\widehat{q}_h$ son llamados flujos numéricos, estos representan una aproximación de u y $\mathbf{q}$, respectivamente, en los puntos extremos de cada celda T_k .

Se definen en cada nodo interior como una combinación convexa de los valores de u_h y q_h en las celdas que comparten dicho nodo:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_h(x_k, t) &= (1 - \xi_k) u_h(x_k^-, t) + \xi_k u_h(x_k^+, t) \\ \widehat{q}_h(x_k, t) &= \xi_k q_h(x_k^-, t) + (1 - \xi_k) q_h(x_k^+, t)\end{aligned}\tag{3.9}$$

En los extremos las condiciones de Dirichlet para $\widehat{u}_h$ y el valor de q_h para $\widehat{q}_h$:

$$\widehat{u}_h(a, t) = 0, \quad \widehat{u}_h(b, t) = g(t) \quad \widehat{q}_h(a, t) = q_h(a, t), \quad \widehat{q}_h(b, t) = q_h(b, t) \tag{3.10}$$

Son de particular interés las configuraciones donde $\xi_k = 0$ (flujo izquierdo) o $\xi_k = 1$ (flujo derecho) para $k = 1, \dots, N$, puesto que reducen el estencil del problema y esto se ve reflejado en la versión discreta del sistema en un menor numero de entradas no nulas. También se suele utilizar $\xi_k = 1/2$ (flujo central) para $k = 1, \dots, N$, ya que este es el promedio de los valores de las celdas.

$$\text{Flujo Izquierdo:} \quad \widehat{u}_h(x_k, t) = u_h(x_k^-, t), \quad \widehat{q}_h(x_k, t) = q_h(x_k^+, t), \tag{3.11}$$

$$\text{Flujo Derecho:} \quad \widehat{u}_h(x_k, t) = u_h(x_k^+, t), \quad \widehat{q}_h(x_k, t) = q_h(x_k^-, t). \tag{3.12}$$

Los términos de Estabilidad $\mathcal{S}_p(p_h)$ y $\mathcal{S}_u(u_h)$ son agregados para garantizar la convergencia del método LDG y obtener orden óptimo, como se mostrará en la [sección 5.2](#) y corrobora en los experimentos numéricos. Además el término $\mathcal{S}_u(u_h)$ garantiza la existencia de la solución para el problema discreto de difusión clásica. Se definen como:

$$\mathcal{S}_p(p_h)(x_k) \stackrel{def}{=} \eta h^\beta \begin{cases} p_h^{k+1}(x_k^+) - p_h^k(x_k^-) & \text{if } 1 \leq k \leq N-1, \\ 0 & \text{if } k = 0, N. \end{cases} \tag{3.13}$$

donde p_h^k es la aproximación p_h en la celda k ,

$$\mathcal{S}_u(u_h)(x_k) \stackrel{def}{=} \frac{\eta}{h_j^{\beta-1}} \begin{cases} u_h^k(x_k^-) - u_h^{k+1}(x_k^+) & \text{if } 1 \leq k \leq N-1, \\ u_D(a) - u_h^{k+1}(x_k^+) & \text{if } k = 0, \\ u_h^k(x_k^-) - u_D(b) & \text{if } k = N. \end{cases} \quad (3.14)$$

donde u_h^k es la aproximación u_h en la celda k , $\eta > 0$. A partir de (3.6), (3.7), (3.8) y el tipo de estabilidad se pueden obtener diferentes métodos. En [10], Deng y Hesthaven desarrollaron un método aplicando el término de estabilidad en $\mathcal{S}_p(p_h)$ definido en (3.13). En esta tesis se propone un método LDG al aplicar el término de estabilidad $\mathcal{S}_u(u_h)$ definido en (3.14), que no se ha encontrado en la literatura hasta el momento.

3.1.1 Método I: estabilidad en p_h

En 2013, Deng y Hesthaven [10], para garantizar la convergencia y obtener orden óptimo cuando $\beta = 1$, proponen un método agregando el término de estabilidad en la ecuación (3.7) exclusivamente. El Método I es definido entonces a partir de: (3.6), (3.7) y (3.8), haciendo el término $\mathcal{S}_u(u_h) = 0$.

Nótese que este término de estabilidad es global en el sentido que penaliza para todas las celdas con $h = \max_{k=1}^N h_k$, además $L_{h,\beta} = \eta h^\beta \rightarrow 0$ a medida que $h \rightarrow 0$.

El sistema lineal generado por el LDG-Método I tiene la estructura de bloques:

$$\begin{aligned} M \cdot \mathbf{p}_h - B \cdot \mathbf{u}_h &= -\mathbf{b}_q \\ M \cdot \mathbf{q}_h + (S_p - I^\beta) \cdot \mathbf{p}_h &= 0 \\ M \cdot \dot{\mathbf{u}}_h + B^T \cdot \mathbf{q}_h &= \mathbf{b}_f \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde las matrices M , B , S_p , I^β corresponden a la versión discreta de los operadores de difusión, gradiente, estabilidad en p_h y del operador fraccionario, respectivamente. En el Capítulo 4 se describe el procedimiento para obtener esta representación. La constante de difusión generalizada, d , ha sido introducida en las matrices de B y B^T .

Resolviendo por eliminación de Gauss para $\mathbf{u}_h$:

$$M \cdot \dot{\mathbf{u}}_h + A_1 \cdot \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_1$$

$$\text{donde: } A_1 = B^T M^{-1} (I^\beta - S_p) M^{-1} B, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_f + B^T M^{-1} (I^\beta - S_p) M^{-1} \mathbf{b}_q$$

y el vector $\dot{\mathbf{u}}_h$ es la derivada de $\mathbf{u}_h$ con respecto t .

3.1.2 Método II: estabilidad en u_h

En esta tesis, se propone una nueva versión del método LDG para difusión fraccionaria, siguiendo las ideas de Castillo et al. [6] aplicadas al método LDG para el problema estacionario de difusión clásica y la definición de derivada fractal [4], se agrega un término de estabilidad en la ecuación (3.8). El Método II es definido entonces a partir de: (3.6), (3.7) y (3.8), haciendo el término $\mathcal{S}_p(p_h) = 0$.

En este término de estabilización, la penalidad es local en el sentido que depende de cada celda, además $\tilde{L}_{h,\beta} = \frac{\eta}{h_j^{\beta-1}} \rightarrow \infty$ a medida que $h \rightarrow 0$.

El sistema lineal generado por el LDG-Método II tiene la estructura de bloques:

$$\begin{aligned} M \cdot \mathbf{p}_h - B \cdot \mathbf{u}_h &= -\mathbf{b}_q \\ M \cdot \mathbf{q}_h - I^\beta \cdot \mathbf{p}_h &= 0 \\ M \cdot \dot{\mathbf{u}}_h + B^T \cdot \mathbf{q}_h + S_u \cdot \mathbf{u}_h &= \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_u \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde las matrices M , B e I^β son definidas como antes, S_u corresponde a la versión discreta del operador de estabilidad en u_h en la [sección 4.3](#) se describe el procedimiento para obtener esta matriz.

Resolviendo por eliminación de Gauss para $\mathbf{u}_h$:

$$M \cdot \dot{\mathbf{u}}_h + A_2 \cdot \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_2$$

$$\text{donde: } A_2 = B^T M^{-1} I^\beta M^{-1} B + S_u, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_u + B^T M^{-1} I^\beta M^{-1} \mathbf{b}_q$$

CAPÍTULO 4

SISTEMA LINEAL EN SU FORMA MIXTA

Los sistemas generados por el método LDG en estructura de bloques se presentan en (3.15) y (3.16) para el Método I y Método II, respectivamente, en este capítulo se describe al detalle el cálculo de las matrices M , B , I_β , S_p y S_u . Por simplicidad se toma el mismo grado de aproximación p en todas las celdas, además todos los cálculos van a ser hechos en la celda de referencia.

Sea $\{\hat{\phi}_i\}_{i=0}^p$ una base para $\mathbb{P}_p(\hat{T})$. La celda de referencia $\hat{T} := [\hat{x}_0 \ \hat{x}_1]$. Sea ψ_k un mapeo afín tal que:

$$\begin{aligned} \psi_k : \hat{T} &\rightarrow T_k = [x_{k-1}, x_k] \\ \hat{x} &\mapsto x = \psi_k(\hat{x}) = J_k \hat{x} + B_k \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

$$J_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\hat{x}_1 - \hat{x}_0}, \quad B_k = \frac{x_{k-1}\hat{x}_1 - x_k\hat{x}_0}{\hat{x}_1 - \hat{x}_0}$$

Entonces se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \hat{T} & \xrightarrow{\psi_k} & T_k \\ & \searrow \hat{\phi}^k & \downarrow \phi^k \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Por tanto: $\{\phi_i^k\}_{i=0}^p = \left\{ \left(\hat{\phi} \circ \psi_k^{-1} \right) (x) \right\}_{i=0}^p$ es una base para $\mathbb{P}_p(T_k)$.

4.1 Operador de Difusión

Debido a que $z \in \mathcal{V}_h$, las funciones de prueba se restringen a los elementos de la base de $\mathbb{P}_p(T_k)$, es decir: $z = \phi_i^k, \forall i = 0, 1, \dots, p$. En la celda T_k , se tiene que p_h es de la forma: $p_h^k(x, t) = \sum_{j=1}^N p_j^k(t) \phi_j^k(x)$, luego :

$$\begin{aligned} \int_{T_k} p_h^k z &= \sum_{j=1}^N p_j^k(t) \int_{T_k} \phi_j^k(x) \phi_i^k(x) \\ &= \sum_{j=1}^N p_j^k(t) J_k \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_j(\hat{x}) \hat{\phi}_i(\hat{x}) \, , \, \forall i = 0, 1, \dots, p \end{aligned}$$

De manera matricial para $z = \hat{\phi}_i$:

$$\int_{T_k} p_h^k z = J_k \left[\int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_0 \quad \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_1 \quad \dots \quad \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_p \right] [p_1^k(t) \quad p_2^k(t) \quad \dots \quad p_p^k(t)]^T$$

Se define la matriz de masa en el elemento de referencia como:

$$M_0(m, n) = \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_m \hat{\phi}_n \quad (4.2)$$

Sea $\mathbf{p}_h^k$ el vector cuyas entradas son los coeficientes de p_h en la celda T_k en el tiempo t , es decir: $\mathbf{p}_h^k = [p_1^k(t) \quad p_2^k(t) \quad \dots \quad p_p^k(t)]$. Sea $\mathbf{p}_h = [\mathbf{p}_h^1 \quad \mathbf{p}_h^2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_h^N]^T$.

