ÁLGEBRAS DE COLOMBEAU Y MULTIPLICACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Por

Roxana Auccahuallpa Fernández

Tesis sometida en cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS

en

MATEMÁTICA PURA

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGÜEZ

Junio, 2008

Aprobada por:

Gabriele Castellini , Ph.D Miembro, Comite Graduado	Fecha
Julio E. Barety, Ph.D Miembro, Comite Graduado	Fecha
Krzysztof Rózga, Ph.D Presidente, Comite Graduado	Fecha
Dorial Castellanos, Ph.D Representante de Estudios Graduados	Fecha
Julio Quintana Díaz, Ph.D Director del Departamento	Fecha

Abstract of Disertación Presented to the Graduate School
of the University of Puerto Rico in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master in Sciences

ÁLGEBRAS DE COLOMBEAU Y MULTIPLICACIÓN DE DISTRIBUCIONES

By

Roxana Auccahuallpa Fernández

June 2008

Chair: Krzysztof Rózga
Major Department: Mathematical Sciences

Abstract

In this work we discuss the problem of a product of distributions. We present the result of impossibility of Schwartz and various definitions of a product of distributions.

The construction of algebra of Colombeau and the relationship between the product in this algebra and the model products are provided.

A clarification of the distributional product of functions related to locally integrable functions, based on the known in the literature theorems, is given.

Finally, the general formulas relating the products of distributions called Principal Values, Dirac's deltas and their derivatives are obtained by Fourier transform method.

Resumen de Disertación Presentado a Escuela Graduada
de la Universidad de Puerto Rico como requisito parcial de los
Requerimientos para el grado de Maestría en Ciencias

ÁLGEBRAS DE COLOMBEAU Y MULTIPLICACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Por

Roxana Auccahuallpa Fernández

Junio 2008

Consejero: Krzysztof Rózga
Departamento: Ciencias Matemáticas

Resumen

En este trabajo se discute el problema del producto de distribuciones. Se presenta el resultado de imposibilidad de Schwartz y varias definiciones del producto de distribuciones.

Se da la construcción del álgebra de Colombeau en $\mathbb{R}$ y la relación entre el producto en este álgebra y los productos modelos.

Se aclara sobre los productos distribucionales de funciones relacionadas a funciones localmente integrables basándose en los teoremas conocidos en la literatura.

Luego utilizando los métodos de transformada de Fourier se obtienen fórmulas generales que relacionan los productos de distribuciones especiales llamadas Valores Principales, deltas de Dirac y sus derivadas.

Darle gracias a Dios, a mi madre Rosa por su amor infinito y su incansable deseo de mi superación, a mi hermana Janet por su apoyo constante e incondicional. A mis tíos en especial a Julián, Victor y Emilia por sus consejos de luchar siempre por las metas trazadas.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Krzysztof Rózga por introducirme al tema de Álgebras de Colombeau y Multiplicación de Distribuciones y por ser guía en la realización de este trabajo.

A todos mis profesores por su apoyo, consejo y sugerencias en el transcurso del desarrollo de esta maestría.

A mis amigos de Perú y a las personas que me ayudaron a la realización en esta nueva etapa de mi vida profesional.

A mis amistades en Puerto Rico quienes a pesar de la lejanía de mi familia me brindaron su amistad y cariño.

Índice general

pagina

Índice de cuadros

LISTA DE ABREVIATURAS

TF	Transformada de Fourier.

LISTA DE SIMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números Naturales.
$\mathbb{N}_0$	Conjunto de los números positivos incluyendo el 0.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números Reales.
$C(\mathbb{R})$	Conjunto de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$.
$C^k(\mathbb{R})$	Conjunto de las funciones continuamente diferenciables hasta el orden k-ésimo sobre $\mathbb{R}$.
$C^\infty(\mathbb{R})$	Conjunto de las funciones infinitamente diferenciables.
$\mathscr{D}(\mathbb{R})$	Espacio de las Funciones de Prueba sobre $\mathbb{R}$.
$\mathscr{S}$	Espacio de Schwartz.
$\mathscr{D}'(\mathbb{R})$	Espacio de Distribuciones(funciones generalizadas) sobre $\mathbb{R}$.
δ	La distribución Delta de Dirac con soporte $\{0\}$.
$G(\mathbb{R})$	Álgebra de Colombeau sobre $\mathbb{R}$.
$supp(f)$	Soporte de la función f .
$\mathscr{F}$(f)	Transformada de Fourier de f .
$L^p_{loc}(\mathbb{R})$	Espacio de las funciones p localmente integrables.

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo titulado "Álgebras de Colombeau y Multiplicación de Distribuciones" es dar a conocer el problema de multiplicación que surge para las distribuciones y su solución en general.

Según Vladimirov [13], Paul Dirac(1920) fue el precursor de la teoría de distribuciones quién introdujo por primera vez en sus estudios de mecánica cuántica la función llamada delta " δ " , la cual tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \ , x \neq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)dx &= \varphi(0) \ , \ \varphi \in C(\mathbb{R}) \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Estrictamente la función delta es un funcional definido por (1.1), es decir a cada función continua φ le corresponde un número $\varphi(0)$ el cuál es un valor de φ en el punto 0 .

La fundamentación de la teoría de funciones generalizadas (distribuciones) fue dejada por el matemático ruso S.L.Sobolev en 1936, cuando este aplicó satisfactoriamente las funciones generalizadas al estudio del problema de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas, [11].

En los años cincuenta del siglo XX, el matemático francés L. Schwartz hizo intentos en la construcción sistemática de una teoría de distribuciones sobre la base de una teoría de espacios lineales topológicos localmente convexos. Este hecho fue explicado en su trabajo monográfico "Théorie des distributions" (1950-51), [10].

Una posible limitación de la teoría de distribuciones es que esta teoría es puramente lineal en el sentido de que el producto de dos distribuciones no puede ser definido en general.

El tema de multiplicación de distribuciones según Oberguggenberger [9], fue considerado inicialmente por $König$ quién presentó una construcción de un espacio de funciones generalizadas que contiene todas las distribuciones y también funciones no necesariamente localmente integrables sobre $\mathbb{R}$. La idea general de la teoría de $König$ es la siguiente:

Sea S el espacio de todas las funciones medibles en el sentido de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ que son idénticas si coinciden en casi dondequiera. Sea V el espacio de las series de potencias localmente finitas con coeficientes en S, esto es: $\tau \in V$ si existe una sucesión de funciones $f_n \in S$ tal que para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ existe $N = N(\tau, K)$ tal que $\tau = \sum_{n=0}^{N} f_n z^n$.

Además se define la derivada de τ por $\partial\tau = \sum f_n z^{n+1}$.

Ahora sea U el subespacio de V generado por los elementos de la forma $(g - fz)z^m$, donde $m \in \mathbb{N}_0$, g es localmente integrable, f es absolutamente continua y $f' = g$.

Finalmente sea $F = V/U$. Definimos el mapeo inyectivo de S a F por:

$$S \ni f \quad \longmapsto \quad \text{clase de} \quad fz^0 \in F \ .$$

Entonces podemos definir un producto interior de dos elementos $\sigma, \tau \in F$ esto es: $\sigma.\tau$, [5].

Laurent Schwartz señaló en 1954,[9],[10], que el producto de dos distribuciones era imposible, ya que no se podía definir el producto de la manera tal que el nuevo producto y las derivadas sean consistentes con las operaciones correspondientes clásicas.

Se han efectuado distintos intentos por resolver totalmente el problema de multiplicar distribuciones, es por eso que han surgido diferentes métodos para efectuar las multiplicaciones.

En 1956 A. Gonzalez Domingues y R. Scarfiello publicaron un trabajo en la Revista de la Unión Matemática Argentina(pag. 53-67), [19], en el que aparece la fórmula $P\left(\frac{1}{x}\right)\delta = -\frac{1}{2}\delta^{'}$, donde $P\left(\frac{1}{x}\right)$ es la distribución valor principal de $\frac{1}{x}$, δ es la distribución delta de Dirac y $\delta^{'}$ es la derivada.

J. Mikusiński,[18],[6],[7],[8], presenta no solo una definición de multiplicación usando convolución, sino también dá un desarrollo en este contexto de las operaciones con distribuciones. Así para el producto consideramos dos distribuciones S y T, y definimos:

$$S.T \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \{S * \rho^\epsilon\}.\{T * \rho^\epsilon\}$$

toda vez que el límite existe y ρ^ϵ es una delta net estricta.

A. Kamiński en [4] y [3] estudia varios productos de distribuciones y las relaciones entre ellas y el uso de las transformadas de Fourier.

En 1982 J. Colombeau [1] introduce un álgebra diferencial de nuevas funciones generalizadas $G(\mathbb{R})$ con la propiedad de que $G(\mathbb{R})$ contiene el espacio de distribuciones $\mathscr{D}^{'}(\mathbb{R})$ como un subespacio lineal, la derivada en $G(\mathbb{R})$ extiende a la correspondiente derivada usual en $\mathscr{D}^{'}(\mathbb{R})$ y el espacio $C^\infty(\mathbb{R})$ de todas las funciones infinitamente diferenciables es un subálgebra de $G(\mathbb{R})$.

Esta teoría de funciones generalizadas de Colombeau abre ampliamente posibilidades para encontrar soluciones a varias clases de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

En 1992 aparece el libro “Multiplication of Distributions and Aplications to Partial Differential Equations” de M. Oberguggenberger [9], el cual presenta el desarrollo de la teoría del producto de distribuciones, álgebras de Colombeau y sus aplicaciones.

Además M. Nedeljkov, S. Pilipović y D. Scarpalézos publican el libro “The Linear Theory of Colombeau Generalized Functions” en 1998, dando a conocer el estudio de las álgebras de Colombeau, [14].

También en el libro “Methods of the Theory of Generalized Functions” de Vladimirov,

[13], uno puede encontrar algunos hechos acerca del producto de distribuciones.

En [13] y [3] se enfatiza el uso de transformadas de Fourier como una herramienta esencial para el estudio del producto de distribuciones.

El desarrollo de la presente tesis está organizado como sigue.

En el capítulo II, presentamos el resultado de imposibilidad de Schwartz(1954). Según Oberguggenberger,[9], esta imposibilidad no tiene tanto que ver con la multiplicación de distribuciones sino más bien, es con la multiplicación de funciones continuas y diferenciación. Así por ejemplo:

si δ es la distribución delta de Dirac, entonces asumiendo que el producto de funciones infinitamente diferenciables con las funciones de prueba $(C^{\infty}.\mathscr{D}')$ coincide con el producto usual y el producto es asociativo entonces:

$$(\delta.x)P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

y

$$\delta.\left(x.P\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \delta$$

lo cual es una contradicción.

De modo que el producto de una distribución por una función suave no puede ser extendida a un producto asociativo sobre $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

En el capítulo III damos la construcción del álgebra de Colombeau $G(\mathbb{R})$ y las definiciones de los conceptos relacionados.

En particular aclaramos el hecho que el producto de funciones continuas no es en general igual al producto usual, pero en el álgebra de Colombeau está asociado a ese producto.

Luego presentamos definiciones de productos intrínsecos de distribuciones y la relación entre ellos y los productos en el álgebra de Colombeau (Proposición 3.5.4) .

También damos el teorema de Kamiński,[4], acerca del producto de funciones localmente integrables y discutimos varios aspectos del producto modelo de funciones localmente integrables en los ejemplos.

Finalmente nuestro objetivo en el capítulo IV es estudiar los productos modelos de distribuciones especiales que corresponden a funciones que no son localmente integrables, llamadas “Valor Principal” o “Parte Finita” de las funciones $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{|x|}$, $\frac{sgn(x)}{|x|^2}$, etc .

En particular, se presenta propiedades de derivadas de estas distribuciones. Los detalles se muestran en el Apéndice C.

Luego nos concentramos sobre el uso de las transformadas de Fourier para estudiar los productos de distribuciones mencionados anteriormente. Para esto utilizamos el Teorema 4.2.7 de [3] .

Los resultados que se obtienen nos dan ciertas relaciones entre tales distribuciones y las distribuciones delta y sus derivadas.

La discusión de estas, está dividida en 4 casos. En algunos de estos casos obtenemos los resultados conocidos en la literatura. Por ejemplo, en el caso 1 la ecuación (4.34) es el resultado de Domingues - Scarfiello,[19], y Mikusiński,[18].

Además que llegamos a resultados al igual que los de Fisher, [2], en otros casos se obtienen fórmulas generales.

Luego consideramos ejemplos de aplicaciones y en particular estudiamos la consistencia de ellos con el Teorema 3.5.3 (Kamiński).

Finalmente se discute el producto modelo $\frac{1}{x}.\delta$ el cual es bien conocido en la literatura [18] . Damos la demostración explícita de la fórmula para $\frac{1}{x}.\delta$. Luego consideramos otros productos: $\frac{1}{|x|}.\delta$ y $\frac{1}{|x|}.\delta'$ y vemos que estos productos no existen.

Justificación

Por qué Multiplicar Distribuciones?

El Producto de Distribuciones , llamado también Producto de Funciones Generalizadas es muy importante en el campo de la Física y Matemática . Pues se presenta en la Teoría Cuántica de Campos, en estudios de Ondas de Choques para sistemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales no conservativos cuasilineales y para sistemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales lineales con coeficientes discontinuos.

Además en el campo de la Economía se presenta en el problema acerca de la Matriz Insumo-Producto Distribucional.

Capítulo 2
RESULTADO DE IMPOSIBILIDAD DE SCHWARTZ

Antes de definir el producto general de distribuciones asumiremos que existe un álgebra A sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

a) La función constante 1 es la identidad multiplicativa en A.

b) El espacio vectorial de distribuciones $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ es un subespacio de A .

c) Existe un mapeo $D : A \longrightarrow A$ llamado derivación , el cual es $\mathbb{R}$ - lineal y satisface la regla de Leibnitz y es tal que D aplicado a una distribución es la derivada usual de esa distribución.

d) El producto usual de funciones continuas coincide con el producto en el álgebra A, denotado por $\odot$.

Ahora como $x \odot |x| = x|x|$ entonces tenemos:

$$\begin{aligned} D(x \odot |x|) &= |x| + x \odot (D|x|) \\ D^2(x \odot |x|) &= 2D|x| + x \odot D^2|x| \end{aligned}$$

$$D^2(x \odot |x|) = 2D|x| + 2x \odot \delta \tag{2.1}$$

donde “ δ ” es la distribución delta de Dirac. Por otro lado

$$D(x|x|) = 2|x|$$

de allí:

$$D^2(x|x|) = 2D|x| \tag{2.2}$$

Ahora, de 2.1 y 2.2 se tiene:

$$x \odot \delta \quad = \quad 0\ . \tag{2.3}$$

Por el siguiente Teorema, la ecuación (2.3) es imposible .

Teorema 2.0.1. *Sea A un álgebra asociativa cuyo producto está denotado por "$\odot$" y $D : A \longrightarrow A$ un mapeo lineal llamado derivación, que satisface la regla de Leibnitz para la derivada de un producto, tal que:*

i) *Las funciones $1,\ x\ ,\ x(\ln|x|-1)$ y $x^2(\ln|x|-1)$ pertenecen a A y para $x = 0$ las dos últimas funciones tienen por definición el valor 0 .*

ii) *La función constante 1 es el elemento unidad en el álgebra A*

iii)

$$x(\ln|x|-1) \odot x = x^2(\ln|x|-1)$$

iv) *La derivación $D : A \longrightarrow A$ aplicada a las funciones $1\ ,\ x\ ,\ x^2(\ln|x|-1)$ es la derivada usual.*

Entonces el mapeo definido por:

$$A \ni f \quad \longmapsto \quad x \odot f \in A$$

es inyectivo, esto es:

$$x \odot a = 0 \quad \textit{implica} \quad a = 0\ .$$

<u>Prueba</u> Probemos lo siguiente:

$$D^2[x(ln|x|-1)] \odot x = 1$$

En efecto; sabiendo que para dos elementos f y g de A se tiene:

$$(D^2 f) \odot g = D^2(f \odot g) - 2(Df) \odot (Dg) - f \odot D^2 g$$

inferimos:

$$D^2(x(\ln|x| - 1)) \odot x = D^2[x^2(\ln|x| - 1)] - 2D[x(\ln|x| - 1)] \ . \tag{2.4}$$

Pero de (iv) tenemos:

$$D[x^2(\ln|x| - 1)] = 2x(\ln|x| - 1) + x^2 D(\ln|x| - 1) = 2x(\ln|x| - 1) + x^2 D(\ln|x|),$$

$$D[x^2(\ln|x| - 1)] = 2x(\ln|x| - 1) + x \ . \tag{2.5}$$

Por lo tanto se tiene:

$$D^2[x^2(\ln|x| - 1)] = 2D[x(\ln|x| - 1)] + 1 \tag{2.6}$$

y reemplazando en (2.4)

$$D^2[x(\ln|x| - 1)] \odot x = 1 \ .$$

Entonces hemos probado que $D^2[x(\ln|x| - 1)]$ es el elemento inverso por izquierda de x, lo que denotamos por x^{-1}.

De allí la siguiente implicación es cierta

$$x \odot a = 0 \Rightarrow a = 0 \ \blacksquare$$

Nota: Aplicamos el Teorema 2.0.1 a la ecuación (2.3) y vemos que $\delta = 0$. Esto es una contradicción ya que $\delta \neq 0$. Por esto no existe un álgebra A que cumpla (a)-(d).

Las funciones $x(\ln|x| - 1)$ y $x^2(\ln|x| - 1)$ utilizadas en el Teorema 2.0.1, son de la clase $C(\mathbb{R})$ y $C^1(\mathbb{R})$ respectivamente. Ahora consideremos una modificación del Teorema

2.0.1, en el cual en vez de las funciones de las clases $C(\mathbb{R})$ y $C^1(\mathbb{R})$ tomaremos funciones de las clases $C^{n-1}(\mathbb{R})$ y $C^n(\mathbb{R})$ donde $n \geq 2$. El objetivo es ver si se puede llegar a la misma conclusión que en el Teorema 2.0.1 .

Teorema 2.0.2. *Supongamos un álgebra asociativa A ,cuyo producto está denotado por $\odot$ y un mapeo lineal $D : A \to A$ llamado derivación que satisface la regla de Leibnitz, tal que:*

i) Las funciones 1 , x , $\frac{x^n}{n!}$, $\frac{1}{n!}x^n(\ln|x|-1)$, $\frac{1}{n!}x^{n+1}(\ln|x|-1)$ pertenecen a A y para $x = 0$ las dos funciones últimas tienen por definición el valor 0 .

ii) La función 1 es el elemento unidad del álgebra A

iii)

$$\frac{1}{n!}x^n(ln|x|-1) \odot x = \frac{1}{n!}x^{n+1}(\ln|x|-1)$$

iv) La derivación $D : A \to A$ aplicada a las funciones

$$1 \ , \ x \ , \ \frac{1}{n!}x^{n+1}(ln|x|-1)$$

es la derivada usual y $D^{(n)}(\frac{x^n}{n!}) = 1$. Entonces el mapeo definido por:

$$A \ni f \quad \longmapsto \quad x \odot f \in A$$

es inyectivo , esto es: $x \odot a = 0 \Longrightarrow a = 0$.