Entonces al sumar sobre todas las celdas y multiplicar por todos los elementos de la base se obtiene el sistema por bloques:

$$\sum_{T_k \in \mathcal{T}} \int_{T_k} p_h z = M \cdot \mathbf{p}_h \quad (4.3)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} J_1 [M_0] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 [M_0] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_N [M_0] \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.2 Operador Gradiente

El operador gradiente está asociado a los términos $\int_{T_k} u_h \frac{\partial z}{\partial x} - \widehat{u_h} z \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}$ en (3.6), siguiendo el procedimiento utilizado en la sección 4.1 se obtiene la versión discreta de este operador. Se tiene que u_h es de la forma: $u_h^k(x, t) = \sum_{j=1}^n u_j^k(t) \phi_j^k(x)$ en la celda T_k . Sea $\mathbf{u}_h^k = [u_1^k(t) \ u_2^k(t) \ \dots \ u_p^k(t)]$ y $\mathbf{u}_h = [\mathbf{u}_h^1 \ \mathbf{u}_h^2 \ \dots \ \mathbf{u}_h^N]^T$.

Cada término del operador gradiente se puede calcular como :

$$\begin{aligned} \int_{T_k} u_h \frac{\partial z}{\partial x} &= \sum_{j=1}^N u_j^k(t) \int_{T_k} \phi_j^k(x) \frac{\partial \phi_i^k(x)}{\partial x} \\ &= \sum_{j=1}^N u_j^k(t) \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_j(\hat{x}) \frac{\partial \hat{\phi}_i(\hat{x})}{\partial x}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k_p \end{aligned}$$

nótese que no depende de la celda. De manera matricial para $z = \hat{\phi}_i$:

$$\int_{T_k} u_h \frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial x} & \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial x} & \dots & \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial x} \end{bmatrix} [u_1^k(t) \ u_2^k(t) \ \dots \ u_p^k(t)]^T$$

Se define la matriz DX en el elemento de referencia como:

$$DX(m, n) = \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_m \frac{\partial \hat{\phi}_n}{\partial x} \quad (4.5)$$

Entonces al sumar sobre todas las celdas y multiplicar por todos los elementos de la base se obtiene el sistema por bloques:

$$\sum_{T_K \in \mathcal{T}} \int_{T_k} u_h \frac{\partial z}{\partial x} = \text{diag}(DX) \cdot \mathbf{u}_h \quad (4.6)$$

Por otra parte considérese:

$$\begin{aligned} \widehat{u_h} z \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} &= \widehat{u_h}(x_k) \phi_i(x_k) - \widehat{u_h}(x_{k-1}) \phi_i(x_{k-1}) \\ &= -(1 - \xi_k) F E_L \cdot \mathbf{u}_h^{k-1} + [(1 - \xi_k) F I_R - \xi_k F I_L] \cdot \mathbf{u}_h^k + \xi_k F E_R \cdot \mathbf{u}_h^{k+1} \end{aligned}$$

donde $F I_R, F I_L, F E_R, F E_L$ son las matrices de flujos interior y exterior, derecha e izquierda, respectivamente. Se definen como:

$$\begin{aligned}
FI_R(i, j) &= \hat{\phi}_j(1) \hat{\phi}_i(1), & FI_L(i, j) &= \hat{\phi}_j(-1) \hat{\phi}_i(-1) \\
FE_R(i, j) &= \hat{\phi}_j(-1) \hat{\phi}_i(1), & FE_L(i, j) &= \hat{\phi}_j(1) \hat{\phi}_i(-1)
\end{aligned}$$

En los bordes se tienen las condiciones de Dirichlet, lo que genera el vector $\mathbf{b}_q$, entonces al sumar sobre todas las celdas y multiplicar por todos los elementos de la base se obtiene el sistema por bloques:

$$\sum_{T_K \in \mathcal{T}} \left[\widehat{u_h} z \right]_{x_{k-1}}^{x_k} = FX \cdot \mathbf{u}_h - \mathbf{b}_q \quad (4.7)$$

donde FX es una matriz tridiagonal por bloques:

$$FX = \begin{bmatrix} (1 - \xi_1)FI_R & \xi_1 FE_R & 0 & \cdots & 0 \\ -(1 - \xi_1)FE_L & [(1 - \xi_2)FI_R - \xi_1 FI_L] & \xi_2 FE_R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - \xi_{N-1})FE_L & -\xi_{N-1} FI_L \end{bmatrix}$$

Obteniendo la versión discreta del operador gradiente a partir de (4.6) y (4.7):

$$\sum_{T_K \in \mathcal{T}} \left\{ \left[\widehat{u_h} z \right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{T_k} u_h \frac{\partial z}{\partial x} \right\} = B \cdot \mathbf{u}_h - \mathbf{b}_q \quad (4.8)$$

donde $B = FX - DX$.

Para el término $\int_{T_k} q_h \frac{\partial v}{\partial x} - \left[\widehat{q_h} v \right]_{x_{k-1}}^{x_k}$ en (3.8) se procede de manera similar, considerando la dualidad de la definición de los flujos numéricos en (3.9):

$$\sum_{T_K \in \mathcal{T}} \left\{ \left[\widehat{q_h} v \right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{T_k} q_h \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = -B^T \cdot \mathbf{q}_h \quad (4.9)$$

4.3 Operador de Estabilidad

En el artículo de Deng y Hesthaven [10] se define la estabilidad para los nodos interiores más no en los extremos. En el borde no se conoce el valor de p_h , por tanto se toma la aproximación, es decir:

$$\widehat{p}_h(a, t) := p_h(a^+, t) - p_h(a^-, t) = 0, \quad \widehat{p}_h(b, t) := p_h(b^+, t) - p_h(b^-, t) = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} L_{h,\beta} \cdot \widehat{p}_h \cdot w \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} &= [p_h(x_k^+, t) - p_h(x_k^-, t)] w(x_k) - [p_h(x_{k-1}^+, t) - p_h(x_{k-1}^-, t)] w(x_{k-1}) \\ &= [FE_R \cdot \mathbf{p}_h^{\mathbf{j}+1} - FI_R \cdot \mathbf{p}_h^{\mathbf{j}}] - [FI_L \cdot \mathbf{p}_h^{\mathbf{j}} - FE_L \cdot \mathbf{p}_h^{\mathbf{j}-1}] \\ &= FE_L \cdot \mathbf{p}_h^{\mathbf{j}-1} - [FI_R + FI_L] \cdot \mathbf{p}_h^{\mathbf{j}} + FE_R \cdot \mathbf{p}_h^{\mathbf{j}+1} \end{aligned}$$

Donde FI_R, FI_L, FE_R, FE_L son las matrices de flujos interior y exterior derecha e izquierda respectivamente.

Sumando para todas las celdas y en forma matricial, con: $FI = FI_R + FI_L$:

$$\sum_{k=1}^N L_{h,\beta} \cdot \widehat{p}_h \cdot w \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \overbrace{\begin{bmatrix} -FI_R & FE_R & & & \\ FE_L & -FI & FE_R & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & FE_L & -FI & FE_R \\ & & & FE_L & -FI_L \end{bmatrix}}^{S_p} \begin{bmatrix} p_h^1 \\ p_h^2 \\ \vdots \\ p_h^j \\ \vdots \\ p_h^N \end{bmatrix}$$

4.4 Matriz del operador Fraccionario

Se tiene que: $\beta \in (1, 2) \rightarrow \beta - 2 \in (-1, 0)$, por definición de Integral Fraccionaria [4] para $x \in T_j$:

$$\begin{aligned}
{}_a D_x^{\beta-2} p_h(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_a^x (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta + \dots + \int_{x_{j-1}}^x (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta \right\}
\end{aligned}$$

Sea $C_\beta = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}$, entonces para la celda T_j y x arbitrario pero fijo, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{T_j} {}_a D_x^{\beta-2} p_h(x, t) \cdot w(x) dx &= C_\beta \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta + \right. \\
&\quad \left. \int_{x_1}^{x_2} (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta + \dots + \right. \\
&\quad \left. \int_{x_{j-1}}^x (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta \right\} w(x) dx
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Se distinguen dos casos:

1. $x \in T_j$:

$$C_\beta \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^x (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta w(x) dx = \mathbf{I}_\beta^j \cdot \mathbf{p}_h^j$$

donde:

$$\mathbf{I}_\beta^j = C_\beta \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^x (x-\zeta)^{1-\beta} \phi_{colum}^j(\zeta) \phi_{fila}^j(x) d\zeta dx \right]$$

2. $x \in T_k$ con: $x_k \leq x_{j-1}$

$$C_\beta \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-\zeta)^{1-\beta} p_h(\zeta, t) d\zeta w(x) dx = \mathbf{I}_\beta^{j,k} \cdot \mathbf{p}_h^j$$

donde:

$$\mathbf{I}_\beta^{j,k} = C_\beta \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-\zeta)^{1-\beta} \phi_{colum}^k(\zeta) \phi_{fila}^j(x) d\zeta dx \right]$$

Sumando para todas las celdas y en forma matricial:

$$\sum_{j=1}^N \int_{I_j} {}_a D_x^{\beta-2} p_h(x, t) \cdot w(x) dx = \overbrace{\begin{bmatrix} [I_\beta^1] & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ [I_\beta^{1,2}] & [I_\beta^2] & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ [I_\beta^{1,k}] & [I_\beta^{2,k}] & \dots & [I_\beta^j] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & 0 \\ [I_\beta^{1,N}] & [I_\beta^{2,N}] & \dots & [I_\beta^{j,N}] & \dots & [I_\beta^N] \end{bmatrix}}^{I_\beta} \begin{bmatrix} p_h^1 \\ p_h^2 \\ \vdots \\ p_h^j \\ \vdots \\ p_h^N \end{bmatrix}$$

Por la construcción de la matriz fraccionaria se obtienen las siguientes proposiciones:

Proposición 4.4.1: Caracterización por bloques de I^β

Para la matriz del operador fraccionario I^β se reduce el computo de entradas a la primera columna por bloques si la partición $\mathcal{T}$ es uniforme. En tal caso las diagonales por bloques son iguales.

Demostración. Por medio del mapeo (4.1) los cálculos se hacen en la celda de referencia, entonces las entradas se obtienen como:

$$\mathbf{I}_\beta^j(row, col) = J_j^{3-\beta} C_\beta \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1} \left(\int_{\hat{x}_0}^x (x-y)^\beta \hat{\phi}_{row}(y) dy \right) \hat{\phi}_{col}(x) dx \quad (4.11)$$

$$\mathbf{I}_\beta^{j,k}(row, col) = J_j J_k C_\beta \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1} \left(\int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1} (J_j x - J_k y)^\beta \hat{\phi}_{row}(y) dy \right) \hat{\phi}_{col}(x) dx \quad (4.12)$$

Si la partición es uniforme: $J_1 = J_2 = \dots = J_M$, entonces:

$$I_\beta^1 = I_\beta^2 = \dots = I_\beta^N, \quad I_\beta^{1,k} = I_\beta^{2,k} = \dots = I_\beta^{N,k} \quad \forall k = 2, \dots, N-1$$

□

Proposición 4.4.2: Convergencia de I^β cuando $\beta \rightarrow 2$

La matriz del operador fraccionario I^β converge a la matriz del operador de difusión cuando $\beta \rightarrow 2$, es decir:

$$\lim_{\beta \rightarrow 2} I^\beta \rightarrow M$$

Demostración. La derivada en el sentido de Riemann-Liouville satisface la siguiente condición:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} {}_a D_x^{-\beta} v(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} {}_a D_x^\beta v(x) = v(x) ,$$

por lo tanto:

$$\lim_{\beta \rightarrow 2} {}_a D_x^{\beta-2} p_h(x, t) = p_h(x, t)$$

entonces (4.10) para este caso se puede ver como:

$$\lim_{\beta \rightarrow 2} \int_{T_j} {}_a D_x^{\beta-2} p_h(x, t) \cdot w(x) dx = \int_{T_j} p_h(x, t) \cdot w(x) dx$$

Al sumar sobre todas las celdas, se obtiene el resultado. □

Proposición 4.4.3: Cálculo de las entradas de I^β

Conociendo la base en la cual se calcula la matriz fraccionaria. El computo de las entradas de $\mathbf{I}_\beta^j$ y $\mathbf{I}_\beta^{j,k}$ es exacto con: $a, b \in \mathbb{R}$, $\beta \in (1, 2)$.

Demostración. Para $\beta \in (1, 2)$ considere $\alpha = \beta - 2 \in (-1, 0)$, luego para la integral:

$$\int_a^b \int_a^x (x-y)^\alpha p(y) q(x) dy dx \quad \text{donde} \quad p(y) = \sum_{k=0}^p \xi_k y^k, \quad q(x) = \sum_{l=0}^p \xi_l x^l$$

Integrando por partes se tiene que:

$$\int_a^x (x-y)^\alpha y^k dy = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{(-1)^i x^{k-i} (x-a)^{i+\alpha+1}}{i+\alpha+1} \quad (4.13)$$

$$\int_a^b (x-a)^r x^m dy = \sum_{l=0}^m \left(\frac{m!/(m-l)!}{\prod_{s=0}^l (r+1+s)} \right) (-1)^l b^{m-l} (b-a)^{r+1+l} \quad (4.14)$$

Por la linealidad de la integral y aplicando (4.13):

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^x (x-y)^\alpha p(y) q(x) dy dx &= \sum_{k=0}^p \xi_k \sum_{l=0}^p \xi_l \int_a^b \left(\int_a^x (x-y)^\alpha y^k dy \right) x^l dx \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{(-1)^i \xi_k \xi_l}{i+\alpha+1} \int_a^b x^{k-i+l} (x-a)^{i+\alpha+1} dx \end{aligned}$$

Tomando $m = k - i + l$, $r = i + \alpha + 1$ y aplicando (4.14) se obtiene el valor exacto de la integral para cualquier $p(y)$ y $q(x)$. De forma similar se obtiene una expresión para las entradas de $\mathbf{I}_\beta^{\mathbf{j}, \mathbf{k}}$. $\square$

CAPÍTULO 5

ESTABILIDAD Y ESTIMADO DE ERROR

En este capítulo se presentan los siguientes estimados del comportamiento del error: Estabilidad en la norma L^2 y Orden de convergencia. Para el Método I los estimados son dados en [10], dichos resultados se referencian aquí como [Teorema 5.1.1](#) y [Teorema 5.2.1](#). Para el Método II se utiliza un procedimiento similar al presentado en [10] obteniendo los estimados bajo una condición adicional, ver [Teorema 5.1.2](#) y [Teorema 5.2.2](#).

5.1 Estabilidad en la norma L^2

A continuación se presentan los resultados de Estabilidad en la norma L^2 , la demostración para el resultado del Método I puede ser consultada en [10].

Sea $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h, \tilde{q}_h)$ la solución perturbada de (u_h, p_h, q_h) ; es decir, solución de las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) con diferente condición inicial. Se definen los errores e_u, e_p, e_q como:

$$(e_u, e_p, e_q) := (\tilde{u}_h, \tilde{p}_h, \tilde{q}_h) - (u_h, p_h, q_h)$$

La estabilidad en la norma L^2 de un método numérico se entiende por que la norma del error en el tiempo t_n ($e_u(\cdot, t_n)$) esté acotada por la norma del error inicial ($e_u(\cdot, 0)$) multiplicada por una constante C_T que solo dependa del tiempo final y no de los pasos intermedios, ni del incremento de tiempo (τ) o la discretización de la malla:

$$\|e_u(\cdot, t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_T \|e_u(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t_n : 0 \leq t_n = n \tau \leq T,$$

donde $n = 0, \dots, N_\tau$; N_τ es el número de pasos en tiempo y $\tau = T/N_\tau$.

Teorema 5.1.1: Estabilidad L^2 en el Método I

El Método I aplicado al problema (1.1) es $L^2(\Omega)$ estable y para todo $t \in [0, T]$ la solución satisface:

$$\begin{aligned} \|e_u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|e_u(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \cos((\beta/2 - 1)\pi) \int_0^t \|e_p(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 dt \\ &\quad - 2 L_{h,\beta} \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} [e_p]^2(x_j, t) dt \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nótese que para el caso $\beta = 1$ (convección) la disipación es causada por el término de estabilidad $\mathcal{S}_p(p_h)$, porque $\cos((\beta/2 - 1)\pi) = 0$, por lo tanto en el límite $h \rightarrow 0$ desaparece.

Teorema 5.1.2: Estabilidad L^2 en el Método II

El Método II aplicado al problema (1.1) es L^2 estable y para todo $t \in (0, T)$ la solución satisface:

$$\begin{aligned} \|e_u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|e_u(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 d \cos((\beta/2 - 1)\pi) \int_0^t \|e_p(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 dt \\ &\quad - 2 \tilde{L}_{h,\beta} \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} [e_u]^2(x_j, t) dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

Demostración. De las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) para el Método 2, se obtienen las formas bilineales B_1 , B_2 y la forma lineal L , sumando todas las celdas e

integrando en tiempo, es decir:

$$\begin{aligned}
B_1(u_h, p_h, q_h; v, w, z) &= \int_0^t \int_a^b \frac{\partial u_h}{\partial t} v \, dx \, dt - \int_0^t \int_a^b d {}_a D_x^{\beta-2} p_h w \, dx \, dt \\
&+ \int_0^t \int_a^b \left(q_h \frac{\partial v}{\partial x} + u_h \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx \, dt \\
&+ \int_0^t \int_a^b (q_h w + p_h z) \, dx \, dt + \int_0^t [q_h^+(a) v^+(a) - q_h^-(b) v^-(b)] \, dt \\
&+ \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} [\hat{q}_h(x_j) [v](x_j) + \hat{u}_h(x_j) [z](x_j)] \, dt
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$B_2(u_h, p_h, q_h; v, w, z) = B_1(u_h, p_h, q_h, v, w, z) + \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{L}_{h,\beta} [u_h](x_j) [v](x_j) \, dt \tag{5.4}$$

$$L(v, w, z) = \int_0^t \int_a^b f(x, t) v(x) + \int_t^b g(t) z(b) + \int_t^a g(t) v(b) \, dx \, dt \tag{5.5}$$

las cuales satisfacen:

$$B_2(u_h, p_h, q_h, v, w, z) = L(v, w, z) \tag{5.6}$$

De (5.6) se obtiene para el error:

$$B_2(e_u, e_p, e_q, v, w, z) = 0, \tag{5.7}$$

Para todo $(v, w, z) \in H^1(\Omega, \mathcal{T}) \times L^2(\Omega, \mathcal{T}) \times H^1(\Omega, \mathcal{T})$. Ya que es válido para cualquier de las funciones v , w , z , se eligen: $v = e_u$, $w = -e_p$ y $z = e_q$. Simplificando (5.7) :

$$\int_0^t \int_a^b \frac{\partial e_u}{\partial t} e_u \, dx \, dt + \int_0^t \int_a^b d {}_a D_x^{\beta-2} e_p e_p \, dx \, dt + \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{L}_{h,\beta} ([e_u](x_j, t))^2 \, dt = 0 \tag{5.8}$$

Reescribiendo: $\int_0^t \int_a^b \frac{\partial e_u}{\partial t} e_u dx dt = \frac{1}{2} \left(\|e_u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_u(0, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$

$$\begin{aligned} \|e_u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|e_u(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \int_0^t \int_a^b {}_a D_x^{\beta-2} e_p e_p dx dt \\ &\quad - 2 \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{L}_{h,\beta} ([e_u](x_j, t))^2 dt \end{aligned} \quad (5.9)$$

Haciendo uso del lema 2.4 de [11] en [10] se probó que:

$$\int_a^b ({}_a D_x^{\beta-2} v) v dx = \cos((\beta/2 - 1)\pi) \|v(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2$$

Por lo que :

$$\int_0^t \int_a^b ({}_a D_x^{\beta-2} e_p) e_p dx dt = \cos((\beta/2 - 1)\pi) \int_0^t \|e_p(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 dt \quad (5.10)$$

Reemplazando (5.10) en (5.9) se obtiene el resultado propuesto en (5.2). $\square$

5.2 Orden de convergencia

A continuación se presentan los resultados del orden de convergencia en la norma L^2 . Se dice que el método converge de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ en espacio, si existe $c > 0$ independiente de la discretización de la malla (h) tal que:

$$\|u(\cdot, t_n) - u_h(\cdot, t_n)\|_0 \leq c h^\alpha, \quad \forall t_n : 0 \leq t_n \leq T.$$