<u>Prueba</u> Probemos que en A el elemento $D^{(n+1)}[\frac{x^n}{n!}(\ln|x|-1)]$ es el inverso por la izquierda de x, es decir:

$$D^{(n+1)}[\frac{x^n}{n!}(\ln|x|-1)] \odot x = 1 \quad .$$

Para esto aplicamos la regla de Leibnitz. De (iv)

$$D[\frac{x^{n+1}}{n!}(\ln|x|-1)] \quad = \quad \frac{(n+1)}{n!}x^n(\ln|x|-1) + \frac{x^n}{n!} \ . \tag{2.7}$$

Sea $f(x) = \frac{x^n}{n!}(\ln|x| - 1)$ entonces de (iii) y de (2.7) se tiene:

$$D[f \odot x] = (n+1)f + \frac{x^n}{n!} \ . \tag{2.8}$$

Reescribiendo (2.8) se obtiene

$$Df \odot x \quad = \quad nf + \frac{x^n}{n!} \ . \tag{2.9}$$

Derivando (2.9)

$$D^{(2)}f \odot x \quad = \quad (n-1)Df + D(\frac{x^n}{n!}) \tag{2.10}$$

y derivando (2.10)

$$D^{(3)}f \odot x \quad = \quad (n-2)D^{(2)}f + D^{(2)}(\frac{x^n}{n!}),$$

y así sucesivamente hasta el orden " (n+1) "

$$D^{(n+1)}f \odot x \quad = \quad D^{(n)}(\frac{x^n}{n!}) \ .$$

Como $D^{(n)}(\frac{x^n}{n!}) = 1$ entonces:

$$D^{(n+1)}[\frac{x^n}{n!}(ln|x| - 1)] \odot x = 1 \ .$$

Con esto podemos inferir

$$x \odot a \quad = \quad 0 \Rightarrow a = 0 \ . \ \blacksquare$$

Capítulo 3
ALGEBRAS DE COLOMBEAU

3.1. Los conjuntos A_q

Definimos:

$$A_0 = \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \ : \ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = 1\}$$

y para cada $q \in \mathbb{N}$

$$A_q = \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \ : \ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = 1 \ y \ \int_{-\infty}^{\infty} x^j \varphi(x) dx = 0; \text{donde } 1 \leq j \leq q\}$$

Lema 3.1.1. *Para cada $q \in \mathbb{N}_0$, $A_q \neq \emptyset$*

Prueba Consideremos una función par $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\int_{-\infty}^{\infty} \psi dx = 1$. Probemos que $\psi \in A_1(\mathbb{R})$. Sea:

$$\psi(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-x^2}} & , \text{para } \mid x \mid < 1 \\ 0 & , \text{para } \mid x \mid \geq 1 \end{cases}$$

Verifiquemos que esta función satisface la condición del conjunto A_0,es decir el valor de " c " está dado puesto que:
$1 = \int \psi dx = c \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} dx$, la integral existe y es mayor que cero. Ahora porque ψ es par, entonces $\psi \in A_1(\mathbb{R})$. De allí el conjunto $A_1 \neq \emptyset$.
Luego dado tal ψ, definamos $\varphi = \psi + \lambda \psi''$; donde λ puede ser determinado. Probemos que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi \in A_2(\mathbb{R})$
En efecto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \psi dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi'' dx = 1,$$

puesto que ψ , ψ' y ψ'' son funciones de soporte compacto y $\psi \in A_0(\mathbb{R})$.

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\psi dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x\psi'' dx \; .$$

Integrando por partes y utilizando el hecho que $\psi \in A_1(\mathbb{R})$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi dx \;=\; 0 \; .$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi'' dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi dx \; . \tag{3.1}$$

Para que sea cierto $\int x^2\varphi dx = 0$, λ es de la forma:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi dx \; .$$

Por lo tanto $\varphi \in A_2(\mathbb{R})$ y $A_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Como ψ es par, ψ'' también es par, entonces se obtiene que $\varphi \in A_3$ es decir $A_3 \neq \emptyset$.

Inclusive si definimos la función $\varphi = \psi + \lambda_1\psi'' + \lambda_2\psi^{(4)}$ y si tomamos $\lambda_2 = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^4\psi dx$ entonces se obtiene que $\varphi \in A_4$. De esta manera se forma una cadena infinita descendente de conjuntos no vacios tal que, así

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \qquad \blacksquare$$

3.2. Construcción del Algebra de Colombeau

Sea :

$$E(\mathbb{R}) = \{\text{Todos los mapeos } u : A_0(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})\} \; .$$

Notación Dado $u \in E(\mathbb{R})$ y $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ definimos $u(\varphi, x) := u(\varphi)(x)$.

Además sobre el conjunto $E(\mathbb{R})$ introducimos la estructura de un álgebra diferencial definiendo las siguientes operaciones: adición, multiplicación, multiplicación por un escalar y derivación " ∂ " .

Sean $u, v \in E(\mathbb{R})$, $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(u+v)(\varphi) &= u(\varphi)+v(\varphi) \\
(uv)(\varphi) &= u(\varphi)v(\varphi) \\
(ru)(\varphi) &= r\,(u(\varphi)) \\
(\partial u)(\varphi) &= \partial(u(\varphi))
\end{aligned}$$

Lema 3.2.1. *El conjunto $E(\mathbb{R})$ es un álgebra diferencial.*

Prueba Probemos que $E(\mathbb{R})$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$, esto es:

i) $(E(\mathbb{R}), +)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, bajo adición y multiplicación por un escalar. Esto es

- Sean $r, s \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in E(\mathbb{R})$ entonces se verifica:

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= u+(v+w) \\
u+v &= v+u \\
0+u &= u+0=u \\
u+(-u) &= (-u)+u=0 \\
r(u+v) &= ru+rv \\
(r+s)(u) &= ru+su \\
(rs)(u) &= r(su) \\
1\,u &= u
\end{aligned}$$

ii) $(E(\mathbb{R}), +, .)$ es un anillo bajo adición y multiplicación.

- $E(\mathbb{R})$ es un grupo abeliano bajo adición.
- $\forall u, v, w \in E(\mathbb{R})$, (uv)w=u(vw).
- $(u+v)w = uw+vw$ y $w(u+v) = wu+wv$.

iii) Sean $u, v \in E(\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$r(uv) = (ru)v = u(rv)$$

Además para verificar que $E(\mathbb{R})$ es un álgebra diferencial, probemos que la derivación " ∂ " es un mapeo lineal y satisface la regla de Leibnitz. Esto es:

Sean $u, v \in E(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$ y $\forall \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ entonces:

<u>Linealidad</u>

$$\begin{aligned}
(\partial(u+v))(\varphi) &= \partial((u+v)(\varphi)) = \partial(u(\varphi)+v(\varphi)) \\
\therefore\ \partial(u+v) &= \partial(u) + \partial(v)
\end{aligned}$$

<u>Homogeneidad</u>

$$\partial(ru) = r\partial(u)$$

<u>Regla de Leibnitz</u>

$$\begin{aligned}
(\partial(uv))(\varphi) &= \partial((uv)(\varphi)) = \partial(u(\varphi)v(\varphi)) = u(\varphi)\partial(v(\varphi)) + \partial(u(\varphi))v(\varphi) \\
&= (u\partial v)(\varphi) + ((\partial u)v)(\varphi) = (u\partial v + (\partial u)v)(\varphi) \\
\partial(uv) &= u\partial v + (\partial u)v \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ahora consideremos un mapeo lineal definido como :

$$\begin{aligned}
\iota : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) &\longrightarrow E(\mathbb{R}) \\
w &\longmapsto \iota(w) : \varphi \longmapsto w * \varphi
\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ y $w * \varphi$ es definido en el Apéndice B. Probemos que este mapeo es inyectivo.

En efecto:

Sean $w_1, w_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y

$$\iota(w_1) \;=\; \iota(w_2)$$

Entonces $\forall \varphi \in A_0(\mathbb{R})$

$$w_1 * \varphi \;=\; w_2 * \varphi \ .$$

Para cada $\epsilon > 0$, consideremos una función φ_ϵ determinada por:

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon}) \ . \tag{3.3}$$

Luego $\varphi_\epsilon \in A_0$ y

$$w_1 * \varphi_\epsilon = w_2 * \varphi_\epsilon \ . \tag{3.4}$$

Utilizando el Teorema de Regularización de una distribución, [17],(ver Apéndice B) tenemos que: $\forall\ \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $i = 1, 2$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \langle w_i * \varphi_\epsilon, \psi \rangle = \langle w_i, \psi \rangle \ .$$

Por lo tanto de (3.4) se tiene:

$$w_1 \;=\; w_2 \ .$$

También podemos ver que $\partial(\iota(w)) = \iota\partial(w)$.

Con todo esto decimos que el conjunto $E(\mathbb{R})$ es un álgebra diferencial conmutativa, asociativa que contiene a $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Definición 3.2.2 (Conjunto $\mathscr{N}(\mathbb{R})$)**.** *Sea $\mathscr{N}(\mathbb{R})$ el conjunto de todos los mapeos $u \in E(\mathbb{R})$ con la propiedad:*

“ Para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\exists N(\alpha, K) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $q > N$ y para todo $\varphi \in A_q(\mathbb{R})$,existen $c, \eta > 0$ tal que para cada

$\epsilon \in (0,\eta)$ *se cumple* $\sup_{x\in K} \mid \partial^\alpha u(\varphi_\epsilon, x) \mid \leq c\epsilon^{q-N}$ *"*
El supremo existe puesto que $u(\varphi_\epsilon) \in C^\infty(\mathbb{R})$ *y* K *es compacto.*

Así los elementos de $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ tienden a cero cuando $\epsilon \to 0$ más rápido que una potencia entera de ϵ.

Observación. *El conjunto* $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ *es un subálgebra de* $E(\mathbb{R})$ *cerrado bajo diferenciación , pero no es un ideal de* $E(\mathbb{R})$ *; puesto que* $E(\mathbb{R})$ *contiene elementos con un crecimiento arbitrario sobre* φ_ϵ *cuando* $\epsilon \longrightarrow 0^+$ *. Por ejemplo, dado u de la forma:*

$$u(\varphi) = exp(\varphi) \;\; ; \; \varphi \in A_0(\mathbb{R}) \; .$$

En efecto: Si $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ *y* $\varphi(0) = 1$ *, entonces*

$$u(\varphi_\epsilon, 0) = u[\varphi_\epsilon(0)] = exp[\varphi_\epsilon(0)] = exp(\frac{1}{\epsilon})$$

Definición 3.2.3 (Conjunto $E_M(\mathbb{R})$)**.** *Sea* $E_M(\mathbb{R})$ *el conjunto de todos los mapeos* $u \in E(\mathbb{R})$ *con la propiedad:*

" Para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ *y para todo* $\alpha \in \mathbb{N}_0$ *,* $\exists N(\alpha, K) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $q \geq N$ *y para todo* $\varphi \in A_q(\mathbb{R}^n)$ *, existen* $c, \eta > 0$ *tal que para cada* $\epsilon \in (0,\eta)$ *se cumple* $\sup_{x\in K} \mid \partial^\alpha u(\varphi_\epsilon, x) \mid \leq c\epsilon^{-N}$ *"*
Los elementos de $E_M(\mathbb{R})$ *son llamados mapeos moderados. Este conjunto es un álgebra diferencial y* $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ *es un ideal en* $E_M(\mathbb{R})$*.*

Definición 3.2.4 (Álgebra de Colombeau)**.** *El álgebra de Colombeau sobre* $\mathbb{R}$ *es definido por :*

$$G(\mathbb{R}) = E_M(\mathbb{R})/\mathcal{N}(\mathbb{R}) \;\; .$$

Entonces:

$$G(\mathbb{R}) = \{[u] \;\; : \;\; u \in E_M(\mathbb{R})\}$$

donde $[u] = u + \mathscr{N}(\mathbb{R})$ *. Denotemos el producto en* G *por “* $\cdot$ *” .*

Si $U = [u]$ *y* $V = [v]$ *están en* $G(\mathbb{R})$ *entonces :*

$$U \cdot V = [uv] \ .$$

$G(\mathbb{R})$ es un álgebra diferencial, asociativa y conmutativa.

Proposición 3.2.5.

$$\iota(\mathscr{D}'(\mathbb{R})) \subset E_M(\mathbb{R}) \ \text{ y } \ \iota^{-1}(\mathscr{N}(\mathbb{R})) = \{0\}$$

(“ embedding” de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *en* $E_M(\mathbb{R})$ *.)*

Prueba Sabiendo (3.2) probemos que $\iota(\mathscr{D}'(\mathbb{R})) \subset E_M(\mathbb{R})$

En efecto: Sea $w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ y $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Por el teorema de representación de distribuciones [9], existe una función continua f con soporte compacto y algún $\beta \in \mathbb{N}_0$ tal que w es de la forma: $w = \partial^\beta f$ en una vecindad de K.

Para ϵ lo suficientemente pequeño tenemos:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K} | \, w * \varphi_\epsilon(x) \, | &= \sup_{x\in K} | \, (\partial^\beta f * \varphi_\epsilon)(x) \, | = \sup_{x\in K} | \, (f * \partial_y^\beta \varphi_\epsilon)(x) \, | \\
&= \sup_{x\in K} | \, \langle f(x-y), \partial_y^\beta \varphi_\epsilon(y) \rangle \, | = \sup_{x\in K} | \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\partial_y^\beta \varphi_\epsilon(y) dy \, |
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \sup_{x\in K} | \, w * \varphi_\epsilon(x) \, | \ \leq \ \sup_{x\in K} \int_{-\infty}^{\infty} | \, f(x-y)\partial_y^\beta \varphi_\epsilon(y) \, | \, dy \ . \tag{3.5}$$

Como $\varphi_\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right)$, la derivada β-ésima está dada por:

$$\partial_y^\beta \varphi_\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon^\beta} \partial^\beta \varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \ .$$

Haciendo un cambio de variable $z = \frac{y}{\epsilon}$ y sustituyendo en (3.5) se tiene:

$$\sup_{x\in K} | \, w * \varphi_\epsilon(x) \, | \leq \frac{1}{\epsilon^\beta} \sup_{x\in K} \int_{-\infty}^{\infty} | \, f(x-\epsilon z)\partial^\beta \varphi(z) \, | \, dz$$

y $\sup\limits_{x\in K}\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x-\epsilon z)\partial^{\beta}\varphi(z) \mid dz \leq C;\ \ \forall\varphi \in A_0$, donde C es una constante que depende de K y φ.

$$\therefore \sup_{x\in K} \mid w * \varphi_{\epsilon}(x) \mid \leq C\epsilon^{-\beta}$$

Un argumento similar se aplica a las derivadas de $w * \varphi_{\epsilon}$, esto es:

$$\partial^{\alpha}(w * \varphi_{\epsilon}) = w * \partial^{\alpha}\varphi_{\epsilon}$$

Así concluimos que $\iota(w) \in E_M(\mathbb{R})$.

Ahora probemos que $\iota^{-1}(\mathscr{N}(\mathbb{R})) = \{0\}$

En efecto: Supongamos que $\iota(w) \in \mathscr{N}(\mathbb{R})$, entonces $w * \varphi_{\epsilon} \longrightarrow 0$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ para $\varphi \in A_q(\mathbb{R})$ con q suficientemente grande. Por otro lado $\forall\psi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \langle w * \varphi_{\epsilon}, \psi\rangle = \langle w, \psi\rangle \ .$$

Consecuentemente:

$$\therefore w = 0$$

De allí $\iota^{-1}(\mathscr{N}(\mathbb{R})) = \{0\}$ ■

Nota: El mapeo ι induce un mapeo lineal inyectivo $\tilde{\iota}$, definido por:

$$\begin{aligned} \tilde{\iota} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) &\longrightarrow G(\mathbb{R}) \\ w &\longmapsto \tilde{\iota}(w) = [\iota(w)] \ . \end{aligned}$$

El punto de construcción de $G(\mathbb{R})$ es que $\tilde{\iota}$ convierte a $C^{\infty}(\mathbb{R})$ en un subálgebra de $G(\mathbb{R})$, lo que aclaramos en lo que sigue.

Primero notemos que hay dos maneras de representar a $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ en E_M:

$\iota(w)$ y el mapeo constante $\sigma(f) : A_0 \ni \varphi \mapsto f$.

La siguiente Proposición demuestra que $\tilde{\iota}(f) = [\sigma(f)]$.

Proposición 3.2.6. *Si* $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *entonces* $(f * \varphi - f)_{\varphi\in A_0(\mathbb{R})} \in \mathscr{N}(\mathbb{R})$.

Consecuentemente, $\tilde{\iota}(f) = [\sigma(f)]$.

Prueba El argumento de la demostración se basa en la expansión de Taylor

$$(f * \varphi_\epsilon - f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y) - f(x)]\varphi_\epsilon(y)dy$$

donde $\varphi_\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{y}{\epsilon})$. Haciendo la sustitución $z = \frac{y}{\epsilon}$ se tiene:

$$\begin{aligned}(f * \varphi_\epsilon - f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x-\epsilon z) - f(x)\right] \varphi(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f'(x)}{1!}(x-\epsilon z - x) + \frac{f''(x)}{2!}(x-\epsilon z - x)^2 + \cdots + \right. \\ & \left. \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(x-\epsilon z - x)^j + \cdots + \frac{f^{(q+1)}(\xi)}{(q+1)!}(x-\epsilon z - x)^{q+1}\right] \varphi(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{q} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}.(-\epsilon z)^j \varphi(z) + \frac{(-\epsilon z)^{q+1}}{(q+1)!} f^{(q+1)}(\xi)\varphi(z)\right] dz,\end{aligned}$$

$$(f * \varphi_\epsilon - f)(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{q} f^{(j)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\epsilon z)^j}{j!}\varphi(z)dz}_{I} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\epsilon z)^{q+1}}{(q+1)!} f^{(q+1)}(\xi)\varphi(z)dz}_{II},$$

donde ξ está entre x y $x - \epsilon z$. La expresión (I) desaparece siempre que $\varphi \in A_q(\mathbb{R})$.

Si x varia en un conjunto compacto, es decir $x \in K$, entonces la expresión (II) se estima por $C\epsilon^{(q+1)}$, donde C es una constante que depende de K, q y φ, y el factor ϵ^{q+1} es el mismo $\forall \varphi \in A_q(\mathbb{R})$.

$$\therefore \sup_{x \in K} \mid f * \varphi_\epsilon(x) - f(x) \mid \leq C_{K,q,\varphi}\, \epsilon^{q+1}$$

De allí $(f * \varphi - f) \in \mathscr{N}(\mathbb{R})$ ■

El mismo argumento se da para las derivadas.