Considerando aproximación con polinomios de grado menor o igual a p en todas las celdas, con el fin de tener un estimado general en Ω . Para el análisis de error se definen los operadores de proyección:

$$\Pi^\pm : L^2(\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{V}_h, \quad \Pi_h : H^1(\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{V}_h,$$

para cada celda $T_k = (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \dots, N$, y cualquier función suficientemente regular u . $\Pi^\pm$ es definido para satisfacer las siguientes $p + 1$ condiciones:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\Pi^\pm u - u) v \, dx = 0, \forall v \in \mathcal{P}_{p-1}(T_k), \text{ si } p > 0$$

$$\Pi^- u(x_k) = u^-(x_k)$$

$$\Pi^+ u(x_{k-1}) = u^+(x_{k-1})$$

Π_h es el operador de proyección estándar en la norma L^2 , se define como:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\Pi_h u - u) v \, dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{P}_p(T_k),$$

Teorema 5.2.1: Orden de convergencia en el Método I

El error para el Método I con flujos en una dirección (izquierda (3.11) o derecha (3.12)), aplicado al problema (1.1) satisface:

$$\|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_0 \leq \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{L_{h,\beta}}{h}} c + c_\beta \exp(T) \right) h^{p+1}, & 1 < \beta \leq 2 \\ c h^p, & \beta = 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

donde c, c_β dependen de $\frac{\partial^{p+1} u(x, t)}{\partial x^{p+1}}, \frac{\partial^{p+\beta-1} u(x, t)}{\partial x^{p+\beta-1}}, \frac{\partial^{p+\beta} u(x, t)}{\partial x^{p+\beta}}$.

La demostración para este resultado es realizada en [10].

Teorema 5.2.2: Orden de convergencia

El error para el Método II con flujos (3.9) en una dirección (izquierda (3.11) o derecha (3.12)), aplicado al problema (1.1) satisface para $\beta \in (1, 2)$:

$$\|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\beta \exp(T) h^{p+1}, \quad (5.12)$$

donde c_β depende de $\frac{\partial^{p+1} u(x, t)}{\partial x^{p+1}}, \frac{\partial^{p+\beta-1} u(x, t)}{\partial x^{p+\beta-1}}, \frac{\partial^{p+\beta} u(x, t)}{\partial x^{p+\beta}}$.

Demostración. Sea $(u, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ la solución exacta y (u_h, p_h, q_h) la aproximación por el Método II, se definen:

$$(e_u, e_p, e_q) := (u, \mathbf{p}, \mathbf{q}) - (u_h, p_h, q_h)$$

De (5.6) se obtiene la ecuación del error:

$$B_2(e_u, e_p, e_q; v, w, z) = 0, \quad (5.13)$$

para todo $(v, w, z) \in H^1(\Omega, \mathcal{T}) \times L^2(\Omega, \mathcal{T}) \times H^1(\Omega, \mathcal{T})$. Tómesese : $v = \Pi^\pm u - u_h$, $w = p_h - \Pi_h \mathbf{p}$ y $z = \Pi^\mp \mathbf{q} - q_h$, luego ordenando los términos en (5.13):

$$\begin{aligned} B_2(v, -w, z; v, w, z) &= B_2(v - u + u, -w + \mathbf{p} - \mathbf{p}, z - \mathbf{q} + \mathbf{q}; v, w, z) \\ &= B_2(\Pi^\pm u - u, -(\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}), \Pi^\mp \mathbf{q} - \mathbf{q}; v, w, z) \\ &\quad + B_2(u - u_h, \mathbf{p} - p_h, \mathbf{q} - q_h; v, w, z) \\ &= B_2(\Pi^\pm u - u, -(\mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}), \Pi^\mp \mathbf{q} - \mathbf{q}; v, w, z), \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $B_2(u - u_h, \mathbf{p} - p_h, \mathbf{q} - q_h; v, w, z) = 0$ por la ortogonalidad de Galerkin.

Sean $v^e = \Pi^\pm u - u$, $w^e = \mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}$ y $z^e = \Pi^\mp \mathbf{q} - \mathbf{q}$ entonces:

$$B_2(v, -w, z; v, w, z) = B_2(v^e, -w^e, z^e; v, w, z), \quad (5.15)$$

Siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 5.1.2 el lado izquierdo de (5.15)

es:

$$\begin{aligned} B_2(v, -w, z; v, w, z) &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\partial t} dt \\ &\quad + \cos((\beta/2 - 1)\pi) \int_0^t \|w(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \tilde{L}_{h,\beta} \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} [v]^2(x_j, t) dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por otra parte, utilizando la notación de [17], el lado derecho de (5.15) es:

$$B_2(v^e, -w^e, z^e; v, w, z) = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D} + \mathcal{E}, \quad (5.17)$$

donde

$$\mathcal{A} = \int_0^T \int_a^b \frac{\partial v^e(x, t)}{\partial t} v^e(x, t) dx dt, \quad (5.18)$$

$$\mathcal{B} = \int_0^T \int_a^b z^e \frac{\partial v}{\partial x} dx dt + \int_0^T \int_a^b v^e \frac{\partial z}{\partial x} dx dt + \int_0^T \int_a^b w^e z dx dt, \quad (5.19)$$

$$\mathcal{C} = \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} \hat{z}^e(x_j, t)[v](x_j, t) + \hat{v}^e(x_j, t)[z](x_j, t) + \tilde{L}_{h,\beta}[\hat{v}^e][v](x_j, t) dt, \quad (5.20)$$

$$\mathcal{D} = \tilde{L}_{h,\beta} \int_0^T ((z^e)^+(a, t)v^+(a, t) - (z^e)^-(b, t)v^-(b, t)) dt, \quad (5.21)$$

$$\mathcal{E} = \int_0^T \int_a^b z^e(x, t) w(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^x \frac{\partial^{\beta-2} w^e}{\partial x^{\beta-2}} w(x, t) dt. \quad (5.22)$$

Usando la teoría de aproximación estándar [8], se obtienen un estimado para cada término de (5.17). Para $\mathcal{A}$ aplicando la desigualdad $xy < (x^2 + y^2)/2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_a^b \left(\frac{\partial v^e(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^T \int_a^b v^2(x, t) dx dt \right) \\ &\leq c_1 h^{2p+2} + \frac{1}{2} \int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde c_1 depende de $\frac{\partial^{p+1} v(x, t)}{\partial x^{p+1}}$, por tanto de $\frac{\partial^{p+1} u(x, t)}{\partial x^{p+1}}$.

Los términos en $\mathcal{B}$ son cero por la ortogonalidad de Galerkin; esto se debe a que por definición $w^e = \mathbf{p} - \Pi_h \mathbf{p}$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual a p , $v^e = \Pi^\pm u - u$, $z^e = \Pi^\mp \mathbf{q} - \mathbf{q}$ es ortogonal a polinomios de grado menor o igual a $p - 1$. Por lo tanto $\mathcal{B} = 0$.

Los términos en $\mathcal{C}$ son cero al tomar el flujo en una dirección, para $\hat{z}^e = (z^e)^-$ y $\hat{v}^e = v^+$ se toma $z^e = \Pi^- \mathbf{q} - \mathbf{q}$, $v^e = \Pi^+ u - u$; y para $\hat{z}^e = (z^e)^+$ y $\hat{v}^e = v^-$ se toma $z^e = \Pi^+ \mathbf{q} - \mathbf{q}$, $v^e = \Pi^- u - u$. Por lo tanto $\mathcal{C} = 0$.

Para $\mathcal{D}$ aplicando la desigualdad $xy < 1/2(x^2 + y^2)$ y $\tilde{L}_{h,\beta} \leq \eta/h$ se obtiene:

$$\mathcal{D} \leq \frac{\eta}{2h} \int_0^T \left(((z^e)^+(a, t))^2 + ((z^e)^-(b, t))^2 + (v^+(a, t))^2 + (v^-(b, t))^2 \right) dt ,$$

utilizando el estimado de [16] para los términos de borde con penalidad $1/h$, se tiene:

$$\mathcal{D} \leq c_2 h^{2p+2} + c_2 \int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt , \quad (5.24)$$

donde c_2 depende de $\frac{\partial^{p+1}v(x, t)}{\partial x^{p+1}}$, por tanto de $\frac{\partial^{p+1}u(x, t)}{\partial x^{p+1}}$.

Para $\mathcal{E}$ se utiliza la desigualdad $xy < \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\epsilon} + \epsilon y^2 \right)$, donde la elección de ϵ se realiza para controlar el termino fraccionario.

Para el primer término,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_a^b z^e(x, t) w(x, t) dx dt &\leq \int_0^T \int_a^b \frac{(z^e(x, t))^2}{2\epsilon} dx dt + \int_0^T \frac{\epsilon}{2} \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} c_3 h^{2p+2} + \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt , \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde c_3 depende de $\frac{\partial^{p+1}z(x, t)}{\partial x^{p+1}}$, por tanto de $\frac{\partial^{p+\beta}u(x, t)}{\partial x^{p+\beta}}$.