Conclusión $\forall\ f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ se cumple $\tilde{\iota}(fg) = \tilde{\iota}(f) \cdot \tilde{\iota}(g)$.

Prueba

$$\begin{aligned}
\tilde{\iota}(f) \cdot \tilde{\iota}(g) &= [\iota(f)] \cdot [\iota(g)] = [\sigma(f)] \cdot [\sigma(g)] \\
&= [\sigma(f)\sigma(g)] = [\sigma(fg)] = [\iota(fg)] \\
\tilde{\iota}(f) \cdot \tilde{\iota}(g) &= \tilde{\iota}(fg)\ .\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Notación: Para $w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $\tilde{\iota}(w)$ se denota usualmente por el mismo w .

3.3. Asociación

Definición 3.3.1 (Asociación)**.** *Se dice que un elemento $U \in G(\mathbb{R})$ admite $w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ como **distribución asociada** , si U tiene un representante $u \in E_M(\mathbb{R})$ tal que $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in A_N(\mathbb{R})$ y $\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} u(\varphi_\epsilon, x)\psi(x)dx = \langle w, \psi \rangle\ .$$

De la expresión anterior decimos también que U está asociado a w y lo denotamos por: $U \approx w$.

Uno puede demostrar que la definición es independiente del representante "u" de U que se escoja y que w es único. Sin embargo si tal w existe entonces en general: $\tilde{\iota}(w) \neq U$.

Si U , $V \in G(\mathbb{R})$ y $U - V \approx 0$ entonces decimos que U está asociada con V y lo denotamos por: $U \approx V$.

Observación. *Cada distribución está asociada consigo misma, es decir: $\tilde{\iota}(w) \approx w$. En efecto: Sabemos que $\tilde{\iota}(w) = [\iota(w)]$. Entonces $\forall \varphi \in A_0(\mathbb{R})$*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \iota(w)(\varphi_\epsilon)\psi(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} (w * \varphi_\epsilon)\psi(x)dx = \langle w, \psi \rangle\ .$$

Ejemplo 3.3.2. *Si δ_0 es delta de Dirac entonces $\delta_0^2(x)$ no admite una distribución asociada.*

<u>En efecto</u>: $\delta_0^2(x)$ tiene un representante de la forma:

$$u(\varphi,x) \;:=\; (\delta_0*\varphi)(x)(\delta_0*\varphi)(x)=\varphi(x)\varphi(x)$$

Luego tenemos:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}u(\varphi_\epsilon,x)\psi(x)dx \;=\; \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\epsilon^2(x)\psi(x)dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2}\varphi^2(\frac{x}{\epsilon})\psi(x)dx$$

Haciendo un cambio de variable $y=\frac{x}{\epsilon}$ y simplificando se tiene:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}u(\varphi_\epsilon,x)\psi(x)dx \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(y)\psi(\epsilon y)dy}_{I_\epsilon}$$

Analizando I_ϵ vemos que cuando $\epsilon\to 0^+$ (I) diverge para cada $\varphi\in A_0(\mathbb{R})$, si $\psi(0)\neq 0$.

Propiedades:

Sean U , V y W elementos de $G(\mathbb{R})$ tal que $U\approx V$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\partial^\alpha U\approx\partial^\alpha V$ para todo $\alpha\in N_0$.
2. $f\cdot U\approx f\cdot V$ para todo $f\in C^\infty(\mathbb{R})$
3. $U+W\approx V+W$

Pero una asociación "$\approx$" no puede ser multiplicada por elementos arbitrarios de $G(\mathbb{R})$. Por ejemplo:

$x\cdot\delta(x)\approx 0$, pero $x\cdot\delta^2(x)\not\approx 0$

Ejemplo 3.3.3. *Sea H la función de Heaviside definida por:*

$$H(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

y $H^2=H\cdot H$. Entonces $H^2\neq H$ en $G(\mathbb{R})$, pero $H^2\approx H$.

Prueba La demostración la haremos por el absurdo. Supongamos que $H^2 = H$. Derivando se tiene:

$$(H^2)' = H \cdot H' + H' \cdot H = 2H \cdot H'$$

pero $H' = \delta$ entonces:

$$\frac{1}{2}\delta = H \cdot \delta \ . \tag{3.6}$$

Por otro lado si hacemos lo mismo para $H^3 = H^2 \cdot H = H \cdot H = H^2 = H$, obtenemos:

$$\frac{1}{3}\delta = H \cdot \delta \tag{3.7}$$

De (3.6) y (3.7) se tiene $\delta = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $H^2 \neq H$.

Ahora verifiquemos que $H^2 \approx H$.

En efecto: Para $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ un representante de H es dado por: $\varphi \mapsto (H * \varphi)^2$

Debemos demostrar que $\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(H * \varphi_\epsilon)^2(x)}_{I} \psi(x) dx = \langle H, \psi \rangle \tag{3.8}$$

En efecto:

Trabajemos por separado con (I):

$$(H * \varphi_\epsilon)(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\epsilon} \varphi(\frac{x - y}{\epsilon}) dy \ .$$

Haciendo un cambio de variable $z = \frac{x-y}{\epsilon}$, tenemos:

$$(H * \varphi_\epsilon)(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} \varphi(z) dz \ . \tag{3.9}$$

Sustituyendo (3.9) en (3.8), tomando en cuenta que $\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon}} \varphi(z) dz \right)^2 \psi(x)$ converge a $H(x)\psi(x)$ casi dondequiera y aplicando el teorema de Lebesgue se cumple (3.8).

Por lo tanto $H^2 \approx H$ ■

Ejemplo 3.3.4. *Definimos* $U = [\varphi \longrightarrow H * \phi_{l(\varphi)}]$ *para* $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ *, donde* ϕ *es un elemento fijo de* $A_0(\mathbb{R})$ *y* $l(\varphi) = \sup\{\mid x \mid : \varphi(x) \neq 0\}$*. Entonces* $l(\varphi_\epsilon) = \epsilon l(\varphi)$*. Probaremos que* $U \approx H$

Prueba Un representante "u" de U es de la forma:

$$\begin{aligned} u(\varphi, x) &:= (H * \phi_{l(\varphi)})(x) \\ u(\varphi, x) &= \int_0^\infty \frac{1}{l(\varphi)} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon l(\varphi)}\right) dy \ . \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable , $z = \frac{x-y}{\epsilon l(\varphi)}$ se obtiene:

$$u(\varphi, x) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon l(\varphi)}} \phi(z) dz \ . \tag{3.10}$$

Luego tenemos que verificar :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} u(\varphi_\epsilon, x)\psi(x) dx = \langle H, \psi \rangle \ . \tag{3.11}$$

Reemplazando (3.10)en el lado izquierdo de (3.11) se tiene:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} (\underbrace{\int_{-\infty}^{\frac{x}{\epsilon l(\varphi)}} \phi(z) dz}_{I})\psi(x) dx \ .$$

Entonces como en el Ejemplo 3.3.3 se obtiene (3.11). ■

3.4. Producto de funciones continuas en el álgebra de Colombeau

Observación. *Si* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son funciones continuas sobre* $\mathbb{R}$*, entonces:*

$$f \cdot g \approx fg \ ,$$

donde " . " representa la multiplicación en el álgebra de Colombeau.

Prueba $f \cdot g = [\varphi \to (f * \varphi)(g * \varphi)]$ donde $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$. Debemos probar que $\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (f * \varphi_\epsilon)(y)(g * \varphi_\epsilon)(y)\psi(y) dy}_{I_\epsilon} = \langle fg, \psi \rangle \tag{3.12}$$

analizando por separado tenemos:

$$(f * \varphi_\epsilon)(y) = \langle f(z), \varphi_\epsilon(y-z)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\varphi_\epsilon(y-z)dz$$

$$(g * \varphi_\epsilon)(y) = \langle g(x), \varphi_\epsilon(y-x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi_\epsilon(y-x)dx$$

$$I_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\varphi(\frac{y-z}{\epsilon})dz\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(\frac{y-x}{\epsilon})dx\right)\psi(y)dy \ .$$

Sustituyendo $z = y - \epsilon\eta$ y $x = y - \epsilon\nu$

$$I_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(y-\epsilon\eta)\varphi(\eta)g(y-\epsilon\nu)\varphi(\nu)\psi(y)}_{F_\epsilon(y,\eta,\nu)}\, dyd\eta d\nu \qquad (3.13)$$

Necesitamos acotar $F_\epsilon(y,\eta,\nu)$ para aplicar el Teorema de Lebesgue.

$$|F_\epsilon(y,\eta,\nu)| = |\psi(y)|\underbrace{|f(y-\epsilon\eta)||g(y-\epsilon\nu)|}_{(i)}|\varphi(\eta)||\varphi(\nu)|$$

Sabemos que φ y ψ tienen soportes compactos. Por esto, existe $r > 0$ tal que el soporte de F_ϵ está en la caja rectangular dada por:

$$|y| \le r \ ; \ |\eta| \le r \ ; |\nu| \le r \ .$$

Sin pérdida de generalidad uno puede asumir que $\epsilon \le 1$. Luego utilizando la desigualdad triangular se obtiene que:

$$|y - \epsilon\eta| \le |y| + \epsilon|\eta| \le r + \epsilon r \le 2r$$

y

$$|y - \epsilon\nu| \le |y| + \epsilon|\nu| \le r + \epsilon r \le 2r \ ,$$

y que $|f(y-\epsilon\eta)g(y-\epsilon\nu)|$ es acotada por una constante C, puesto que f y g son continuas. Entonces:

$$|\psi(y)||f(y-\epsilon\eta)||\varphi(\eta)||g(y-\epsilon\nu)||\varphi(\nu)| \;\leq\; C|\psi(y)||\varphi(\eta)||\varphi(\nu)| \;.$$

En (3.13) aplicando el Teorema de Lebesgue , tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)d\eta\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\nu)d\nu\right)}_{\int\varphi(x)dx=1}\psi(y)dy \\
\lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon &= \langle fg,\psi\rangle
\end{aligned}$$

Por consiguiente $f\cdot g \approx fg$ ■

3.5. Productos intrínsecos de Distribuciones

Definición 3.5.1 (Delta red estricta)**.** *Esta es una familia de funciones de prueba* $\{\rho^\epsilon\}_{\epsilon>0}\subset\mathscr{D}(\mathbb{R})$*, tal que satisface las siguientes condiciones:*

i) *supp*$(\rho^\epsilon)\to\{0\}$ *cuando* $\epsilon\to 0^+$.

ii) *Para todo* $\epsilon>0$ *se cumple* $\int_{-\infty}^{\infty}\rho^\epsilon(x)dx=1$.

iii) $\int_{-\infty}^{\infty}|\rho^\epsilon(x)|dx$ *es acotado independientemente de* ϵ*.*

En particular para cada $\varphi\in A_0$ *tenemos una red llamada delta red modelo, definida por:*

$$\rho^\epsilon = \varphi_\epsilon \;, \tag{3.14}$$

donde φ_ϵ *es de la forma (3.3).*

Definición 3.5.2 (Productos de distribuciones)**.** *Sean* $u,\; v\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$*. Un producto de* u *y* v *podemos definirlo como sigue:*

$$u.[v] = \lim_{\epsilon\to 0} u(v*\rho^\epsilon) \tag{3.15}$$

$$[u].v = \lim_{\epsilon\to 0}(u*\rho^\epsilon)v \tag{3.16}$$

$$[u].[v] = \lim_{\epsilon \to 0} (u * \rho^\epsilon)(v * \sigma^\epsilon) \quad (3.17)$$

$$[u.v] = \lim_{\epsilon \to 0} (u * \rho^\epsilon)(v * \rho^\epsilon) \quad (3.18)$$

donde el límite existe en $\mathscr{D}'$ $,\forall \{\rho^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *y* $\{\sigma^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *y no depende de las redes.*

Si en (3.15)-(3.18), ρ^ϵ *y* σ^ϵ *son reemplazados por* φ_ϵ *y* ψ_ϵ *donde* φ , $\psi \in A_0$ *y si se requiere que (3.15)-(3.18) cumplan solamente para las delta redes modelos entonces los productos se llaman "Productos Modelos" [9].*

Nota: La ecuación (3.18) es debida a Mikusiński, [18]. Dicho producto es la forma más general del producto de distribuciones entre (3.15)-(3.18), la cual utilizaremos en esta sección.

Las ecuaciones (3.15) y (3.16) fueron dadas por Hirata y Ogata [16], quienes requirieron que ambos productos se cumplan simultáneamente.

Kamiński,[4], introdujo los corchetes para denotar el producto de dos distribuciones. A continuación presentamos un teorema del mismo para funciones localmente integrables.

Teorema 3.5.3 (Kamiński)**.** *Si* $F \in L^p_{loc}$ *y* $G \in L^r_{loc}$ *donde* $1 \leq p, r \leq \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$, *entonces el producto* $[F.G]$ *existe en el sentido distribucional y coincide con el producto usual* FG *de funciones.*

La prueba está dada en [4] .

Proposición 3.5.4. *Sean* $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$*. Si el producto modelo* $[u.v]$ *en (3.18) de* u *y* v *existe, entonces el producto de los mismos en el álgebra de Colombeau* G *denotado por* $u \cdot v$, *admite a* $[u.v]$ *como distribución asociada.*

La prueba está en [9] .

Observación. *En general* $u \cdot v \neq [u.v]$, *pero* $u \cdot v \approx [u.v]$. *En este sentido el producto intrínseco en (3.18) es coherente con la multiplicación en* $G(\mathbb{R})$.

Si $F_1, F_2 \in L^2_{loc}$ *entonces, según el Teorema 3.5.3, el producto usual* F_1F_2 *coincide con el producto distribucional* $[F_1.F_2]$.

A continuación veamos un ejemplo que ilustra dicho resultado.

Ejemplo 3.5.5. *Sean* $(x_+)^{-1/3}$, $(x_-)^{-1/3}$ *dos funciones localmente integrables definidas por:*

$$(x_+)^{-1/3} = \begin{cases} (x)^{-1/3} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$(x_-)^{-1/3} = \begin{cases} (-x)^{-1/3} & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases}$$

Tales funciones también pertenecen a L^2_{loc}.

Probemos que el producto $[(x_+)^{-1/3}.(x_-)^{-1/3}] = 0$.

Prueba $\forall\, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y de (3.14) podemos definir

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \langle (x_+^{-1/3} * \varphi_\epsilon)(x_-^{-1/3} * \varphi_\epsilon), \psi \rangle \ , \\ I_\epsilon &= \left\langle \frac{1}{\epsilon^2} \left(\int_0^\infty y^{-1/3} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy \right) \left(\int_0^\infty (z)^{-1/3} \varphi\left(\frac{x+z}{\epsilon}\right) dz \right), \psi(x) \right\rangle . \end{aligned}$$

Haciendo cambios de variables con $\eta = \frac{x}{\epsilon}$, $\nu = \frac{y}{\epsilon}$ y $\xi = \frac{z}{\epsilon}$ se tiene:

$$I_\epsilon = \sqrt[3]{\epsilon} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}} \frac{1}{\sqrt[3]{\xi}} \varphi(\eta - \nu)\varphi(\eta + \xi)\psi(\eta\epsilon) d\nu d\xi d\eta}_{J_\epsilon} \tag{3.19}$$

Luego, aplicando el teorema de Lebesgue a J_ϵ, se tiene:

$$\lim_{\epsilon \to 0+} J_\epsilon = \psi(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}} \frac{1}{\sqrt[3]{\xi}} \varphi(\eta - \nu)\varphi(\eta + \xi) d\nu d\xi d\eta}_{I} . \tag{3.20}$$

La integral I existe puesto que φ es de soporte compacto y las funciones $\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}$ *y* $\frac{1}{\sqrt[3]{\xi}}$ son localmente integrables.

De allí podemos concluir de (3.19) que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon = 0 \ .$$

Consecuentemente, el producto $[(x_+)^{-1/3}.(x_-)^{-1/3}] = 0$. Este producto coincide con el producto usual.

Observación. *En general el producto usual y el distribucional de dos funciones localmente integrables son diferentes.*

El siguiente ejemplo ilustra dicha observación.

Ejemplo 3.5.6. *Sean $F(x) = x_+^{-1/2}$ y $G(x) = x_-^{-1/2}$ dos funciones definidas por:*

$$(x_+)^{-1/2} = \begin{cases} (x)^{-1/2} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$(x_-)^{-1/2} = \begin{cases} (-x)^{-1/2} & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases}$$

Estas funciones pertenecen a L^1_{loc} y el producto usual $FG = 0$. Probemos que el producto distribucional $[F.G] = \frac{\pi}{2}\delta \neq 0$.

Prueba $\forall\, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y de (3.14) podemos definir

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \left\langle (x_+^{-1/2} * \varphi_\epsilon)(x_-^{-1/2} * \varphi_\epsilon), \psi \right\rangle \ , \\ I_\epsilon &= \left\langle \frac{1}{\epsilon^2}\left(\int_0^\infty y^{-1/2}\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy\right)\left(\int_0^\infty (z)^{-1/2}\varphi(\frac{x+z}{\epsilon})dz\right), \psi(x) \right\rangle \ . \end{aligned}$$

Haciendo cambios de variables con $\eta = \frac{x}{\epsilon}$, $\nu = \frac{y}{\epsilon}$ y $\xi = \frac{z}{\epsilon}$ se tiene:

$$I_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\varphi(\eta-\nu)\varphi(\eta+\xi)\psi(\eta\epsilon)d\nu d\xi d\eta \ ,$$

donde $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ y las funciones $\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}$ *y* $\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}$ son localmente integrables. De allí aplicando el teorema de Lebesgue tenemos:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon = \psi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\varphi(\eta+\xi)\varphi(\eta-\nu)d\nu d\xi d\eta}_{J} \tag{3.21}$$

Analizando la expresión J.