Para el segundo término, se hace uso del Lema (2):

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^x \frac{\partial^{\beta-2} w^e}{\partial x^{\beta-2}} w(x, t) dt &= \int_0^T \int_0^x \frac{\partial^{\beta-2} w}{\partial x^{\beta-2}} w^e(x, t) dt \\ &\leq \int_0^T \int_a^b \frac{(w(\cdot, t))^2}{2\epsilon} dx dt + \int_0^T \int_0^x \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\partial^{\beta-2} w}{\partial x^{\beta-2}} \right)^2 dt \\ &\leq \frac{c_4}{2\epsilon} h^{2p+2} + \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \|w(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 dt \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde c_4 depende de $\frac{\partial^{p+1}w(x,t)}{\partial x^{p+1}}$, por tanto de $\frac{\partial^{p+\beta-1}u(x,t)}{\partial x^{p+\beta-1}}$. Entonces de (5.25) y (5.26) se tiene $\mathcal{E}$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq \left(\frac{c_3}{2\epsilon} + \frac{c_4}{2\epsilon} \right) h^{2p+2} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \frac{c_{max}}{2\epsilon} h^{2p+2} + \epsilon c_w \int_0^T \|w(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 dt \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde $c_{max} = \max\{c_3, c_4\}$, c_w es la constante de la equivalencia entre normas del Teorema (2). Combinando (5.16) con (5.23), (5.24) y (5.27), se obtiene:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|v(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\cos((\beta/2 - 1)\pi) - c_w \epsilon) \int_0^t \|w(\cdot, t)\|_{H^{-(1-\beta/2)}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \tilde{L}_{h,\beta} \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} [v]^2(x_j, t) dt \leq \frac{1}{2} \|v(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left(c_1 + c_2 + \frac{c_3}{\epsilon} \right) h^{2p+2} + \left(\frac{1}{2} + c_2 \right) \int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \end{aligned} \quad (5.28)$$

tómese ϵ tal que $c_3\epsilon < \cos((\beta/2 - 1)\pi)$, además $\tilde{L}_{h,\beta} \int_0^T \sum_{j=1}^{N-1} [v]^2(x_j, t) dt \geq 0$,

Entonces

$$\|v(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c h^{2p+2} + c \int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \quad (5.29)$$

donde $c = 2 \max\{c_1 + c_2 + \frac{c_3}{\epsilon}, \frac{1}{2} + c_2\}$. Aplicando el Lema de Grönwall [8] se obtiene el estimado (5.12). $\square$

CAPÍTULO 6

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para realizar los experimentos numéricos se utiliza el entorno de MATLAB. Las integrales se evalúan con cuadraturas de Gauss-Legendre con 15 puntos y para avanzar en tiempo se utiliza la rutina de *ode45*, la cual tiene como parámetro solo la imposición del paso de tiempo $\Delta t \leq \left(\frac{h}{k^2}\right)^\beta$, donde β es el índice de difusión fraccionaria, esto es para satisfacer con la condición de estabilidad CFL (Courant–Friedrichs–Lewy), basado en la experiencia para valores enteros[12]. En todos los experimentos el error es calculado en el tiempo final, es decir en $t = 1$.

Como solución exacta al problema (1.1) se consideró: $u(x, t) = x^\alpha e^{-t}$ donde $\alpha \geq 1$. Además, el coeficiente de difusión: $d = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - \beta)}{\Gamma(\alpha + 1)}$, y el termino fuente: $f(x, t) = -e^{-t} (x^\alpha + x^{\alpha-\beta})$

Con condiciones iniciales y de frontera:

$$u(x, 0) = x^\alpha, \quad x \in (0, 1); \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = e^{-t}, \quad t \in (0, 1)$$

6.1 Experimentos con u suficientemente regular

Dentro de los objetivos de estos experimentos numéricos se encuentra validar los Métodos I y II, contrastando los resultados en cuanto al orden de convergencia con los estimados de error dados por el Teorema 5.2.1 y Teorema 5.2.2, respectivamente. Se toma para esta prueba $\alpha = 5$, por lo que en términos de derivadas, se cuenta con regularidad suficiente para satisfacer las hipótesis de los teoremas de convergencia antes mencionados. Se utilizó flujo derecho en las siguientes pruebas.

La tabla 6.1, presenta los resultados para aproximaciones de grado uniforme en todas las celdas, en este caso constantes, es decir $p = 0$, por lo que se espera que el orden de convergencia sea 1. La derivada fraccionaria ha sido variada en el rango de $[1, 2]$, obteniendo que se converge para todos los valores del índice β con el orden esperado.

Tabla 6.1: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 0$. $\alpha = 5$.

Método I							
β	$N = 2^3$	$N = 2^4$		$N = 2^5$		$N = 2^6$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	3.17.E-02	1.58.E-02	1.00	7.91.E-03	1.00	3.95.E-03	1.00
1.80	3.24.E-02	1.62.E-02	1.00	8.11.E-03	1.00	4.05.E-03	1.00
1.50	3.41.E-02	1.72.E-02	0.99	8.61.E-03	1.00	4.30.E-03	1.00
1.20	3.75.E-02	1.92.E-02	0.97	9.60.E-03	1.00	4.79.E-03	1.00
1.00	3.95.E-02	2.20.E-02	0.84	1.14.E-02	0.95	5.81.E-03	0.97

Método II							
2.00	3.13.E-02	1.58.E-02	0.99	7.90.E-03	1.00	3.95.E-03	1.00
1.80	3.16.E-02	1.61.E-02	0.97	8.09.E-03	0.99	4.05.E-03	1.00
1.50	3.21.E-02	1.68.E-02	0.93	8.54.E-03	0.98	4.29.E-03	0.99
1.20	3.18.E-02	1.79.E-02	0.83	9.33.E-03	0.94	4.74.E-03	0.98
1.00	3.00.E-02	1.87.E-02	0.68	1.05.E-02	0.83	5.58.E-03	0.92

La tabla 6.2, presenta los resultados para aproximaciones de grado $p = 1$ en todas las celdas, por lo que se espera que el orden de convergencia sea 2. La derivada fraccionaria ha sido variada en el rango de $[1, 2]$, obteniendo que se converge para todos los valores del índice β con el orden esperado.

Tabla 6.2: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$. $\alpha = 5$

Método I							
β	$N = 2^5$	$N = 2^6$		$N = 2^7$		$N = 2^8$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	1.66.E-04	4.14.E-05	2.00	1.03.E-05	2.00	2.58.E-06	2.00
1.80	1.66.E-04	4.15.E-05	2.00	1.04.E-05	2.00	2.59.E-06	2.00
1.20	2.80.E-04	6.45.E-05	2.12	1.50.E-05	2.11	3.51.E-06	2.10
1.10	4.22.E-04	1.00.E-04	2.07	2.38.E-05	2.07	5.65.E-06	2.08
1.06	5.15.E-04	1.25.E-04	2.05	3.02.E-05	2.05	7.30.E-06	2.05
1.04	5.73.E-04	1.40.E-04	2.03	3.44.E-05	2.03	8.40.E-06	2.03
1.02	6.43.E-04	1.60.E-04	2.01	3.95.E-05	2.02	9.77.E-06	2.02
1.00	7.27.E-04	1.85.E-04	1.98	4.65.E-05	1.99	1.17.E-05	2.00
Método II							
2.00	9.29.E-04	2.34.E-04	1.99	5.85.E-05	2.00	1.46.E-05	2.00
1.80	1.08.E-03	2.76.E-04	1.97	7.00.E-05	1.98	1.77.E-05	1.98
1.20	1.43.E-03	3.66.E-04	1.97	9.26.E-05	1.98	2.33.E-05	1.99
1.10	1.51.E-03	3.87.E-04	1.96	9.78.E-05	1.98	2.46.E-05	1.99
1.06	1.54.E-03	3.98.E-04	1.95	1.01.E-04	1.98	2.53.E-05	1.99
1.04	1.56.E-03	4.04.E-04	1.95	1.02.E-04	1.98	2.58.E-05	1.99
1.02	1.58.E-03	4.11.E-04	1.94	1.05.E-04	1.97	2.64.E-05	1.99
1.00	1.59.E-03	4.19.E-04	1.93	1.08.E-04	1.96	2.73.E-05	1.98

La tabla 6.3, presenta los resultados para aproximaciones de grado $p = 2$ en todas las celdas, por lo que se espera que el orden de convergencia sea 3. La derivada fraccionaria ha sido variada en el rango de $[1, 2]$, obteniendo que se converge para todos los valores del índice β con el orden esperado.

Tabla 6.3: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. $\alpha = 5$

Método I							
β	$N = 2^3$	$N = 2^4$		$N = 2^5$		$N = 2^6$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	1.06.E-04	1.26.E-05	3.08	1.52.E-06	3.05	1.87.E-07	3.02
1.80	1.01.E-04	1.21.E-05	3.06	1.49.E-06	3.03	1.85.E-07	3.01
1.20	1.36.E-04	1.58.E-05	3.11	1.84.E-06	3.10	2.17.E-07	3.09
1.10	1.87.E-04	2.22.E-05	3.07	2.64.E-06	3.08	3.13.E-07	3.08
1.06	2.21.E-04	2.66.E-05	3.05	3.19.E-06	3.06	3.86.E-07	3.05
1.04	2.42.E-04	2.95.E-05	3.04	3.54.E-06	3.06	4.33.E-07	3.03
1.02	2.67.E-04	3.28.E-05	3.03	3.98.E-06	3.04	4.94.E-07	3.01
1.00	2.97.E-04	3.69.E-05	3.01	4.62.E-06	3.00	5.73.E-07	3.01
Método II							
2.00	9.58.E-05	1.21.E-05	2.99	1.51.E-06	3.00	1.89.E-07	3.00
1.80	1.16.E-04	1.48.E-05	2.97	1.87.E-06	2.98	2.35.E-07	2.99
1.20	4.64.E-04	6.99.E-05	2.73	9.63.E-06	2.86	1.27.E-06	2.93
1.10	6.25.E-04	1.03.E-04	2.60	1.50.E-05	2.78	2.03.E-06	2.89
1.06	7.10.E-04	1.24.E-04	2.52	1.88.E-05	2.72	2.60.E-06	2.85
1.04	7.57.E-04	1.37.E-04	2.47	2.14.E-05	2.68	3.01.E-06	2.83
1.02	8.08.E-04	1.52.E-04	2.41	2.46.E-05	2.62	3.55.E-06	2.79
1.00	8.63.E-04	1.69.E-04	2.35	2.87.E-05	2.56	4.29.E-06	2.74

La tabla 6.4, presenta los resultados para aproximaciones de grado $p = 3$ en todas las celdas, por lo que se espera que el orden de convergencia sea 4. La derivada fraccionaria ha sido variada en el rango de $[1, 2]$, obteniendo que se converge para todos los valores del índice β con el orden esperado.