Por conveniencia utilizamos la función de Heaviside $H(x)$ que es 1 para $x > 0$ y 0 para $x<0$. Entonces.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(\nu)H(\xi)}{\sqrt{|\nu|}\sqrt{|\xi|}}\varphi(\eta+\xi)\varphi(\eta-\nu)d\nu d\xi d\eta \; .$$

Haciendo la sustitución de $u=\eta-\nu$ se tiene

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(\nu)H(\xi)}{\sqrt{|\nu|}\sqrt{|\xi|}}\varphi(u+\nu+\xi)\varphi(u)d\nu d\xi du$$

y después de la sustitución $v=u+\nu+\xi$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(\nu)H(v-u-\nu)}{\sqrt{|\nu|}\sqrt{|v-u-\nu|}}\varphi(v)\varphi(u)d\nu dv du \; . \tag{3.22}$$

En (3.22) vemos que las funciones φ no dependen de ν . Luego la región de integración se reduce a:

$$E=\{-\infty<u<\infty \; , \; u\le v\le\infty \; , \; 0\le\nu\le v-u\}$$

De allí (3.22) toma la forma de:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{u}^{\infty}\varphi(v)\varphi(u)\underbrace{\left(\int_0^{v-u}\frac{1}{\sqrt{|\nu|}\sqrt{|v-u-\nu|}}d\nu\right)}_{(I)}dvdu \tag{3.23}$$

Resolviendo independientemente la integral (I),

$$I = \int_0^{v-u}\frac{d\nu}{\sqrt{|\nu|}\sqrt{|v-u-\nu|}} = \int_0^{v-u}\frac{d\nu}{\sqrt{(\frac{v-u}{2})^2-(\nu-\frac{v-u}{2})^2}} \; ,$$

utilizando integración por sustitución trigonométrica: $\nu-\frac{v-u}{2}=\frac{v-u}{2}\sin\theta$ y $d\nu=\frac{v-u}{2}\cos\theta d\theta$, se tiene

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{v-u}{2}\cos\theta d\theta}{\sqrt{(\frac{v-u}{2})^2(\cos\theta)^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \theta|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \; .$$

Sustituyendo este resultado en (3.23), obtenemos

$$J = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{u}^{\infty} \varphi(v)\varphi(u) dv du = \pi \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) (\int_{u}^{\infty} \varphi(v) dv) du}_{(i)} \ . \tag{3.24}$$

Luego, observemos que

$$\frac{d}{du} (\int_{u}^{\infty} \varphi(v) dv) = -\frac{d}{du} (\int_{\infty}^{u} \varphi(v) dv) = -\varphi(u) \ .$$

Por tanto, (3.24) toma la forma

$$J = \pi \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d}{du} \left(\int_{\infty}^{u} \varphi(v) dv \right) \left(\int_{u}^{\infty} \varphi(v) dv \right) du \ .$$

De allí, finalmente J resulta:

$$J = -\frac{\pi}{2} \left(\left[\int_{\infty}^{\infty} \varphi(v) dv \right]^2 - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) dv \right]^2 \right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

Consecuentemente de (3.21) se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon = \frac{\pi}{2} \psi(0) = \frac{\pi}{2} \langle \delta, \psi \rangle$$

$$\therefore \ [(x_+)^{-1/2}.(x_-)^{-1/2}] = \frac{\pi}{2} \delta \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3.5.7. *Sean* $(x_+)^{-2/3}$ *y* $(x_-)^{-2/3}$ *dos funciones localmente integrables, definidas por:*

$$(x_+)^{-2/3} = \begin{cases} (x)^{-2/3} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$(x_-)^{-2/3} = \begin{cases} (-x)^{-2/3} & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases}$$

Probemos que el producto $[(x_+)^{-2/3}.(x_-)^{-2/3}]$ *no existe.*

Prueba $\forall\, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y de (3.14) podemos definir

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon &= \langle (x_+^{-2/3} * \varphi_\epsilon)(x_-^{-2/3} * \varphi_\epsilon), \psi \rangle \ , \\
I_\epsilon &= \left\langle \frac{1}{\epsilon^2} \left(\int_0^\infty y^{-2/3} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy \right) \left(\int_0^\infty (z)^{-2/3} \varphi\left(\frac{x+z}{\epsilon}\right) dz \right), \psi(x) \right\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Haciendo cambios de variables con $\eta = \frac{x}{\epsilon}$, $\nu = \frac{y}{\epsilon}$ y $\xi = \frac{z}{\epsilon}$ se tiene:

$$
I_\epsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{\nu^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} \varphi(\eta - \nu) \varphi(\eta + \xi) \psi(\eta\epsilon) d\nu d\xi d\eta}_{J_\epsilon} \tag{3.25}
$$

donde $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ y las funciones $\frac{1}{\sqrt[3]{\nu^2}}$ y $\frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}}$ son localmente integrables. Luego aplicando el teorema de Lebesgue tenemos:

$$
\lim_{\epsilon \to 0^+} J_\epsilon = \psi(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{\nu^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} \varphi(\eta - \nu) \varphi(\eta + \xi) d\nu d\xi d\eta}_{I} \ . \tag{3.26}
$$

La integral I existe y en general es diferente de cero.

Por consiguiente en (3.25)

$\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon$ no existe $\forall\, \varphi \in A_0$ si $\psi(0) \neq 0$. De allí concluimos que el producto distribucional $[(x_+)^{-2/3}.(x_-)^{-2/3}]$ no existe. ■

El siguiente ejemplo generaliza el Ejemplo 3.5.6 .

Ejemplo 3.5.8. *Para* $0 \leq a < 1$ *y* $0 \leq b < 1$ *definimos las funciones localmente integrables* $(x_+)^{-a}$ *y* $(x_-)^{-b}$ *como sigue:*

$$
(x_+)^{-a} = \begin{cases} (x)^{-a} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}
$$

$$
(x_-)^{-b} = \begin{cases} (-x)^{-b} & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases}
$$

Veamos el producto distribucional $[(x_+)^{-a}.(x_-)^{-b}]$.

En efecto $\forall\, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y de (3.14) podemos definir

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon &= \langle (x_+^{-a} * \varphi_\epsilon)(x_-^{-b} * \varphi_\epsilon), \psi \rangle \ , \\
I_\epsilon &= \left\langle \frac{1}{\epsilon^2} \left(\int_0^\infty y^{-a} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy \right) \left(\int_0^\infty (z)^{-b} \varphi\left(\frac{x+z}{\epsilon}\right) dz \right), \psi(x) \right\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Haciendo cambios de variables con $\eta = \frac{x}{\epsilon}$, $\nu = \frac{y}{\epsilon}$ y $\xi = \frac{z}{\epsilon}$ se tiene:

$$
I_\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon^{a+b}} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{|\nu|^a} \frac{1}{|\xi|^b} \varphi(\eta-\nu)\varphi(\eta+\xi)\psi(\eta\epsilon) d\nu d\xi d\eta}_{J_\epsilon} \tag{3.27}
$$

donde $\varphi \in A_0(\mathbb{R})$ y las funciones $\frac{1}{\nu^a}$ y $\frac{1}{\xi^b}$ son localmente integrables. Luego aplicando el teorema de Lebesgue tenemos

$$
\lim_{\epsilon \to 0^+} J_\epsilon = \psi(0) \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\nu^a} \frac{1}{\xi^b} \varphi(\eta-\nu)\varphi(\eta+\xi) d\nu d\xi d\eta}_{(I)} \ . \tag{3.28}
$$

Analizando la expresión I .

Por conveniencia utilizamos la función de Heaviside $H(x)$ que es 1 para $x > 0$ y 0 para $x < 0$ entonces se tiene:

$$
I = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{H(\nu)H(\xi)}{|\nu|^a |\xi|^b} \varphi(\eta+\xi)\varphi(\eta-\nu) d\nu d\xi d\eta \ .
$$

Haciendo la sustitución $u = \eta - \nu$ tenemos

$$
I = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{H(\nu)H(\xi)}{|\nu|^a |\xi|^b} \varphi(u+\nu+\xi)\varphi(u) d\nu d\xi du \ ,
$$

y después de la sustitución $v = u + \nu + \xi$

$$
I = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{H(\nu)H(v-u-\nu)}{|\nu|^a |v-u-\nu|^b} \varphi(v)\varphi(u) d\nu dv du \ . \tag{3.29}
$$

En (3.29) vemos que las funciones φ no dependen de ν. Luego la región de integración se reduce a:

$$
E = \{ -\infty < u < \infty \ , \ u \le v \le \infty \ , \ 0 \le \nu \le v - u \} \ .
$$

De allí (3.29) toma la forma de

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{u}^{\infty}\int_{0}^{v-u} \frac{\varphi(v)\varphi(u)}{\nu^a(v-u-\nu)^b} d\nu dv du \;. \tag{3.30}$$

Evaluamos independientemente cada integral. Sea

$$A \;=\; \int_0^{v-u} \frac{d\nu}{\nu^a(v-u-\nu)^b} \;.$$

Solamente consideremos el caso de $a+b=1$; o sea $b=1-a$. Entonces se tiene:

$$A \;=\; \int_0^{v-u} \frac{d\nu}{\nu^a(v-u-\nu)^{1-a}} \;.$$

Haciendo la sustitución $x = \frac{\nu}{v-u}$; o sea $\nu = x(v-u)$, $d\nu = (v-u)dx$, tenemos

$$A = \int_0^1 \frac{(v-u)dx}{(v-u)^a x^a (v-u-(v-u)x)^{1-a}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^a(1-x)^{1-a}} = \int_0^1 x^{-a}(1-x)^{a-1} dx \;.$$

Recordemos que la función Beta para $\lambda, \mu > 0$ se define por:

$B(\lambda,\mu) = \int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}dx$, aplicando este hecho, para nuestro caso

$$A \;=\; B(1-a,a) = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1-a)\Gamma(a)$$

Luego sustituyendo en (3.30) obtenemos:

$$I \;=\; \Gamma(1-a)\Gamma(a) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{u}^{\infty} \varphi(u)\varphi(v) du dv}_{(i)} \;.$$

Del Ejemplo 3.5.6 vemos que $(i) = \frac{1}{2}$,entonces

$$I \;=\; \frac{1}{2}\Gamma(1-a)\Gamma(a)$$

y de allí en (3.27) se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon \;=\; \frac{1}{2}\Gamma(1-a)\Gamma(a)\psi(0)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sin \pi a}\right)\langle \delta, \psi\rangle$$

$\therefore$ $[(x_+)^{-a}.(x_-)^{-b}]$ existe y es de la forma $[(x_+)^{-a}.(x_-)^{-b}] = \frac{\pi}{2\sin\pi a}\delta$.

Consecuentemente vemos que el producto usual no coincide con el producto distribucional. $\blacksquare$

Capítulo 4
EL USO DE TRANSFORMADAS DE FOURIER PARA ESTUDIAR LOS PRODUCTOS DE DISTRIBUCIONES

4.1. Distribuciones especiales

Las funciones localmente integrables son distribuciones. En particular esto ocurre para las funciones

$$|x|^{\alpha} \quad y \quad sgn(x)|x|^{\alpha} \, . \tag{4.1}$$

donde $\alpha > -1$.

A continuación definimos las distribuciones que uno asigna a las funciones de la forma (4.1), con $\alpha \leq -1$, y entonces para $\alpha = -N - \beta$, donde N es un entero positivo y $0 \leq \beta < 1$.

Tales distribuciones son conocidas en la literatura. En particular, según [13] podemos definir las siguientes distribuciones.

Definición 4.1.1. *$Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)$ y $Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)$ son definidas por:*

Para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right), \varphi\right\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{[\varphi(x) - S_{N-1}(x,\varphi)]}{|x|^{N+\beta}} dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}} dx \tag{4.2}$$

y

$$\left\langle Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right), \varphi\right\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{sgn(x)[\varphi(x) - S_{N-1}(x,\varphi)]}{|x|^{N+\beta}} dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{sgn(x)\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}} dx \tag{4.3}$$

donde :

$$S_{N-1}(x,\varphi)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\ . \tag{4.4}$$

Definición 4.1.2. *Definimos:*

i) Si $0<\beta<1$ *entonces se define:* $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\left\langle P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right),\varphi\right\rangle=\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right),\varphi\right\rangle-2\sum_{\substack{k=0\\ k\ par}}^{N-1}\frac{1}{(N-1+\beta-k)k!}\varphi^{(k)}(0) \tag{4.5}$$

$$\left\langle P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right),\varphi\right\rangle=\left\langle Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right),\varphi\right\rangle-2\sum_{\substack{k=0\\ k\ impar}}^{N-1}\frac{1}{(N-1+\beta-k)k!}\varphi^{(k)}(0) \tag{4.6}$$

ii) Para N *par se define la distribución* $P\left(\frac{1}{|x|^N}\right)$*, que se denota por* $P\left(\frac{1}{x^N}\right)$*, y para* N *impar la distribución* $P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^N}\right)$*, denotada por* $P\left(\frac{1}{x^N}\right)$*, según (4.5) y (4.6) respectivamente , donde* $\beta=0$ *.*

Nota: Las fórmulas (4.5) y (4.6) no pueden ser utilizadas con $\beta=0$, N impar ó $\beta=0$, N par respectivamente.

Las derivadas distribucionales de las distribuciones definidas en la Definición 4.1.2 se comportan como las derivadas usuales de las funciones (Apéndice C), esto es:

$$P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)'=-(N+\beta)P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right)\ , \tag{4.7}$$

$$P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)'=-(N+\beta)P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right)\ . \tag{4.8}$$

Para las distribuciones de la Definición 4.1.1 esto no se cumple. Uno puede demostrar (Apéndice C) que:

$$Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)'=-(N+\beta)Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k-1}{k!}\delta^{(k)}\ , \tag{4.9}$$

$$Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)' = -(N+\beta)Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right) + \sum_{k=0}^{N}\frac{1+(-1)^k}{k!}\delta^{(k)} \ . \tag{4.10}$$

También notamos que:

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; Pf\left(\frac{1}{x}\right) \ . \tag{4.11}$$

En efecto: De (4.6) se tiene $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle &= \left\langle P\left(\frac{sgn(x)}{|x|}\right),\varphi\right\rangle \ , \\ \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle &= \int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}dx \ ,\end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{aligned}\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx \qquad (4.12)\\ \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle &= \left\langle Pf\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle \quad \blacksquare\end{aligned}$$

También,

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|}\right),\varphi\right\rangle = \int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx \ . \tag{4.13}$$

Ejemplo 4.1.3. *Para la función* $\ln|x|$ *entendida como distribución, probemos que* $(\ln|x|)' = P(\frac{1}{x})$.

Prueba Se tiene $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle(\ln|x|)',\varphi\rangle &= -\langle\ln|x|,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\varphi'(x)dx \\ \langle(\ln|x|)',\varphi\rangle &= -\underbrace{\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\ln|x|\varphi'(x)dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\ln|x|\varphi'(x)dx\right)\right)}_{I}\end{aligned}$$

e integrando por partes, se tiene:

$$I = \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\ln(\epsilon)(\varphi(\epsilon)-\varphi(-\epsilon))}_{A} + \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right) \ . \tag{4.14}$$

$A=0$ por la regla de L$'$Hospital, luego en (4.14) y de (4.12) tenemos:

$$I \ = \ \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle$$

$$\therefore \ \ (\ln|x|)' = P\left(\frac{1}{x}\right) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 4.1.4. *Definimos la función:*

$$sgn(x)\ln|x| = \begin{cases} \ln|x| & , x>0 \\ -\ln|x| & , x<0 \end{cases}$$

y probemos que $(sgn(x)\ln|x|)' = Pf\left(\frac{1}{|x|}\right)$ *.*

<u>Prueba</u> Se tiene $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\left\langle (sgn(x)\ln|x|)', \varphi\right\rangle &= -\left\langle sgn(x)\ln|x|, \varphi'\right\rangle \\
\left\langle (sgn(x)\ln|x|)', \varphi\right\rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty} sgn(x)\ln|x|\varphi'(x)dx \\
\left\langle (sgn(x)\ln|x|)', \varphi\right\rangle &= \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\ln|x|\varphi'(x)dx - \int_{\epsilon}^{\infty}\ln|x|\varphi'(x)dx\right)}_{I} .
\end{aligned}$$

Integrando por partes, se tiene:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\ln(\epsilon)(\varphi(-\epsilon)+\varphi(\epsilon)) - \int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] , \\
I &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\ln(\epsilon)(\varphi(-\epsilon)+\varphi(\epsilon)) - \int_{-\infty}^{-1}\frac{\varphi(x)}{x}dx - \int_{-1}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\epsilon}^{1}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] , \\
I &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\ln(\epsilon)(\varphi(-\epsilon)+\varphi(\epsilon)) + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx + \underbrace{\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx + \int_{\epsilon}^{1}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx}_{A}\right] .
\end{aligned}$$

Restando y sumando $\frac{\varphi(0)}{|x|}$ en las integrales en A y resolviendo se tiene

$$I = \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}[\ln(\epsilon)(\varphi(-\epsilon)+\varphi(\epsilon)) - 2\varphi(0)\ln(\epsilon)]}_{B} + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx + \int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}dx \ .$$

$B = 0$ por la regla de L$'$Hospital. De allí de (4.13) podemos concluir

$$(sgn(x)\ln|x|)' = Pf\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \blacksquare$$

Notación En lo que sigue a las distribuciones:

$$P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right) \ , \ P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right) \ \ y \ \ P\left(\frac{1}{x^N}\right)$$

denotamos por $|x|^{-N-\beta}$, $sgn(x)|x|^{-N-\beta}$ y x^{-N} ó $\frac{1}{|x|^{N+\beta}}$, $\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}$ y $\frac{1}{x^N}$ respectivamente.

4.2. Distribuciones temperadas, transformadas de Fourier y el producto de distribuciones.

Usando un espacio de funciones de prueba más general que $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ uno puede definir el espacio de distribuciones temperadas como un subespacio de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
El espacio de funciones de prueba que se emplea es el Espacio de Schwartz.

Definición 4.2.1 (Espacio de Schwartz $\mathscr{S}$)**.** *$\mathscr{S}$ es el espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables quienes junto con sus derivadas se aproximan a cero más rápidamente que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$ cuando $|x| \to \infty$. Así sobre la recta $-\infty < x < \infty$, las funciones $\varphi \in \mathscr{S}$ satisfacen desigualdades de la forma:*

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leq C_{k,q,\varphi} \ \ para \ \ k,q = 0,1,2,\dots \ .$$

donde $C_{k,q,\varphi}$ son constantes.

Definición 4.2.2 (Espacio $\mathscr{S}'$)**.** *Una distribución temperada es un funcional continuo sobre el espacio $\mathscr{S}$ de funciones de Schwartz. Denotemos por $\mathscr{S}'$ el conjunto de todas las distribuciones temperadas.*

Definición 4.2.3 (Transformada de Fourier de una Función de Prueba en $\mathscr{S}$). *Sea $\varphi \in \mathscr{S}$. La transformada de Fourier de φ es la función $\mathscr{F}[\varphi] \in \mathscr{S}$ definida por:*

$$\mathscr{F}[\varphi](\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx \quad , \sigma \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

Definición 4.2.4 (Transformada de Fourier de una Distribución). *La transformada de Fourier de una distribución temperada f es la distribución temperada $\mathscr{F}[f]$ definida por: $\forall \varphi \in \mathscr{S}$*

$$\langle \mathscr{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathscr{F}[\varphi] \rangle \tag{4.16}$$

Los siguientes dos conceptos son definidos según [3] (Kamiński).

Definición 4.2.5 (Conjunto W^1). *W^1 es el conjunto de funciones medibles en $\mathbb{R}$ tales que para todo $F \in W^1$ existe un polinomio P tal que: $FP^{-1} \in L^1$.*

Definición 4.2.6. *Decimos que la convolución $f * g$, de distribuciones temperadas f y g es temperada, si $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$ y $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_s$, donde $f_i, g_j (1 \leq i \leq r \ , \ 1 \leq j \leq s)$ son derivadas distribucionales de algún orden de las funciones F_i y G_j en W^1 y además las convoluciones $|F_i| * |G_j|$ existen casi dondequiera siendo también funciones de la clase W^1.*

El siguiente teorema está dado en [3]. Dicho teorema se utilizará más adelante.

Teorema 4.2.7. *Sean f y g dos distribuciones temperadas tal que la convolución $f * g$ es temperada. Entonces el producto $\mathscr{F}[f].\mathscr{F}[g]$ existe y*

$$\mathscr{F}[f].\mathscr{F}[g] = \mathscr{F}[f * g] \tag{4.17}$$

Nota: En la ecuación (4.17) $\mathscr{F}[f].\mathscr{F}[g]$ denota el producto (3.18) de distribuciones $\mathscr{F}[f]$ y $\mathscr{F}[g]$ que originalmente se denotó por: $[\mathscr{F}[f].\mathscr{F}[g]]$.

En lo que sigue utilizamos la notación simplificada (sin corchetes) para el producto.

Ejemplo 4.2.8. *Sea $\delta(x - x_0)$ la distribución delta de Dirac con singularidad en x_0. Probemos que $\mathscr{F}[\delta(x - x_0)] = e^{i\sigma x_0}$*

<u>Prueba</u> $\forall\varphi \in \mathscr{S}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}[\delta(x-x_0)], \varphi\rangle &= \langle \delta(x-x_0), \mathscr{F}[\varphi]\rangle = \mathscr{F}[\varphi](x_0)\\ &= \int \varphi(\xi)e^{i\sigma x_0}d\xi = \left\langle e^{i\sigma x_0}, \varphi\right\rangle\\ \mathscr{F}[\delta(x-x_0)] &= e^{ix_0\sigma}\end{aligned}$$

En particular: Si $x_0 = 0$ entonces $\mathscr{F}[\delta] = 1$.

A continuación presentamos la tabla (4–1) según [15], en el cual vemos las transformadas de Fourier de algunas distribuciones que utilizaremos más adelante.

Cuadro 4–1: Tabla de Transformadas de Fourier

No	Distribución f	Transformada de Fourier $\mathscr{F}[f]$
1	δ	1
2	1	$2\pi\delta$
3	x^{-1}	$i\pi sgn(\sigma)$
4	x^{-2}	$-\pi\|\sigma\|$
5	$x^m \ ; m > 1$	$2(-i)^m\pi\delta^{(m)}$
6	$x^{-m} \ ; m > 1$	$\frac{im\pi}{(m-1)!}\sigma^{m-1}sgn(\sigma)$
7	$x_+^n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$	$i^{n+1}[n!\sigma^{-n-1} + (-1)^{n+1}i\pi\delta^{(n)}]$
8	$x_-^n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$	$i^{n+1}[(-1)^{n+1}n!\sigma^{-n-1} - i\pi\delta^{(n)}]$
9	$x_+^\lambda \ (\lambda \neq 0, \pm1, \pm2, \cdots)$	$i\Gamma(\lambda+1)[e^{i\lambda(\frac{\pi}{2})}\sigma_+^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda(\frac{\pi}{2})}\sigma_-^{-\lambda-1}]$
10	$x_-^\lambda \ (\lambda \neq 0, \pm1, \pm2, \cdots)$	$i\Gamma(\lambda+1)[e^{i\lambda(\frac{\pi}{2})}\sigma_-^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda(\frac{\pi}{2})}\sigma_+^{-\lambda-1}]$

Nota: $\sigma_+^{-\lambda-1}$ y $\sigma_-^{-\lambda-1}$ son las distribuciones definidas en [15] y son relacionadas a las distribuciones definidas en la Definición 4.1.2 por:

$$\sigma_+^{-\lambda-1} = \frac{1}{2}(|\sigma|^{-\lambda-1} + |\sigma|^{-\lambda-1}sgn(\sigma)) \tag{4.18}$$

$$\sigma_-^{-\lambda-1} = \frac{1}{2}(|\sigma|^{-\lambda-1} - |\sigma|^{-\lambda-1}sgn(\sigma)) \tag{4.19}$$

A continuación consideramos una aplicación importante del Teorema 4.2.7 que nos permite conseguir ciertas identidades para los productos de distribuciones especiales.

Para k real, $k > -1$ tenemos:

$$x_+^k = \begin{cases} x^k & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

$$x_-^k = \begin{cases} (-x)^k & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

La convolución de dichas funciones está dada por

$$x_+^k * x_+^l \;\; = \;\; x_+^{k+l+1} B(k+1, l+1) \; , \tag{4.22}$$

donde $B(k+1, l+1) = \int_0^1 z^k(1-z)^l dz$. Análogamente para $x_-^k * x_-^l$, se tiene:

$$x_-^k * x_-^l \;\; = \;\; x_-^{k+l+1} B(k+1, l+1) \;\; . \tag{4.23}$$

4.3. Justificación para el uso del Teorema 4.2.7

Las funciones x_+^k , x_+^l y x_-^k , x_-^l donde k, l reales y $k, l > -1$ son localmente integrables y sus convoluciones $x_+^k * x_+^l$ y $x_-^k * x_-^l$ también lo son.

- Verifiquemos que tales funciones son temperadas según de la Definición 4.2.5 .

Consideramos dos casos para demostrar que $x_+^k \in W^1$.

i) Si $-1 < k < 0$ entonces para el polinomio $P(x) := 1 + x^2$ se tiene que

$$\frac{x_+^k}{P(x)} \;\; = \;\; \frac{x_+^k}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

ii) Si $k \geq 0$ entonces para el polinomio $P(x) := 1 + x^{2(1+k')}$, donde k' es el mínimo entero más cercano a k tal que $k' \geq k$, se tiene que

$$\frac{x_+^k}{P(x)} \;\; = \;\; \frac{x_+^k}{1+x^{2(1+k')}} \in L^1(\mathbb{R})$$

De la misma manera se puede ver que $x_+^l \in W^1$. Consecuentemente se tiene

x_+^k , $x_+^l \in W^1$.

- Verificamos que la convolución $x_+^k * x_+^l$ es temperada.

  Sabemos que $x_+^k * x_+^l = x_+^{k+l+1} B(k+1, l+1)$. Entonces $x_+^k * x_+^l \in W^1$.

  Además $|x_+^k| = x_+^k$ y $|x_+^l| = x_+^l$.

  Por lo tanto $|x_+^k| * |x_+^l| = x_+^k * x_+^l \in W^1$.

  De manera análoga se puede verificar lo mismo para las funciones x_-^k y x_-^l.

Ahora la discusión de las consecuencias de (4.22) y (4.23) está dividida en los casos pertinentes, para los cuales utilizaremos la siguiente convención.
Si f, g, F *y* $G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, entonces $f.g + F.G$ denota el límite en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ dado por:

$$f.g + F.G \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0} [(f * \rho^\epsilon)(g * \rho^\epsilon) + (F * \rho^\epsilon)(G * \rho^\epsilon)] \ , \tag{4.24}$$

si el límite existe y no depende de las redes $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$.

Nota: Si el límite anterior es la distribución denotada por T , entonces en el álgebra de Colombeau se tiene:

$$f \cdot g + F \cdot G \approx T \quad . \tag{4.25}$$

Caso 1: k, l son enteros no negativos.

Aplicando la transformada de Fourier a $x_+^k * x_+^l$, utilizando de la tabla (4–1) la fórmula (7) y el hecho que

$$B(k+1, l+1) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+l+2)} = \frac{k!\ l!}{(k+l+1)!}$$

se obtiene una ecuación que multiplicada por $-\frac{1}{\pi^2}$ nos resulta:

$$(-1)^{k+l}\delta^{(k)}.\delta^{(l)} - \frac{1}{i\pi}\left((-1)^l k!\delta^{(l)}.\frac{1}{\sigma^{k+1}} + (-1)^k l!\delta^{(k)}.\frac{1}{\sigma^{l+1}}\right) - \frac{k!l!}{\pi^2}\frac{1}{\sigma^{k+1}}.\frac{1}{\sigma^{l+1}} =$$

$$= \left[\frac{(-1)^{k+l}}{i\pi}\delta^{(k+l+1)} - \frac{(k+l+1)!}{\pi^2}\frac{1}{\sigma^{k+l+2}}\right]\frac{k!l!}{(k+l+1)!} \ . \tag{4.26}$$

Análogamente de (4.23) se tiene:

$$(-1)^{k+l}\delta^{(k)}.\delta^{(l)}+\frac{(-1)^{2k+l}}{i\pi}k!\delta^{(l)}.\frac{1}{\sigma^{k+1}}+\frac{(-1)^{k+2l}}{i\pi}l!\delta^{(k)}.\frac{1}{\sigma^{l+1}}-(-1)^{2k+2l}\frac{k!l!}{\pi^2}\frac{1}{\sigma^{k+1}}.\frac{1}{\sigma^{l+1}}=$$

$$=\left[\frac{(-1)^{k+l+1}}{i\pi}\delta^{(k+l+1)}-(-1)^{2k+2l}\frac{(k+l+1)!}{\pi^2}\frac{1}{\sigma^{k+l+2}}\right]\frac{k!l!}{(k+l+1)!}\,. \tag{4.27}$$

- Sumando (4.26) y (4.27) y entonces a este resultado multiplicando por π^2 tenemos:

$$(-1)^{k+l}\pi^2\delta^{(k)}.\delta^{(l)}-k!\;l!\left(\frac{1}{\sigma^{k+1}}\right).\left(\frac{1}{\sigma^{l+1}}\right)=-k!\;l!\left(\frac{1}{\sigma^{k+l+2}}\right)\,. \tag{4.28}$$

1) Si $k=l$ y entonces dividiendo por $(k!)^2$ en (4.28) se tiene:

$$\left(\frac{1}{\sigma^{k+1}}\right)^2-\frac{\pi^2}{(k!)^2}(\delta^{(k)})^2 \;=\; \left(\frac{1}{\sigma^{2k+2}}\right)$$

y sustituyendo $k=n-1$,

$$\left(\frac{1}{\sigma^{n}}\right)^2-\frac{\pi^2}{((n-1)!)^2}(\delta^{(n-1)})^2 \;=\; \left(\frac{1}{\sigma^{2n}}\right)\,. \tag{4.29}$$

La ecuación (4.29) es un resultado del producto de distribuciones dada por Fisher en [2].

En particular si $k=l=0$

$$\delta^2-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \;=\; -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\,, \tag{4.30}$$

aunque $\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2$ y δ^2 no existen por si mismos, lo que fue observado por Mikusiński en [18] y esto es consistente con (4.24) .(Ver también la ecuación (4.25))

2) Dividiendo por $k!\;l!$ a (4.28) tenemos:

$$\left(\frac{1}{\sigma^{k+1}}\right).\left(\frac{1}{\sigma^{l+1}}\right)-\frac{(-1)^{k+l}\pi^2}{k!\;l!}\delta^{(k)}\delta^{(l)}=\left(\frac{1}{\sigma^{k+l+2}}\right)\,,$$

que, después de hacer las sustituciones $k=n-1$ y $l=r-1$ toma la forma de

$$\left(\frac{1}{\sigma^{n}}\right).\left(\frac{1}{\sigma^{r}}\right)-\frac{(-1)^{n+r}\pi^2}{(n-1)!\;(r-1)!}\delta^{(n-1)}.\delta^{(r-1)} \;=\; \left(\frac{1}{\sigma^{k+l+2}}\right) \tag{4.31}$$

La ecuación (4.31) es un resultado del producto de distribuciones dada por Fisher en [2].

- Restando (4.26) de (4.27) tenemos:

$$(-1)^l k!\delta^{(l)}.\left(\frac{1}{\sigma^{k+1}}\right)+(-1)^k l!\delta^{(k)}.\left(\frac{1}{\sigma^{l+1}}\right)=\frac{(-1)^{k+l+1}k!\ l!}{(k+l+1)!}\delta^{(k+l+1)}\ . \qquad (4.32)$$

1) Si $k=l$ en (4.32) se tiene:

$$\delta^{(k)}.\left(\frac{1}{\sigma^{k+1}}\right) \;=\; \frac{(-1)^{k+1}k!}{2(2k+1)!}\delta^{(2k+1)}$$

que, después de sustituir $k=n-1$, toma la forma de

$$\delta^{(n-1)}.\left(\frac{1}{\sigma^{n}}\right)=\frac{(-1)^{n}(n-1)!}{2(2n-1)!}\delta^{(2n-1)}\ . \qquad (4.33)$$

La ecuación (4.33) es un resultado del producto de distribuciones dada por Fisher en [2]. En particular si $k=l=0$, (4.33) se reduce a

$$\delta.\left(\frac{1}{\sigma}\right) \;=\; -\frac{1}{2}\delta' \ . \qquad (4.34)$$

La ecuación (4.34) fue demostrada por primera vez por Domingues y Scarfiello en [18] .

2) Dividiendo por $k!\ l!$ a (4.32) se obtiene

$$\frac{(-1)^l}{l!}\delta^{(l)}.\left(\frac{1}{\sigma^{k+1}}\right)+\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}.\left(\frac{1}{\sigma^{l+1}}\right)=\frac{(-1)^{k+l+1}}{(k+l+1)!}\delta^{(k+l+1)}\quad ,$$

que, después de sustituir $k=n-1$ y $l=r-1$, resulta que

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}.\left(\frac{1}{\sigma^{r}}\right)+\frac{(-1)^r}{(r-1)!}\delta^{(r-1)}.\left(\frac{1}{\sigma^{n}}\right)=\frac{(-1)^{n+r}}{(n+r-1)!}\delta^{(n+r-1)}\ . \qquad (4.35)$$

La ecuación (4.35) es un resultado del producto de distribuciones dada por Fisher en [2].

Caso 2: $\lambda,\mu\notin\mathbb{Z}$ y $(\lambda+\mu)\notin\mathbb{Z}$

Aplicando la transformada de Fourier a $x_+^{\lambda}*x_+^{\mu}$, utilizando la fórmula (9) de la tabla

(4–1) y además haciendo las sustituciones $\tilde{\lambda} = \frac{\pi}{2}\lambda$, $\tilde{\mu} = \frac{\pi}{2}\mu$ y $\tilde{\gamma} = \frac{\pi}{2}(\lambda+\mu+1)$ tenemos:

$$-|\sigma|^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu} + i|\sigma|^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+$$

$$+\,i\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.|\sigma|^{-\mu-1}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu} = |\sigma|^{-\lambda-\mu-2}\sin\tilde{\gamma} - i\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma}\ . \qquad (4.36)$$

Análogamente para $x_-^{\lambda} * x_-^{\mu}$, se tiene:

$$-|\sigma|^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu} - i|\sigma|^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}$$

$$-\,i\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.|\sigma|^{-\mu-1}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu} = |\sigma|^{-\lambda-\mu-2}\sin\tilde{\gamma} + i\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma}\ . \qquad (4.37)$$

De (4.36) y (4.37) tenemos:

- Para la suma de las mismas

$$-\,|\sigma|^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu} = |\sigma|^{-\lambda-\mu-2}\sin\tilde{\gamma} \quad (4.38)$$

- Para la diferencia:

$$|\sigma|^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.|\sigma|^{-\mu-1}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu} = -\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma} \quad (4.39)$$

Caso 3: $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\mu \notin \mathbb{Z}$

Aplicando la transformada de Fourier a $x_+^{\lambda} * x_+^{\mu}$, utilizando de la tabla (4–1) la fórmula (7) y (9) respectivamente y además $\Gamma(\lambda+1) = \lambda!$ se tiene:

$$i\lambda!\sigma^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\mu} + \lambda!\sigma^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu} + (-1)^{\lambda}\pi\delta^{(\lambda)}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\mu}-$$

$$-\,(-1)^{\lambda}i\pi\delta^{(\lambda)}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu} = i^{-\lambda-1}\lambda!\left[i|\sigma|^{-\lambda-\mu-2}\sin\tilde{\gamma} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma}\right] \quad (4.40)$$

Análogamente para $x_-^{\lambda} * x_-^{\mu}$ se tiene:

$$-i(-1)^{\lambda}\lambda!\sigma^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\mu}+(-1)^{\lambda}\lambda!\sigma^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}+\pi\delta^{(\lambda)}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\mu}+$$

$$+i\pi\delta^{(\lambda)}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}=i^{-\lambda-1}\lambda!\left[i|\sigma|^{-\lambda-\mu-2}\sin\tilde{\gamma}-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma}\right] \tag{4.41}$$

Conclusión:

1) Multiplicando por $(-1)^{\lambda}$ a (4.40) y sumando (4.41) se obtiene

$$2(-1)^{\lambda}\sigma^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}+\frac{2\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\mu}=(1+(-1)^{\lambda})i^{-\lambda}|\sigma|^{-\lambda-\mu-2}\sin\tilde{\gamma}+$$

$$+((-1)^{\lambda}-1)i^{-\lambda-1}\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{-\lambda-\mu-2}}\cos\tilde{\gamma} \tag{4.42}$$

2) Multiplicando por $(-1)^{\lambda}$ a (4.40) y restando a (4.41), tenemos:

$$2(-1)^{\lambda}\sigma^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\mu}-\frac{2\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}=((-1)^{\lambda}-1)i^{-\lambda-1}|\sigma|^{-\lambda-\mu-2}\sin\tilde{\gamma}-$$

$$-((-1)^{\lambda}+1)i^{-\lambda}(|\sigma|^{-\lambda-\mu-2}sgn(\sigma))\cos\tilde{\gamma} \tag{4.43}$$

De (4.42) y (4.43) podemos inferir:

- Si $\lambda=2m$ y m par

i)

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}+\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}=\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\sin\tilde{\gamma} \tag{4.44}$$

y

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}-\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}=-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma} \tag{4.45}$$

- Si $\lambda=2m$ y m impar

ii)

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}+\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}=-\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\sin\tilde{\gamma} \tag{4.46}$$

y

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}-\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}=\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma} \tag{4.47}$$

- Si $\lambda = 2m+1$ y m par

iii)

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}-\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}=-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma} \tag{4.48}$$

y

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}+\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}=-\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\sin\tilde{\gamma} \tag{4.49}$$

- Si $\lambda = 2m+1$ y m impar

iv)

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}-\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}=\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\cos\tilde{\gamma} \tag{4.50}$$

y

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+1}}.\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\mu}+\frac{\pi}{\lambda!}\delta^{(\lambda)}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\mu}=\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+\mu+2}}\sin\tilde{\gamma} \tag{4.51}$$

Caso 4: $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $\mu \notin \mathbb{Z}$ y $(\lambda+\mu) \in \mathbb{Z}$.