Tabla 6.4: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. $\alpha = 5$

Método I					
β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	9.80.E-05	8.46.E-06	3.53	7.38.E-07	3.52
1.80	9.09.E-05	6.86.E-06	3.73	5.21.E-07	3.72
1.20	7.36.E-05	3.98.E-06	4.21	2.17.E-07	4.20
1.10	8.73.E-05	5.02.E-06	4.12	2.83.E-07	4.15
1.06	9.91.E-05	5.95.E-06	4.06	3.48.E-07	4.10
1.04	1.07.E-04	6.60.E-06	4.02	3.94.E-07	4.07
1.02	1.18.E-04	7.42.E-06	3.99	4.52.E-07	4.04
1.00	1.30.E-04	8.47.E-06	3.94	5.30.E-07	4.00
Método II					
2.00	2.83.E-05	1.77.E-06	4.00	1.11.E-07	4.00
1.80	2.87.E-05	1.79.E-06	4.00	1.12.E-07	4.00
1.20	5.71.E-05	3.66.E-06	3.96	2.31.E-07	3.98
1.10	6.29.E-05	4.06.E-06	3.95	2.56.E-07	3.99
1.06	6.55.E-05	4.24.E-06	3.95	2.67.E-07	3.99
1.04	6.69.E-05	4.35.E-06	3.94	2.74.E-07	3.99
1.02	6.83.E-05	4.47.E-06	3.93	2.82.E-07	3.99
1.00	6.98.E-05	4.61.E-06	3.92	2.92.E-07	3.98

6.2 Experimentos con u poco regular

En estas pruebas numéricas se consideran funciones exactas con poca regularidad. El objetivo es contrastar el impacto de las restricciones del estimado de error dado por el [Teorema 5.2.1](#) para el Método I, y por [Teorema 5.2.2](#) para el Método II. En vista de que para este experimento no se cumplen las hipótesis de regularidad, no puede asegurarse de antemano el orden de convergencia.

Se considera para el primer experimento $\alpha = 2.5$ por lo que $u \in H^{3.0}((0, 1))$, entonces el orden de convergencia no puede ser mayor que 3.

La tabla [6.5](#), presenta los resultados del Método I para aproximaciones de grado $p = 1$ en todas las celdas, por lo que se esperaría que el orden de convergencia sea 2. La derivada fraccionaria ha sido variada en el rango de $[1, 2]$, obteniendo que no se converge para todos los valores del índice β con el orden esperado.

Dado que para los valores de β cercanos a 1, se obtiene aproximadamente el orden deseado, se presentan los resultados para $\beta \in [1.0, 1.1]$ con incremento 0.01, con el objetivo de apreciar el comportamiento de convergencia del error cuando $\beta \rightarrow 1$.

Tabla 6.5: Error y orden de convergencia del Método I para polinomios de grado $p = 1$. $\alpha = 2.5$

β	$N = 2^5$	$N = 2^6$		$N = 2^7$		$N = 2^8$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	9.13.E-03	4.56.E-03	1.00	2.28.E-03	1.00	1.14.E-03	1.00
1.80	6.00.E-03	2.61.E-03	1.20	1.14.E-03	1.20	4.94.E-04	1.20
1.20	1.32.E-03	3.74.E-04	1.82	1.07.E-04	1.81	3.05.E-05	1.81
1.10	1.08.E-03	2.82.E-04	1.93	7.43.E-05	1.92	1.96.E-05	1.92
1.09	1.07.E-03	2.76.E-04	1.95	7.22.E-05	1.94	1.89.E-05	1.93
1.08	1.05.E-03	2.71.E-04	1.96	7.03.E-05	1.95	1.83.E-05	1.94
1.07	1.05.E-03	2.67.E-04	1.97	6.87.E-05	1.96	1.77.E-05	1.95
1.06	1.04.E-03	2.64.E-04	1.98	6.74.E-05	1.97	1.73.E-05	1.96
1.05	1.04.E-03	2.62.E-04	1.99	6.64.E-05	1.98	1.69.E-05	1.97
1.04	1.05.E-03	2.61.E-04	2.00	6.58.E-05	1.99	1.66.E-05	1.98
1.03	1.05.E-03	2.62.E-04	2.01	6.56.E-05	2.00	1.65.E-05	1.99
1.02	1.07.E-03	2.64.E-04	2.01	6.59.E-05	2.00	1.65.E-05	2.00
1.01	1.08.E-03	2.69.E-04	2.01	6.68.E-05	2.01	1.67.E-05	2.00
1.00	1.11.E-03	2.76.E-04	2.01	6.87.E-05	2.01	1.71.E-05	2.00

La tabla 6.6, presenta los resultados del Método II para aproximaciones de grado $p = 1$ en todas las celdas, por lo que se esperaría que el orden de convergencia sea 2. La derivada fraccionaria ha sido variada en el rango de $[1, 2]$, tomando el mismo rango de valores de la tabla 6.5, obteniendo que se converge para todos los valores del índice β con el orden esperado.

Tabla 6.6: Error y orden de convergencia del Método II para polinomios de grado $p = 1$. $\alpha = 2.5$

β	$N = 2^5$		$N = 2^6$		$N = 2^7$		$N = 2^8$	
	<i>error</i>		<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	2.72.E-04		6.83.E-05	2.00	1.71.E-05	2.00	4.27.E-06	2.00
1.80	2.89.E-04		7.20.E-05	2.01	1.79.E-05	2.01	4.45.E-06	2.01
1.50	3.33.E-04		8.37.E-05	1.99	2.10.E-05	2.00	5.26.E-06	2.00
1.20	3.77.E-04		9.55.E-05	1.98	2.41.E-05	1.98	6.09.E-06	1.99
1.10	3.91.E-04		9.92.E-05	1.98	2.50.E-05	1.99	6.31.E-06	1.99
1.09	3.93.E-04		9.96.E-05	1.98	2.51.E-05	1.99	6.33.E-06	1.99
1.08	3.95.E-04		1.00.E-04	1.98	2.52.E-05	1.99	6.35.E-06	1.99
1.07	3.96.E-04		1.00.E-04	1.98	2.53.E-05	1.99	6.38.E-06	1.99
1.06	3.98.E-04		1.01.E-04	1.98	2.54.E-05	1.99	6.40.E-06	1.99
1.05	4.00.E-04		1.01.E-04	1.98	2.56.E-05	1.99	6.43.E-06	1.99
1.04	4.02.E-04		1.02.E-04	1.98	2.57.E-05	1.99	6.46.E-06	1.99
1.03	4.04.E-04		1.03.E-04	1.98	2.58.E-05	1.99	6.49.E-06	1.99
1.02	4.06.E-04		1.03.E-04	1.98	2.60.E-05	1.99	6.54.E-06	1.99
1.01	4.09.E-04		1.04.E-04	1.97	2.63.E-05	1.99	6.60.E-06	1.99
1.00	4.11.E-04		1.05.E-04	1.97	2.66.E-05	1.98	6.70.E-06	1.99

La tabla 6.7, presenta los resultados de los Métodos I y II para aproximaciones de grado $p = 2$ en todas las celdas, por lo que se esperaría que el orden de convergencia sea 3.

Tabla 6.7: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. $\alpha = 2.5$

Método I							
β	$N = 2^3$	$N = 2^4$		$N = 2^5$		$N = 2^6$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	3.36.E-03	1.68.E-03	1.00	8.40.E-04	1.00	4.20.E-04	1.00
1.80	1.44.E-03	6.27.E-04	1.20	2.73.E-04	1.20	1.19.E-04	1.20
1.20	4.00.E-04	1.15.E-04	1.80	3.30.E-05	1.80	9.47.E-06	1.80
1.10	4.25.E-04	1.14.E-04	1.90	3.05.E-05	1.90	8.16.E-06	1.90
1.08	4.26.E-04	1.12.E-04	1.92	2.97.E-05	1.92	7.85.E-06	1.92
1.06	4.27.E-04	1.11.E-04	1.94	2.89.E-05	1.94	7.53.E-06	1.94
1.04	4.26.E-04	1.09.E-04	1.96	2.81.E-05	1.96	7.21.E-06	1.96
1.02	4.26.E-04	1.08.E-04	1.98	2.73.E-05	1.98	6.90.E-06	1.98
1.00	4.25.E-04	1.06.E-04	2.00	2.66.E-05	2.00	6.67.E-06	2.00
Método II							
2.00	1.11.E-05	1.51.E-06	2.87	2.03.E-07	2.89	2.71.E-08	2.91
1.80	1.18.E-05	1.62.E-06	2.87	2.19.E-07	2.89	2.93.E-08	2.90
1.20	3.12.E-05	4.07.E-06	2.94	5.34.E-07	2.93	7.01.E-08	2.93
1.10	4.38.E-05	5.62.E-06	2.96	7.30.E-07	2.94	9.52.E-08	2.94
1.08	4.75.E-05	6.07.E-06	2.97	7.87.E-07	2.95	1.02.E-07	2.94
1.06	5.19.E-05	6.62.E-06	2.97	8.55.E-07	2.95	1.11.E-07	2.94
1.04	5.71.E-05	7.27.E-06	2.97	9.35.E-07	2.96	1.21.E-07	2.95
1.02	6.32.E-05	8.06.E-06	2.97	1.03.E-06	2.96	1.34.E-07	2.95
1.00	7.05.E-05	9.05.E-06	2.96	1.16.E-06	2.96	1.50.E-07	2.95

Los resultados obtenidos para el Método I en las tablas 6.5 (para $p = 1$) y 6.7 (para $p = 2$) muestran numéricamente que no converge con la tasa esperada, mientras que el Método II en las tablas 6.6 (para $p = 1$) y 6.7 (para $p = 2$) converge para todos los valores del índice β con el orden esperado.

La tabla 6.8, presenta los resultados de los Métodos I y II para aproximaciones de grado $p = 3$ en todas las celdas, por lo que se esperaría que el orden de convergencia sea 3 ya que es la regularidad de la función. Para comparar los métodos en este caso se toma $\beta = \{1.1, 1.2, 1.8, 2.0\}$, obteniendo que el Método I no converge de la manera esperada mientras que el Método II si lo hace.

Tabla 6.8: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. $\alpha = 2.5$

Método I					
β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	2.64E-03	1.32E-03	1.00	6.61E-04	1.00
1.80	1.08E-03	4.71E-04	1.20	2.05E-04	1.20
1.20	2.18E-04	6.25E-05	1.80	1.79E-05	1.80
1.10	1.82E-04	4.53E-05	2.00	1.13E-05	2.00
Método II					
β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	7.08.E-06	8.82.E-07	3.00	1.10.E-07	3.00
1.80	4.84.E-06	6.04.E-07	3.00	7.55.E-08	3.00
1.20	7.40.E-06	9.14.E-07	3.02	1.13.E-07	3.01
1.10	9.06.E-06	1.09.E-06	3.05	1.35.E-07	3.02

La tabla 6.9, presenta los resultados del Método II para aproximaciones de grado $p = 3$ en todas las celdas, para $\beta \in [1.00, 1.09]$ con incremento 0.01, corroborando que cuando $\beta \rightarrow 1$ se converge con orden 3.