Aplicando la transformada de Fourier a $x_+^\lambda * x_+^\mu$, y utilizando de la tabla (4–1) la fórmula (7) y (9) respectivamente tenemos:

$$-|\sigma|^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}+\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+$$
$$+i|\sigma|^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+i\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.|\sigma|^{-\mu-1}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}=$$

$$=\frac{i^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\left[(\lambda+\mu+1)!\sigma^{-\lambda-\mu-2}+(-1)^{\lambda+\mu}i\pi\delta^{(\lambda+\mu+1)}\right]\ . \tag{4.52}$$

Análogamente para $x_-^\lambda * x_-^\mu$ se tiene:

$$-|\sigma|^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}+\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}-$$
$$-i|\sigma|^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}-i\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.|\sigma|^{-\mu-1}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}=$$

$$=\frac{i^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\left[(-1)^{\lambda+\mu}(\lambda+\mu+1)!\sigma^{-\lambda-\mu-2}-i\pi\delta^{(\lambda+\mu+1)}\right]\ . \tag{4.53}$$

Conclusión:

- Sumando (4.52) y (4.53) se obtiene

$$\Gamma(\lambda+\mu+2)|\sigma|^{-\lambda-1}.|\sigma|^{-\mu-1}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}=$$

$$=-\frac{1}{2}i^{\lambda+\mu}\left[(-1^{\lambda+\mu}+1)(\lambda+\mu+1)!\sigma^{-\lambda-\mu-2}+i\pi(-1^{\lambda+\mu}-1)\delta^{(\lambda+\mu+1)}\right] \tag{4.54}$$

- Restando (4.52) de (4.53)

$$\Gamma(\lambda+\mu+2)|\sigma|^{-\lambda-1}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}.|\sigma|^{-\mu-1}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}=$$

$$=\frac{1}{2}i^{\lambda+\mu-1}\left[(1-(-1)^{\lambda+\mu})(\lambda+\mu+1)!\sigma^{-\lambda-\mu-2}+i\pi(-1^{\lambda+\mu}+1)\delta^{(\lambda+\mu+1)}\right] \tag{4.55}$$

De (4.54) y (4.55) podemos inferir:

- Si $\lambda+\mu\equiv 0 \pmod 4$

i)

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}=-\frac{1}{\sigma^{\lambda+\mu+2}} \tag{4.56}$$

y

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}=\frac{\pi}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\delta^{(\lambda+\mu+1)} \tag{4.57}$$

- Si $\lambda+\mu\equiv 2 \pmod 4$

ii)

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}=\frac{1}{\sigma^{\lambda+\mu+2}} \tag{4.58}$$

y

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}=\frac{-\pi}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\delta^{(\lambda+\mu+1)} \tag{4.59}$$

- Si $\lambda+\mu=2m+1$ y m par

iii)

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}=\frac{-\pi}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\delta^{(\lambda+\mu+1)} \tag{4.60}$$

y

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}=\frac{1}{\sigma^{\lambda+\mu+2}} \tag{4.61}$$

- Si $\lambda+\mu=2m+1$ y m impar

iv)

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}-\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}=\frac{\pi}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\delta^{(\lambda+\mu+1)} \tag{4.62}$$

y

$$\frac{1}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\mu+1}}\sin\tilde{\lambda}\cos\tilde{\mu}+\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{|\sigma|^{\mu+1}}\cos\tilde{\lambda}\sin\tilde{\mu}=-\frac{1}{\sigma^{\lambda+\mu+2}} \tag{4.63}$$

4.4. Aplicaciones

Los siguientes ejemplos, muestran algunos resultados contenidos en los diferentes casos de la Sección 4.3

Ejemplo 4.4.1. *Sea* $\lambda = -\frac{2}{3}$ *y* $\mu = -\frac{2}{3}$ *entonces* $\lambda + \mu = -\frac{4}{3}$. *Utilizando los resultados del Caso 2, tenemos de la ecuación (4.38)*

$$-\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}\sin(-\frac{\pi}{3})\sin(-\frac{\pi}{3}) + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}\cos(-\frac{\pi}{3})\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{|\sigma|^{2/3}}\sin(-\frac{\pi}{6}) \ ,$$

que se simplifica a

$$-3\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/3}} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}} = -2\frac{1}{|\sigma|^{2/3}} \ , \tag{4.64}$$

y de la ecuación (4.39)

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}\sin(-\frac{\pi}{3})\cos(-\frac{\pi}{3}) + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}\cos(-\frac{\pi}{3})\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{2/3}}\cos(-\frac{\pi}{6})$$

que conduce a

$$-\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}} - \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/3}} = -2\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{2/3}}$$

y entonces tenemos

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}} = \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{2/3}} \tag{4.65}$$

El producto en (4.65) es consistente con el Teorema 3 $(p = 2, r = 2)$, *ya que los cuadrados de las funciones son localmente integrables.*

Ejemplo 4.4.2. *Sea* $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2}$ *entonces* $\lambda + \mu = -1$. *Haciendo uso de los resultados del Caso 4 podemos inferir de la ecuación (4.62) que*

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}\sin(-\frac{\pi}{4})\sin(-\frac{\pi}{4}) - \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}\cos(-\frac{\pi}{4})\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{\Gamma(1)}\delta$$

donde $\Gamma(1) = 1$ *y de allí*

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} - \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} \quad = \quad 2\pi\delta \quad . \tag{4.66}$$

De la ecuación (4.63) se obtiene

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}\sin(-\frac{\pi}{4})\cos(-\frac{\pi}{4}) + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}\cos(-\frac{\pi}{4})\sin(-\frac{\pi}{4}) \;=\; -\frac{1}{\sigma}$$

$$-\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} - \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} \quad = \quad -2\frac{1}{\sigma} \; .$$

y finalmente

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} \quad = \quad \frac{1}{\sigma} \tag{4.67}$$

La ecuación (4.67) no se puede obtener del Teorema 3.5.3.

Sean $F = \frac{1}{|x|^{1/2}}$, $G = \frac{sgn(\sigma)}{|x|^{1/2}}$ *y* $p, r \geq 1$ *tal que* $F \in L^p_{loc}$ *y* $G \in L^r_{loc}$. *Ahora como* $\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right)^p = \frac{1}{|x|^{p/2}}$ *entonces* $\frac{p}{2} < 1$ *y consecuentemente*

$$1 \leq p < 2 \; . \tag{4.68}$$

De manera análoga se tiene

$$1 \leq r < 2 \quad . \tag{4.69}$$

Para que se cumpla $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$, *el valor de* r *debe satisfacer* $r \geq \frac{p}{p-1}$. *Analizando esta desigualdad entre los valores de* p, *1 y 2 vemos que la función* $\frac{p}{p-1}$ *es decreciente. Entonces* $r \geq 2$, *lo cuál es una contradicción con (4.69).*

Concluimos esta parte afirmando que no podemos conseguir los valores de p *y* r *tales que se cumpla la hipótesis del Teorema 3.5.3.*

Además para las distribuciones $F = \sigma_+^{-1/2}$ *y* $G = \sigma_-^{-1/2}$, *el producto de* F *y* G *está dado por:*

$$F.G = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} - \frac{1}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} - \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}\right) \tag{4.70}$$

donde se utilizó (4.18) y (4.19). Luego sustituyendo los resultados obtenidos de (4.66) y (4.67) en (4.70) se tiene:

$$F.G = \frac{1}{2}\pi\delta\ . \tag{4.71}$$

La ecuación (4.71) es el producto distribucional enunciado en [4] y obtenido en el ejemplo 3.5.6.

Ejemplo 4.4.3. *Sea* $\lambda = -\frac{2}{3}$ *,* $\mu = -\frac{1}{2}$ *entonces* $\lambda + \mu = -\frac{7}{6}$*. Utilizando los resultados del Caso 2 tenemos.*

De la ecuación (4.38) se tiene:

$$-\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}\sin(-\frac{\pi}{3})\sin(-\frac{\pi}{4}) + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}\cos(-\frac{\pi}{3})\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{|\sigma|^{5/6}}\sin(-\frac{\pi}{12}),$$
$$\sqrt{3}\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}\sin(-\frac{\pi}{12})\frac{1}{|\sigma|^{5/6}}$$

$$\sqrt{3}\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} - \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} = (\sqrt{3}-1)\frac{1}{|\sigma|^{5/6}}\ , \tag{4.72}$$

y de la ecuación (4.39) se obtiene:

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}\sin(-\frac{\pi}{3})\cos(-\frac{\pi}{4}) + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}}\cos(-\frac{\pi}{3})\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{5/6}}\cos(-\frac{\pi}{12})$$
$$\sqrt{3}\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\cos(-\frac{\pi}{12})\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{5/6}}$$

$$\sqrt{3}\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} + \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}.\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} \quad = \quad (\sqrt{3}+1)\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{5/6}} \tag{4.73}$$

De las ecuaciones (4.72) y (4.73) surge la pregunta de, si los productos distribucionales que aparecen en dichas ecuaciones coinciden con sus productos como funciones según del Teorema 3.5.3.

Sean $F = \frac{1}{|x|^{1/3}}$, $G = \frac{1}{|x|^{1/2}}$ *y* $p, r \geq 1$ *talque* $F \in L^p_{loc}$ *y* $G \in L^r_{loc}$. *Ahora como* $\left(\frac{1}{|x|^{1/3}}\right)^p = \frac{1}{|x|^{p/3}}$ *entonces* $\frac{p}{3} < 1$ *y consecuentemente*

$$1 \leq p < 3 \,. \tag{4.74}$$

De manera análoga para $\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right)^r = \frac{1}{|x|^{r/2}}$ *se obtiene*

$$1 \leq r < 2 \,. \tag{4.75}$$

Para que se cumpla $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$, *el valor de* r *debe satisfacer* $r \geq \frac{p}{p-1}$. *Luego podemos inferir que* $\frac{p}{p-1} \leq r < 2$.

En particular, si $p = 5/2$ *entonces* $\frac{5}{3} \leq r < 2$ *y podemos conseguir* $r = \frac{11}{6}$ *tal que se cumple*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{6}{11} + \frac{2}{5} = \frac{52}{55} \leq 1 \,.$$

De lo anterior podemos concluir que uno puede satisfacer la hipótesis del Teorema 3.5.3, para $F = \frac{1}{|\sigma|^{1/3}}$ *y* $G = \frac{1}{|\sigma|^{1/2}}$ *con* $p = \frac{5}{2}$ *y* $r = \frac{11}{6}$.

Análogamente se puede hacer lo mismo para las funciones $\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}}$ *y* $\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}$ *ó* $\frac{1}{|\sigma|^{1/3}}$ *y* $\frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}}$.

Consecuentemente decimos que tales productos existen en (4.72) y (4.73). De allí todos estos productos según el Teorema 3.5.3 son iguales a los productos usuales de funciones.

4.5. Otros productos particulares

1. **El producto modelo** $\frac{1}{x}.\delta$

   Por (3.18) se tiene:

$$\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \delta \;\; = \;\; \lim_{\epsilon \to 0} \left[\left(\frac{1}{x} * \varphi_\epsilon \right) (\delta * \varphi_\epsilon) \right] \;\text{ en }\; \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \,.$$

   En efecto.

   $\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, definimos

$$I_\epsilon \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x}*\varphi_\epsilon\right)(y)(\delta*\varphi_\epsilon)(y)\psi(y)dy\;. \tag{4.76}$$

Las convoluciones en (4.76) se consigue de las fórmulas (B.1) (Apéndice B)

$$(\delta*\varphi_\epsilon)(y)=\langle\delta(z),\varphi_\epsilon(y-z)\rangle=\varphi_\epsilon(y)=\frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \tag{4.77}$$

y

$$\left(\frac{1}{x}*\varphi_\epsilon\right)(y)=\left\langle\frac{1}{x},\varphi_\epsilon(y-x)\right\rangle\;.$$

Ahora para no trabajar con la distribución $\frac{1}{x}$ directamente, la reemplazamos, según el Ejemplo 4.1.3, por $(\ln|x|)'$ que resulta en

$$\left(\frac{1}{x}*\varphi_\epsilon\right)(y)=\langle\ln|x|,\varphi_\epsilon^{'}(y-x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\varphi_\epsilon^{'}(y-x)dx\;.$$

Luego haciendo el cambio de variable $z=y-x$ en la integral y poniendo $\varphi_\epsilon^{'}(z)=\frac{1}{\epsilon^2}\varphi^{'}(\frac{z}{\epsilon})$ se tiene:

$$\left(\frac{1}{x}*\varphi_\epsilon\right)(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\ln|y-z|\frac{1}{\epsilon^2}\varphi^{'}(\frac{z}{\epsilon})dz\;. \tag{4.78}$$

Entonces sustituyendo (4.77) y (4.78) en (4.76) tenemos:

$$I_\epsilon \;=\; \frac{1}{\epsilon^3}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\psi(y)\int_{-\infty}^{\infty}\ln|y-z|\varphi^{'}\left(\frac{z}{\epsilon}\right)dzdy$$

que después de los cambios de variables $\zeta=\frac{z}{\epsilon}$ y $\eta=\frac{y}{\epsilon}$ toma la forma de

$$I_\epsilon \;=\; \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\psi(\eta\epsilon)\ln|(\eta-\zeta)\epsilon|\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta\;. \tag{4.79}$$

Para analizar qué ocurre con I_ϵ cuando $\epsilon\longrightarrow 0$, es conveniente utilizar la fórmula de Taylor

$$\psi(\epsilon\eta)=\psi(0)+\epsilon\eta\psi^{'}(0)+\epsilon^2\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta) \tag{4.80}$$

donde $\widetilde{\psi}$ es una función suave.

Sustituyendo (4.80) en (4.79) se obtiene

$$I_\epsilon \;=\; \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\psi(0)+\epsilon\eta\psi^{'}(0)+\epsilon^2\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta)]\varphi(\eta)[\ln|\epsilon|+\ln|\eta-\zeta|]\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta$$

y luego

$$I_\epsilon = \frac{\ln|\epsilon|}{\epsilon}\psi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(I)}+\frac{1}{\epsilon}\psi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\ln|\eta-\zeta|\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(II)}+$$
$$+\ln|\epsilon|\psi^{'}(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi(\eta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(III)}+\psi^{'}(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi(\eta)\ln|\eta-\zeta|\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(IV)}+$$
$$\epsilon\ln|\epsilon|\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta)\varphi(\eta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(V)}+\epsilon\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta)\varphi(\eta)\ln|\eta-\zeta|\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(VI)}\;.$$

Ahora las integrales (I) , (III) y (V) son iguales a cero, puesto que $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Analizamos la expresión (VI). Porque $\widetilde{\psi}\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\ln|\eta-\zeta|$ es una función localmente integrable y $\varphi(\eta)$, $\varphi^{'}(\zeta)$ son funciones de soportes compactos, entonces para cada $\epsilon<1$, la función integrante es acotada por una función integrable.

Utilizando el Teorema de Lebesgue para la convergencia acotada concluimos que el límite de la integral (VI) cuando $\epsilon\to 0^+$ existe, por lo que la expresión que contiene la integral VI tiende a cero.

En la integral II sustituimos $z=\eta-\zeta$ que nos da

$$II=\int_{-\infty}^{\infty}\ln|z|\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\varphi(z+\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta\Big)\,dz\;.$$

Ahora integrando por partes con $u=\varphi(z+\zeta)$ y $v=\varphi(\zeta)$ se obtiene

$$II=\int_{-\infty}^{\infty}\ln|z|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{'}(z+\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta dz\;.$$

Luego sumamos las dos expresiones para II que nos da $2II = 0$. Entonces $II = 0$.

Para la integral IV se hace la sustitución $z = \eta - \zeta$ que nos resulta

$$IV = \int_{-\infty}^{\infty} \ln|z| \int_{-\infty}^{\infty} (z+\zeta)\varphi^{'}(\zeta)\varphi(z+\zeta)d\zeta dz \, .$$

Luego integrando por partes con $u = (z+\zeta)\varphi(z+\zeta)$ y $v = \varphi(\zeta)$ se obtiene

$$IV = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|z| \left[\varphi(z+\zeta)\varphi(\zeta) + (z+\zeta)\varphi^{'}(z+\zeta)\varphi(\zeta)\right] d\zeta dz \, .$$

Sea $\eta = z + \zeta$ y luego colocando η en lugar de ζ se tiene:

$$IV = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|\eta-\zeta|\varphi(\eta)\varphi(\zeta)d\zeta d\eta - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|\eta-\zeta|\eta\varphi^{'}(\eta)\varphi(\zeta)d\zeta d\eta}_{(i)} \, ,$$

y después de sumar y restar ζ en (i) ,

$$IV = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|\eta-\zeta|\varphi(\eta)\varphi(\zeta)d\zeta d\eta - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|\eta-\zeta|(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\eta)\varphi(\zeta)d\zeta d\eta - \\ - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|\eta-\zeta|\zeta\varphi^{'}(\eta)\varphi(\zeta)d\zeta d\eta}_{IV} \, .$$

Entonces:

$$2IV \;=\; -\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|\eta-\zeta|\varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\eta-\zeta)\varphi(\eta)\right] d\zeta d\eta}_{(ii)} \, . \qquad (4.81)$$

Probemos que (ii) es igual a -1 .