Tabla 6.9: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$, Método II - Con Estabilidad. $\alpha = 2.5$

β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
1.09	9.33.E-06	1.12.E-06	3.06	1.37.E-07	3.02
1.08	9.65.E-06	1.14.E-06	3.08	1.40.E-07	3.02
1.07	1.00.E-05	1.17.E-06	3.10	1.44.E-07	3.03
1.06	1.04.E-05	1.20.E-06	3.12	1.47.E-07	3.03
1.05	1.09.E-05	1.24.E-06	3.14	1.51.E-07	3.04
1.04	1.15.E-05	1.28.E-06	3.17	1.55.E-07	3.05
1.03	1.22.E-05	1.33.E-06	3.21	1.59.E-07	3.06
1.02	1.31.E-05	1.38.E-06	3.24	1.64.E-07	3.07
1.01	1.40.E-05	1.44.E-06	3.28	1.69.E-07	3.09
1.00	1.51.E-05	1.50.E-06	3.33	1.76.E-07	3.10

En vista del comportamiento del Método II para una función con poca regularidad, se presentan a continuación como segundo experimento $\alpha = 1.5$ por lo que $u \in H^{2.0}((0, 1))$ entonces el orden de convergencia no puede ser mayor que 2, con el objetivo de validar numéricamente el comportamiento del método para este tipo de funciones.

En las tablas 6.10 (para $p = 1$), 6.11 (para $p = 2$) y 6.12 (para $p = 3$) se presentan los resultados del orden de convergencia para el Método II, para una función con regularidad 2, por lo tanto es de esperarse que la convergencia sea de orden 2 para aproximaciones con polinomios de grado 1,2 y 3, respectivamente.

Tabla 6.10: Error y orden de convergencia del Método II para polinomios de grado $p = 1$, con $\alpha = 1.5$

β	$N = 2^5$	$N = 2^6$		$N = 2^7$		$N = 2^8$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	2.70.E-04	6.85.E-05	1.98	1.74.E-05	1.98	4.42.E-06	1.98
1.80	1.45.E-04	3.78.E-05	1.94	9.81.E-06	1.95	2.54.E-06	1.95
1.50	1.14.E-04	2.98.E-05	1.93	7.79.E-06	1.94	2.03.E-06	1.94
1.20	1.53.E-04	3.96.E-05	1.95	1.02.E-05	1.96	2.62.E-06	1.96
1.10	1.70.E-04	4.35.E-05	1.97	1.11.E-05	1.97	2.84.E-06	1.97
1.05	1.79.E-04	4.55.E-05	1.98	1.16.E-05	1.97	2.95.E-06	1.97
1.02	1.84.E-04	4.67.E-05	1.98	1.19.E-05	1.98	3.02.E-06	1.98
1.00	1.88.E-04	4.77.E-05	1.98	1.21.E-05	1.98	3.08.E-06	1.98

Tabla 6.11: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$, Método II - Con Estabilidad. $\alpha = 1.5$

β	$N = 2^3$	$N = 2^4$		$N = 2^5$		$N = 2^6$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	4.32.E-04	1.08.E-04	2.00	2.69.E-05	2.00	6.73.E-06	2.00
1.80	1.41.E-04	3.52.E-05	2.00	8.79.E-06	2.00	2.20.E-06	2.00
1.50	3.29.E-05	8.22.E-06	2.00	2.05.E-06	2.00	5.14.E-07	2.00
1.20	6.84.E-05	1.69.E-05	2.01	4.22.E-06	2.01	1.05.E-06	2.00
1.10	7.80.E-05	1.92.E-05	2.02	4.79.E-06	2.01	1.19.E-06	2.00
1.05	8.42.E-05	2.07.E-05	2.03	5.13.E-06	2.01	1.28.E-06	2.01
1.02	8.90.E-05	2.18.E-05	2.03	5.39.E-06	2.01	1.34.E-06	2.01
1.00	9.30.E-05	2.26.E-05	2.04	5.59.E-06	2.01	1.39.E-06	2.01

Tabla 6.12: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$, Método II - Con Estabilidad. $\alpha = 1.5$

β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	9.83.E-04	2.45.E-04	2.01	6.12.E-05	2.00
1.80	2.87.E-04	7.15.E-05	2.01	1.78.E-05	2.00
1.50	3.60.E-05	8.99.E-06	2.00	2.24.E-06	2.00
1.20	8.13.E-05	2.01.E-05	2.02	5.00.E-06	2.01
1.10	8.85.E-05	2.17.E-05	2.03	5.38.E-06	2.01
1.05	9.49.E-05	2.27.E-05	2.06	5.63.E-06	2.01
1.02	1.01.E-04	2.37.E-05	2.10	5.84.E-06	2.02
1.00	1.08.E-04	2.44.E-05	2.14	6.02.E-06	2.02

Los resultados de las tablas 6.10, 6.11 y 6.12 confirman numéricamente la convergencia óptima del Método II para funciones con poca regularidad en mallas uniformes, ya que todos los experimentos mostrados hasta esta parte han sido con este tipo de malla. A continuación se presentan experimentos en mallas no uniformes.

6.3 Experimentos con malla no uniforme

Se tomó como malla inicial la formada por los nodos: $\{0, 1/2, 3/4, 1\}$, y se refino tomando los puntos medios de cada celda, como muestra la figura 6.1, duplicando la cantidad de celdas en cada paso.

Las tablas 6.13 (para $p = 1$), 6.14 (para $p = 2$) y 6.15 (para $p = 3$) presentan los resultados del orden de convergencia para el Método II, para una función con suficiente regularidad en mallas no uniformes, por lo tanto es de esperarse que la convergencia sea de orden 2, 3 y 4 para aproximaciones con polinomios de grado 1, 2 y 3, respectivamente.

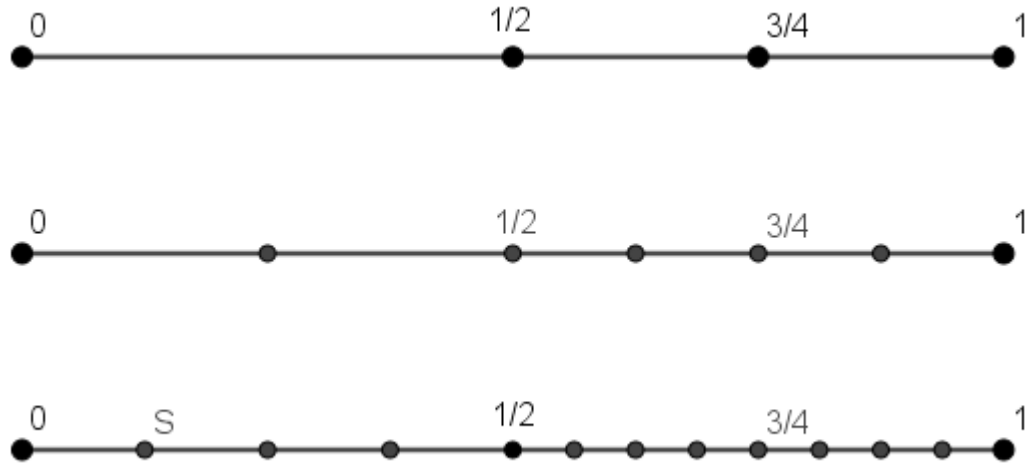


Figura 6.1: Ejemplo refinamiento para malla no uniforme

Tabla 6.13: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$ en mallas NO uniformes, Método II. $\alpha = 5$

β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$		$N = 2^5$		$N = 2^6$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	1.26E-02	3.45E-03	1.87	9.01E-04	1.94	2.30E-04	1.97	5.79E-05	1.99
1.90	1.34E-02	3.68E-03	1.86	9.65E-04	1.93	2.47E-04	1.97	6.27E-05	1.98
1.80	1.42E-02	3.91E-03	1.86	1.03E-03	1.93	2.63E-04	1.96	6.68E-05	1.98
1.60	1.58E-02	4.38E-03	1.85	1.14E-03	1.94	2.92E-04	1.97	7.39E-05	1.98
1.40	1.73E-02	4.88E-03	1.83	1.27E-03	1.94	3.24E-04	1.97	8.16E-05	1.99
1.10	1.90E-02	5.74E-03	1.73	1.54E-03	1.89	3.93E-04	1.98	9.90E-05	1.99
1.05	1.92E-02	5.88E-03	1.71	1.61E-03	1.87	4.12E-04	1.97	1.04E-04	1.99
1.01	1.93E-02	5.98E-03	1.69	1.67E-03	1.84	4.32E-04	1.96	1.10E-04	1.97

Tabla 6.14: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$ en mallas NO uniformes, Método II. $\alpha = 5$

β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$		$N = 2^5$		$N = 2^6$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	1.04E-03	1.60E-04	2.69	2.07E-05	2.95	2.60E-06	2.99	3.26E-07	3.00
1.90	1.02E-03	1.58E-04	2.69	2.05E-05	2.94	2.60E-06	2.98	3.27E-07	2.99
1.80	1.05E-03	1.61E-04	2.70	2.12E-05	2.93	2.70E-06	2.97	3.41E-07	2.99
1.60	1.29E-03	1.94E-04	2.74	2.60E-05	2.90	3.38E-06	2.95	4.30E-07	2.97
1.40	1.86E-03	2.81E-04	2.73	3.86E-05	2.86	5.11E-06	2.92	6.58E-07	2.96
1.10	3.70E-03	6.94E-04	2.42	1.07E-04	2.70	1.52E-05	2.81	2.05E-06	2.89
1.05	4.17E-03	8.45E-04	2.30	1.39E-04	2.60	2.07E-05	2.76	2.87E-06	2.85
1.01	4.57E-03	9.96E-04	2.20	1.79E-04	2.47	2.82E-05	2.67	4.08E-06	2.79

Tabla 6.15: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$ en mallas NO uniformes, Método II. $\alpha = 5$

β	$N = 2^2$	$N = 2^3$		$N = 2^4$		$N = 2^5$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.00	1.52E-04	1.01E-05	3.91	6.38E-07	3.99	3.99E-08	4.00
1.90	1.46E-04	9.72E-06	3.91	6.10E-07	4.00	3.80E-08	4.00
1.80	1.41E-04	9.36E-06	3.92	5.83E-07	4.00	3.62E-08	4.01
1.60	1.37E-04	8.83E-06	3.95	5.40E-07	4.03	3.32E-08	4.02
1.40	1.44E-04	8.75E-06	4.04	5.21E-07	4.07	3.17E-08	4.04
1.10	2.56E-04	1.23E-05	4.38	6.01E-07	4.36	3.22E-08	4.22
1.05	3.07E-04	1.55E-05	4.31	6.84E-07	4.50	3.31E-08	4.37
1.01	3.62E-04	2.01E-05	4.17	8.50E-07	4.56	4.10E-08	4.38

Para validar el comportamiento del Método II en mallas no uniformes para una función con poca regularidad, se presentan los resultados para $\alpha = 2.8$ por lo que $u \in H^{3.3}((0, 1))$ entonces el orden de convergencia no puede ser mayor que 3.3.