<u>En efecto:</u>

Sea $z = \eta - \zeta$. Entonces sustituyendo en (ii), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|z|\varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left[z\varphi(z+\zeta)\right] d\zeta dz = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln|z|\frac{\partial}{\partial z}\left[z\varphi(z+\zeta)\right] dz\right)}_{(iii)} d\zeta$$

Ahora (iii) es el límite cuando $\epsilon_1 \longrightarrow 0^+$ y $\epsilon_2 \longrightarrow 0^+$ de

$$\int_{\epsilon_1}^{\infty} \ln|z| \frac{\partial}{\partial z}\left[z\varphi(z+\zeta)\right] dz + \int_{-\infty}^{-\epsilon_2} \ln|z| \frac{\partial}{\partial z}\left[z\varphi(z+\zeta)\right] dz \ . \tag{4.82}$$

Integrando por partes en (4.82) con $u = \ln|z|$ y $v = z\varphi(z+\zeta)$ se obtiene para (iii)

$$-\int_0^{\infty} \varphi(z+\zeta)dz - \int_{-\infty}^{0} \varphi(z+\zeta)dz = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z+\zeta)dz = -1$$

$$\text{Por lo tanto } \ IV = \frac{1}{2} \ .$$

En resumen

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} I_\epsilon &= \frac{1}{2}\psi^{'}(0) \\ \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} I_\epsilon &= \left\langle -\frac{1}{2}\delta^{'}, \psi \right\rangle \end{aligned}$$

Consecuentemente: $\quad \frac{1}{x}.\delta = -\frac{1}{2}\delta^{'} \quad \blacksquare$

2. **El producto modelo** $\frac{1}{|x|}.\delta$, donde $\frac{1}{|x|} = Pf\left(\frac{1}{|x|}\right)$

Por (3.18) se tiene

$$\left(\frac{1}{|x|}\right) \cdot \delta \ = \ \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{|x|} * \varphi_\epsilon\right)(\delta * \varphi_\epsilon) \ .$$

$\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, definimos

$$I_\epsilon \ := \ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|x|} * \varphi_\epsilon\right)(y)(\delta * \varphi_\epsilon)(y)\psi(y)dy \ . \tag{4.83}$$

Las convoluciones en (4.83) se consiguen de las fórmulas (4.77) y

$$\left(\frac{1}{|x|} * \varphi_\epsilon\right)(y) = \left\langle \frac{1}{|x|}, \varphi_\epsilon(y-x) \right\rangle \quad .$$

Ahora, para no trabajar con la distribución $\frac{1}{|x|}$ directamente, la reemplazamos según el Ejemplo 4.1.4 por $(\ln|x|sgn(x))^{'}$ que resulta en

$$\left(\frac{1}{|x|} * \varphi_\epsilon\right)(y) = \langle \ln|x|sgn(x), \varphi_\epsilon^{'}(y-x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|sgn(x)\varphi_\epsilon^{'}(y-x)dx \ .$$

Luego haciendo el cambio de variable $z = y - x$ y como $\varphi_\epsilon'(z) = \frac{1}{\epsilon^2}\varphi'(\frac{z}{\epsilon})$ se tiene:

$$\left(\frac{1}{|x|} * \varphi_\epsilon\right)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln|y - z| sgn(y - z) \frac{1}{\epsilon^2}\varphi'(\frac{z}{\epsilon}) dz \ . \tag{4.84}$$

Entonces sustituyendo (4.77) y (4.84) en (4.83) tenemos:

$$I_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^3}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\psi(y)\int_{-\infty}^{\infty} \ln|y - z| sgn(y - z)\varphi'\left(\frac{z}{\epsilon}\right) dz dy \ ,$$

que, después de los cambios de variables $\zeta = \frac{z}{\epsilon}$ y $\eta = \frac{y}{\epsilon}$, toma la forma

$$I_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta)\psi(\eta\epsilon)\ln|(\eta - \zeta)\epsilon| sgn(\epsilon(\eta - \zeta))\varphi'(\zeta) d\zeta d\eta \ . \tag{4.85}$$

Para analizar lo que ocurre con I_ϵ cuando $\epsilon \to 0^+$ es conveniente utilizar la fórmula de Taylor

$$\psi(\epsilon\eta) = \psi(0) + \epsilon\eta\psi'(0) + \epsilon^2\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta) \ . \tag{4.86}$$

donde $\widetilde{\psi}$ es una función suave y tomar en cuenta que $sgn(\epsilon(\eta - \zeta)) = sgn(\eta - \zeta)$. Sustituyendo (4.86) en (4.85) se obtiene

$$I_\epsilon = \frac{\ln|\epsilon|}{\epsilon}\psi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(I)}+$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\psi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)\ln|\eta-\zeta|sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(II)}+$$

$$+\ln|\epsilon|\psi^{'}(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi(\eta)sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(III)}+$$

$$+\psi^{'}(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi(\eta)\ln|\eta-\zeta|sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(IV)}+$$

$$+\epsilon\ln|\epsilon|\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta)\varphi(\eta)sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(V)}+$$

$$+\epsilon\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta)\varphi(\eta)\ln|\eta-\zeta|sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(VI)}\ .$$

Ahora los límites de las integrales (V) y (VI) existen por el teorema de Lebesgue, puesto que $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Las integrales $I, II, III\ y\ IV$ existen puesto que las funciones integrantes tienen soportes compactos.

Analizemos la integral I

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\eta}\varphi(\eta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\eta}^{\infty}\varphi(\eta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta \\ I &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\eta)d\eta\ . \end{aligned}$$

Entonces $I>0\ \ ,\ \forall\varphi\in A_0$.

Luego tenemos para cada $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que $\psi(0)\neq 0$

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \frac{\ln\epsilon}{\epsilon}\psi(0)C_1+\frac{1}{\epsilon}\psi(0)C_2+(\ln\epsilon)\psi^{'}(0)C_3+\psi^{'}(0)C_4+\epsilon(\ln\epsilon)C_5(\epsilon)+\epsilon C_6(\epsilon)\ , \\ I_\epsilon &= \frac{\ln\epsilon}{\epsilon}\underbrace{\left[\psi(0)C_1+\frac{1}{\ln\epsilon}\psi(0)C_2+\epsilon\psi^{'}(0)C_3+\frac{\epsilon}{\ln\epsilon}\psi^{'}(0)C_4+\epsilon^2C_5(\epsilon)+\frac{\epsilon^2}{\ln\epsilon}C_6(\epsilon)\right]}_{A}\ , \end{aligned}$$

donde $C_1, \ldots, C_6$, denotan los valores de las integrales $I, \ldots, VI$ respectivamente. Entonces aplicando el límite a I_ϵ se tiene que $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \frac{\ln \epsilon}{\epsilon} = -\infty$ y $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} A = \psi(0) C_1$ con $C_1 \neq 0$ y $\psi(0) \neq 0$.

Por lo tanto I_ϵ, diverge. Consecuentemente el producto $\left(\frac{1}{|x|}\right).\delta$ no existe. ∎

3. **El producto modelo** $\frac{1}{|x|}.\delta'$, donde $\frac{1}{|x|} = Pf\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

   Por (3.18) se tiene

$$\frac{1}{|x|}.\delta' = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{|x|} * \varphi\right)(\delta' * \varphi) .$$

$\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ definimos

$$I_\epsilon := \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|x|} * \varphi_\epsilon\right)(y)(\delta' * \varphi_\epsilon)(y)\psi(y)dy . \tag{4.87}$$

Las convoluciones en (4.87) se consiguen de las fórmulas siguientes:

$$(\delta' * \varphi_\epsilon)(y) = \langle \delta'(z), \varphi_\epsilon(y-z)\rangle = -\varphi_\epsilon'(y) = \frac{-1}{\epsilon^2}\left(\varphi'\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\right) \tag{4.88}$$

y de (4.84). Sustituyendo (4.88) y (4.84) en (4.87) se tiene:

$$I_\epsilon = \frac{-1}{\epsilon^4}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\frac{y}{\epsilon})\psi(y)\int_{-\infty}^{\infty} \ln|y-z| sgn(y-z)\varphi'(\frac{z}{\epsilon})dzdy ,$$

que después de los cambios de variables $\zeta = \frac{z}{\epsilon}$ y $\eta = \frac{y}{\epsilon}$, toma la forma

$$I_\epsilon = \frac{-1}{\epsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\eta)\psi(\eta\epsilon)\ln|(\eta-\zeta)\epsilon| sgn(\epsilon(\eta-\zeta))\varphi'(\zeta)d\zeta d\eta . \tag{4.89}$$

Para analizar que ocurre con I_ϵ cuando $\epsilon \longrightarrow 0^+$ es conveniente utilizar nuevamente la fórmula de Taylor

$$\psi(\epsilon\eta) = \psi(0) + \epsilon\eta\psi'(0) + \epsilon^2\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta) . \tag{4.90}$$

donde $\widetilde{\psi}$ es una función suave y tomar en cuenta que $sgn(\epsilon(\eta-\zeta)) = sgn(\eta-\zeta)$. Sustituyendo (4.90) en (4.89) se obtiene:

$$I_\epsilon = -\frac{\ln|\epsilon|}{\epsilon^2}\psi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{'}(\eta)sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(I)} -$$

$$-\frac{1}{\epsilon^2}\psi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{'}(\eta)\ln|\eta-\zeta|sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(II)} -$$

$$-\frac{\ln|\epsilon|}{\epsilon}\psi^{'}(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi^{'}(\eta)sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(III)} -$$

$$-\frac{1}{\epsilon}\psi^{'}(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi^{'}(\eta)\ln|\eta-\zeta|sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(IV)} -$$

$$-\ln|\epsilon|\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta)\varphi^{'}(\eta)sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(V)} -$$

$$-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\widetilde{\psi}(\epsilon\eta)\varphi^{'}(\eta)\ln|\eta-\zeta|sgn(\eta-\zeta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta}_{(VI)} \; .$$

Luego las integrales $I,\ldots,IV$ existen y las integrales V y VI tienen límites finitos cuando $\epsilon \to 0^+$.

En particular, vemos que en el caso de la integral III ,

$$\begin{aligned} III &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\eta}\eta\varphi^{'}(\eta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\eta}^{\infty}\eta\varphi^{'}(\eta)\varphi^{'}(\zeta)d\zeta d\eta \, , \\ III &= 2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi^{'}(\eta)\varphi(\eta)d\eta}_{B} \, , \end{aligned} \tag{4.91}$$

e integrando por partes con $u = \eta\varphi(\eta)$ y $v = \varphi(\eta)$ se tiene

$$B = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\eta)d\eta \; .$$

Sustituyendo en (4.91)

$$III = -\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\eta)d\eta \; .$$

Entonces $III < 0, \quad \forall \varphi \in A_0$.

Sea $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi^{'}(0) \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
I_\epsilon &= -\frac{\ln \epsilon}{\epsilon}\psi^{'}(0)C_1 - \frac{1}{\epsilon}\psi^{'}(0)C_2 - (\ln \epsilon)C_3(\epsilon) - C_4(\epsilon) \\
I_\epsilon &= -\frac{\ln \epsilon}{\epsilon}\underbrace{\left[\psi^{'}(0)C_1 + \frac{1}{\ln \epsilon}\psi^{'}(0)C_2 + \epsilon C_3(\epsilon) + \frac{\epsilon}{\ln \epsilon}C_4(\epsilon)\right]}_{A},
\end{aligned}$$

donde $C_1, \ldots, C_4$, denotan los valores de las integrales $III, \ldots, VI$ respectivamente.

Entonces aplicando el límite a I_ϵ se tiene que $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \left(-\frac{\ln \epsilon}{\epsilon}\right) = \infty$ y

$\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} A = \psi^{'}(0)C_1$ con $C_1 \neq 0$.

Por lo tanto, I_ϵ diverge. Consecuentemente el producto $\left(\frac{1}{|x|}\right).\delta^{'}$ no existe . ■

Nota: Para el resultado anterior es importante saber que siempre es posible conseguir una función de prueba ψ talque $\psi(0) = 0$ y $\psi^{'}(0) \neq 0$. Sea $\psi(x) = x\Psi(x)$, donde $\Psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $\Psi(0) \neq 0$, entonces $\psi(x)$ cumple con las condiciones deseadas.

Capítulo 5
CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

1) Al modificar la hipótesis del teorema de Schwartz de la imposibilidad, hemos llegado a la misma conclusión que en el teorema original.

2) El producto intrínseco de dos funciones continuas en el álgebra de Colombeau está asociado al producto usual, esto es:

$$f \cdot g \approx fg \; .$$

3) En general el producto usual y distribucional de funciones localmente integrables no son iguales, ya que si por ejemplo $F = x_+^{-1/2}$ y $G = x_-^{-1/2}$ están en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, su producto usual es cero y el distribucional es $\frac{\pi\delta}{2}$. En el ejemplo 3.5.8 del capítulo III se generaliza dicho resultado.

4) Los resultados que hemos encontrado en el Caso 1, del capítulo IV comprueban los resultados dados por Fisher [2]. En particular la ecuación (4.33) es una generalización de la ecuación demostrada por Domíngues y Scarfiello.

5) En los casos 2, 3 y 4 del capítulo IV llegamos a fórmulas que relacionan otros productos de distribuciones las cuales son tediosas. Sin embargo, sería interesante seguir estudios sobre esas fórmulas.

   Un ejemplo es la ecuación (4.67):

$$\frac{1}{|\sigma|^{1/2}} . \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/2}} = \frac{1}{\sigma}$$

   el cual no se puede obtener por el Teorema 3.5.3 .

6) En la ecuación (4.65) el hecho que $\frac{1}{|\sigma|^{1/3}} \cdot \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{1/3}} = \frac{sgn(\sigma)}{|\sigma|^{2/3}}$ es consistente con el Teorema 3.5.3 (p=2,r=2) .

7) Las derivadas de las distribuciones llamadas Valores Principales se comportan como las derivadas usuales (Apéndice C).

8) En el futuro se pueden aplicar las ideas de J. F. Colombeau para modificar los conjuntos A_q para " Remover Divergencias " .

9) También haciendo uso del álgebra de Colombeau se pueden resolver los problemas acerca de la Matriz Insumo- Producto Distribucional en la Economía.

APENDICES

Apéndice A
FUNCIONES LOCALMENTE INTEGRABLES Y EL TEOREMA DE LEBESGUE

Definición A.0.1 (Función Localmente integrable)**.** *Una función f sobre* $\mathbb{R}^n$ *se dice localmente integrable si la función f es medible en el sentido de Lebesgue y la integral* $\int_K |f|dx$ *es finito para cada compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *.*
El conjunto de tales funciones es denotado por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *.*
En general definimos $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, donde* $1 \leq p < \infty$ *si f es medible y* $\int\limits_K |f|^p dx$ *es finito.*

Teorema A.0.2 (Teorema de Lebesgue)**.** *Sea* $f_k(x)$*;* $k = 1, 2, \cdots$ *una sucesión de funciones medibles en* $\mathbb{R}^n$ *que converge casi dondequiera a la función f.*
Si existe una función integrable $g(x)$ *talque* $\forall\ k = 1, 2, \cdots$

$$|f_k(x)| \leq g(x) \ \ \textit{casi dondequiera}$$

entonces las funciones f_k *y* $f(x)$ *son también integrables y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\ .$$

Nota El teorema anterior lo aplicamos en nuestro caso para una sucesión ϵ_k que converge a 0 .

Apéndice B
DISTRIBUCIONES

Definición B.0.3 (Soporte compacto). *Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces el soporte de φ es el conjunto supp(φ) $= \overline{\{x \in \mathbb{R} \ : \varphi(x) \neq 0\}}$. Si supp($\varphi$) es acotado, decimos que φ es una función de soporte compacto.*

Definición B.0.4 (Funciones de Prueba). *Una función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es de prueba si esta es infinitamente diferenciable($\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$) y tiene soporte compacto.*

El espacio de todas las funciones de prueba denotamos por $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Propiedades: Para todo $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\forall h \in C^\infty(\mathbb{R})$ se verifica:

i) $\varphi + \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

ii) $\varphi\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

iii) $a\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

iv) $h\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

Definición B.0.5 (Convergencia en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$). *Decimos que una sucesión de funciones de prueba $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, si cada φ_k se anula por fuera del intervalo acotado K y además converge uniformemente a la función cero junto con sus derivadas de cualquier orden, es decir; $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0$*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| = 0 \, .$$

Luego $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $\varphi - \varphi_k \to 0$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Definición B.0.6 (Distribución). *Una distribución ó función generalizada f es una funcional lineal continua sobre $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ que cumple:*

- $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *y* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle = a_1\langle f, \varphi_1\rangle + a_2\langle f, \varphi_2\rangle$$

y

- *Si* $\varphi_k \to 0$ *en* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ *entonces* $\langle f, \varphi_k\rangle \to 0$ *.*

El conjunto de todas las distribuciones sobre $\mathbb{R}$ *es denotado por* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *.*

Para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ le corresponde una distribución llamada regular definida por: $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

B.1. Operaciones sobre Distribuciones

1.- Adición y Multiplicación por un escalar real

Sean $f_1, f_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, \varphi\rangle = a_1\langle f_1, \varphi\rangle + a_2\langle f_2, \varphi\rangle$$

2.- El producto de una distribución por una función $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ es definida por: $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\langle hf, \varphi\rangle = \langle f, h\varphi\rangle$$

3.- Diferenciación de Distribuciones.

Sea $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, entonces la derivada de f es la distribución f' definida por:

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle \ .$$

Ejemplo B.1.1. *Sea* θ *la función localmente integrable definida por:*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Hallemos la primera derivada.

<u>*En efecto:*</u> $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle \theta^{'}, \varphi \rangle &= -\langle \theta, \varphi^{'} \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi^{'}(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi^{'}(x)dx = -\varphi(x)|_{0}^{\infty} = \varphi(0) \\ \langle \theta^{'}, \varphi \rangle &= \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto $\theta^{'} = \delta$.

Teorema B.1.2 (Teorema de Regularización de una Distribución)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $(u_j)_{1\leq j\leq \infty}$ una sucesión de distribuciones sobre X el cual tiene la siguiente propiedad: Para cada $\phi \in C^{\infty}(X)$ con soporte compacto, la sucesión $\langle u_j, \phi \rangle$ converge cuando $j \to \infty$. Entonces*

$$\phi \to \langle u, \phi \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle u_j, \phi \rangle$$

es un elemento de $\mathscr{D}^{'}(X)$.

B.2. Convolución

Definición B.2.1. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones localmente integrables en $\mathbb{R}$. Si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$ existe para todos los $x \in \mathbb{R}$ y define una función localmente integrable en $\mathbb{R}$ entonces esta se llama la convolución de las funciones f y g, y se denota por $f * g$ de modo que:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \ .$$

La convolución $f * g$ existe si:

- $f, g \in L^1_{loc}$ tal que $supp(f) \subset A$, $supp(g) \subset B$ y los conjuntos A y B son tales que para cada $R > 0$ el conjunto:

$$T_R = \{(x, y) : x \in A, y \in B, |x + y| \leq R\}$$

  es acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces $f * g \in L^1_{loc}$.

En particular si $f \in L^1_{loc}$ es una función de soporte compacto y $g \in L^1_{loc}$, entonces la convolución $f * g$ existe, [13] .

Teorema B.2.2 (Treves)**.** *[12] Sea φ una función C^∞ con soporte compacto y T una distribución en $\mathbb{R}$. Entonces la función:*

$$x \longrightarrow \langle T_y, \varphi(x-y) \rangle$$

es una función C^∞ en $\mathbb{R}$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^p \langle T_y, \varphi(x-y) \rangle = \left\langle T_y, \left(\frac{d}{dx}\right)^p \varphi(x-y) \right\rangle \quad \blacksquare$$

La notación T_y significa que la distribución T actúa sobre una función $\varphi(x-y)$ cuando esta última se considera como una función de la variable y .

Definición B.2.3 (Convolución de una función de prueba con una Distribución)**.** *La función*

$$x \longrightarrow \langle T_y, \varphi(x-y) \rangle \tag{B.1}$$

es llamada la convolución de φ y T y es denotada por $T * \varphi$ ó $\varphi * T$,[12] .

Apéndice C
DERIVADAS DE DISTRIBUCIONES ESPECIALES

- Analizemos la derivada de $Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)$ donde $N \in \mathbb{N}$ y $0 < \beta < 1$.