En las tablas 6.16 (para $p = 1$), 6.17 (para $p = 2$) y 6.18 (para $p = 3$) se presentan los resultados del orden de convergencia para el Método II, para una función con regularidad 3.3, por lo tanto es de esperarse que la convergencia sea de orden 2 para $p = 1$, sea 3 para $p = 2$ y sea 3.3 para $p = 3$.

Tabla 6.16: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 2.8$

β	$N0$	$N0 * 2^1$		$N0 * 2^2$		$N0 * 2^3$		$N0 * 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.0	1.01E-02	2.56E-03	1.97	6.41E-04	2.00	1.60E-04	2.00	3.99E-05	2.00
1.8	8.89E-03	2.19E-03	2.02	5.28E-04	2.05	1.28E-04	2.05	3.10E-05	2.04
1.2	1.03E-02	2.32E-03	2.15	5.54E-04	2.07	1.38E-04	2.01	3.45E-05	2.00
1.1	1.21E-02	2.66E-03	2.19	6.09E-04	2.13	1.50E-04	2.03	3.72E-05	2.01
1.0	1.44E-02	3.14E-03	2.20	6.89E-04	2.19	1.67E-04	2.04	4.18E-05	2.00

Tabla 6.17: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 2.8$

β	$N0$	$N0 * 2^1$		$N0 * 2^2$		$N0 * 2^3$		$N0 * 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.0	7.72E-04	9.93E-05	2.96	1.27E-05	2.97	1.62E-06	2.98	2.04E-07	2.98
1.8	7.34E-04	9.54E-05	2.94	1.23E-05	2.96	1.56E-06	2.97	1.98E-07	2.98
1.2	1.05E-03	1.50E-04	2.81	2.15E-05	2.80	2.87E-06	2.90	3.68E-07	2.96
1.1	1.43E-03	1.98E-04	2.85	2.92E-05	2.76	4.05E-06	2.85	5.30E-07	2.93
1.0	2.14E-03	3.37E-04	2.67	4.79E-05	2.81	6.84E-06	2.81	9.35E-07	2.87

Tabla 6.18: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 2.8$

β	$N0$	$N0 * 2^1$		$N0 * 2^2$		$N0 * 2^3$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.0	2.08E-05	2.17E-06	3.27	2.22E-07	3.29	2.26E-08	3.29
1.8	1.99E-05	2.05E-06	3.27	2.10E-07	3.29	2.14E-08	3.29
1.2	3.24E-05	3.13E-06	3.37	3.18E-07	3.30	3.25E-08	3.29
1.1	4.04E-05	3.49E-06	3.54	3.60E-07	3.28	3.61E-08	3.32
1.0	6.13E-05	4.76E-06	3.69	4.47E-07	3.41	4.58E-08	3.29

En vista de que el Método II en mallas no uniformes para una función con poca regularidad se comporta de la manera esperada, se presentan los resultados para $\alpha = 1.7$ por lo que $u \in H^{2.2}((0, 1))$ entonces el orden de convergencia no puede ser mayor que 2.2.

En las tablas 6.19 (para $p = 1$), 6.20 (para $p = 2$) y 6.21 (para $p = 3$) se presentan los resultados del orden de convergencia para el Método II, para una función con regularidad 2.2, por lo tanto es de esperarse que la convergencia sea de orden 2 para $p = 1$ y sea 2.2 para $p = 2$ y $p = 3$.

Tabla 6.19: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 1$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 1.7$

β	$N0$	$N0 * 2^1$		$N0 * 2^2$		$N0 * 2^3$		$N0 * 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.0	6.99E-03	1.85E-03	1.92	4.80E-04	1.94	1.24E-04	1.96	3.15E-05	1.97
1.8	6.50E-03	1.67E-03	1.96	4.27E-04	1.97	1.08E-04	1.98	2.73E-05	1.99
1.2	7.60E-03	1.71E-03	2.15	4.18E-04	2.03	1.02E-04	2.03	2.51E-05	2.03
1.1	9.18E-03	1.93E-03	2.25	4.61E-04	2.07	1.11E-04	2.06	2.69E-05	2.04
1.0	1.25E-02	2.31E-03	2.43	5.17E-04	2.16	1.23E-04	2.07	2.96E-05	2.05

Tabla 6.20: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 2$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 1.7$

β	$N0$	$N0 * 2^1$		$N0 * 2^2$		$N0 * 2^3$		$N0 * 2^4$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.0	6.74E-04	1.47E-04	2.20	3.19E-05	2.20	6.94E-06	2.20	1.51E-06	2.20
1.8	3.98E-04	8.74E-05	2.18	1.91E-05	2.19	4.17E-06	2.20	9.07E-07	2.20
1.2	6.04E-04	1.39E-04	2.12	3.03E-05	2.19	6.57E-06	2.21	1.43E-06	2.20
1.1	6.72E-04	1.57E-04	2.10	3.46E-05	2.18	7.49E-06	2.21	1.62E-06	2.21
1.0	8.84E-04	1.88E-04	2.23	4.18E-05	2.17	9.09E-06	2.20	1.96E-06	2.21

Tabla 6.21: Error y orden de convergencia para polinomios de grado $p = 3$. Malla NO uniforme, Método II. $\alpha = 1.7$

β	$N0$	$N0 * 2^1$		$N0 * 2^2$		$N0 * 2^3$	
	<i>error</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>	<i>error</i>	<i>orden</i>
2.0	2.23E-04	4.83E-05	2.21	1.05E-05	2.20	2.28E-06	2.20
1.8	1.04E-04	2.25E-05	2.20	4.88E-06	2.20	1.06E-06	2.20
1.2	1.51E-04	3.34E-05	2.18	7.21E-06	2.21	1.56E-06	2.21
1.1	1.59E-04	3.54E-05	2.17	7.65E-06	2.21	1.69E-06	2.18
1.0	2.07E-04	3.95E-05	2.39	8.59E-06	2.20	1.86E-06	2.21

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo de tesis se ha propuesto un método LDG con penalización en la variable principal y se presenta junto con un método LDG que penaliza en una variable auxiliar. Las dos versiones del método LDG han sido aplicadas a un problema de difusión fraccionaria en espacio, explicando los detalles de la implementación.

Se ha estudiado el operador fraccionario en su forma discreta y se muestran algunas de las propiedades que tiene dicho operador; como son la convergencia hacia la matriz de difusión, la estructura por bloques y el cálculo de sus entradas.

Para cada formulación del método LDG se ha presentado el estimado de convergencia del error y de estabilidad, también se corroboran con experimentos numéricos las tasas de convergencia presentadas teóricamente.

Se presentan experimentos numéricos que describen el comportamiento de los métodos para funciones con poca regularidad, obteniendo que la versión propuesta es más robusta para dichas funciones, en el sentido que converge con orden óptimo.

En cuanto a trabajos futuros se encuentran los siguientes:

- Dado que se obtiene un comportamiento de convergencia óptima para funciones de poca regularidad, es necesario realizar un análisis de error más detallado para este tipo de funciones.
- En vista de que existen problemas físicos que se pueden describir con otro tipo de derivadas, por ejemplo Grünwald–Letnikov, es necesario realizar investigación sobre la implementación de otras derivadas fraccionarias.

- Estudiar el estado estacionario, es decir, el Laplaciano fraccionario, el cual puede ser escrito en términos de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville por izquierda y derecha.
- Implementación en 2D/3D del método propuesto; en particular del operador fraccionario, en vista de que los otros operadores ya han sido estudiados en [7].
- Pre-condicionar el sistema lineal para resolver problemas con más incógnitas, es decir de mayor tamaño. Nótese que es necesario estudiar alguna forma pre-condicionar ya que el operador fraccionario genera una matriz triangular que es densa para la mayoría de los valores de β .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Num. Anal.*, 39(5):1749–1779, 2002.
- [2] J. Pasciak B. Jin, R. Lazarov and W. Rundell. Variational formulation of problems involving fractional order differential operators. *Math. Comp.* 84, 2665-2700. (2015).
- [3] E. Barkai. Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application. *Phys. Rev. E.* 63, 2001.
- [4] P.L. Butzer and U. Westphal. An Introduction to Fractional Calculus. *World Scientific, Singapore*, 2000.
- [5] P. Castillo. Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic PDEs. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2):524–547, 2002.
- [6] P. Castillo, B. Cockburn, I. Perugia, and D. Schötzau. An a priori error analysis of the Local Discontinuous Galerkin method for elliptic problems. *SIAM J. Num. Anal.*, 38(5):1676–1706, 2000.
- [7] P. Castillo and F. Sequeira. Computational aspects of the Local Discontinuous Galerkin method on unstructured grids in three dimensions. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9 10):2279–2288, 2013.
- [8] Philippe G. Ciarlet. *Finite Element Method for Elliptic Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2002.
- [9] B. Cockburn and C.W. Shu. The Local Discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM J. Num. Anal.*, 35(6):2440–2463, 1998.
- [10] W.H. Deng and J.S. Hesthaven. Local Discontinuous Galerkin methods for fractional diffusion equations. *ESAIM: M2AN* 47 (2013) 1845–1864.
- [11] Vincent J. Ervin and John Paul Roop. Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 22(3):558–576, 2006.
- [12] J.S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications. SpringerVerlag, New York, USA(2008)

- [13] Changpin Li and Weihua Deng. Remarks on Fractional Derivatives. *Appl. Math. Comput.*, 187(2):777–784, April 2007.
- [14] V. Tarasov. Magnetohydrodynamics of fractal media. *Physics of Plasmas* 13, 052107, 2006.
- [15] X. Zhang W. Chen, H. Sun and D. Korosak. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1754 – 1758, 2010. Fractional Differentiation and Its Applications.
- [16] Q. Xu and J.S. Hesthaven. Discontinuous Galerkin Method for Fractional Convection-Diffusion Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(1), 405–423.
- [17] Jue Yan and Chi-Wang Shu. A local discontinuous Galerkin method for Kdv type equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 40 (2002) 769–791.