<u>En efecto</u>: $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tenemos:

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)^{'}, \varphi \right\rangle \;=\; -\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right), \varphi^{'} \right\rangle$$

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)^{'}, \varphi \right\rangle = \underbrace{-\int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi^{'}(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta}} dx}_{I} \underbrace{- \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx}_{II} \; . \quad \text{(C.1)}$$

Resolviendo la integral II :

$$\int_{|x|>1} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx \;=\; \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx$$

e integrando por partes con $u = \frac{1}{|x|^{N+\beta}}$ y $v = \varphi(x)$ se tiene:

$$\int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx = \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}}\Bigg|_{-\infty}^{-1} + (N+\beta)\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}} dx + \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}}\Bigg|_{1}^{\infty} + (N+\beta)\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}} dx \; .$$

Luego II queda como sigue:

$$II \;=\; \varphi(-1) - \varphi(1) + (N+\beta) \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}} dx \; . \quad \text{(C.2)}$$

Ahora resolviendo la integral I, se tiene:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi^{'}(x) - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} \right) \frac{\varphi^{'}(x) - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta}} dx$$

y luego separando convenientemente,

$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\underbrace{\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} \right) \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx}_{I_1} - \underbrace{\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} \right) \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta}} dx}_{(I_2)} \right].$$

Para I_2 tenemos:

$$\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} \right) \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta}} dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{x^k}{|x|^{N+\beta}} dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{x^k}{|x|^{N+\beta}} dx \right)$$

y haciendo la sustitución $y = -x$ obtenemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \left(\int_{\epsilon}^{1} (-1)^k y^{k-N-\beta} dy + \int_{\epsilon}^{1} x^{k-N-\beta} dy \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \left((-1)^k \frac{y^{k-N-\beta+1}}{(k-N-\beta+1)} \bigg|_{\infty}^{1} + \frac{x^{k-N-\beta+1}}{k-N-\beta+1} \bigg|_{\infty}^{1} \right) \\ I_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!(k-N-\beta+1)} (1 - \epsilon^{k-N-\beta+1})((-1)^k + 1) \end{aligned} \tag{C.3}$$

Por otro lado para I_1 se tiene:

$$I_1 = \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}} dx$$

que después de hacer integración por partes con $u = \frac{1}{|x|^{N+\beta}}$ y $v = \varphi(x)$ nos da:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left.\frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}}\right|_{-1}^{-\epsilon} + (N+\beta)\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}}dx + \left.\frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}}\right|_{\epsilon}^{1} + (N+\beta)\int_{\epsilon}^{1}\frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}}dx \\ I_1 &= \frac{\varphi(-\epsilon)-\varphi(\epsilon)}{\epsilon^{N+\beta}} - \varphi(-1) + \varphi(1) + \underbrace{(N+\beta)\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1}\right)\frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}}dx}_{(i)} \ . \end{aligned}$$

Para resolver (i), necesitamos sumar y restar $\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!} = S_N(x,\varphi)$ y esto resulta en:

$$(N+\beta)\left(\int_{-1}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{1}\right)\frac{\varphi(x) - \sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!}}{x|x|^{N+\beta}}dx + \underbrace{(N+\beta)\left(\int_{-1}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{1}\right)\frac{\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!}}{x|x|^{N+\beta}}dx}_{(ii)} \ . \quad \text{(C.4)}$$

Luego haciendo la sustitución para (ii) con $y = -x$ se tiene:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\left(\int_{\epsilon}^{1}(-1)^{k-1}y^{k-N-\beta-1}dy + \int_{\epsilon}^{1}x^{k-N-\beta-1}dx\right) = \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k-N-\beta)}(1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^{k-1}+1) \ . \end{aligned} \quad \text{(C.5)}$$

De (C.5) y (C.4), I_1 queda de la forma

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{\varphi(-\epsilon)-\varphi(\epsilon)}{\epsilon^{N+\beta}} - \varphi(-1) + \varphi(1) + (N+\beta)\int_{|x|<1}\frac{\varphi(x) - \sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!}}{x|x|^{N+\beta}}dx + \\ +(N+\beta)\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!(k-N-\beta)}(1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^{k-1}+1) \ . \end{aligned} \quad \text{(C.6)}$$

Luego I=(C.3) - (C.6) , II= (C.2). Sustituyendo en (C.1) tenemos:

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)', \varphi\right\rangle = -(N+\beta)\left\langle Pf\left(\frac{1}{x|x|^{N+\beta}}\right), \varphi\right\rangle - \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{\varphi(-\epsilon)-\varphi(\epsilon)}{\epsilon^{N+\beta}} + J_\epsilon\right) \quad \text{(C.7)}$$

donde

$$J_\epsilon = -(N+\beta)\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k-N-\beta)}(1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^{k-1}+1)+$$
$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!(k-N-\beta+1)}(1-\epsilon^{k-N-\beta+1})((-1)^{k}+1)\ . \qquad \text{(C.8)}$$

Simplificando J_ϵ se obtiene:

$$J_\epsilon \;=\; \sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^{k-1}+1)\ .$$

Entonces (C.7) queda:

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)', \varphi\right\rangle = -(N+\beta)\left\langle Pf\left(\frac{1}{x|x|^{N+\beta}}\right), \varphi\right\rangle + \sum_{k=1}^{N}\frac{((-1)^{k-1}+1)}{k!}\varphi^{(k)}(0) +$$
$$\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{\varphi(\epsilon)-\sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\epsilon^k-\varphi(-\epsilon)+\sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(-\epsilon)^k}{\epsilon^{N+\beta}}\right)}_{(iii)}\ .$$

Haciendo simplificaciones y utilizando la regla de L'Hospital se tiene que $(iii)=0$.

Por lo tanto tenemos:

$$Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)' \;=\; -(N+\beta)Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{((-1)^k-1)}{k!}\delta^{(k)}\blacksquare \qquad \text{(C.9)}$$

- Analizemos la derivada de $Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)$, donde $N\in\mathbb{N}$ y $0<\beta<1$

<u>En efecto</u>: $\forall\ \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ tenemos:

$$\left\langle Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)', \varphi\right\rangle \;=\; -\left\langle Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right), \varphi'\right\rangle$$

$$= \underbrace{-\int_{|x|<1}\frac{sgn(x)\left(\varphi'(x)-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^k}{k!}\right)}{|x|^{N+\beta}}dx}_{I}\underbrace{-\int_{|x|>1}\frac{sgn(x)\varphi'(x)}{|x|^{N+\beta}}dx}_{II}\ . \qquad \text{(C.10)}$$

Resolviendo la integral II, se tiene:

$$\int\limits_{|x|>1} \frac{sgn(x)\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}}dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{-\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}}dx$$

e integrando por partes con $u = \frac{1}{|x|^{N+\beta}}$ y $v = \varphi(x)$

$$II = \left.\frac{-\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}}\right|_{-\infty}^{-1} - (N+\beta)\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}}dx + \left.\frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}}\right|_{1}^{\infty} + (N+\beta)\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}}dx\ .$$

Luego II queda como sigue:

$$II = \ -\varphi(-1) - \varphi(1) + (N+\beta)\int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta+1}}dx\ . \tag{C.11}$$

Ahora resolviendo la integral I, se tiene:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^{+}} \left(\int\limits_{-1}^{-\epsilon} + \int\limits_{\epsilon}^{1}\right) \frac{sgn(x)\left(\varphi^{'}(x) - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^{k}}{k!}\right)}{|x|^{N+\beta}}dx$$

y luego separando convenientemente

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^{+}} \left[\underbrace{\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1}\right) \frac{sgn(x)\varphi^{'}(x)}{|x|^{N+\beta}}dx}_{I_1} - \underbrace{\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1}\right) \frac{sgn(x)\sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^{k}}{k!}}{|x|^{N+\beta}}dx}_{I_2}\right]\ .$$

Para I_2, tenemos:

$$\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1}\right) \frac{sgn(x)\sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)x^{k}}{k!}}{|x|^{N+\beta}}dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}\left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{(-x)^{k}}{|x|^{N+\beta}}dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{x^{k}}{|x|^{N+\beta}}dx\right)$$

y haciendo la sustitución $y = -x$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \left(\int_{\epsilon}^{1} (-1)^{k+1} y^{k-N-\beta} dy + \int_{\epsilon}^{1} x^{k-N-\beta} dy \right) \\
I_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} \left((-1)^{k+1} \frac{y^{k-N-\beta+1}}{(k-N-\beta+1)} \Bigg|_{\infty}^{1} + \frac{x^{k-N-\beta+1}}{k-N-\beta+1} \Bigg|_{\infty}^{1} \right) \\
I_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!(k-N-\beta+1)} (1-\epsilon^{k-N-\beta+1})((-1)^{k+1}+1) \ . \qquad \text{(C.12)}
\end{aligned}
$$

Por otro lado para I_1 se tiene:

$$
I_1 = \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{-\varphi'(x)}{|x|^{N+\beta}} dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{\varphi'(x)}{|x|^{N+\beta}} dx
$$

que después de hacer integración por partes con $u = \frac{1}{|x|^{N+\beta}}$ y $v = \varphi(x)$ nos da

$$
I_1 = \frac{-\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}} \Bigg|_{-1}^{-\epsilon} - (N+\beta) \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}} dx + \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta}} \Bigg|_{\epsilon}^{1} + (N+\beta) \int_{\epsilon}^{1} \frac{\varphi(x)}{x|x|^{N+\beta}} dx
$$

$$
I_1 = \frac{-\varphi(-\epsilon) - \varphi(\epsilon)}{\epsilon^{N+\beta}} + \varphi(-1) + \varphi(1) + \underbrace{(N+\beta) \left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} \right) \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+\beta+1}} dx}_{(i)} \ .
$$

Para resolver (i), necesitamos sumar y restar $\sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!} = S_N(x,\varphi)$ y esto resulta en:

$$
(N+\beta) \left[\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} \right) \frac{\varphi(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta+1}} dx + \underbrace{\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} \right) \frac{\sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta+1}} dx}_{(ii)} \right] \ . \qquad \text{(C.13)}
$$

Luego haciendo la sustitución para (ii) con $y = -x$ se tiene:

$$
\sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \left(\int_{\epsilon}^{1} (-1)^k y^{k-N-\beta-1} dy + \int_{\epsilon}^{1} x^{k-N-\beta-1} dx \right) =
$$

$$
= \sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k-N-\beta)} (1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^k+1) \ . \qquad \text{(C.14)}
$$

De (C.14) y (C.13), I_1 queda de la forma:

$$I_1 = \frac{-\varphi(-\epsilon)-\varphi(\epsilon)}{\epsilon^{N+\beta}} + \varphi(-1)+\varphi(1)+(N+\beta)\int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!}}{|x|^{N+\beta+1}}dx +$$

$$+(N+\beta)\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)x^k}{k!(k-N-\beta)}(1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^k+1) \tag{C.15}$$

Luego I=(C.15) - (C.12) , II= (C.11) . Sustituyendo en (C.10) tenemos:

$$\left\langle Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)', \varphi\right\rangle = -(N+\beta)\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right), \varphi\right\rangle + \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{\varphi(-\epsilon)+\varphi(\epsilon)}{\epsilon^{N+\beta}} + J_\epsilon\right) \tag{C.16}$$

donde

$$J_\epsilon = -(N+\beta)\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k-N-\beta)}(1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^k+1) +$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!(k-N-\beta+1)}(1-\epsilon^{k-N-\beta+1})((-1)^{k+1}+1)\ .$$

Simplificando J_ϵ se obtiene:

$$J_\epsilon = \sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(1-\epsilon^{k-N-\beta})((-1)^k+1)\ .$$

Entonces (C.16) toma la forma de:

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)', \varphi\right\rangle = -(N+\beta)\left\langle Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right), \varphi\right\rangle + \sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}((-1)^k+1)$$

$$+\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{\varphi(-\epsilon)-\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(-\epsilon)^k+\varphi(\epsilon)-\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(\epsilon)^k}{\epsilon^{N+\beta}}\right]}_{(iii)}\ .$$

Haciendo simplificaciones y utilizando la regla de L'Hospital se tiene que (iii)$= 0$.

Por lo tanto tenemos:

$$Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)' = -(N+\beta)Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right) + \sum_{k=0}^{N}\frac{(1+(-1)^k)}{k!}\delta^{(k)}\blacksquare \quad (C.17)$$

Nota: De manera similar se pueden obtener las derivadas de $Pf\left(\frac{1}{|x|^N}\right)$ y $Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^N}\right)$ las cuales coenciden con las fórmulas (C.9) y (C.17), cuando $\beta = 0$.

- Analizemos la derivada de $P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)$ donde $N \in \mathbb{N}$ y $0 < \beta < 1$

Por la Definición 4.1.2 tenemos:

$$P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right) = Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right) - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k+1}{(N+\beta-k-1)k!}\delta^{(k)} .$$

Derivando la expresión anterior se tiene:

$$P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)' = -(N+\beta)Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right) + \underbrace{\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k-1}{k!}\delta^{(k)} - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k+1}{(N+\beta-k-1)k!}\delta^{(k+1)}}_{(i)} . \quad (C.18)$$

En (i), hacemos la sustitución $k+1 = l$, entonces:

$$(i) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k-1}{k!}\delta^{(k)} - \sum_{l=1}^{N}\frac{1-(-1)^k}{(N+\beta-k)(k-1)!}$$

Por que el primer término de la primera sumatoria es cero, entonces tenemos:

$$(i) = -(N+\beta)\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k-1}{(N+\beta-k)k!}\delta^{(k)} .$$

Sustituyendo en (C.18)

$$P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)' = -(N+\beta)Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right) - (N+\beta)\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k-1}{(N+\beta-k)k!}\delta^{(k)} \quad (C.19)$$

Por la Definición 4.1.2, (4.5),

$$P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right) = Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right) + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k - 1}{(N+\beta-k)k!}\delta^{(k)} .$$

Entonces de (C.19) y lo anterior podemos concluir que

$$P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta}}\right)' = -(N+\beta)P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta+1}}\right) \blacksquare \tag{C.20}$$

- Analizemos la derivada de $P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)$ donde $N \in \mathbb{N}$ y $0 < \beta < 1$

Por la Definición 4.1.2 tenemos:

$$P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right) = Pf\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1} + 1}{(N+\beta-k-1)k!}\delta^{(k)} .$$

Luego derivando tenemos:

$$P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)' = -(N+\beta)Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right) +$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{1+(-1)^k}{k!}\delta^{(k)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1} + 1}{(N+\beta-k-1)k!}\delta^{(k+1)}}_{(i)} . \tag{C.21}$$

En (i), haciendo la sustitución $k+1 = l$ se tiene:

$$(i) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1+(-1)^k}{k!}\delta^{(k)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k + 1}{(N+\beta-k)(k-1)!}\delta^{(l)}$$

que se puede reescribir en la siguiente forma

$$(i) = -(N+\beta)\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k + 1}{(N+\beta-k)k!}\delta^{(k)} .$$

Sustituyendo en (C.21)

$$P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)' = -(N+\beta)Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right) - (N+\beta)\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k + 1}{(N+\beta-k)k!}\delta^{(k)} \tag{C.22}$$

Por la Definición 4.1.2, (4.6), se tiene:

$$P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right) = Pf\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right) + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k + 1}{(N+\beta-k)k!}\delta^{(k)}\ .$$

Luego de (C.21) y lo anterior podemos concluir

$$P\left(\frac{sgn(x)}{|x|^{N+\beta}}\right)' \quad = \quad -(N+\beta)P\left(\frac{1}{|x|^{N+\beta+1}}\right)\blacksquare \tag{C.23}$$

Bibliografía

[1] J.F. Colombeau. *New Generalized Functions and Multiplications of Distributions.* New York, second edition, 1984.

[2] B. Fisher. Products of generalized functions. *Studia mathematica*, XXXIII:227–230, May 1969.

[3] A. Kamiński. On the exchange fórmula. *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences*, XXVI, No.1:19–24, May 1977.

[4] A. Kamiński. On convolutions, products and Fourier transforms of distributions. *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences*, XXV, No.4:369–374, October 1977.

[5] H. *König*. Multiplikation von distributionen. *Math. Ann.*, I,128:420–452, 1955.

[6] J. Mikusiński. Sur la méthode de généralisation de M.Laurent Schwartz sur la convergence faible. *Fund.Math.*, 35:235–239, 1948.

[7] J. Mikusiński. Irregular operations on distributions. *Studia Math.*, 20:163–169, 1961.

[8] J. Mikusiński. Criteria of the existence and the associativity of the product of distributions. *Studia Math.*, 21:253–259, 1962.

[9] M. Oberguggenberger. *Multiplications of Distributions and applications to Partial Differential Equations.* Longman Group UK, Great Britain, second edition, 1992.

[10] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 2 vols edition, 1950,1951.

[11] S.L. Sobolev. Méthodes nouvelle *à* resoudre le probème de Cauchy pour les équations linéaires hiperboliques normales. *Math. Sb.*, 1:39–72, 1935.

[12] F. Treves. *Topological Vector Spaces , Distributions and Kernels.* Academic Press-New York, London, first edition, 1967.

[13] V.S. Vladimirov. *Methods of the Theory of Generalized Functions.* Academic Press London - New York, second edition, 2002.

[14] M.Ñedeljkov S. Pilipović y D. Scarpalézos. *The linear theory of Colombeau generalized functions.* Longman, Great Britain, first edition edition, 1998.

[15] I.M. Gel'fand y G.E. Shilov. *Generalized Functions and Partial Differential Equations.* Academic Press . New York, volume 1 edition, 1964.

[16] Y. Hirata y H. Ogata. On the exchange formula for distributions. *J.Sci.Hiroshima Univ.Ser.A*, 22:147–152, 1958.

[17] F.G. Friedlander y M. Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions.* Cambridge University Press, second edition, 1998.

[18] P. Antosik J. Mikusiński y R. Sikorski. *Theory of Distributions, the Sequential Approach.* American Elsevier- Amsterdam, first edition, 1973.

[19] A. Gonzalez-Domingues y R.Scarfiello. Nota sobre la fórmula $p\left(\frac{1}{x}\right)\delta = -\frac{1}{2}\delta'$. *Rev.Un.Mat. Argentina*, 1:53–67, 1956.

ÁLGEBRAS DE COLOMBEAU Y MULTIPLICACIÓN DE DISTRIBUCIONES

Roxana Auccahuallpa Fernández
(787) 951-0596
Departamento de Ciencias Matemáticas
Consejero: Krzysztof Rózga
Grado: Maestría en Ciencias
Fecha de Graduacion: Junio 2008

Este es el resumen para la audiencia general.

En este trabajo se discute el problema del multiplicar distribuciones. Se presenta el resultado de imposibilidad de Schwartz, el cual fue el motivo para verificar ciertos productos modelos.

Además se da varias definiciones del producto de distribuciones.

Se da la construcción de un álgebra en $\mathbb{R}$, dado por Colombeau y la relación entre el producto en este álgebra y otros productos modelos.

Se aclara sobre los productos distribucionales de funciones relacionadas a funciones localmente integrables este es un caso particular, basándose en los teoremas conocidos en la literatura.

Luego utilizando los métodos de transformada de Fourier se obtiene fórmulas generales que relacionan los productos de distribuciones especiales llamadas Valores Principales, deltas de Dirac y sus derivadas.